Решени изпитни теми по Висша Математика III за Технически Университет — София

Николай Икономов

9 януари 2011 г.

Съдържание

Темите са взети от форума на ТУ–София (линк) и от студенти. Научните степени на преподавателите са взети от сайта на ФПМИ (линк). За контакти: nike32@abv.bg

- Първа до четвърта тема (доц. д-р В. Касчиева, 2009, 2010)
- Пета до осма тема (доц. д-р Л. Гърневска, 2010)

Означения: тангенс $\tan(x)$, котангенс $\cot(x)$, аркус тангенс $\arctan(x)$.

Указател

Задачите по категории. Задачите са решени в реда в който са категориите.

- Теория на вероятностите
  - Условна вероятност — 1-4+теория, 2-2, 3-6
  - Дискретна случайна величина — 1-6+теория, 3-5, 4-6
  - Непрекъсната случайна величина — 2-5+теория
- Комплексен анализ
  - Уравнения на Коши-Риман — 1-1+теория, 2-3, 4-2, 4-8, (3-2)
  - Резидууми (Residues) — 1-2+теория, 2-4, 3-1, 4-3, 4-9
- Векторен анализ (нерешени) — 4-1, 5-1
- Интегрални уравнения (нерешени) — 1-3, 2-1, 3-4, 4-4, 4-5
- Ред на Фурие (нерешени) — 3-3, 4-7

Задачите по теми. Задачите в скоби не са решени.

- Първа тема — 1, 2, 4, {5}, 6
- Втора тема — 2, 3, 4, 5, {6}
- Трета тема — 1, 2, 5, 6
- Четвърта тема — 2, 3, 6, 8, 9
- Пета тема
- Шеста тема
- Седма тема
- Осма тема

1 Първа тема

Задача 1. С помощта на условията на Коши-Риман, да се намери аналитична функция, за която $u(x,y) = 2xy + e^x \sin(y)$, $f(0) = 0$.

Задача 2. Да се пресметне интегралът

$$\int\limits_{|z-2|=4} \frac{e^{2z}}{z^2(z-2)} dz.$$

Задача 3. Чрез трансформацията на Лаплас, решете задачата на Коши

$$y'' + 9y = 6\sin(2x),\ y(0) = y'(0) = -3.$$

Задача 4. От урна с 4 бели и 3 черни топки е изгубена една случайна топка. След това от урната се вади една топка.
а) Намерете вероятността извадената топка да е бяла.
б) Ако извадената е бяла, намерете вероятността изгубената топка да е била бяла.

Задача 5. Теорема и неравенство на Чебишев.

Задача 6. Случайната величина X има разпределение:

X	-1	0	1	2	3
P	c	$2c$	$2c$	c	c

Намерете: c, EX, DX, $P(0 < X \leq 2)$, $F(x)$ и начертайте графиката на $F(x)$.

Всяка задача е по 10 точки.

Задача 4. От урна с 4 бели и 3 черни топки е изгубена една случайна топка. След това от урната се вади една топка.

а) Намерете вероятността извадената топка да е бяла.

б) Ако извадената е бяла, намерете вероятността изгубената топка да е била бяла.

Решение. Условна вероятност. Вероятността за случване на събитието A при условие събитието B вече да се е случило:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},\ P(B) > 0$$

Свойства:

$$\begin{aligned} &P(A \cup B) = P(A) + P(B),\ A \cap B = \varnothing \text{ (несъвместими)} \\ &P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),\ A \cap B \neq \varnothing \text{ (съвместими)} \\ &P(A \cap B) = P(A)P(B),\ A, B \text{ — независими} \iff P(A/B) = P(A) \\ &P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B),\ A, B \text{ — зависими} \end{aligned}$$

Сумата от вероятностите на случайните събития H_i е единица:

$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$$

Вероятностите $P(H_i)$ се наричат априорни (преди опита) вероятности. (Още се наричат хипотези.)

Формула за пълната вероятност. Ако $H_1, H_2, \ldots, H_n$ е пълна група от две по две несъвместими събития и случайното събитие A се сбъдва само заедно с някое от тях, то:

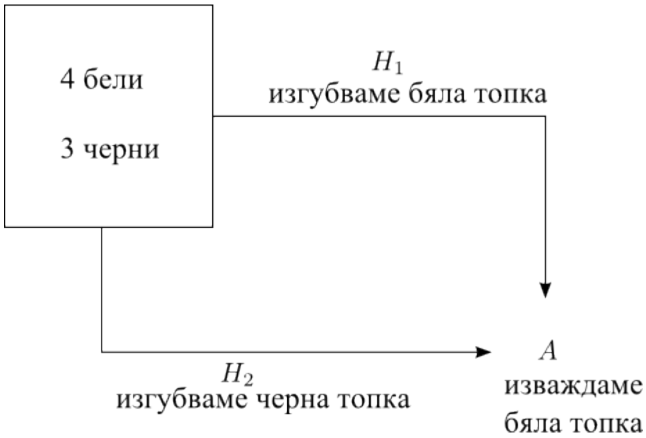
$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$$

Това е основната формула за намиране на вероятността събитието A да се случи. Тази формула е по-кратък запис на първото свойство — обединение на две несъвместими събития.

Формула на Бейс. Ако $P(A)$ е както в предишната формула, то:

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)}$$

Тази формула се използва за преоценяване на вероятностите, което е възможно само ако събитието A вече се е случило. Вероятностите $P(H_k/A)$ се наричат апостеорни (след опита) вероятности.



Да се върнем към задачата. Нека H_1 е събитието изгубената топка да е бяла, а H_2 — изгубената топка да е черна. Белите топки са 4, всички топки са 7, вероятността да изгубим бяла топка е 4/7:

$$P(H_1) = \frac{4}{7},\ P(H_2) = \frac{3}{7},\ \sum_{i=1}^{2} P(H_i) = 1$$

Вероятността да изгубим черна топка е 3/7, тъй като черните топки са 3. Сумата на двете вероятности е единица (имаме само две събития).

Сега искаме да извадим бяла топка. Нека да отбелжим събитието “изваждане на бяла топка” с A. Но това събитие се случва само ако H_1 или H_2 вече са се случили. Тоест това е условна вероятност. Вероятността да извадим бяла топка след като сме изгубили бяла се бележи с $P(A/H_1)$ — извадили сме бяла само след като събитието “изгубване на бяла топка” се е случило.

Но ние вече сме изгубили бяла топка, тоест топките в кутията са 3 бели и 3 черни. Тогава вероятността да извадим бяла топка е:

$$P(A/H_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Нека сега да сме изгубили черна топка. Тогава в кутията имаме 4 бели и 2 черни. Вероятността да извадим бяла топка е:

$$P(A/H_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Събитията са несъвместими, единия път изгубваме бяла, другия път изгубваме черна като започваме отначало — всички топки са налични. Тоест можем да приложим формулата за условна вероятност:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$$

Вероятността да извадим бяла топка е 4/7:

$$P(A) = \frac{4}{7}$$

Сега втора подточка. Тук се използва формулата на Бейс — тя преоценява вероятностите. Събитието A вече се е случило — извадили сме бяла топка, искаме след опита да изчислим вероятността изгубената топка да е била бяла — това е събитието H_1. Тогава:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{4/7 \cdot 1/2}{4/7} = \frac{1}{2}$$

Нека да изчислим вероятността изгубената топка да е била черна:

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{3/7 \cdot 2/3}{4/7} = \frac{1}{2}$$

Сумата от двете събития трябва да е единица, което е така.

Отговор: $P(A) = 4/7$, $P(H_1/A) = 1/2$. □

Задача 6. Случайната величина X има разпределение:

X	-1	0	1	2	3
P	c	$2c$	$2c$	c	c

Намерете: c, EX, DX, $P(0 < X \leq 2)$, $F(x)$ и начертайте графиката на $F(x)$.

Решение. Дискретна случайна величина.

