

Видове движения на идеално твърдо тяло

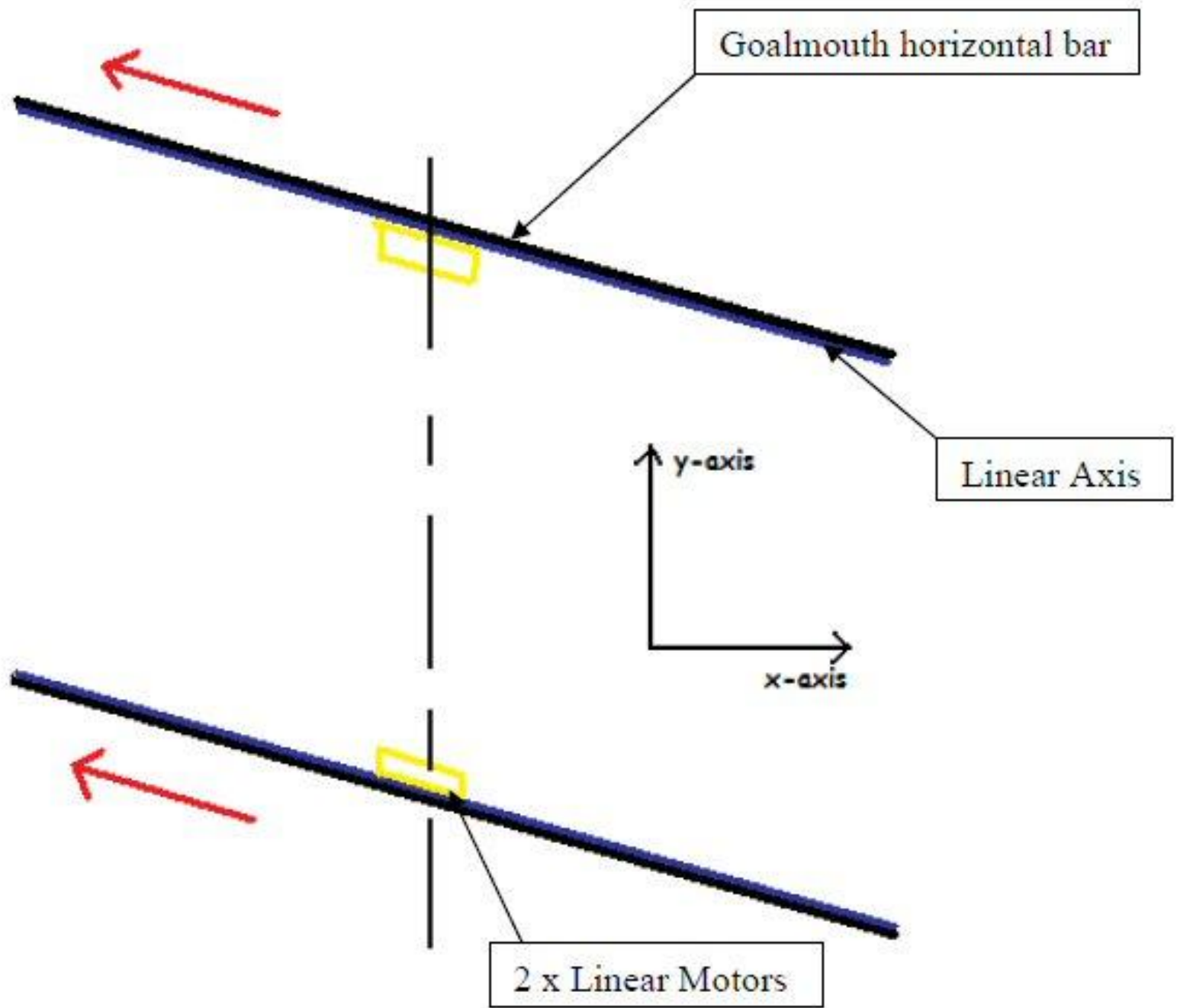
Тяло, което има определена форма и обем, и те не се изменят при движението му, се нарича **идеално твърдо тяло**.

Идеално твърдото тяло се дефинира и като система от материални точки, разстоянията между които не се променят.

1. Кинематика на твърдо тяло — раздел от кинематиката изучаващ движението на твърдо тяло, без да се отчитат причините които го предизвикват.

1.1. Постъпателно движение.

Движение на тяло, при което всяка негова точка описва една и съща траектория (т.е. всяка мислена произволна отсечка от тялото се премества успоредно сама на себе си), се нарича **постъпателно**. При постъпателното движение всички точки от тялото се движат с еднаква скорост и затова могат да се разглеждат като една материална точка - центърът на масите на тялото. Вместо да се разглежда движението на цялото тяло, се разглежда движението на центъра на масите.



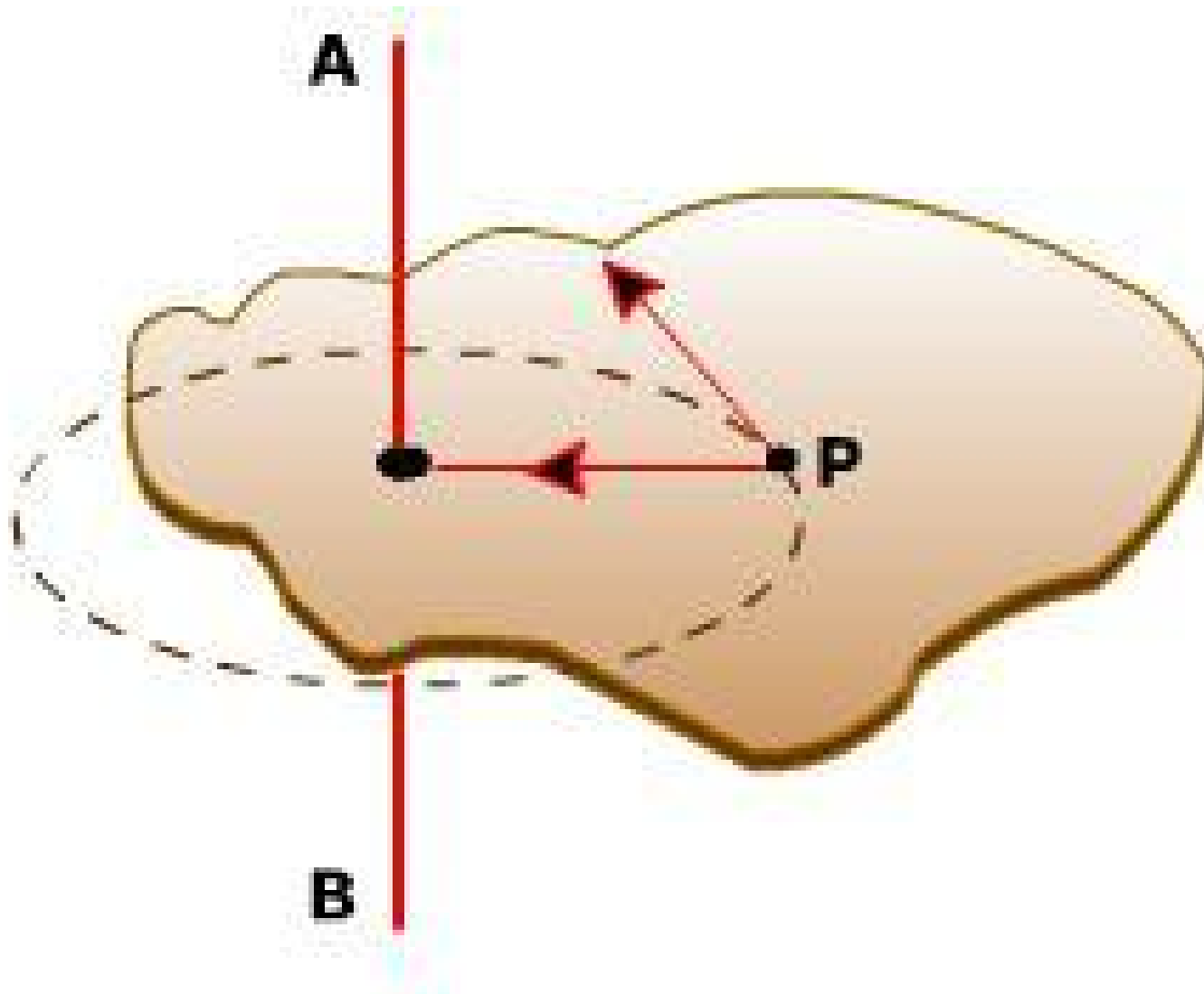


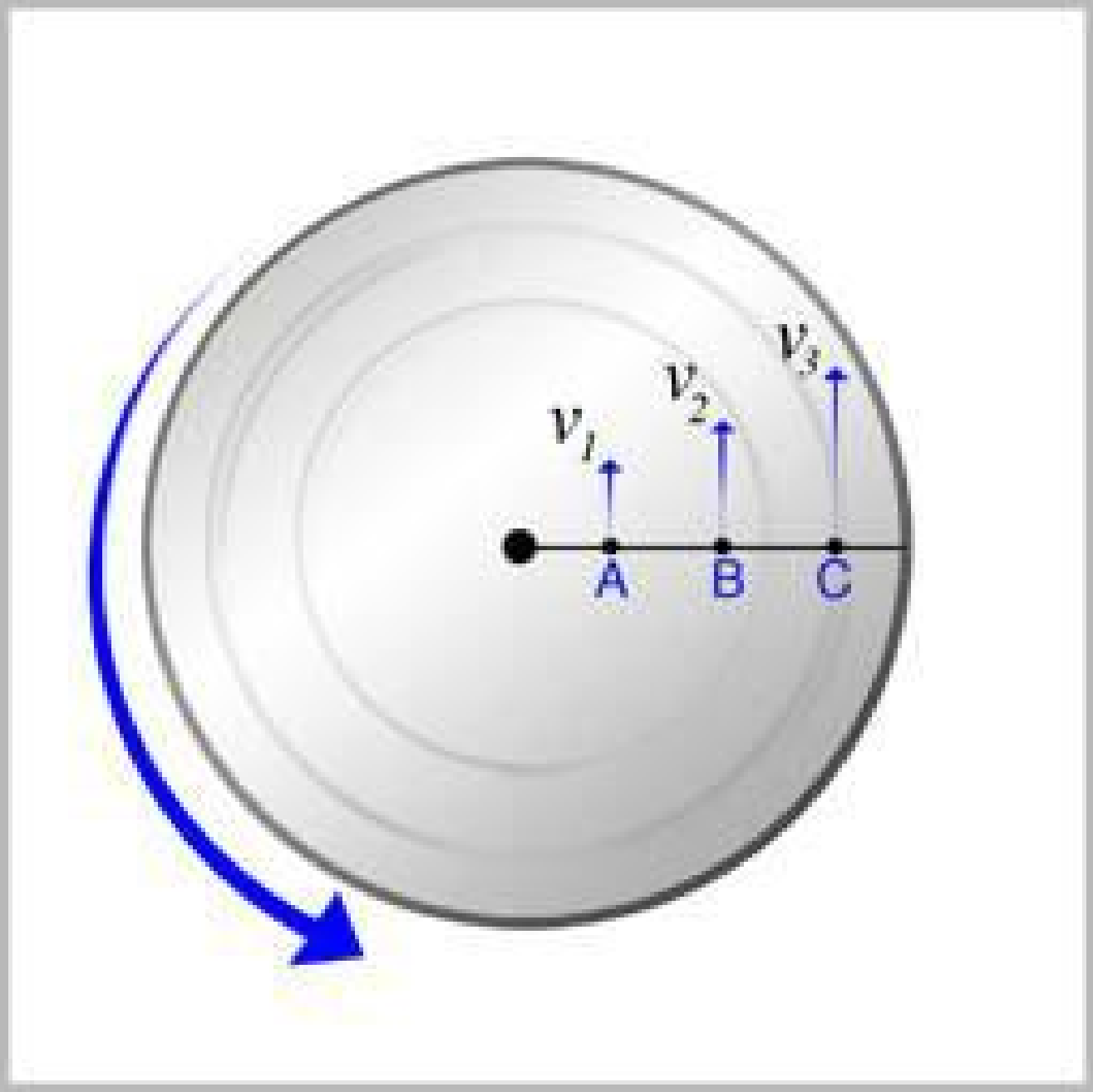
1.2. Въртеливо движение.

Идеално твърдото тяло може да извършва и въртеливи движения. При въртене всяка точка от тялото се движи по окръжност. Центровете на окръжностите лежат на една права - **ос на въртене**.

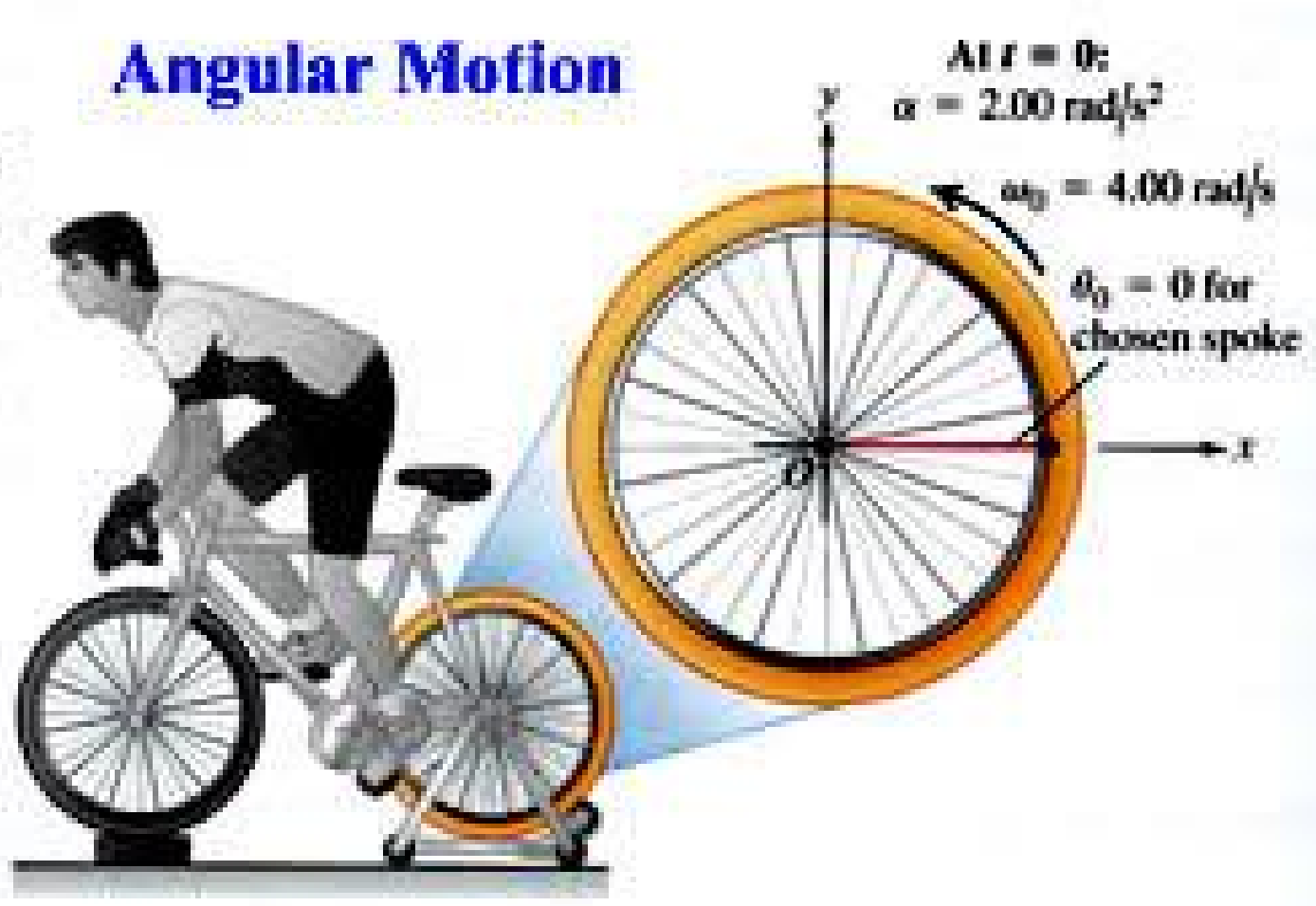
При **движение на идеално твърдо тяло около постоянна ос** всяка точка от тялото описва окръжност с център, който лежи на оста на въртене. Всички окръжности лежат в равнина, перпендикулярна на оста на въртене.

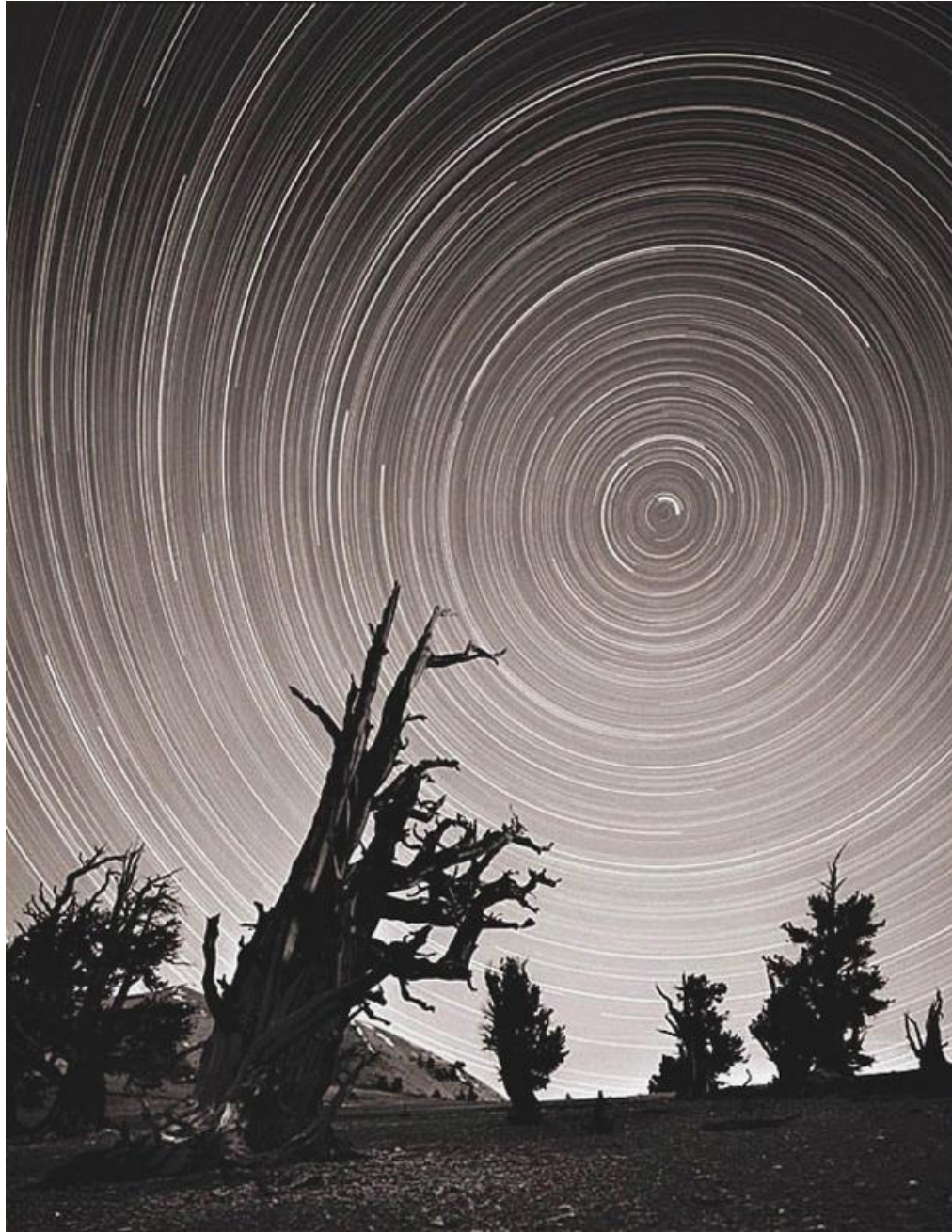
Движението на идеално твърдо тяло може да се разглежда като съставено от постъпателно движение на центъра на масите и въртене около ос, минаваща през центъра на масите.

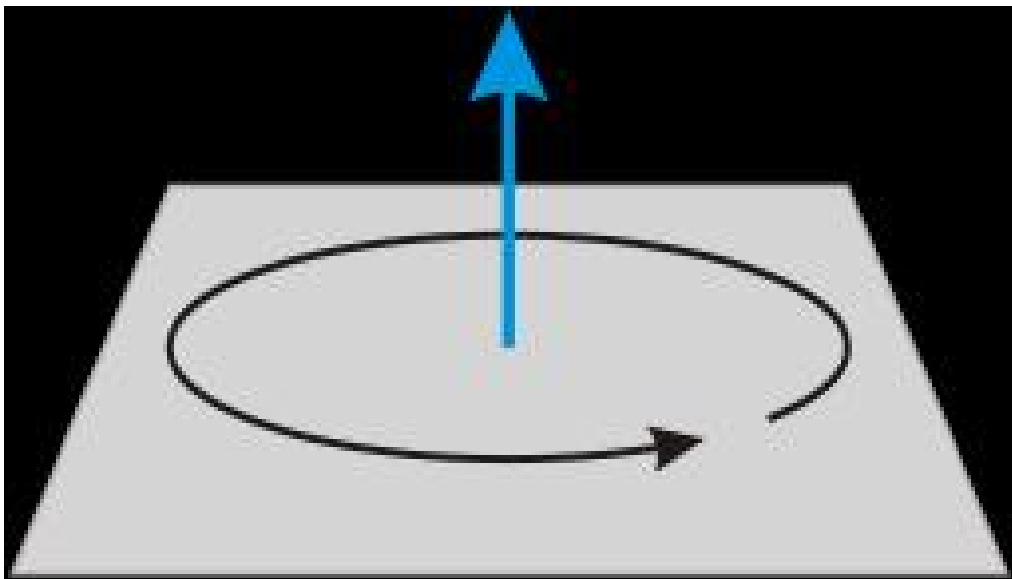
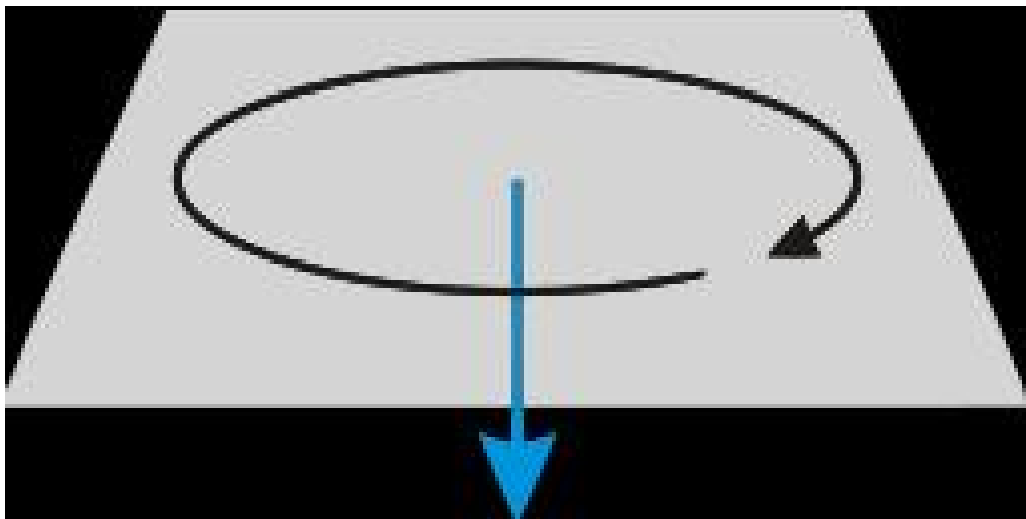