X	x_1	x_2	x_3	x_4	$\dots$	x_n
$P(x_i)$	p_1	p_2	p_3	p_4	$\dots$	p_n

Случайната величина X се нарича дискретна, ако приема краен брой стойности. Зависимостта между стойностите на случайната величина x_i и вероятностите p_i се нарича закон за разпределение:

$$P(X = x_i) = p_i$$

Сумата от всички вероятности е единица:

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Математическото очакване (средна стойност) е сумата от произведението на случайната величина с нейната вероятност:

$$EX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Дисперсията е мярка за отклонение на математическото очакване. Изразява се със следната формула:

$$DX = E(X - EX)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - EX)^2 p_i$$

$$DX = E(X - EX)^2 = E(X^2 - 2XEX + (EX)^2) =$$
$$= EX^2 - 2EXEX + (EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$$

Записано най-кратко:

$$DX = EX^2 - (EX)^2,\ EX^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$$

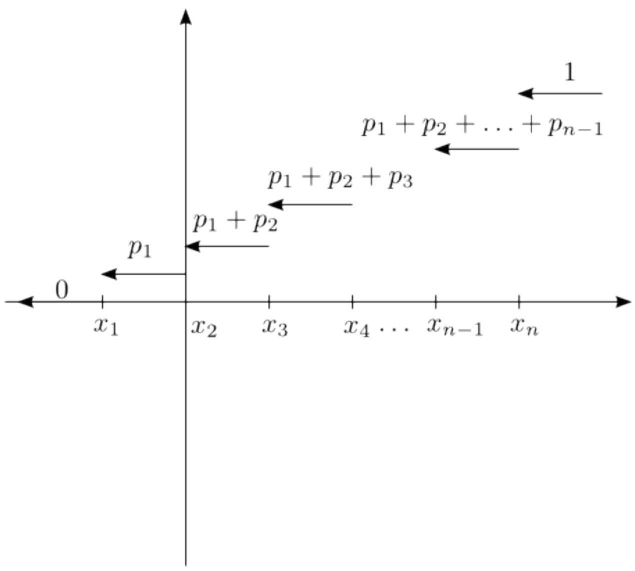
Функция на разпределение $F(X)$ се изчислява по следната формула:

$$F(X) = \sum_{i, x_i < X} p_i$$

Това означава, че всички стойности се събират, започвайки отляво. Ето така:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < x_1, \\ p_1 & x_1 \le X \le x_2, \\ p_1 + p_2 & x_2 \le X \le x_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 & x_3 \le X \le x_4 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 & x_4 \le X \le x_5 \\ \dots & \dots \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1 & x_n \le X \end{cases}$$

Големият X показва нашата позиция в момента. Тоест, когато сме отляво на най-ниската стойност в нашата таблица x_1, разпределението $F(X)$ е нула, когато сме отдясно на най-високата стойност x_n, разпределението $F(X)$ е единица.



Едно от свойствата на функцията на разпределение $F(X)$ е:

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$$

Ще го използваме за да решим докрай задачата.

Нека да се върнем към задачата.

X	-1	0	1	2	3
P	c	$2c$	$2c$	c	c

Първо трябва да намерим c. Сумата от всички вероятности е единица:

$$c + 2c + 2c + c + c = 1 \implies 7c = 1 \implies c = \frac{1}{7}$$

Тогава таблицата става:

X	-1	0	1	2	3
P	$1/7$	$2/7$	$2/7$	$1/7$	$1/7$

Намираме математическото очакване:

$$EX = \sum_{i=1}^{5} x_i p_i = -1 \cdot \frac{1}{7} + 0 \cdot \frac{2}{7} + 1 \cdot \frac{2}{7} + 2 \cdot \frac{1}{7} + 3 \cdot \frac{1}{7} = -\frac{1}{7} + \frac{4}{7} + \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$$

Сега математическото очакване за X^2:

$$EX^2 = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 p_i = 1 \cdot \frac{1}{7} + 0 \cdot \frac{2}{7} + 1 \cdot \frac{2}{7} + 4 \cdot \frac{1}{7} + 9 \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{7} + \frac{9}{7} = \frac{16}{7}$$

Дисперсията:

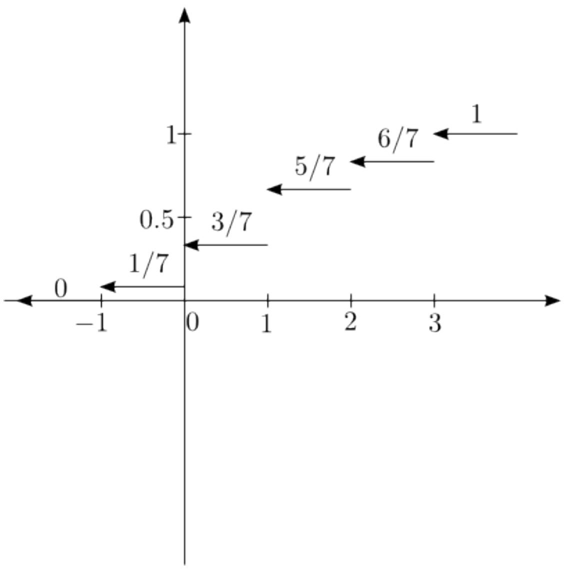
$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{16}{7} - \left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{7 \cdot 16}{49} - \frac{36}{49} = \frac{76}{49}$$

Таблицата отново:

X	-1	0	1	2	3
P	$1/7$	$2/7$	$2/7$	$1/7$	$1/7$

Функията на разпределение $F(X)$:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < -1, \\ 1/7 & -1 \le X \le 0, \\ 1/7 + 2/7 = 3/7 & 0 \le X \le 1 \\ 1/7 + 2/7 + 2/7 = 5/7 & 1 \le X \le 2 \\ 1/7 + 2/7 + 2/7 + 1/7 = 6/7 & 2 \le X \le 3 \\ 1/7 + 2/7 + 2/7 + 1/7 + 1/7 = 1 & 3 \le X \end{cases}$$



Сега се търси вероятността X да е между нула и две:

$$P(0 < X \leq 2) = F(2) - F(0)$$

Имаме X по-голямо от нула, което е 3/7, и по-малко от две, което е 5/7:

$$P(0 < X \leq 2) = F(2) - F(0) = \frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2}{7}$$

Отговор: $c = 1/7$, $EX = 6/7$, $DX = 76/49$, $P(0 < X < 2) = 2/7$. □

Задача 1. С помощта на условията на Коши-Риман, да се намери аналитична функция, за която $u(x, y) = 2xy + e^x \sin(y)$, $f(0) = 0$.

Решение. Нека да имаме комплексно число $z = x + iy$, комплексна аналитична функция $f(z)$, реални функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$. Тогава комплексната функция $f(z)$ е равна на:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

За нея важат уравненията на Коши-Риман:

$$\left| \begin{array}{l} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{array} \right.$$

Като имаме дадена едната реална функция, например $u(x, y)$, чрез първите ѝ частни производни можем да намерим другата реална функция $v(x, y)$. Тогава $v(x, y)$ ще има вида:

$$v(x, y) = C(x, y) + C(x) + C(y) + C$$

Ще получим функция на x и y, функция само на x и функция само на y. Добавяме и константа.

Нека да видим как точно. Имаме дадена функцията $u(x, y)$:

$$u(x, y) = 2xy + e^x \sin(y)$$

Диференцираме функцията $u(x, y)$ по x:

$$u'_x = 2y + e^x \sin(y) \Longrightarrow v'_y = 2y + e^x \sin(y)$$

Производните са равни заради уравненията на Коши-Риман. Сега интегрираме функцията $v(x, y)$ по y:

$$v(x, y) = \int [2y + e^x \sin(y)]dy = y^2 - e^x \cos(y) + C(x) \tag{1}$$

Добавяме функция само по x (която трябва да намерим), тъй като интегрирахме по y.

Сега диференцираме функцията $u(x, y)$ по y:

$$u'_y = 2x + e^x \cos(y) \Longrightarrow v'_x = -[2x + e^x \cos(y)]$$

Интегрираме функцията $v(x, y)$ по x:

$$v(x, y) = -\int [2x + e^x \cos(y)]dx = -[x^2 + e^x \cos(y)] = -x^2 - e^x \cos(y) + C(y) \tag{2}$$

Сега добавяме функция само по y, тъй като интегрирахме по x.

Както се вижда имаме два резултата (1) и (2) за $v(x, y)$, които трябва да са равни. Приравняваме ги:

$$y^2 - e^x \cos(y) + C(x) = -x^2 - e^x \cos(y) + C(y)$$

$$y^2 + C(x) = -x^2 + C(y)$$

И записваме отделните функции:

$$C(x, y) = -e^x \cos(y),\ C(x) = -x^2,\ C(y) = y^2$$

Тогава търсената функция $v(x, y)$ е:

$$v(x, y) = y^2 - x^2 - e^x \cos(y) + C$$

Функцията $f(z)$ е:

$$f(z) = 2xy + e^x \sin(y) + i(y^2 - x^2 - e^x \cos(y) + C)$$

Трябва да намерим константата. Затова е условието $f(0) = 0$. Намираме стойността на функцията при $z = 0$, тоест $x = 0$ и $y = 0$:

$$f(0) = 0 + e^0.0 + i(0 - 0 - e^0.1 + C) = i(-1 + C) = Ci - i$$

Сега приравняваме на нула:

$$Ci - i = 0 \Longrightarrow Ci = i \Longrightarrow C = 1$$

Функцията $f(z)$:

$$f(z) = 2xy + e^x \sin(y) + i(y^2 - x^2 - e^x \cos(y) + 1)$$

Отговор: $v(x, y) = y^2 - x^2 - e^x \cos(y) + 1$. □

Задача 2. Да се пресметне интегралът

$$\int\limits_{|z-2|=4} \frac{e^{2z}}{z^2(z-2)} dz.$$

Решение. Нулирането на знаменателя в определена точка се нарича полюс от кратност m. Кратността на полюса е разликата от кратността на знаменателя и кратността на числителя.