Angular Motion

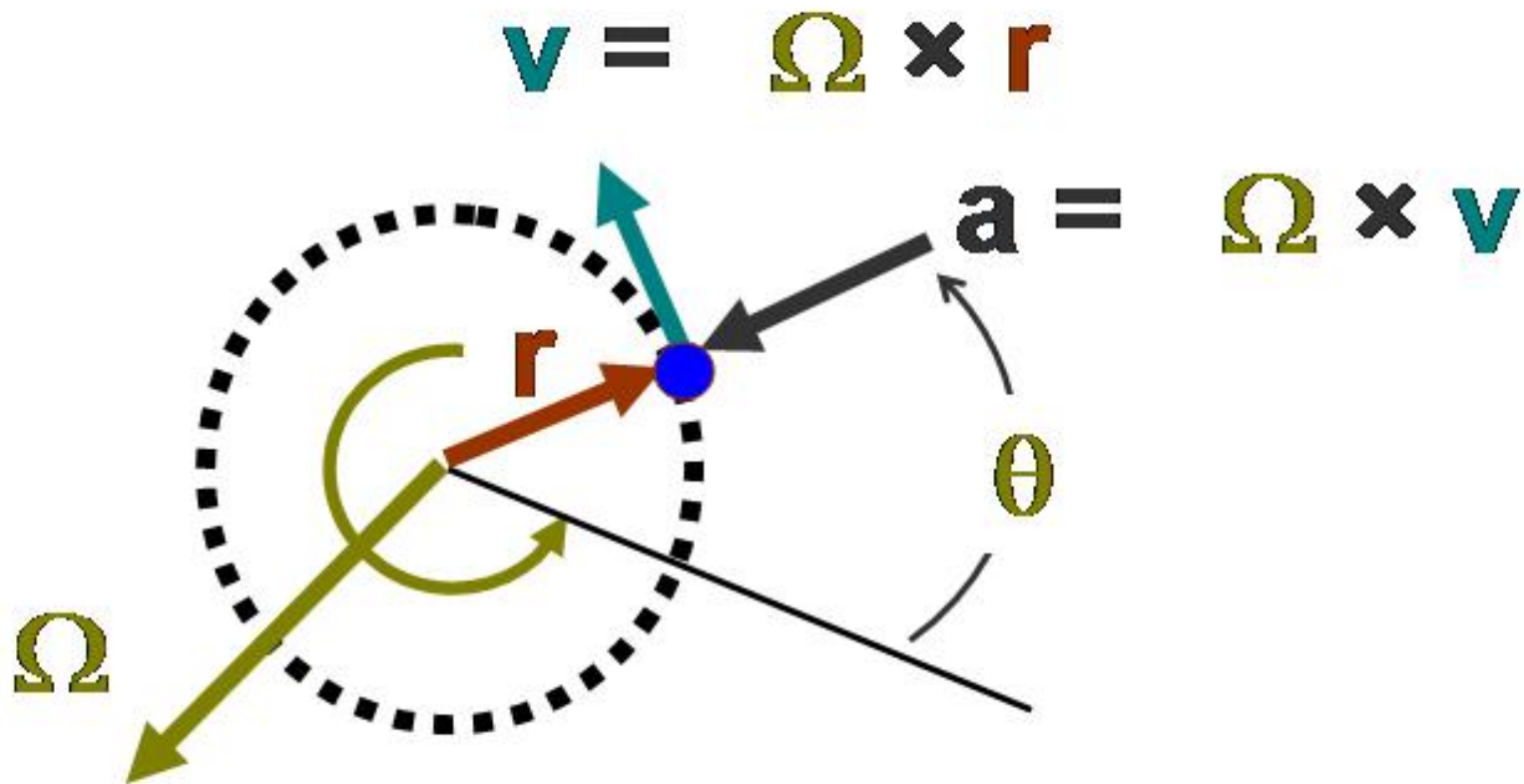






Въртеливо движение

– ъгловата координата е обобщената координата.



1.2.1. Кинематика на въртене на идеално твърдо тяло

За кинематичното описание на въртенето на идеално твърдо тяло около неподвижна ос се използват величини и зависимости, които описват движението на материална точка по окръжност: ъгъл за определяне положението на точката по окръжността (φ); ъгъл за завъртане на радиус-вектора на точката (φ); средна и моментна ъглова скорост ($\omega_{\text{ср.}}$, ω ; линейна скорост на различните точки (v); средно и моментно ъглово ускорение ($\varepsilon_{\text{ср.}}$, ε); линейно ускорение на различните точки (a). Интервалът от време, за който тялото извършва едно пълно завъртане около оста, е периодът (T), а броят на завъртанията за единица време е честотата (ν).

1.3. Кинематика на общо движение на идеално твърдо тяло – общи понятия.

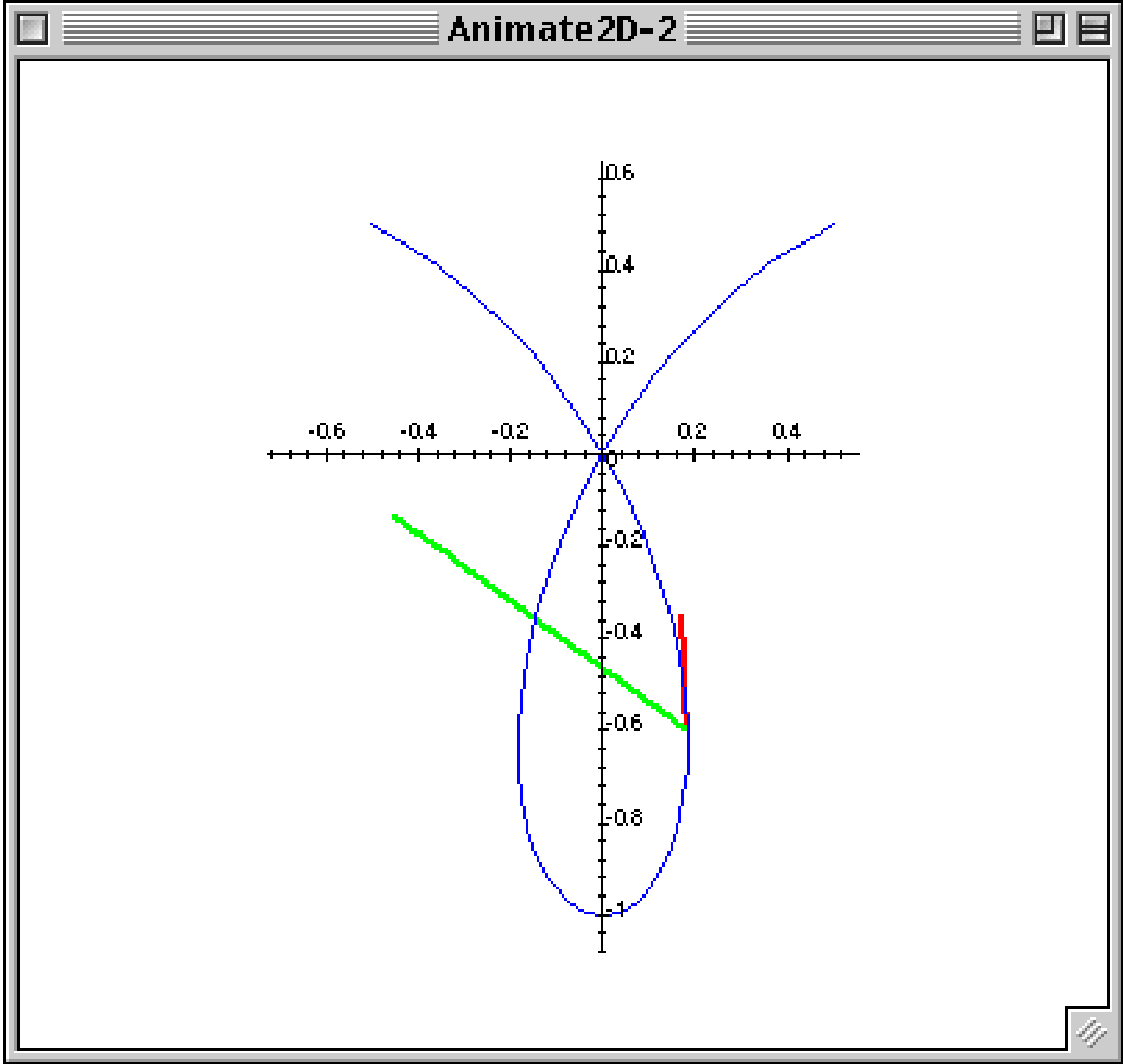
Комплексно движение

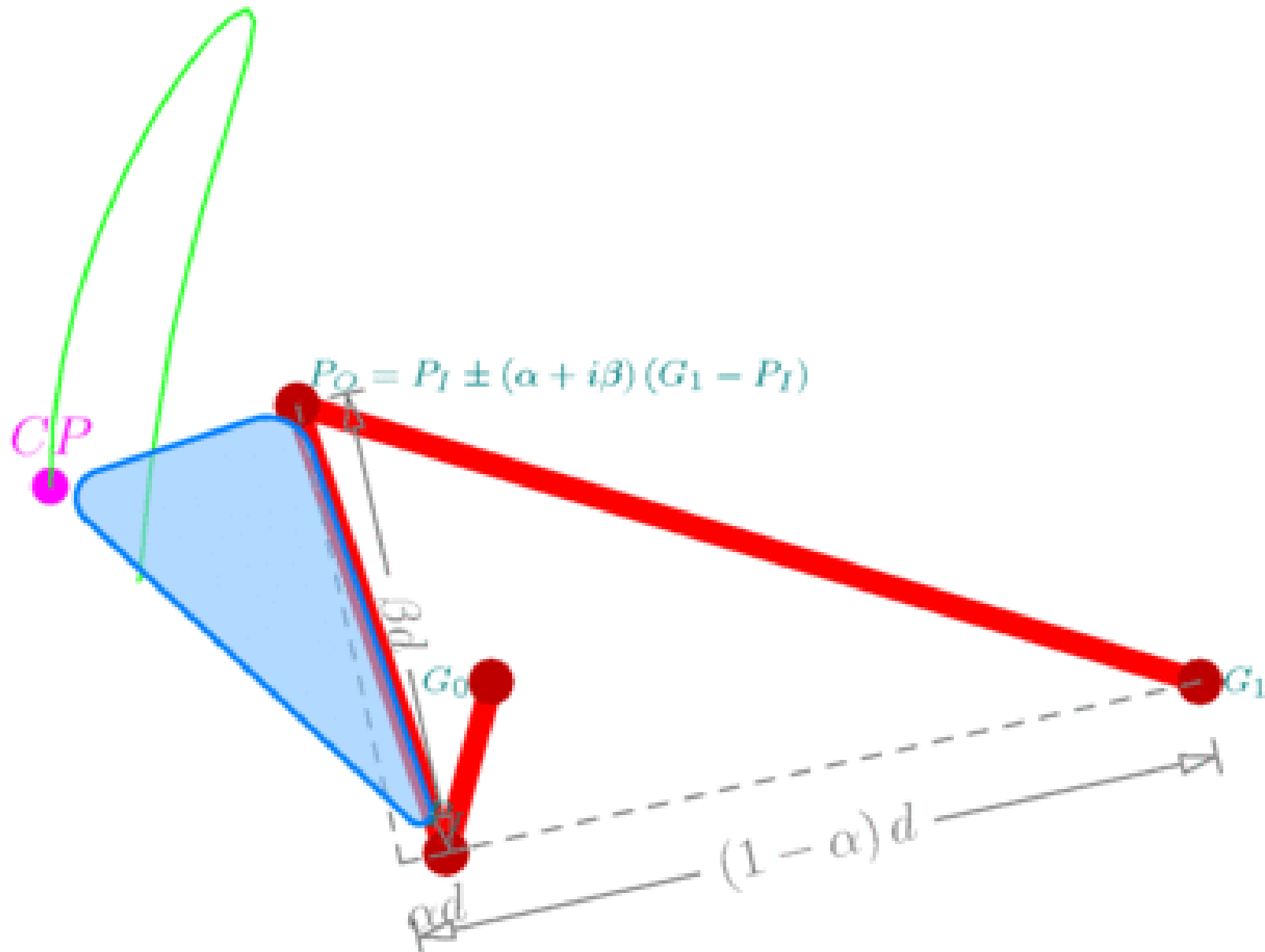
Complex motion of point A with respect to the Ground



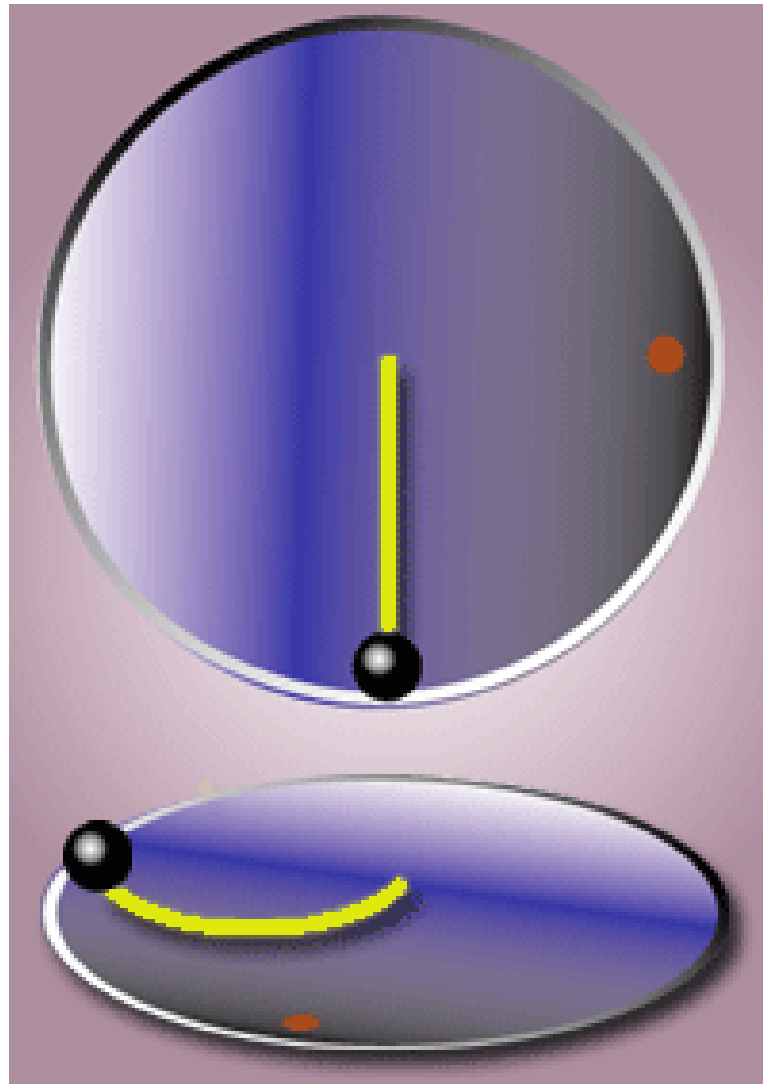
Point

Ground

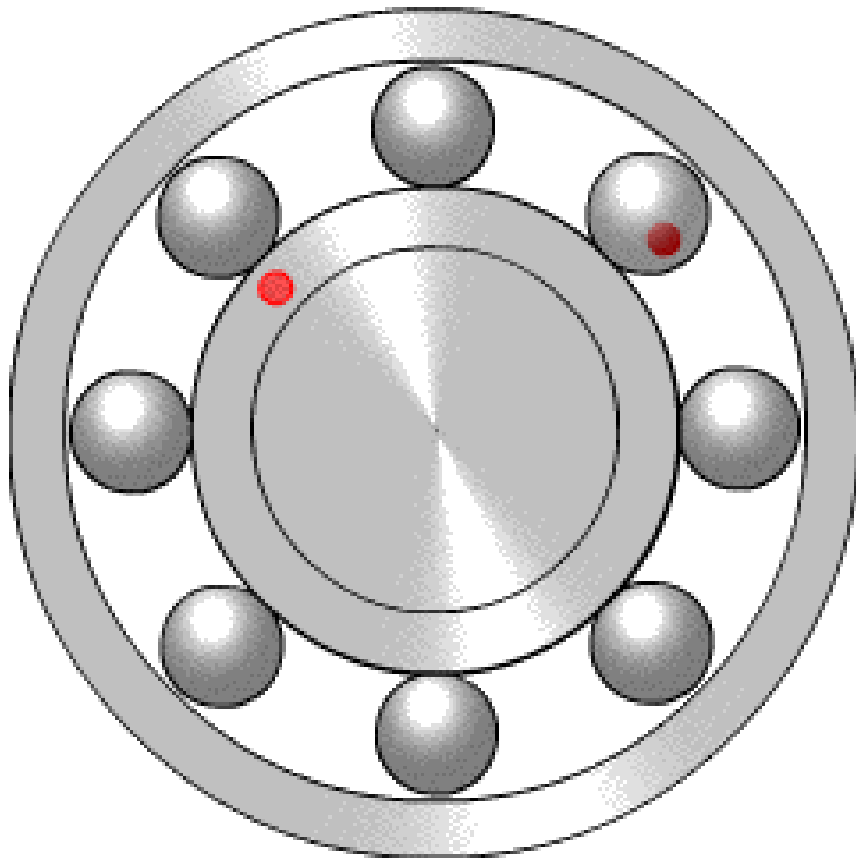




Преносно движение



Адитивност на ъгловите скорости



$$\dot{\mathbf{W}}_{\Sigma} = \dot{\mathbf{W}}_C + \dot{\mathbf{W}}_I$$

Формула на Ойлер:

Тя свързва скоростта на две точки от твърдото тяло.

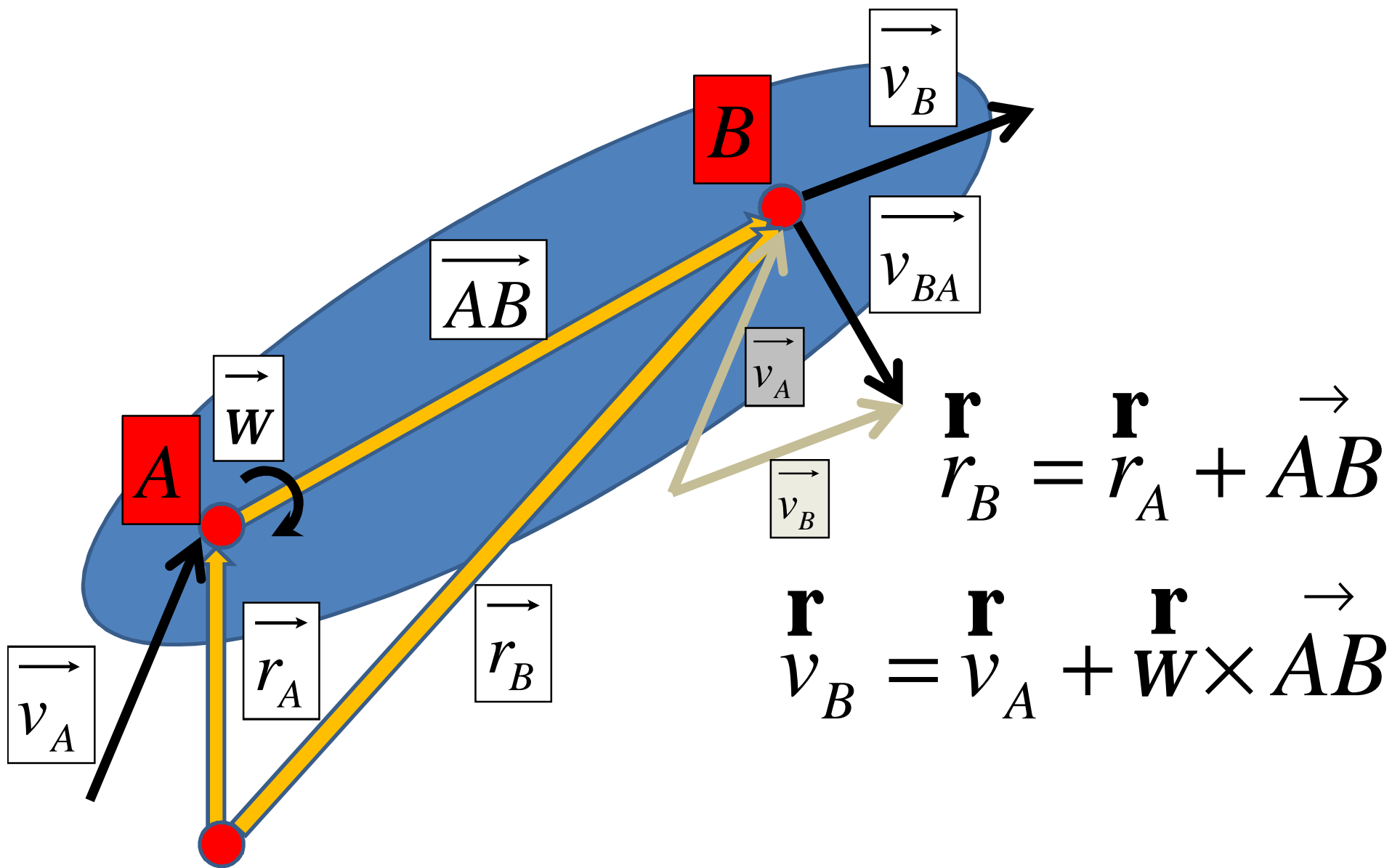
$$\begin{aligned} \mathbf{r}_B &= \mathbf{r}_A + \vec{AB} \\ \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_A + \mathbf{\dot{w}} \times \vec{AB} \end{aligned}$$

$\mathbf{\dot{w}}$ е вектор на ъгловата скорост на тялото

Получава се от диференциране по времето. Пре повторно диференциране се получава:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{\dot{w}} \times \left(\mathbf{w} \times \vec{AB} \right) + \mathbf{\dot{e}} \times \vec{AB}$$

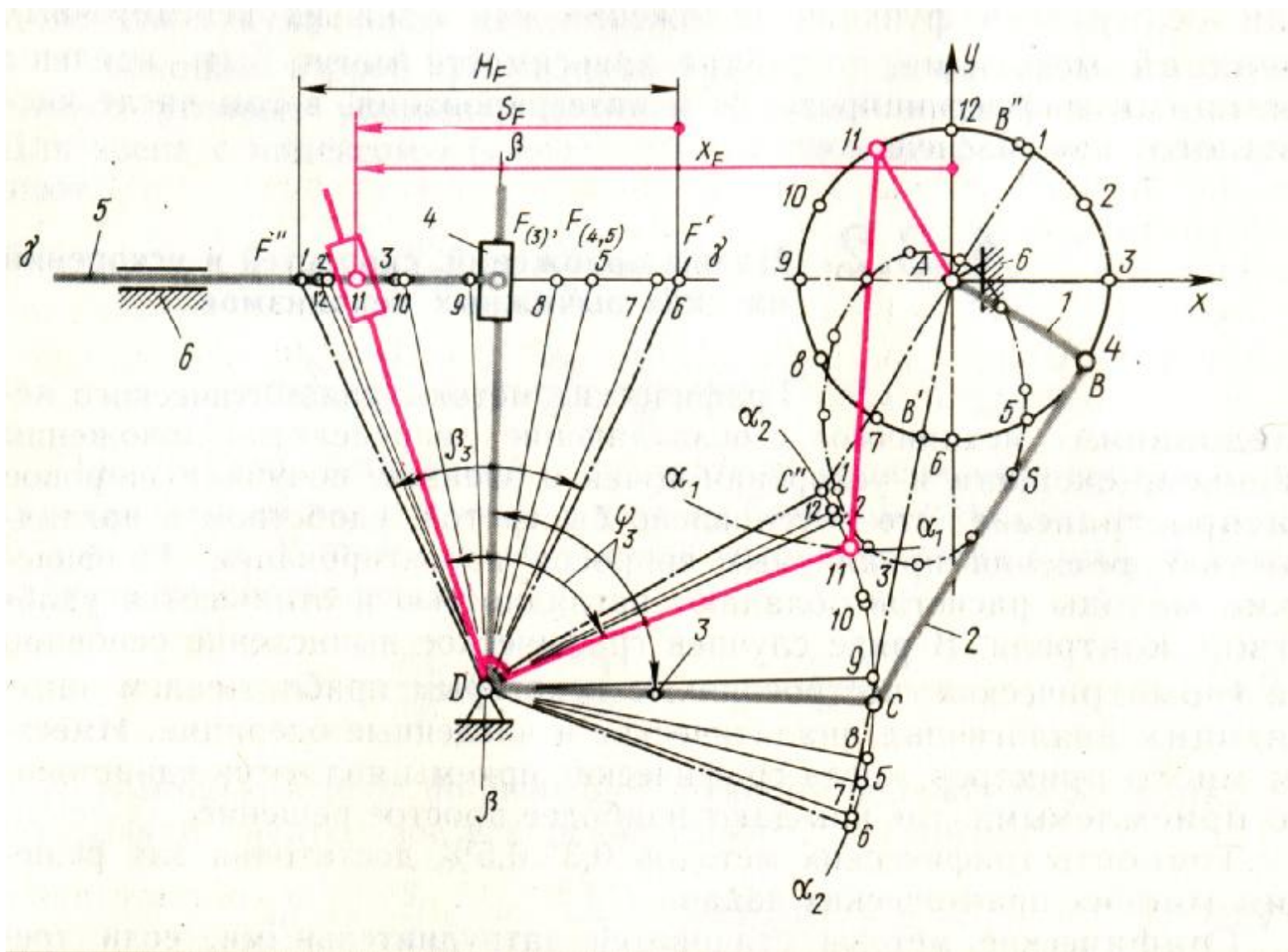
$\mathbf{\dot{e}}$ е вектор на ъгловото ускорение на тялото