Изчисляването на контурен интеграл около полюс се нарича резидуум. Стойността на дадения интеграл е сумата от резидуумите:

$$I = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res} z_i$$

Формулата за резидуум от m кратен полюс (това е граница от $m-1$ производна на $(z - z_0)f(z)$):

$$\operatorname{Res} z_0 = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^m f(z)\right]^{(m-1)}$$

Формулата за еднократен полюс:

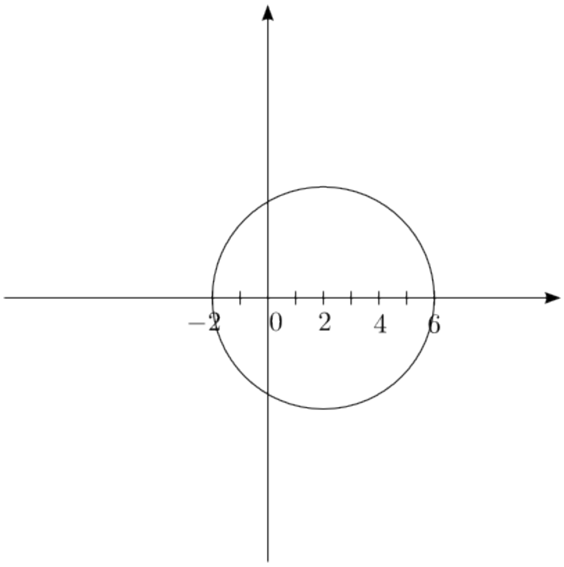
$$\operatorname{Res} z_0 = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

Нека да се върнем към задачата. Подинтегралната функция е:

$$\frac{e^{2z}}{z^2(z-2)}$$

Нулите на знаменателя са 0 и 2, числителя няма нули (e^{2z} е винаги положителна). Тогава имаме двукратен полюс в $z = 0$ и еднократен полюс в $z = 2$. Условието е:

$$\int\limits_{|z-2|=4} \frac{e^{2z}}{z^2(z-2)} dz$$



Интегрираме върху окръжност с център 2 и радиус 4. И двата полюса са вътре в окръжността. Тогава стойността на интеграла е:

$$I = 2\pi i(\operatorname{Res} 0 + \operatorname{Res} 2)$$

Нека да изчислим еднократния полюс в $z = 2$:

$$\operatorname{Res} 2 = \lim_{z\to 2}(z-2)\frac{e^{2z}}{z^2(z-2)} = \lim_{z\to 2}\frac{e^{2z}}{z^2} = \frac{e^4}{4}$$

Сега двукратния полюс в $z = 0$:

$$\operatorname{Res} 0 = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\left[(z-0)^2\frac{e^{2z}}{z^2(z-2)}\right]^{(2-1)} = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\left[z^2\frac{e^{2z}}{z^2(z-2)}\right]^{(1)} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left[\frac{e^{2z}}{z-2}\right]' = \lim_{z\to 0}\frac{2e^{2z}(z-2) - e^{2z}.1}{(z-2)^2} = \lim_{z\to 0}\frac{e^{2z}(2z-4-1)}{(z-2)^2} = \frac{-5}{4}$$

Стойността на интеграла е:

$$I = 2\pi i\left[\frac{e^4}{4} - \frac{5}{4}\right] = \frac{\pi i}{2}(e^4 - 5)$$

Отговор: $(e^4 - 5)\pi i/2$. □

2 Втора тема

Задача 1. С методите на операционното смятане решете интегралното уравнение

$$x(t) = t + 2\int_0^t \cos(t-\tau)x(\tau)d\tau.$$

Задача 2. Имаме две еднакви на външен вид кутии. В първата има 4 бели и 6 черни топки, във втората — 7 бели и 5 черни топки.

а) Каква е вероятността да извадим бяла топка от произволна кутия?

б) Извадена е бяла топка от случайно избрана кутия. Каква е вероятността взетата бяла топка да е от втората кутия?

Задача 3. Намерете аналитичната функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, ако $v(x,y) = 3xy + e^x\cos(y)$ и $f(0) = i$.

Задача 4. Решете интеграла

$$\oint\limits_{|z-i|=1,5} \frac{z+1}{z(z^2+1)^2}dz.$$

Задача 5. Дадена е случайната величина X с плътност на разпределение

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-ax}, & x \geq 0,\ a > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Намерете параметъра a и математическото очакване EX.

Задача 6. Доказателство на основната теорема на Коши и на теоремата на Коши за многосвързана област.

Всяка задача е по 10 точки.

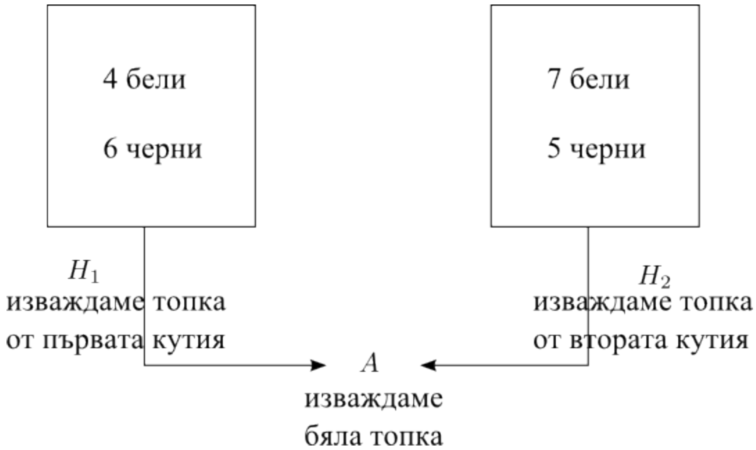
Задача 2. Имаме две еднакви на външен вид кутии. В първата има 4 бели и 6 черни топки, във втората — 7 бели и 5 черни топки.

а) Каква е вероятността да извадим бяла топка от произволна кутия?

б) Извадена е бяла топка от случайно избрана кутия. Каква е вероятността взетата бяла топка да е от втората кутия?

Решение. Нека да отбележим изваждането на бяла топка от първата кутия с H_1, а от втората кутия с H_2. Имаме две събития, всяко с вероятност да се случи 1/2, сборът им е единица:

$$P(H_1) = \frac{1}{2},\ P(H_2) = \frac{1}{2},\ \sum_{i=1}^{2} P(H_i) = 1$$



Нека да отблежим събитието "изваждане на бяла топка" с A. Събитието се случва само ако едно от събитията H_1 или H_2 вече се е случило. Нека да извадим топка от пърата кутия, белите топки са 4, всичките топки са 10:

$$P(A/H_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Нека сега да извадим топка от втората кутия, белите топки са 7, всичките са 12:

$$P(A/H_2) = \frac{7}{12}$$

Двете събития са несъвместими — можем да извадим топка или от първата кутия или от втората кутия, като всеки път започваме отначало. Следователно можем да приложим формулата за пълната вероятност:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{12} =$$
$$= \frac{1}{5} + \frac{7}{24} = \frac{24}{120} + \frac{35}{120} = \frac{59}{120}$$

Сега втора подточка. Прилагаме формулата на Бейс за да изчислим вероятността да сме извадили бялата топка от втората кутия:

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{1/2 \cdot 7/12}{59/120} = \frac{7}{24} \cdot \frac{120}{59} = \frac{35}{59}$$

Да изчислим и вероятността да сме извадили бяла топка от първата кутия, сбора на двете вероятности трябва да е единица:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{1/2 \cdot 2/5}{59/120} = \frac{1}{5} \cdot \frac{120}{59} = \frac{24}{59}$$

Отговор: $P(A) = 59/120$, $P(H_2/A) = 35/59$. □

Задача 5. Дадена е случайната величина X с плътност на разпределение

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-ax}, & x \geq 0,\ a > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Намерете параметъра a и математическото очакване EX.

Решение. Непрекъсната случайна величина. Случайната величина X и нейната функция на разпределение $F(X)$ са непрекъснати, ако съществува $f(x) \geq 0$, $f(x)$ интегруема в $(-\infty, \infty)$ за всяко реално x, така че:

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Функцията $f(x)$ се нарича плътност на разпределение.