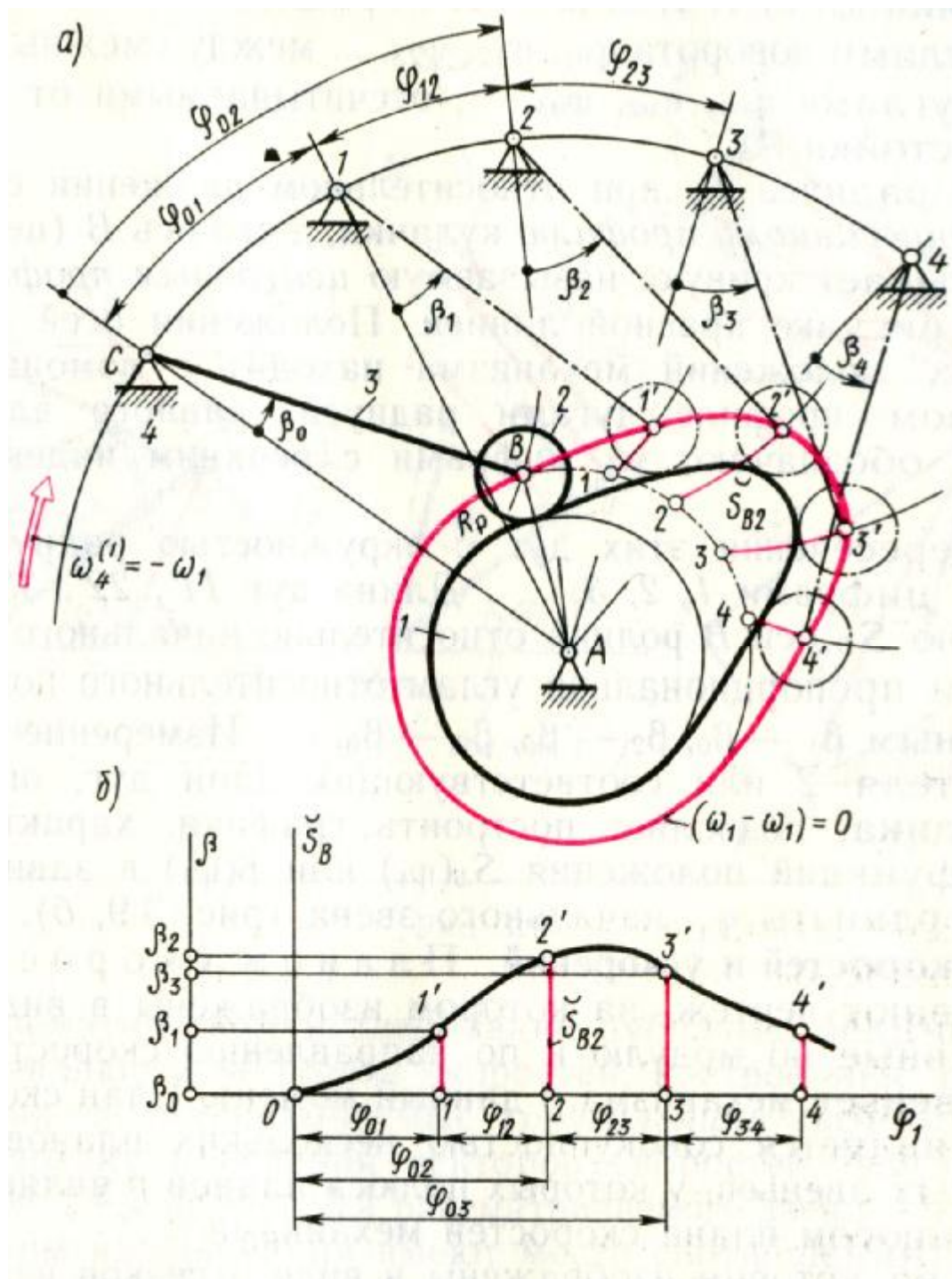
Планове на механизма

Изображение на кинематичната схема на механизма в избран мащаб, съответстващо на определено положение на водещото звено, се нарича план на механизма.

$$k_l = \frac{L_{\text{Действительно}}}{L_{\text{Чертотно}}} = \left[\frac{m}{mm} \right] \quad m_l = \frac{1}{k_l} = \left[\frac{mm}{m} \right]$$



Метод на
обърнатото
движение:



Планове на скоростите и ускоренията

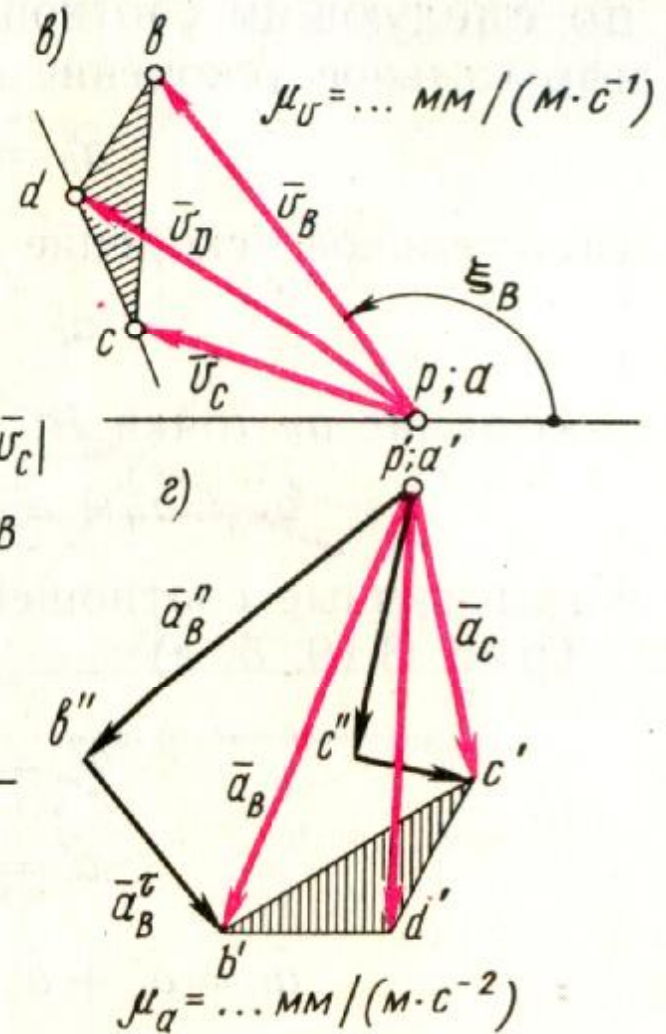
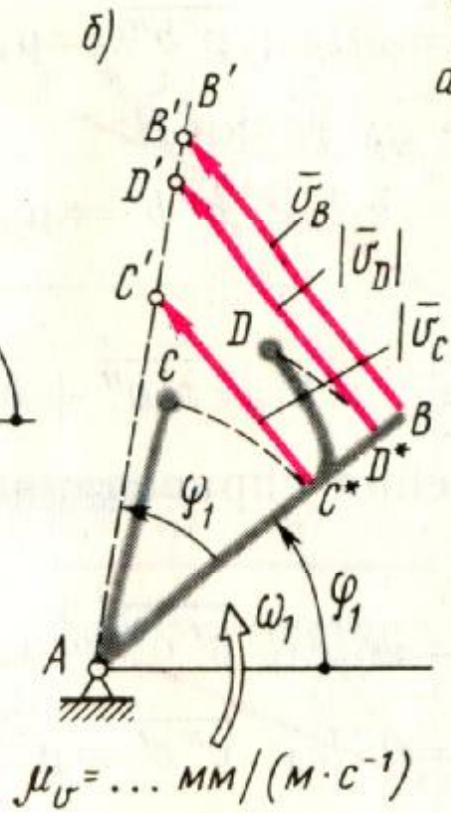
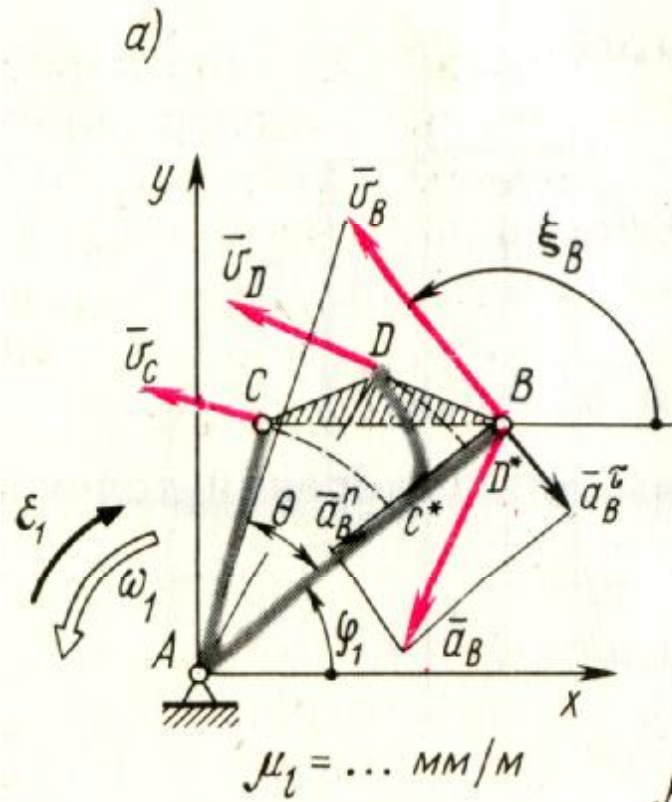
– нарича се чертеж, на който са изобразени като вектори скоростите или ускоренията на различните точки от звената на механизма в даден момент. Векторите се характеризират с големина и посока.

План на скоростите и ускоренията на началното звено.

Мащаб:

$$k_v = \frac{V_{\text{Действително}}}{V_{\text{Чертожно}}} = \left[\frac{m/s}{mm} \right]$$

$$k_a = \frac{a_{\text{Действително}}}{a_{\text{Чертожно}}} = \left[\frac{m/s^2}{mm} \right]$$



$$k_v = \frac{V_{\text{Действительно}}}{V_{\text{Чертожно}}} = \left[\frac{m/s}{mm} \right] \quad |\mathbf{v}_{AB}| = \omega_1 L_{AB} = \left[\frac{m}{s} \right] \quad \bar{v} = \frac{|\mathbf{v}_{AB}|}{k_v} = [mm] \quad \bar{a} = \frac{|\mathbf{a}_{AB}|}{k_a} = [mm]$$

$$k_a = \frac{a_{\text{Действительно}}}{a_{\text{Чертожно}}} = \left[\frac{m/s^2}{mm} \right] \quad |\mathbf{a}_{AB}| = |\mathbf{a}_B^n + \mathbf{a}_B^t| \quad \bar{a} = \frac{|\mathbf{a}_{AB}|}{k_a} = [mm] \quad \mathbf{a}_B^n = \omega_1^2 L_{AB} \quad \mathbf{a}_B^t = \epsilon_1 L_{AB}$$

Подобие:

Многоъгълника образуван от върховете на скоростите в плана на скоростите е подобен на многоъгълника образуван от едноименните точки в плана на положението:

$$\Delta BCD \approx \Delta bcd \approx \Delta b'c'd'$$

Планове на скоростите и ускоренията при сложно движение на точките от звената: абсолютно, относително и преносно движение.

Теорема за събиране на скоростите $\dot{\mathbf{V}}_A = \dot{\mathbf{V}}_e + \dot{\mathbf{V}}_r$

абсолютна=преносна + относителна

1 случай - при плоско движение преносното не е постъпателно, а относителното е въртеливо

Ускорения:

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r^n + \mathbf{a}_r^t$$

Означения и индекси $\dot{\mathbf{V}}_{D2}$, $\dot{\mathbf{V}}_{D2D3}$, $\dot{\mathbf{V}}_{D2DC2}$

$$\dot{\underline{V}}_A = \dot{\underline{V}}_e + \dot{\underline{V}}_r$$

$$\underline{\mathbf{r}}_a = \underline{\mathbf{r}}_e + \underline{\mathbf{r}}_r = \underline{\mathbf{r}}_e + \underline{\mathbf{r}}_r^n + \underline{\mathbf{r}}_r^t$$

$$\underline{\underline{V}}_C = \underline{\underline{V}}_B + \underline{\underline{V}}_{CB}$$

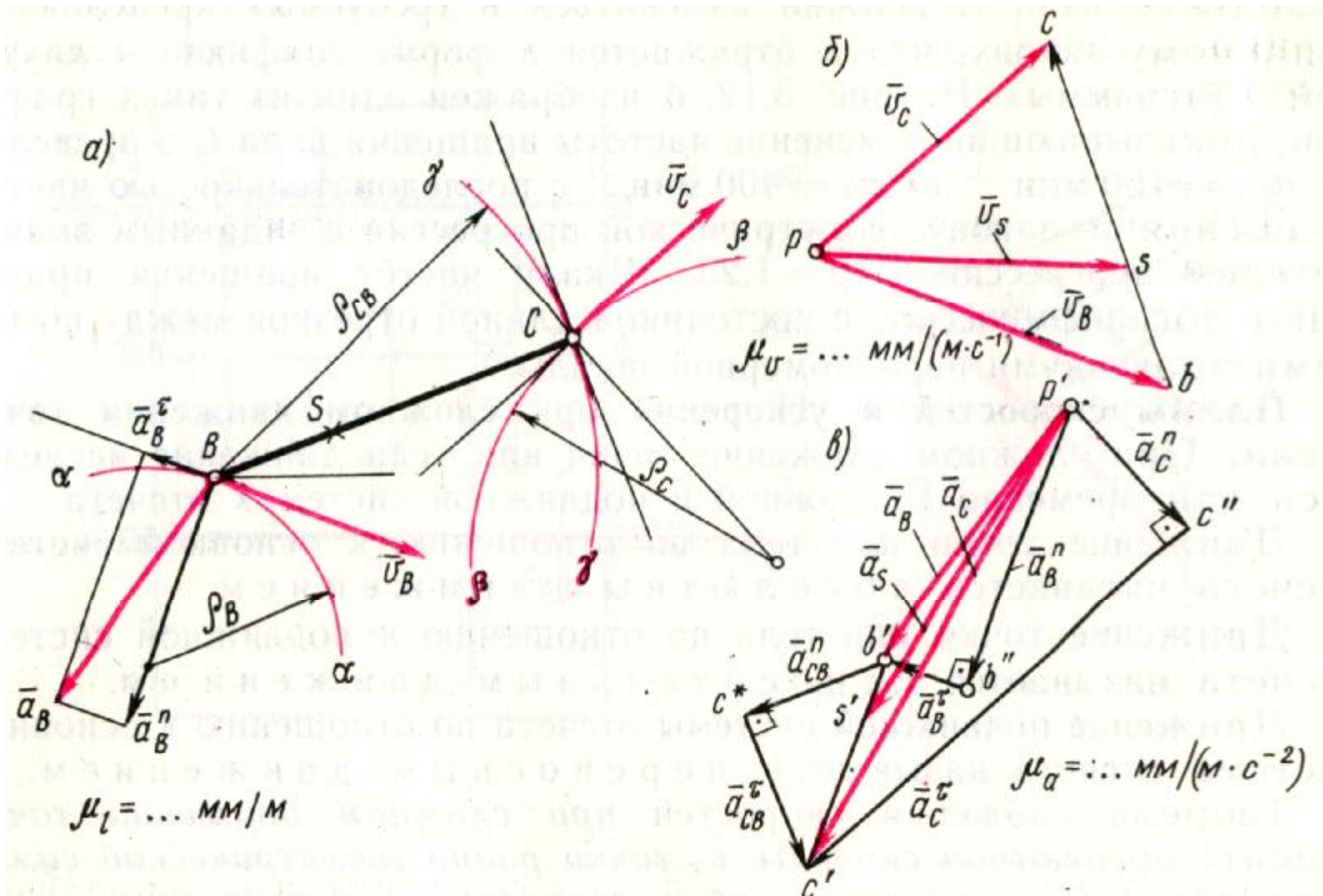
$$\underline{\mathbf{r}}_a^n + \underline{\mathbf{r}}_a^t = \underline{\mathbf{r}}_B^n + \underline{\mathbf{r}}_B^t + \underline{\mathbf{r}}_{CB}^n + \underline{\mathbf{r}}_{CB}^t$$

$$\underline{\mathbf{r}}_a^n = \frac{V_C^2}{r_C}$$

$$\underline{\mathbf{r}}_B^n = \frac{V_B^2}{r_B}$$

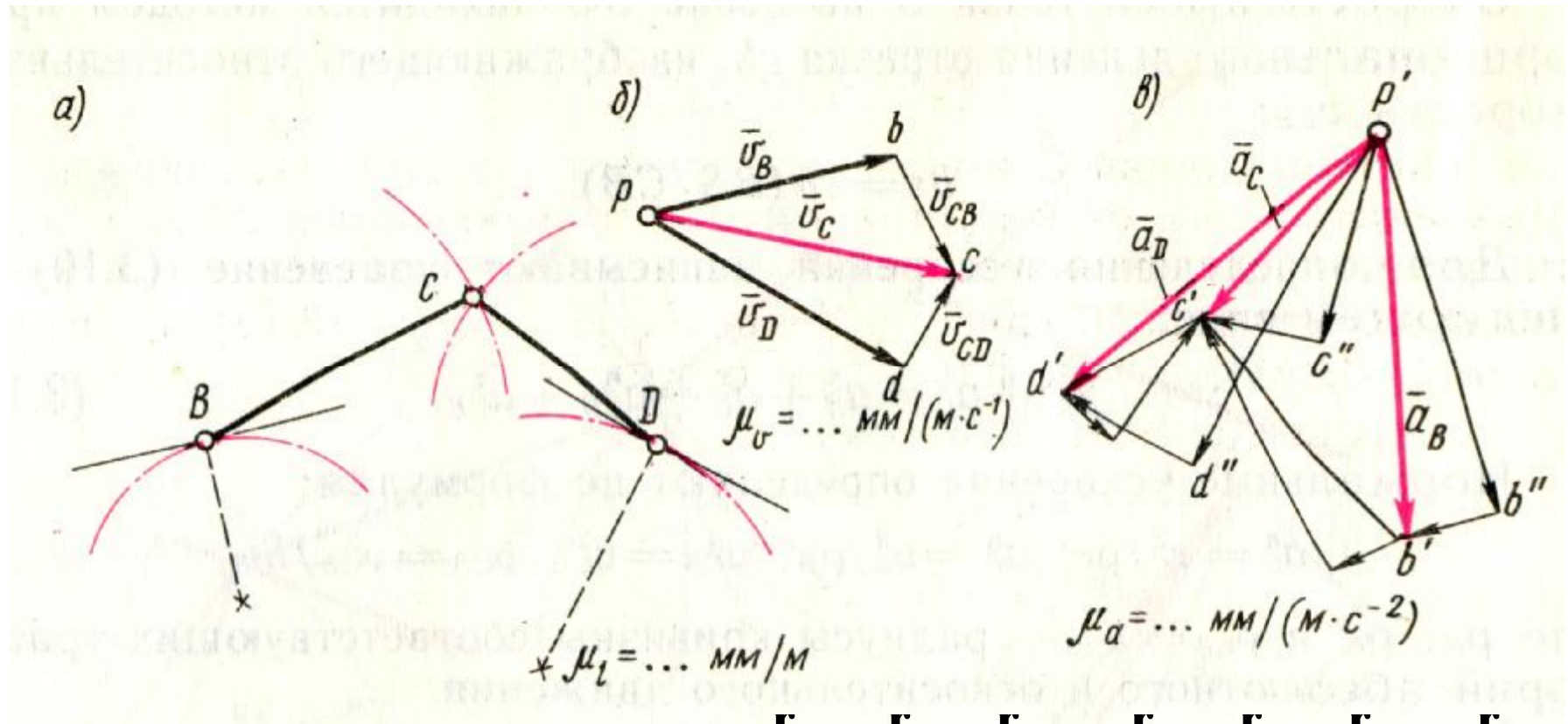
$$\underline{\mathbf{r}}_{a_{CB}}^n = \frac{V_{CB}^2}{r_{CB}} = \frac{V_{CB}^2}{L_{CB}}$$

$$\underline{\mathbf{r}}_a^t = \frac{dV_B}{dt}$$



Скоростта и ускорението на произволна точка се намират като се използва пропорционалността (подобие) на фигурите в плана на положението и в плановете на скоростите и ускоренията.

Асурова група с три въртящи се звена:



$$\underline{\underline{\underline{\mathbf{V}}_C}} = \underline{\underline{\underline{\mathbf{V}}_B}} + \underline{\underline{\underline{\mathbf{V}}_{CB}}}$$

$$\underline{\underline{\underline{\mathbf{V}}_C}} = \underline{\underline{\underline{\mathbf{V}}_D}} + \underline{\underline{\underline{\mathbf{V}}_{CD}}}$$

$$\underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}_C}} = \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}_B}} + \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}_{CB}}} = \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}_B^n}} + \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}_B^t}} + \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}_{CB}^n}} + \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}_{CB}^t}}$$

$$\underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}_C}} = \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}_D}} + \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}_{CD}}} = \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}_D^n}} + \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}_D^t}} + \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}_{CD}^n}} + \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}_{CD}^t}}$$

$$\underline{\underline{\underline{\mathbf{V}}_B}} + \underline{\underline{\underline{\mathbf{V}}_{CB}}} = \underline{\underline{\underline{\mathbf{V}}_D}} + \underline{\underline{\underline{\mathbf{V}}_{CD}}}$$

$$\underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}_B^n}} + \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}_B^t}} + \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}_{CB}^n}} + \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}_{CB}^t}} = \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}_D^n}} + \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}_D^t}} + \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}_{CD}^n}} + \underline{\underline{\underline{\mathbf{a}}_{CD}^t}}$$

$$V_B = V_A + V_{BA}$$

$$V_B = V_C + V_{BC}$$

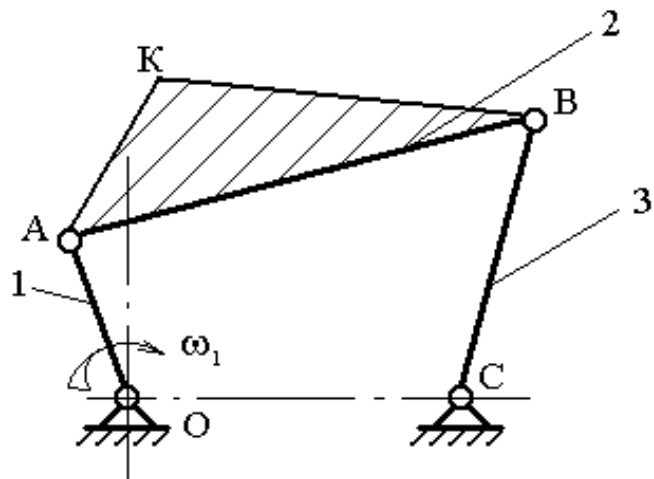
$$V_K = V_A + V_{KA'}$$

$$V_K = V_B + V_{KB'}$$

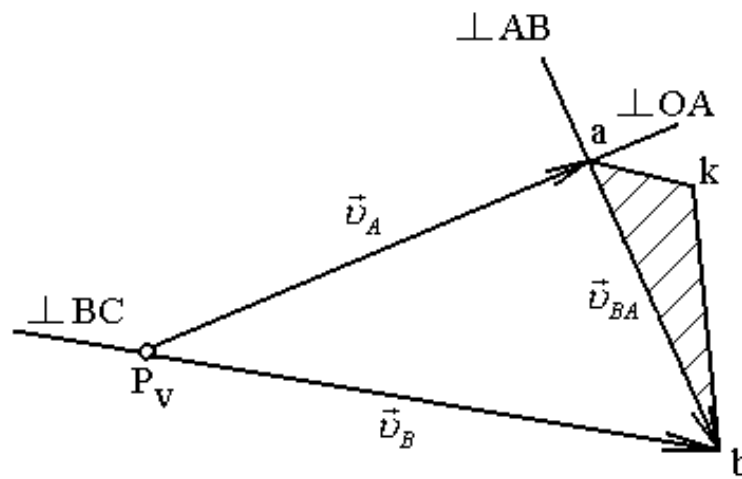
$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{AO} = \mathbf{a}_{AO}^n + \mathbf{a}_{AO}^t,$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{BA}^t,$$

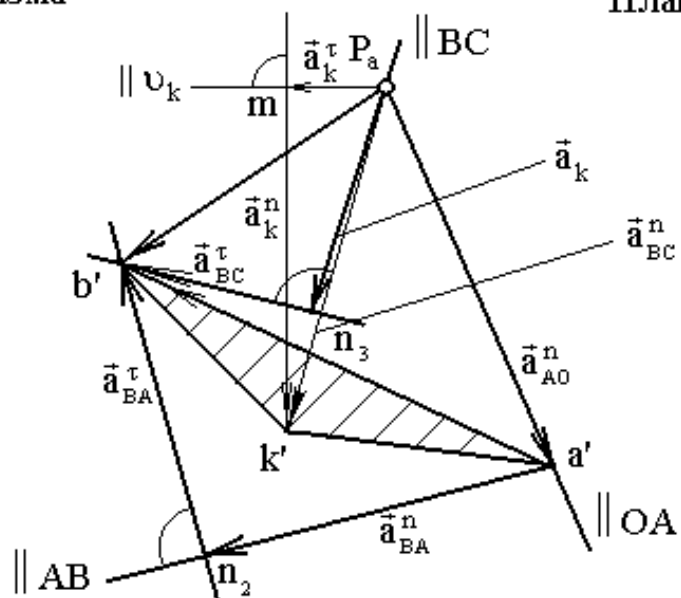
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{BC}^n + \mathbf{a}_{BC}^t,$$