Нормиращо свойство (аналог на сумата от всички вероятности при дискретна случайна величина):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Това свойство е за намиране на стойностите на вероятността:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Математическото очакване е:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Дисперсията е по същата формула:

$$DX = E(X - EX)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x)dx$$

$$\begin{aligned} DX &= E(X-EX)^2 = E(X^2 - 2XEX + (EX)^2) = \\ &= EX^2 - 2EXEX + (EX)^2 = EX^2 - (EX)^2 \end{aligned}$$

Записано най-кратко:

$$DX = EX^2 - (EX)^2,\ EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$$

Нека да се върнем към задачата. Трябва да намерим параметъра a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \implies \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\infty} xe^{-ax}dx = 1$$

Първият интеграл е нула. Вторият е несобствен, пресмята се така:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} xe^{-ax}dx &= \lim_{N\to\infty}\int_0^N xe^{-ax}dx = \lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{a}\int_0^N xe^{-ax}d(-ax)\right] = \\ &= -\frac{1}{a}\lim_{N\to\infty}\left[\int_0^N xd(e^{-ax})\right] = -\frac{1}{a}\lim_{N\to\infty}\left[xe^{-ax}|_0^N - \int_0^N e^{-ax}dx\right] \end{aligned}$$

Интегрирахме по-части, $-1/a$ излезе отпред (не зависи от x).

$$\begin{aligned} -\frac{1}{a}\lim_{N\to\infty}\left[xe^{-ax}|_0^N - \int_0^N e^{-ax}dx\right] &= -\frac{1}{a}\lim_{N\to\infty}\left[Ne^{-aN} - 0e^{-a0} - \int_0^N e^{-ax}dx\right] = \\ &= -\frac{1}{a}\left[\lim_{N\to\infty} Ne^{-aN} - \lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-ax}dx\right] \end{aligned}$$

Нека да погледнем лявата граница:

$$\lim_{N\to\infty} Ne^{-aN} = [\infty.e^{-\infty}] = [\infty.0]$$

Това е неопределеност, трябва да я преобразуваме в безкрайност върху безкрайност или нула върху нула, за да приложим правилото на Лопитал.

$$\lim_{N\to\infty} Ne^{-aN} = \lim_{N\to\infty}\frac{N}{e^{aN}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Прилагаме правилото на Лопитал — диференцираме поотделно числителя и знаменателя:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{N}{e^{aN}} \Longrightarrow \lim_{N\to\infty}\frac{1}{ae^{aN}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Нека да отблежим, че $e^{-\infty}\to 0$, $e^{\infty}\to\infty$ (вижда се и на графиката на e^x).

Обратно към интеграла:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{a}\left[0 - \lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-ax}dx\right] &= \frac{1}{a}\lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-ax}dx = -\frac{1}{a^2}\lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-ax}d(-ax) = \\ &= -\frac{1}{a^2}\lim_{N\to\infty} e^{-ax}|_0^N = -\frac{1}{a^2}\left[\lim_{N\to\infty} e^{-aN} - \lim_{N\to\infty} e^{-a0}\right] = -\frac{1}{a^2}[0-1] = \frac{1}{a^2} \end{aligned}$$

Интегралът е равен на единица:

$$\int_0^\infty xe^{-ax}dx = 1 \implies \frac{1}{a^2} = 1 \implies a = \pm 1$$

По условие $a > 0$, тогава $a = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Сега математическото очакване:

$$EX = \int_{-\infty}^\infty xf(x)dx = \int_{-\infty}^0 x0dx + \int_0^\infty x(xe^{-x})dx = \int_0^\infty x^2e^{-x}dx$$

Интегралът се решава чрез интегриране по части.

$$\int_0^\infty x^2e^{-x}dx = -\lim_{N\to\infty}\int_0^N x^2e^{-x}d(-x) = -\lim_{N\to\infty}\int_0^N x^2d(e^{-x}) =$$
$$= -\lim_{N\to\infty}\left[x^2e^{-x}|_0^N - \int_0^N e^{-x}d(x^2)\right] =$$
$$= -\lim_{N\to\infty}\left[N^2e^{-N} - 0^2e^{-0} - \int_0^N 2xe^{-x}dx\right]$$

Нека да разгледаме лявата граница:

$$\lim_{N\to\infty} N^2e^{-N} = \lim_{N\to\infty}\frac{N^2}{e^N} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Това е неопределена форма, можем да приложим правилото на Лопитал:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{N^2}{e^N} \Longrightarrow \lim_{N\to\infty}\frac{2N}{e^N} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Пак неопределена форма, прилагаме правилото още веднъж:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{2N}{e^N} \Longrightarrow \lim_{N\to\infty}\frac{2}{e^N} = \frac{2}{\infty} = 0$$

Първите две събираеми са нула, остава само интеграла:

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^N 2xe^{-x}dx = -2\lim_{N\to\infty}\int_0^N xe^{-x}d(-x) = -2\lim_{N\to\infty}\int_0^N xde^{-x} =$$
$$= -2\lim_{N\to\infty}\left[xe^{-x}|_0^N - \int_0^N e^{-x}dx\right] =$$
$$= -2\lim_{N\to\infty}\left[Ne^{-N} - 0e^{-0} - \int_0^N e^{-x}dx\right]$$

Пак разглеждаме лявата граница и прилагаме правилото на Лопитал:

$$\lim_{N\to\infty} Ne^{-N} = \lim_{N\to\infty} \frac{N}{e^N} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \Longrightarrow \lim_{N\to\infty} \frac{1}{e^N} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Първите две събираеми са нула, пак остава само интеграла:

$$2\lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-x}dx = -2\lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-x}d(-x) = -2\lim_{N\to\infty} e^{-x}|_0^N =$$
$$= -2\lim_{N\to\infty}\left[e^{-N} - e^{-0}\right] = -2\left[\lim_{N\to\infty} e^{-N} - 1\right] = -2[0-1] = 2$$

Отговор: $a = 1$, $EX = 2$. □

Задача 3. Намерете аналитичната функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, ако $v(x,y) = 3xy + e^x\cos(y)$ и $f(0) = i$.

Решение. Уравненията на Коши-Риман:

$$\left|\begin{array}{l} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{array}\right.$$

Имаме дадена функцията $v(x,y)$:

$$v(x,y) = 3xy + e^x\cos(y)$$

Диференцираме $v(x,y)$ по x:

$$v'_x = 3y + e^x\cos(y) \Longrightarrow u'_y = -[3y + e^x\cos(y)]$$

Интегрираме $u(x,y)$ по y:

$$u(x,y) = -\int[3y + e^x\cos(y)]dy = -\left[\frac{3}{2}y^2 + e^x\sin(y)\right] = -\frac{3}{2}y^2 - e^x\sin(y) + C(x) \quad (3)$$

Сега диференцираме $v(x,y)$ по y:

$$v'_y = 3x - e^x\sin(y) \Longrightarrow u'_x = 3x - e^x\sin(y)$$

Интегрираме $u(x,y)$ по x:

$$u(x,y) = \int[3x - e^x\sin(y)]dx = \frac{3}{2}x^2 - e^x\sin(y) + C(y) \quad (4)$$

Приравняваме функциите от (3) и (4):

$$-\frac{3}{2}y^2 - e^x\sin(y) + C(x) = \frac{3}{2}x^2 - e^x\sin(y) + C(y)$$

$$-\frac{3}{2}y^2 + C(x) = \frac{3}{2}x^2 + C(y)$$

Записваме отделните функции:

$$C(x,y) = -e^x \sin(y),\ C(x) = \frac{3}{2}x^2,\ C(y) = -\frac{3}{2}y^2$$

Тогава функцията $u(x,y)$ е:

$$u(x,y) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 - e^x \sin(y) + C$$

Функцията $f(z)$ е:

$$f(z) = \frac{3}{2}(x^2 - y^2) - e^x \sin(y) + C + i(3xy + e^x \cos(y))$$

Трябва да намерим константата. Ще използваме условието $f(0) = i$:

$$f(0) = \frac{3}{2}(0-0) - e^0.0 + C + i(0 + e^0.1) = C + i(0+1) = C + i$$

Приравняваме на i:

$$C + i = i \Longrightarrow C = 0$$

Функцията $f(z)$:

$$f(z) = \frac{3}{2}(x^2 - y^2) - e^x \sin(y) + i(3xy + e^x \cos(y))$$

Отговор: $u(x,y) = 3/2(x^2 - y^2) - e^x \sin(y)$. □

Задача 4. Решете интеграла

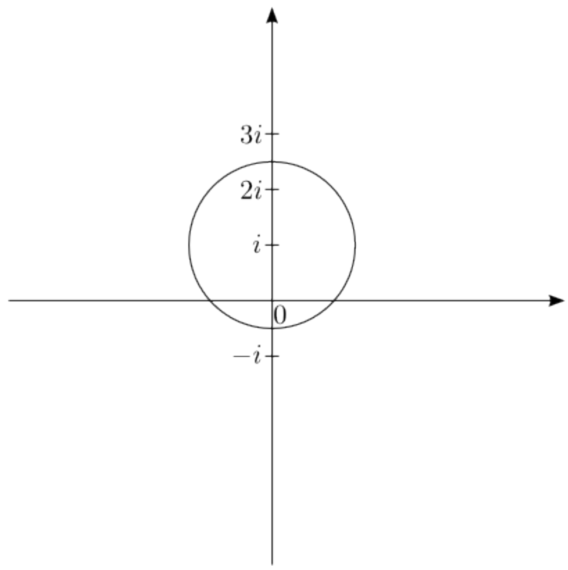
$$\oint\limits_{|z-i|=1{,}5} \frac{z+1}{z(z^2+1)^2} dz.$$

Решение. Трябва да разложим подинтегралната функция:

$$\frac{z+1}{z(z^2+1)^2} = \frac{z+1}{z[(z-i)(z+i)]^2} = \frac{z+1}{z(z-i)^2(z+i)^2}$$

Нулите на знаменателя са 0, i и $-i$, нулите на числителя: -1. Няма съвпадащи между числителя и знаменателя. Тогава имаме еднократен полюс в $z = 0$, двукратен полюс в $z = i$ и двукратен полюс в $z = -i$. Условието е:

$$\oint\limits_{|z-i|=1{,}5} \frac{z+1}{z(z^2+1)^2} dz$$



Интегрираме върху окръжност с център i и радиус $1,5$. Точките 0 и i са в окръжността, но $-i$ не е. В такъв случай решението е:

$$I = 2\pi i(\operatorname{Res} 0 + \operatorname{Res} i)$$

Нека да изчислим еднократния полюс в нулата:

$$\operatorname{Res} 0 = \lim_{z\to 0}(z-0)\frac{z+1}{z(z-i)^2(z+i)^2} = \lim_{z\to 0}\frac{z+1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{1} = 1$$

Сега двукратния полюс в i:

$$\operatorname{Res} i = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to i}\left[(z-i)^2\frac{z+1}{z(z-i)^2(z+i)^2}\right]^{(2-1)} = \lim_{z\to i}\left[\frac{z+1}{z(z+i)^2}\right]'$$

Да сметнем отделно производната:

$$\left[\frac{z+1}{z(z+i)^2}\right]' = \frac{z(z+i)^2-(z+1)[z(z+i)^2]'}{z^2(z+i)^4} =$$

$$= \frac{z(z+i)^2-(z+1)[(z+i)^2+z2(z+i)]}{z^2(z+i)^4} = \frac{z(z+i)-(z+1)[z+i+2z]}{z^2(z+i)^3} =$$

$$= \frac{z(z+i)-(z+1)(3z+i)}{z^2(z+i)^3} = \frac{z^2+zi-(3z^2+zi+3z+i)}{z^2(z+i)^3} = \frac{-2z^2-3z-i}{z^2(z+i)^3}$$

Заместваме обратно в границата:

$$\lim_{z\to i}\frac{-2z^2-3z-i}{z^2(z+i)^3} = \frac{-2i^2-3i-i}{i^2(2i)^3} = \frac{2-4i}{2i} = \frac{1-2i}{i} =$$

$$= \frac{1-2i}{i}\frac{-i}{-i} = \frac{-i+2i^2}{-i^2} = \frac{-i-2}{1} = -2-i$$

Решението е:

$$I = 2\pi i(1-2-i) = 2\pi i(-1-i) = 2\pi(1-i)$$

Отговор: $2\pi(1-i)$. □

3 Трета тема

Задача 1. Пресметнете интеграла:

$$\int\limits_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 \sin(z)} dz.$$

Задача 2. Да се възстанови холоморфната функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, ако $f(0) = 0$ и

$$u(x, y) = 2xy + e^x \sin(y).$$

Задача 3. Да се развие в ред на Фурие функцията:

$$f(x) = -x - 4, \ x \in [-6, -2].$$

Задача 4. С методите на операционното смятане решете интегралното уравнение:

$$x(t) = t + 2\int_0^t \cos(t-\tau)x(\tau)d\tau.$$

Задача 5. Случайната величина X има разпределение:

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	$0,2$	$0,3$	p_3	$0,08$	$0,02$

Да се намерят вероятността p_3, математическото очакване EX и дисперсията DX на случайната величина X.

Задача 6. Имаме три еднакви на външен вид кутии. В първата има 4 бели и 6 черни топки, във втората — 7 бели и 5 черни, в третата — 6 бели и 4 черни.

а) Каква е вероятността да извадим бяла топка от произволна кутия?

б) Извадена е бяла топка от случайно избрана кутия. Каква е вероятността взетата бяла топка да е от втората кутия?

Всяка задача е по 10 точки.

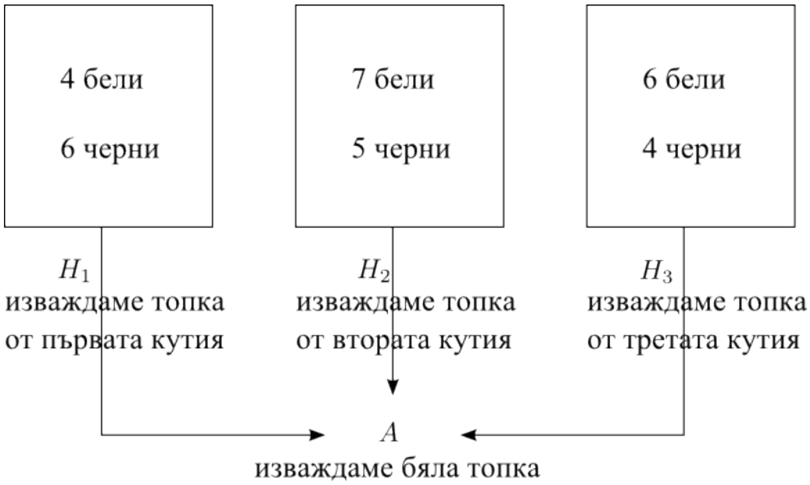
Задача 6. Имаме три еднакви на външен вид кутии. В първата има 4 бели и 6 черни топки, във втората — 7 бели и 5 черни, в третата — 6 бели и 4 черни.

а) Каква е вероятността да извадим бяла топка от произволна кутия?

б) Извадена е бяла топка от случайно избрана кутия. Каква е вероятността взетата бяла топка да е от втората кутия?

Решение. Нека да отбележим изваждането на бяла топка от първата кутия с H_1, от втората кутия с H_2 и от третата кутия с H_3. Имаме три събития, всяко с вероятност да се случи 1/3, сборът им е единица:

$$P(H_1) = \frac{1}{3},\ P(H_2) = \frac{1}{3},\ P(H_3) = \frac{1}{3},\ \sum_{i=1}^{3} P(H_i) = 1$$



Нека да отблежим събитието "изваждане на бяла топка" с A. Събитието се случва само ако едно от събитията H_1 или H_2 или H_3 вече се е случило. Нека да извадим топка от пърата кутия, белите топки са 4, всичките топки са 10:

$$P(A/H_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Нека сега да извадим топка от втората кутия, белите топки са 7, всичките са 12:

$$P(A/H_2) = \frac{7}{12}$$

Нека сега да извадим топка от третата кутия, белите топки са 6, всичките са 10:

$$P(A/H_3) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Трите събития са несъвместими — можем да извадим топка или от първата кутия или от втората кутия или от третата кутия, като всеки път започваме отначало. Следователно можем да приложим формулата за пълната вероятност:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{12} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} = \frac{2}{15} + \frac{7}{36} + \frac{1}{5} = \frac{24+35+36}{5\cdot 36} = \frac{95}{5\cdot 36} = \frac{19}{36}$$

Сега втора подточка. Прилагаме формулата на Бейс за да изчислим вероятността да сме извадили бялата топка от втората кутия:

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{1/3 \cdot 7/12}{19/36} = \frac{7}{36} \cdot \frac{36}{19} = \frac{7}{19}$$

Нека да видим другите две вероятности, сумата на трите трябва да е единица:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{1/3 \cdot 2/5}{19/36} = \frac{2}{15} \cdot \frac{36}{19} = \frac{24}{5 \cdot 19}$$

$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(A)} = \frac{1/3 \cdot 3/5}{19/36} = \frac{1}{5} \cdot \frac{36}{19} = \frac{36}{5 \cdot 19}$$

$$\sum_{i=1}^{3} P(H_i/A) = \frac{24}{5 \cdot 19} + \frac{7}{19} + \frac{36}{5 \cdot 19} = \frac{24 + 35 + 36}{95} = \frac{95}{95} = 1$$

Отговор: $P(A) = 19/36$, $P(H_2/A) = 7/19$. $\square$

Задача 5. Случайната величина X има разпределение:

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	$0,2$	$0,3$	p_3	$0,08$	$0,02$

Да се намерят вероятността p_3, математическото очакване EX и дисперсията DX на случайната величина X.