План механизма



План скоростей

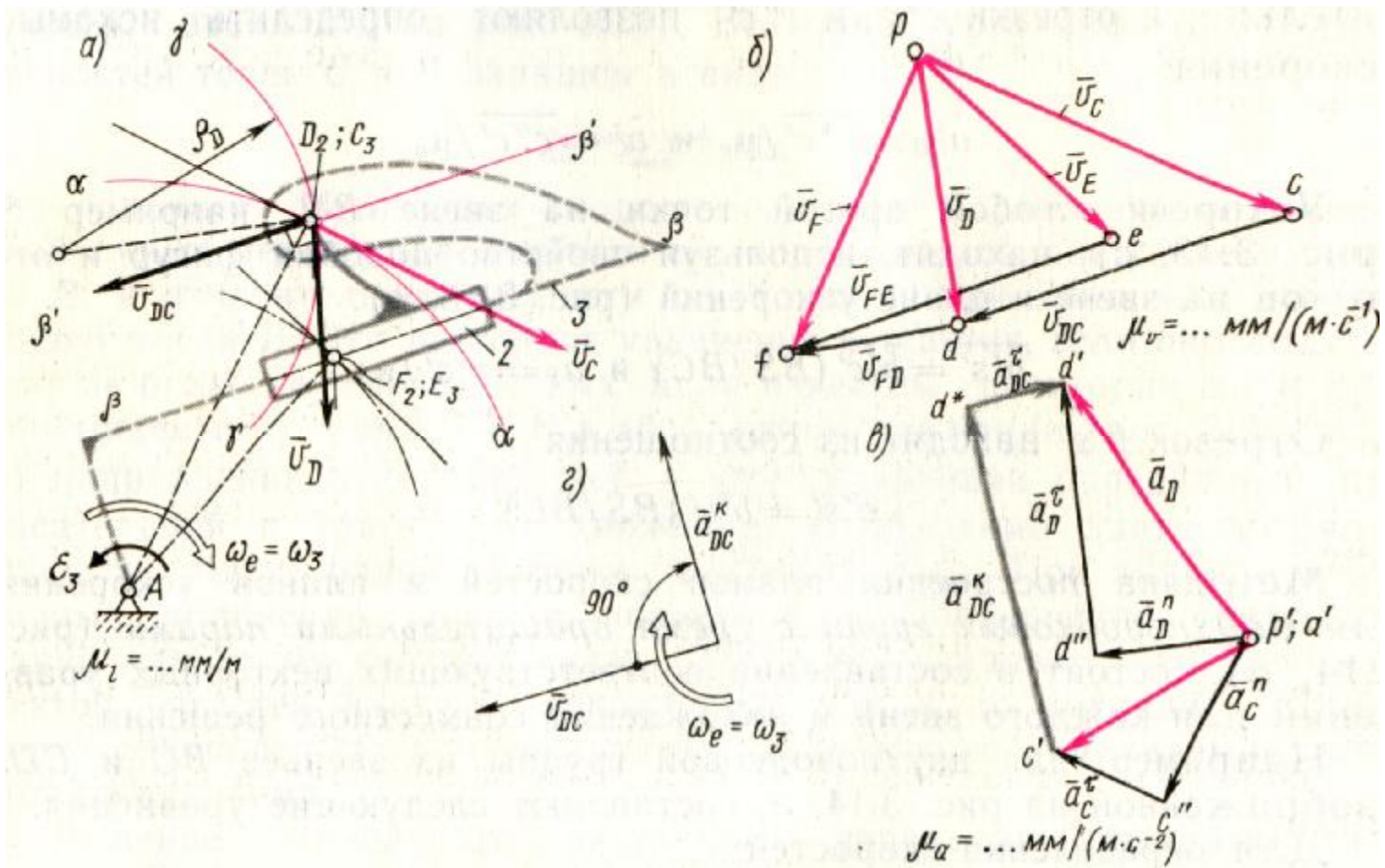


2 случай –

при плоско движение преносното е постъпателно

$$\dot{\mathbf{V}}_a = \dot{\mathbf{V}}_e + \dot{\mathbf{V}}_r$$

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_k = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + 2 \times \left(\mathbf{w}_e \times \dot{\mathbf{V}}_r \right)$$



$$\dot{V}_a = \dot{V}_e + \dot{V}_r \quad \dot{V}_D = \dot{V}_C + \dot{V}_{DC} \quad \dot{V}_{F2} = \dot{V}_{E3} + \dot{V}_{F2E3} \quad \dot{V}_{F2} = \dot{V}_E + \dot{V}_{FE} \quad \dot{V}_{FE} = \dot{V}_{DC}$$

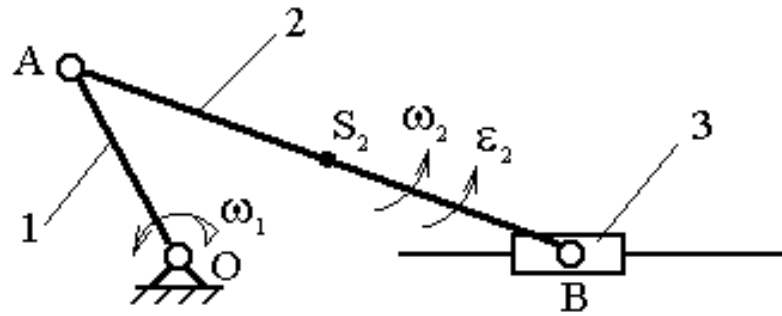
$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_e + \mathbf{r}_r + \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_e + \mathbf{r}_r + 2 \times (\mathbf{r}_e \times \dot{V}_r) \quad \mathbf{r}_D = \mathbf{r}_C + \mathbf{r}_{DC} + \mathbf{r}_{DC}^k \quad \mathbf{r}_D^n + \mathbf{r}_D^t = \mathbf{r}_C^n + \mathbf{r}_C^t + \mathbf{r}_{DC}^k$$

$$\mathbf{r}_D^n = \dot{V}_D^2 / r_D \quad \mathbf{r}_C^n = \dot{V}_C^2 / r_C \quad \mathbf{r}_{DC}^n = \dot{V}_{DC}^2 / r_{DC} = \dot{V}_{DC}^2 / \infty = 0 \quad a_C^t = e_3 r_C \quad a_{DC}^k = 2\mathbf{r}_e \times \dot{V}_r = 2\mathbf{r}_3 \times \dot{V}_{DC}$$

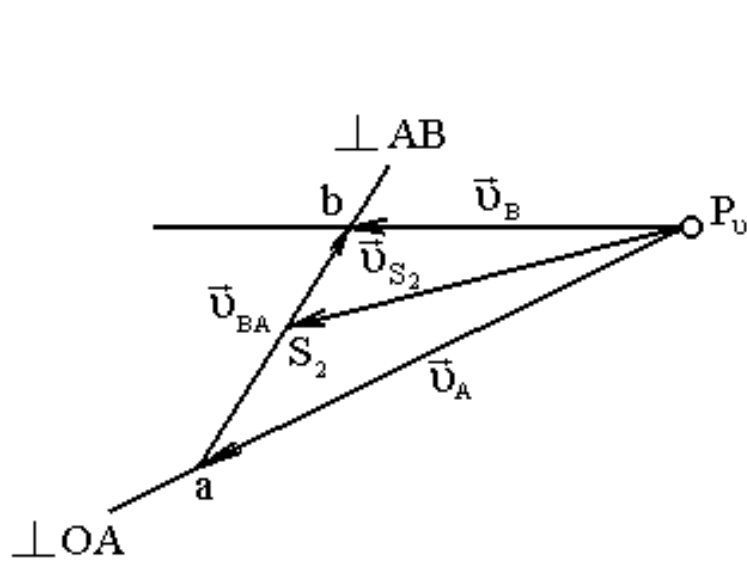
**Асурова група с две въртящи и едно
плъзгащо се звена (RRP) :**

$$V_B = V_A + V_{BA},$$

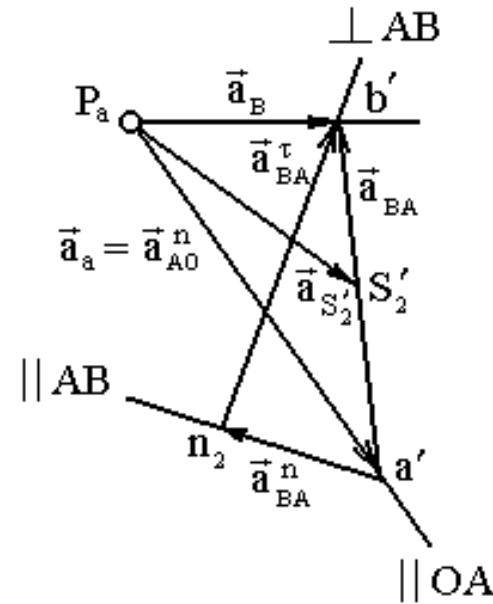
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{BA}^t, \quad \mathbf{a}_A = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{AO}, \quad \mathbf{a}_{AO} = \mathbf{a}_{AO}^n + \mathbf{a}_{AO}^{\tau}.$$



План механизма (в масштабе длин μ_L)