Решение. Сумата от всички вероятности е единица:

$$0,2 + 0,3 + p_3 + 0,08 + 0,02 = 1 \Longrightarrow 0,5 + p_3 + 0,1 = 1 \Longrightarrow p_3 = 0,4$$

Тогава таблицата става:

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,08$	$0,02$

Математическото очакване:

$$EX = \sum_{i=1}^{5} x_i p_i = -2 \cdot 0,2 - 1 \cdot 0,3 + 0 + 1 \cdot 0,08 + 2 \cdot 0,02 =$$
$$= -0,4 - 0,3 + 0,08 + 0,04 = -0,7 + 0,12 = -0,58$$

Математическото очакване за X^2:

$$EX^2 = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 p_i = 4 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,3 + 0 + 1 \cdot 0,08 + 4 \cdot 0,02 =$$
$$= 0,8 + 0,3 + 0,08 + 0,08 = 1,1 + 0,16 = 1,26$$

Дисперсията:

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = 1,26 - (-0,58)^2 = 1,26 - 0,3364 = 0,9236$$

Отговор: $p_3 = 0,4$, $EX = -0,58$, $DX = 0,9236$. $\square$

Задача 2. Да се възстанови холоморфната функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, ако $f(0) = 0$ и

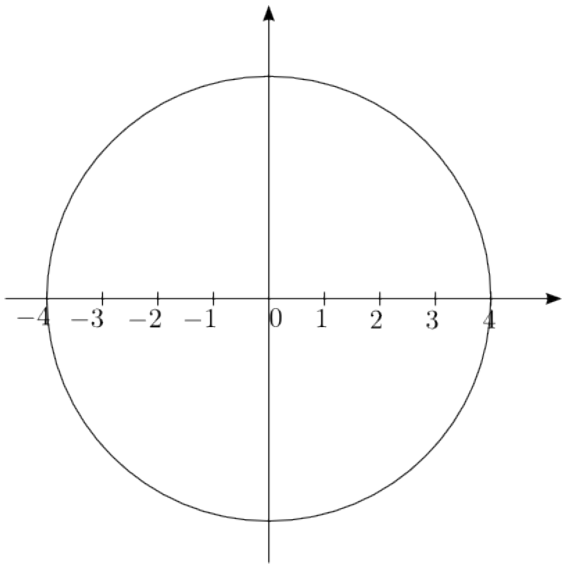
$$u(x, y) = 2xy + e^x \sin(y).$$

Решение. Холоморфните функции са аналитични. Задачата вече е решена. Виж Тема 1, Задача 1. □

Задача 1. Пресметнете интеграла:

$$\int\limits_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 \sin(z)} dz.$$

Решение. Интегрираме върху централна окръжност с радиус 4.



Нулите на знаменателя $z^2 \sin(z)$:

$$z^2 = 0 \Longrightarrow z = 0, \qquad \sin(z) = 0 \Longrightarrow z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$$

Нулите на числителя:

$$e^z - 1 = 0 \Longrightarrow z = 0$$

В знаменателя z е на втора степен и синуса се нулира в нулата, тоест имаме трета кратност в знаменателя. Но и числителя се нулира в $z = 0$. Тогава като се извадят двете кратности се получава: $3 - 1 = 2$. Тоест имаме двукратен полюс в $z = 0$. Полюсът е в окръжността.

Сега гледаме другите нули на синуса. Само точките π и $-\pi$ са в окръжността, другите са извън нея. Тоест имаме еднократен полюс в $z = \pi$ и еднократен полюс в $z = -\pi$.

Тогава решението е:

$$I = 2\pi i(\operatorname{Res} 0 + \operatorname{Res} \pi + \operatorname{Res}(-\pi))$$

Изчисляваме двукратния полюс в нулата:

$$\operatorname{Res} 0 = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to 0} \left[(z-0)^2 \frac{e^z - 1}{z^2 \sin(z)} \right]^{(2-1)} = \lim_{z\to 0} \left[\frac{e^z-1}{\sin(z)} \right]' =$$
$$= \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{\cos(z)} = \frac{e^0}{\cos(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

Сега еднократния полюс в π:

$$\operatorname{Res} \pi = \lim_{z\to\pi} (z-\pi) \frac{e^z-1}{z^2 \sin(z)} = \lim_{z\to\pi} \frac{e^z-1}{z^2} \lim_{z\to\pi} \frac{z-\pi}{\sin(z)}$$

Втората граница е неопределеност (нула върху нула), за нея прилагаме правилото на Лопитал:

$$\lim_{z\to\pi} \frac{e^z-1}{z^2} \lim_{z\to\pi} \frac{1}{\cos(z)} = \frac{e^\pi - 1}{\pi^2} \frac{1}{\cos(\pi)} = \frac{e^\pi-1}{\pi^2} \frac{1}{-1} = -\frac{e^\pi-1}{\pi^2}$$

И еднократния полюс в $-\pi$:

$$\operatorname{Res} \pi = \lim_{z\to-\pi} (z+\pi) \frac{e^z-1}{z^2 \sin(z)} = \lim_{z\to-\pi} \frac{e^z-1}{z^2} \lim_{z\to-\pi} \frac{z+\pi}{\sin(z)}$$

Можем да запишем и така:

$$\lim_{z\to-\pi} \frac{e^z-1}{z^2} \lim_{z\to-\pi} \frac{z+\pi}{\sin(z)} = \frac{e^{-\pi}-1}{(-\pi)^2} \lim_{z\to-\pi} \frac{z+\pi}{\sin(z)}$$

Прилагаме правилото на Лопитал за втората граница:

$$\lim_{z\to-\pi} \frac{e^z-1}{z^2} \lim_{z\to-\pi} \frac{1}{\cos(z)} = \frac{e^{-\pi}-1}{\pi^2} \frac{1}{\cos(-\pi)} = \frac{e^{-\pi}-1}{\pi^2} \frac{1}{-1} = -\frac{e^{-pi}-1}{\pi^2}$$

Решението:

$$I = 2\pi i \left(1 - \frac{e^\pi-1}{\pi^2} - \frac{e^{-\pi}-1}{\pi^2} \right) = 2\pi i \left(1 - \frac{e^\pi + e^{-\pi} - 2}{\pi^2} \right)$$

Отговор: $2\pi i(1 - (e^\pi + e^{-\pi} - 2)/\pi^2)$. □

4 Четвърта тема

Задача 1. Дадено е векторното поле $\overrightarrow{F}$:

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = \overrightarrow{F}(3x^2y^3z^3 + 3,\ 3y^2x^3z^3 + 4,\ 3z^2x^3y^3 + 5).$$

Да се установи дали:

а) $\overrightarrow{F}$ е потенциално,

б) $u(x, y, z) = x^3y^3z^3 + 3x + 4y + 5z + 6e$ е скаларен потенциал на полето $\overrightarrow{F}$.

Задача 2. Намерете аналитичната функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, ако $f(0) = 0$ и

$$v(x, y) = 2(\cosh(x)\sin(y) - xy).$$

Задача 3. Решете комплексния интеграл:

$$I = \int\limits_{|z|=1} \frac{z}{(2z - i)^2(z + 5)} dz.$$

Задача 4. С методите на операционното смятане решете уравнението:

$$y''' + y' = e^{2t},\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

Задача 5. С помощта на оператора на Лаплас решете:

$$y' - y + \int_0^t \sin(t - \tau)y(\tau)d\tau = 1,\ y(0) = 0,\ t > 0.$$

Задача 6. Случайната величина X има разпределение:

X	-1	0	1	2	3
P	$2c$	$2c$	$2c$	c	c

Намерете: c, EX, DX, $P(0 < X \leq 2)$.

Всяка задача е по 10 точки.

Четвърта тема (2). Последните три задачи се повтарят.

Задача 7. Развийте в ред на Фурие по синуси функцията:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \le 1, \\ 0, & 1 < x < 3. \end{cases}$$

Задача 8. Намерете аналитичната функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, ако

$$u(x, y) = x^2 - y^2.$$

Задача 9. Решете комплексния интеграл:

$$I = \int\limits_{|z-1|=2} \frac{e^z - 1}{z(2z-1)^2} dz.$$

Задача 10. С методите на операционното смятане решете уравнението:

$$y''' + y' = e^{2t},\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

Задача 11. С помощта на оператора на Лаплас решете:

$$1 = x' - x + \int_0^t \sin(t - \tau)x(\tau)d\tau,\ x(0) = 0,\ t > 0.$$

Задача 12. Случайната величина X има разпределение:

X	-1	0	1	2	3
P	c	$2c$	$2c$	c	c

Намерете: c, EX, DX, $P(0 < X \le 2)$.

Всяка задача е по 10 точки.

Задача 6. Случайната величина X има разпределение:

X	-1	0	1	2	3
P	$2c$	$2c$	$2c$	c	c

Намерете: c, EX, DX, $P(0 < X \leq 2)$.

Решение. Сумата от всички вероятности е единица:

$$2c + 2c + 2c + c + c = 1 \Longrightarrow 8c = 1 \Longrightarrow c = \frac{1}{8}$$

Тогава таблицата става:

X	-1	0	1	2	3
P	$2/8$	$2/8$	$2/8$	$1/8$	$1/8$

Математическото очакване:

$$EX = \sum_{i=1}^{5} x_i p_i = -1 \cdot \frac{2}{8} + 0 + 1 \cdot \frac{2}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

Математическото очакване за X^2:

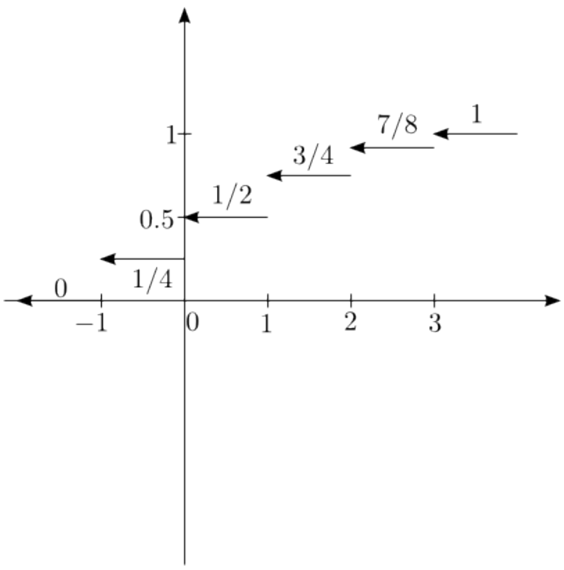
$$EX^2 = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 p_i = 1 \cdot \frac{2}{8} + 0 + 1 \cdot \frac{2}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 9 \cdot \frac{1}{8} = \frac{17}{8}$$

Дисперсията:

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{17}{8} - \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{17 \cdot 8 - 25}{64} = \frac{136 - 25}{64} = \frac{111}{64}$$

За да изчислим вероятността X да е между нула и две трябва да запишем функцията на разпределение $F(X)$:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < -1, \\ 2/8 = 1/4 & -1 \leq X \leq 0, \\ 2/8 + 2/8 = 4/8 = 1/2 & 0 \leq X \leq 1 \\ 2/8 + 2/8 + 2/8 = 6/8 = 3/4 & 1 \leq X \leq 2 \\ 2/8 + 2/8 + 2/8 + 1/8 = 7/8 & 2 \leq X \leq 3 \\ 2/8 + 2/8 + 2/8 + 1/8 + 1/8 = 1 & 3 \leq X \end{cases}$$



Имаме X по-голямо от нула, което е $1/2$, и по-малко от две, което е $3/4$:

$$P(0 < X \leq 2) = F(2) - F(0) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Отговор: $c = 1/8$, $EX = 5/8$, $DX = 111/64$, $P(0 < X \leq 2) = 1/4$. □

Задача 2. Намерете аналитичната функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, ако $f(0) = 0$ и

$$v(x,y) = 2(\cosh(x)\sin(y) - xy).$$

Решение. Уравненията на Коши-Риман:

$$\left| \begin{array}{l} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{array} \right.$$

Имаме дадена функцията $v(x,y)$:

$$v(x,y) = 2\cosh(x)\sin(y) - 2xy$$

Диференцираме $v(x,y)$ по x:

$$v_x = 2\sinh(x)\sin(y) - 2y \Longrightarrow u_y = -2\sinh(x)\sin(y) + 2y$$

Интегрираме $u(x,y)$ по y:

$$u_y : u(x,y) = \int (-2\sinh(x)\sin(y) + 2y)dy + C(x) = 2\sinh(x)\cos(y) + y^2 + C(x)$$

Сега диференцираме $v(x,y)$ по y:

$$v_y = 2\cosh(x)\cos(y) - 2x \Longrightarrow u_x = 2\cosh(x)\cos(y) - 2x$$

Интегрираме $u(x, y)$ по x:

$$u_x : u(x, y) = \int (2\cosh(x)\cos(y) - 2x)dx + C(y) = 2\sinh(x)\cos(y) - x^2 + C(y)$$

Приравняваме функциите:

$$2\sinh(x)\cos(y) + y^2 + C(x) = 2\sinh(x)\cos(y) - x^2 + C(y)$$

$$y^2 + C(x) = -x^2 + C(y)$$

Записваме отделните функции:

$$C(x, y) = 2\sinh(x)\cos(y),\ C(x) = -x^2,\ C(y) = y^2$$

Тогава функцията $u(x, y)$ е:

$$u(x, y) = 2\sinh(x)\cos(y) - x^2 + y^2 + C$$

Функцията $f(z)$ е:

$$f(z) = 2\sinh(x)\cos(y) - x^2 + y^2 + C + i(2\cosh(x)\sin(y) - 2xy)$$

Трябва да намерим константата. Ще използваме условието $f(0) = 0$:

$$f(0) = 2 \cdot 0 \cdot 1 - 0 + 0 + C + i(2 \cdot 1/2 \cdot 0 - 0) = C$$

Тоест константата е равна на нула. Функцията $f(z)$:

$$f(z) = 2\sinh(x)\cos(y) - x^2 + y^2 + i(2\cosh(x)\sin(y) - 2xy)$$

Отговор: $u(x, y) = 2\sinh(x)\cos(y) - x^2 + y^2$. □

Задача 8. Намерете аналитичната функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, ако

$$u(x, y) = x^2 - y^2.$$

Решение. Уравненията на Коши-Риман:

$$\left| \begin{array}{l} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{array} \right.$$

Диференцираме $u(x, y)$ по x:

$$u_x = 2x \Longrightarrow v_y = 2x$$

Интегрираме $v(x, y)$ по y:

$$v_y : v(x, y) = \int 2xdy + C(x) = 2xy + C(x)$$

Сега диференцираме $u(x, y)$ по y:

$$u_y = -2y \Longrightarrow v_x = 2y$$

И интегрираме $v(x, y)$ по x:

$$v_x : v(x, y) = \int 2y dx + C(y) = 2xy + C(y)$$

Приравняваме функциите:

$$2xy + C(x) = 2xy + C(y)$$

Записваме отделните функции (нямаме функции само на x или само на y):

$$C(x, y) = 2xy,\ C(x) = 0,\ C(y) = 0$$

Тогава функцията $v(x, y)$ е:

$$v(x, y) = 2xy + C$$

Функцията $f(z)$ е:

$$f(z) = x^2 - y^2 + i(2xy + C)$$

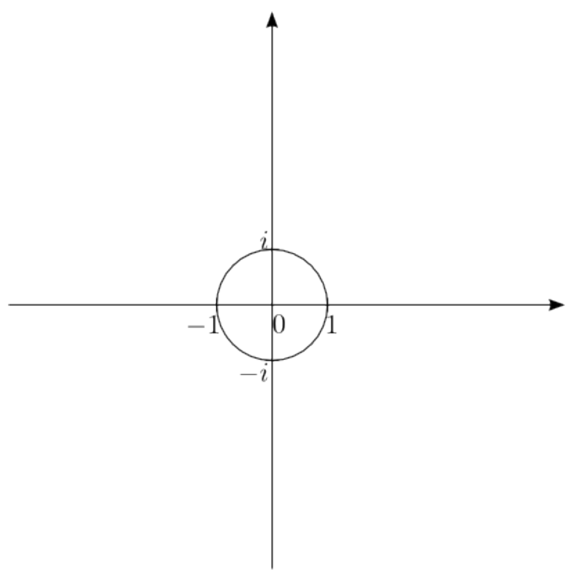
Не можем да намерим константата, тъй като нямаме дадено начално условие.

Отговор: $v(x, y) = 2xy + C$. □

Задача 3. Решете комплексния интеграл:

$$I = \int\limits_{|z|=1} \frac{z}{(2z - i)^2(z + 5)} dz.$$

Решение. Нулите на знаменателя са -5 и $i/2$, нулите на числителя: 0. Няма съвпадащи между числителя и знаменателя. Тогава имаме еднократен полюс в $z = -5$ и двукратен в $z = i/2$.



Интегрираме върху окръжност с център координатното начало и радиус единица. Точката $i/2$ е в окръжността, но -5 не е. Тогава решението е:

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} \frac{i}{2}$$

Изчисляваме резидуума:

$$\operatorname{Res} \frac{i}{2} = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to i/2} \left[\left(z - \frac{i}{2} \right)^2 \frac{z}{\left(2\left(z - \frac{i}{2}\right)\right)^2 (z+5)} \right]^{(2-1)} = \lim_{z \to i/2} \left[\frac{z}{4(z+5)} \right]'$$

Да сметнем производната отделно:

$$\left[\frac{z}{4(z+5)} \right]' = \frac{4(z+5) - 4z}{16(z+5)^2} = \frac{20}{16(z+5)^2} = \frac{5}{4(z+5)^2}$$

Заместваме обратно в границата:

$$\lim_{z \to i/2} \frac{5}{4(z+5)^2} = \frac{5}{4(i/2+5)^2} = \frac{5}{4\left(\frac{i+10}{2}\right)^2} = \frac{5}{(10+i)^2}$$

Резултатът е:

$$I = 2\pi i \frac{5}{(10+i)^2} = \frac{10\pi i}{(10+i)^2}$$

Отговор: $10\pi i/(10+i)^2$. □

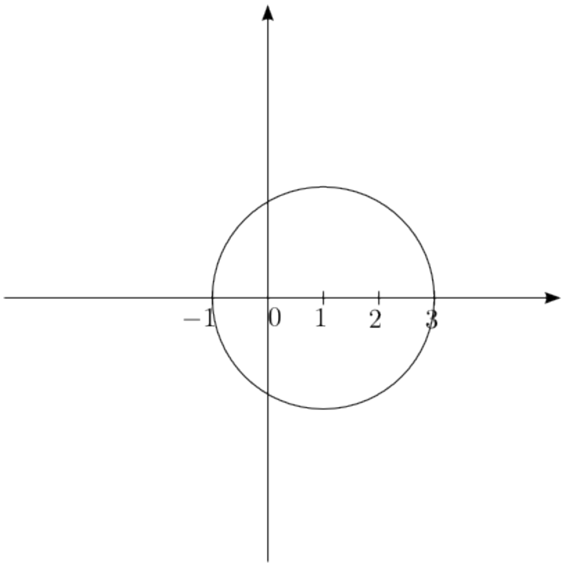
Задача 9. Решете комплексния интеграл:

$$I = \int\limits_{|z-1|=2} \frac{e^z - 1}{z(2z-1)^2} dz.$$

Решение. Нулите на знаменателя са 0 и 1/2, нулите на числителя: 0.

$$e^z - 1 = 0 \Longrightarrow e^z = 1 \Longrightarrow z = 0$$

Полюсът в $z = 0$ е от нулева кратност (няма полюс). (Кратността на знаменателя: първа, минус кратността на числителя: също първа.) Остава ни двукратния полюс в $z = 1/2$.



Интегрираме върху окръжност с център 1 и радиус 2. И двата полюса са в окръжността. Няма да записваме този в нулата. Решението е:

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} \frac{1}{2}$$

Изчисляваме двукратния полюс в $z = 1/2$:

$$\operatorname{Res} \frac{1}{2} = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to 1/2} \left[\left(z - \frac{1}{2} \right)^2 \frac{e^z - 1}{z \left(2 \left(z - \frac{1}{2} \right) \right)^2} \right]^{(2-1)} = \lim_{z \to 1/2} \left[\frac{e^z - 1}{4z} \right]'$$

Нека да пресметнем производната отделно:

$$\left[\frac{e^z - 1}{4z} \right]' = \frac{e^z \cdot 4z - (e^z - 1) \cdot 4}{16z^2} = \frac{4ze^z - 4e^z + 4}{16z^2} = \frac{ze^z - e^z + 1}{4z^2}$$

Заместваме обратно в границата:

$$\lim_{z \to 1/2} \frac{ze^z - e^z + 1}{4z^2} = \frac{1/2e^{1/2} - e^{1/2} + 1}{4(1/2)^2} = \frac{-1/2e^{1/2} + 1}{1} = 1 - \frac{1}{2}e^{1/2}$$

Записваме резултата:

$$I = 2\pi i \left(1 - \frac{1}{2}e^{1/2} \right) = \pi i (2 - e^{1/2})$$

Отговор: $\pi i (2 - e^{1/2})$. □

5 Пета тема

Задача 1. Намерете циркулацията на векторното поле $\overrightarrow{F}(x,y,z) = 3z\overrightarrow{i} + 5x\overrightarrow{j} - 2y\overrightarrow{k}$, по положително ориентираната елипса Γ, получена при пресичането на равнината $z = y + 3$ с цилиндъра $x^2 + y^2 = 1$.

Задача 2. Намерете холоморфна функция $f(z)$, която уводолетворява условието $f(1) = 0$ и реалната част на която е функцията

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} - 2y.$$

Задача 3. Пресметнете интеграла:

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{dz}{z^2(z-2)}.$$

Задача 4. Решете интегралното уравнение:

$$f(t) = e^{-t} + \int_0^t f(\tau)\sin(t-\tau)d\tau.$$

Задача 5. Хвърля се зар 4 пъти. Намерете вероятността:
а) 5 точки да са се паднали точно 2 пъти,
б) 5 точки да са се паднали поне един път.

Задача 6. Случайната величина X е зададена с реда си на разпределение:

X	10	25	30	60
P	$0,35$	$2a$	$0,15$	$3a$

Да се намери параметърът a, математическото очакване EX, дисперсията DX и средноквадратичното отклонение σ_x.

Всяка задача е по 10 точки.

6 Шеста тема

Задача 1. Намерете работата на векторното поле $\overrightarrow{F}(x,y) = (x+y)\overrightarrow{i} + (y-x)\overrightarrow{j}$, извършена за преместване на материална точка в положителна посока по кривата с уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > 0,\ b > 0.$$

Задача 2. Намерете холоморфна функция $f(z)$, която удоволетворява условието $f(1) = 0$ и реалната част на която е функцията $u(x,y) = x^2 - 2xy^2$.

Задача 3. Пресметнете интеграла:

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z-2)^2} dz.$$

Задача 4. Чрез трансформацията на Лаплас решете диференциалното уравнение при дадените начални условия:

$$y'' + 4y = \cos(3t),\ y(0) = y'(0) = 2.$$

Задача 5. Дадени са три непрозрачни урни. В първата има 5 бели и 4 черни топки, във втората има 6 бели и 3 черни топки, а третата е празна. Трета урна е свързана с първа и втора с непрозрачни улеи. От първа и втора урна по случаен начин попада по една топка в трета урна по съответния улей. След това от трета урна се тегли една топка.

а) Намерете вероятността изтеглената топка от трета урна да е бяла.

б) Ако е известно, че изтеглената от трета урна топка е бяла, каква е вероятността от първа и втора да са попаднали съответно бели топки в трета?

Задача 6. За дискретна непрекъсната случайна величина зададена с ред на разпределение:

X	-1	1	2	4
P	c	$2c$	$2c$	c

да се намерят математическото очакване EX и дисперсията DX.

Всяка задача е по 10 точки.

7 Седма тема

Задача 1. Дадено е векторното поле $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \overrightarrow{F}(6xy+3z,\ y-y^2,\ -4zy-z)$. Да се установи дали $\overrightarrow{F}$ е соленоидално.

Задача 2. Да се намери аналитичната функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, за която е дадено: $v(x,y) = 6xy + 2y,\ f(0) = 1$.

Задача 3. Да се пресметне интегралът

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{e^{3z}}{z^2(z^2+1)} dz,$$

където кривата $\Gamma : |z-i| = \sqrt{3}$ е описана еднократно в положителна посока.

Задача 4. Да се намери решението $u(x,t)$ на уравнението $u''_{tt} = 9u''_{xx}$, ако

$$u(x,0) = 2e^{3x},\ u'_t(x,0) = 24x^3.$$

Задача 5. Чрез трансформацията на Лаплас да се реши задачата на Коши

$$y'' - 9y = 6e^{2t},\ y(0) = y'(0) = 3.$$

Задача 6. Случайната величина X е зададена с реда си на разпределение:

X	10	20	30	40	50
P	$0,2$	a	$0,3$	$0,1$	$3a$

Да се намери параметърът a, математическото очакване EX, дисперсията DX и средноквадратичното отклонение σ_x.

Всяка задача е по 10 точки.

8 Осма тема

Задача 1. Да се намери аналитична функция $f(z)$ при условия $f(1) = 6$ и

$$u(x, y) = \Re f(z) = \frac{2x}{x^2 + y^2}.$$

Задача 2. Да се пресметне интегралът:

$$\oint_C \frac{1 + e^z}{z(z^2 - i)^2} dz.$$

където $C : |z + 1 - i| = \sqrt{12}$.

Задача 3. Да се развие в ред на Фурие функцията:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x < 2, \end{cases}$$

при условие $y(-x) = -y(x)$, тоест по синуси.

Задача 4. Да се реши системата обикновени диференциални уравнения:

$$\left| \begin{array}{l} x'' + x' + y'' - y = e^t \\ x' + 2x - y' + y = e^{-t} \end{array} \right.$$

при следните условия: $x(0) = y(0) = y'(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

Задача 5. Да се докаже, че ако случайните събития A и B са независими и съвместими, то е изпълнено $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B})$.

Задача 6. Плътността на вероятностите на случайна величина е:

$$f(x) = \begin{cases} a\cos^2(x), & |x| \leq \pi/2, \\ 0, & |x| > \pi/2. \end{cases}$$

а) Да се определи параметъра a.
б) Да се намери вероятността $P(x \geq \pi/4)$.

Всяка задача е по 10 точки.

Литература

- Функционален анализ: доц. д-р О. Каменов (л), доц. д-р Г. Венков (у)
- Комплексен анализ: проф. дмн Р. Ковачева (л), ст. ас. М. Дурчева (у)
- Математически анализ II: доц. д-р Р. Петрова (л), доц. д-р Й. Панева (у)
- Теория на вероятностите: доц. д-р Л. Топчийска (л), гл. ас. Б. Гилев (у)
- Сайтове: Wikipedia, Wikibooks LaTeX, gnuplot tips, Wolfram MathWorld
- Софтуер: MiKTeX, gnuplot, Inkscape, Notepad++, Sumatra PDF, Windows 7