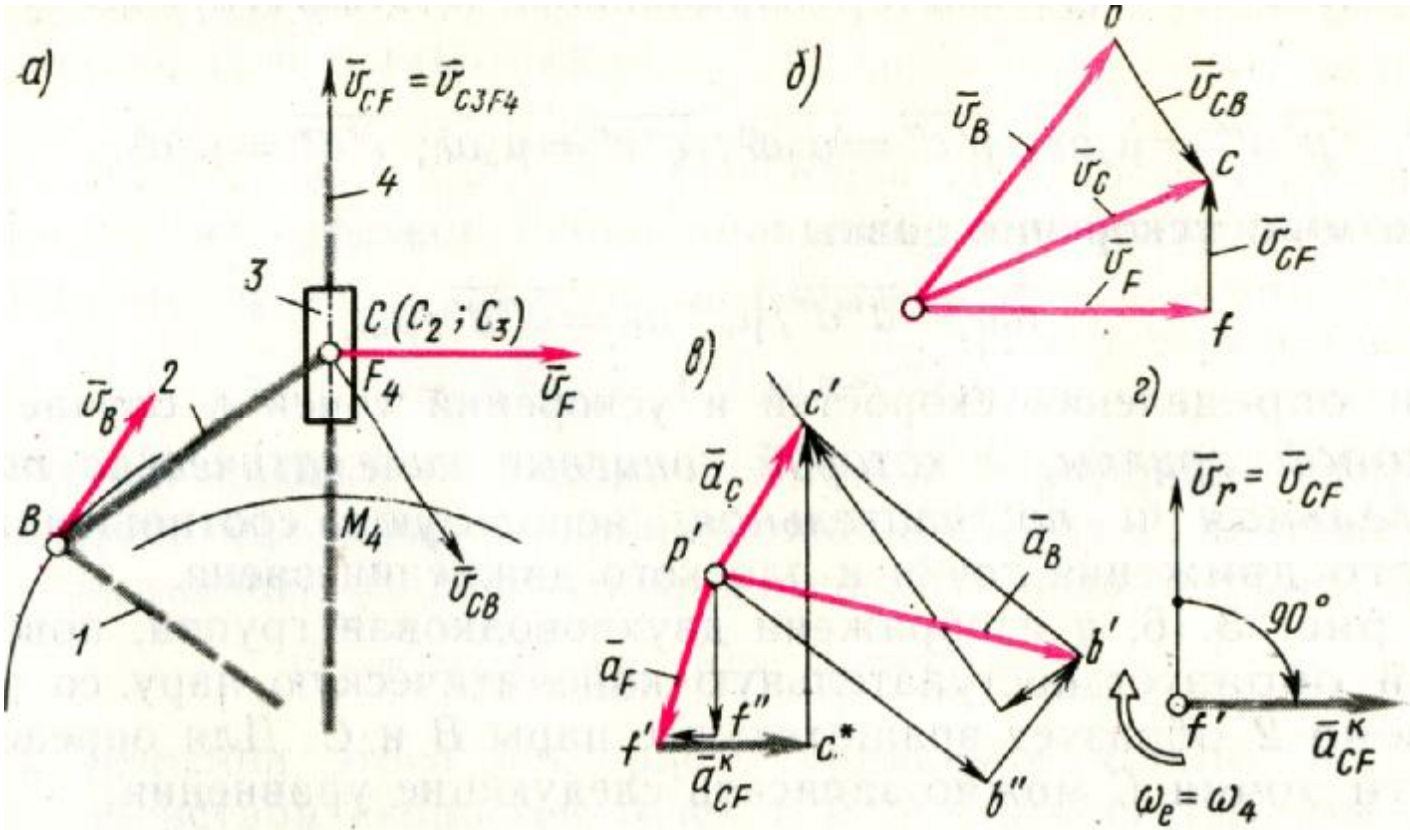


План скоростей



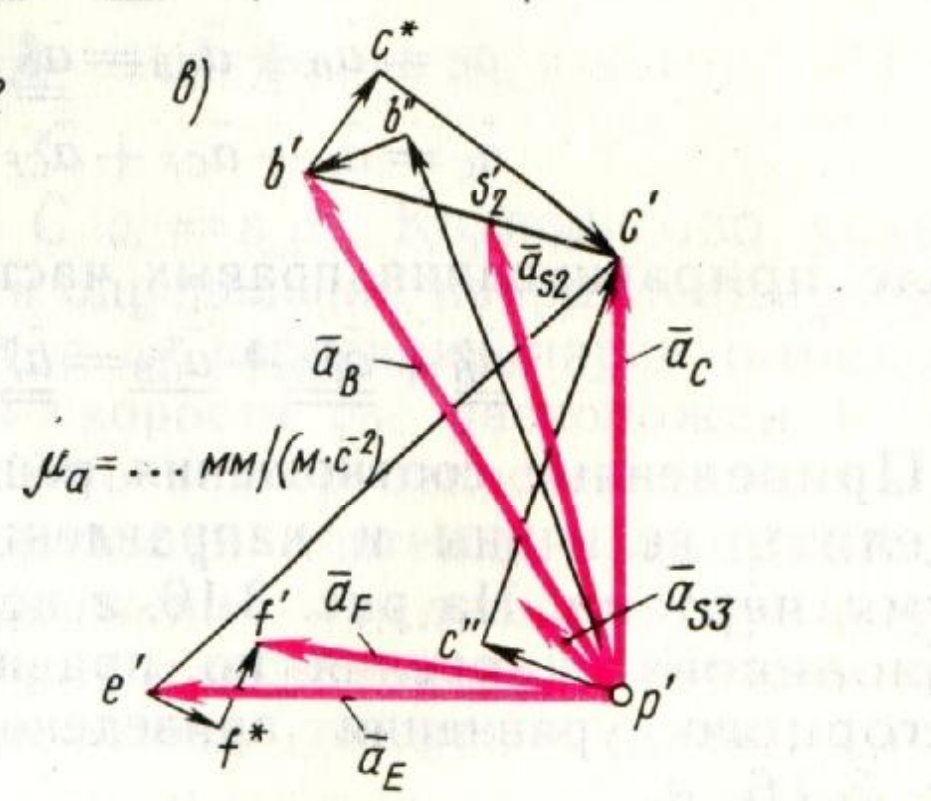
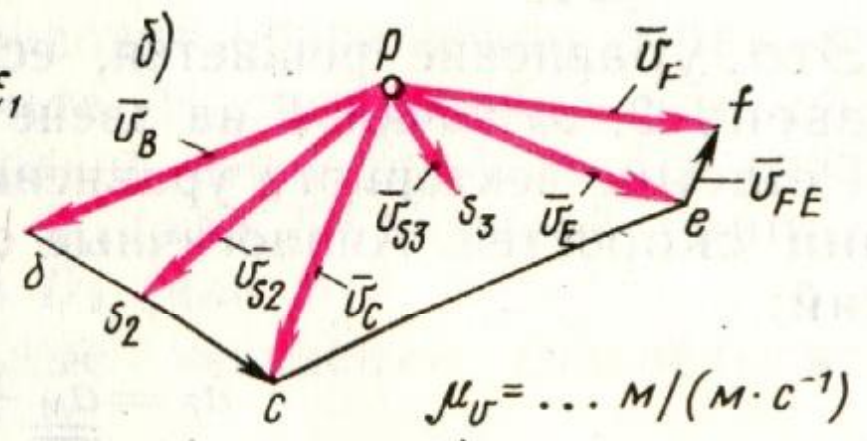
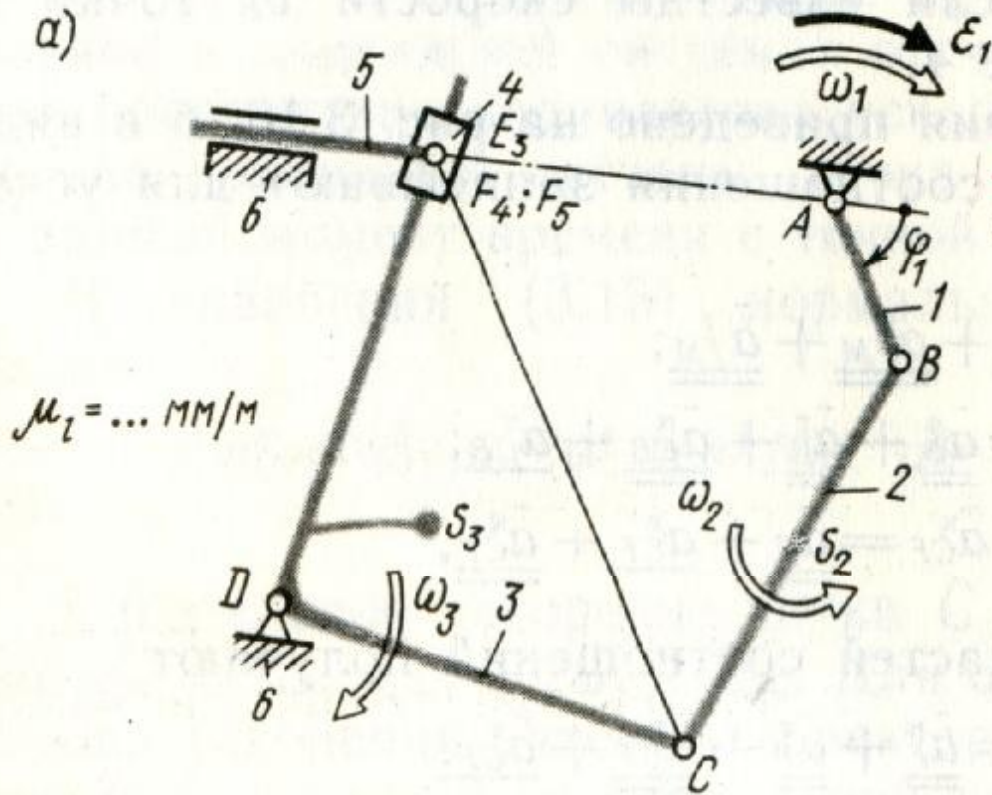
План ускорений

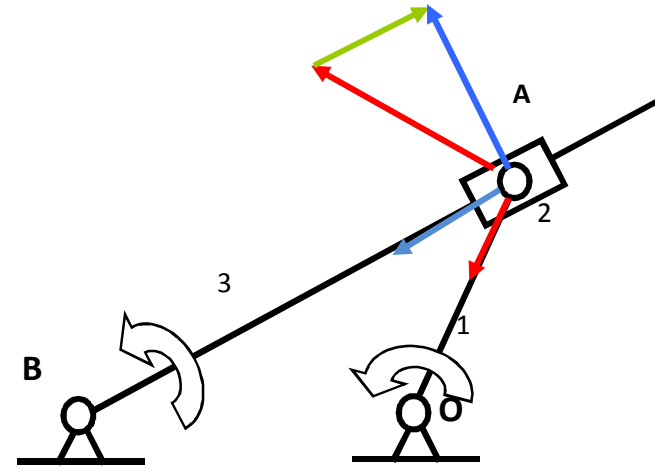
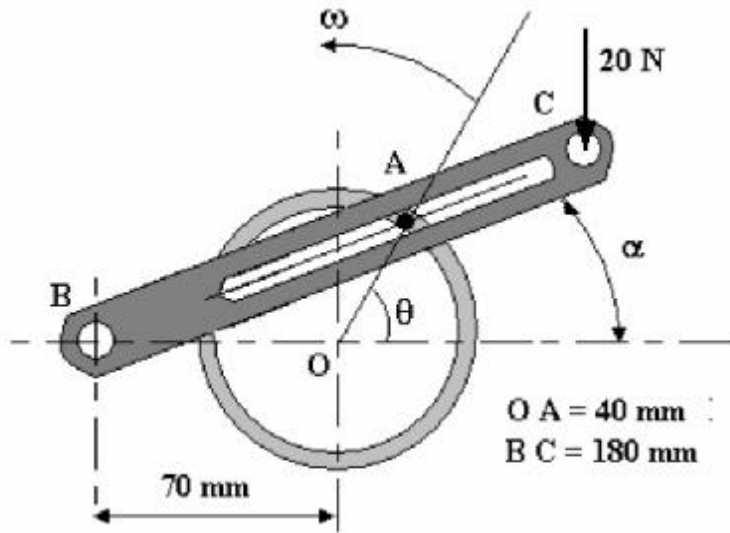
$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}_C &= \dot{\mathbf{V}}_B + \dot{\mathbf{V}}_{CB} \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{V}}_C &= \dot{\mathbf{V}}_F + \dot{\mathbf{V}}_{CF} \\ \dot{\mathbf{V}}_F &= \dot{\mathbf{V}}_M + \dot{\mathbf{V}}_{FM} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \underline{\underline{\dot{\mathbf{V}}_B}} + \underline{\underline{\dot{\mathbf{V}}_{CB}}} &= \underline{\underline{\dot{\mathbf{V}}_F}} + \underline{\underline{\dot{\mathbf{V}}_{CF}}} & \mathbf{r} \underline{\underline{a_F}} &= \underline{\underline{a_M}} + \underline{\underline{a_{FM}^n}} + \underline{\underline{a_{FM}^t}} \\ \mathbf{r} \underline{\underline{a_C}} &= \mathbf{r} \underline{\underline{a_B}} + \mathbf{r} \underline{\underline{a_{CB}}} = \underline{\underline{a_B^n}} + \underline{\underline{a_B^t}} + \underline{\underline{a_{CB}^n}} + \underline{\underline{a_{CB}^t}} \\ \mathbf{r} \underline{\underline{a_C}} &= \mathbf{r} \underline{\underline{a_F}} + \mathbf{r} \underline{\underline{a_{CF}}} + \mathbf{r} \underline{\underline{a_{CF}^k}} = \underline{\underline{a_F}} + \underline{\underline{a_{CF}^t}} + \underline{\underline{a_{CF}^k}} \\ \underline{\underline{a_B^n}} + \underline{\underline{a_B^t}} + \underline{\underline{a_{CB}^n}} + \underline{\underline{a_{CB}^t}} &= \underline{\underline{a_F}} + \underline{\underline{a_{CF}^t}} + \underline{\underline{a_{CF}^k}} = \underline{\underline{a_F}} + \underline{\underline{a_{CF}^t}} + \underline{\underline{a_{CF}^k}} \end{aligned}$$

**Механизъм с две Асурови групи
(PRP) и (RRP) :**

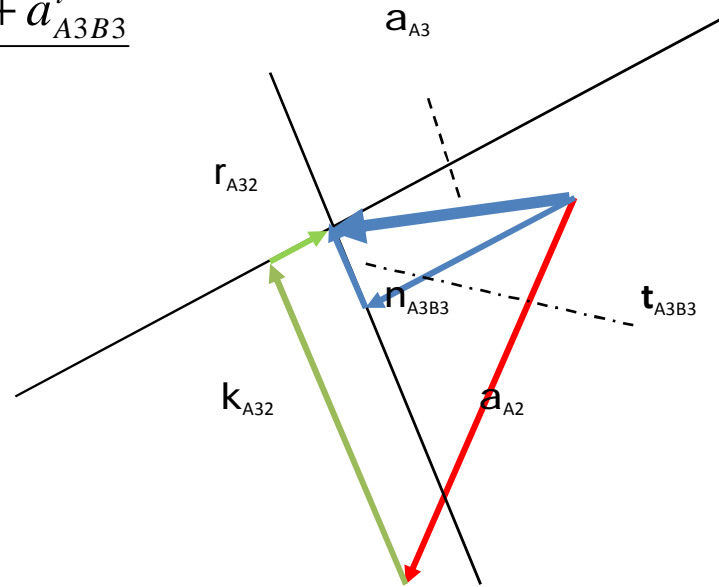
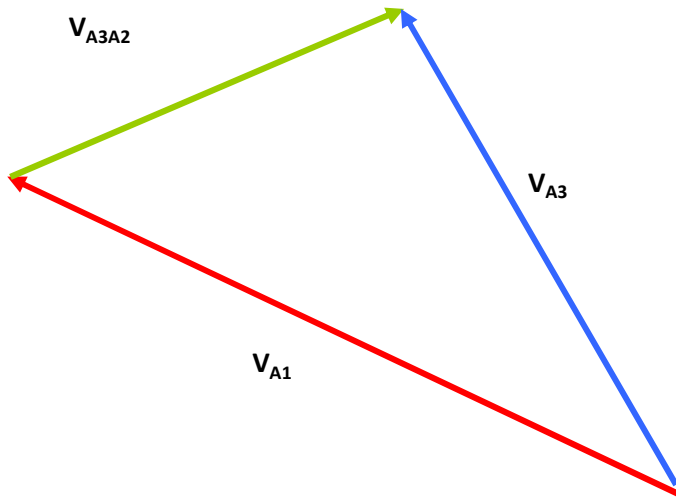


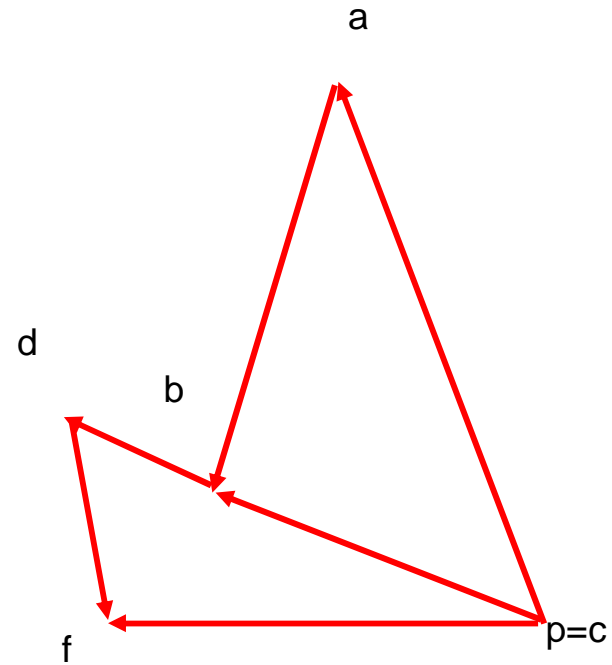
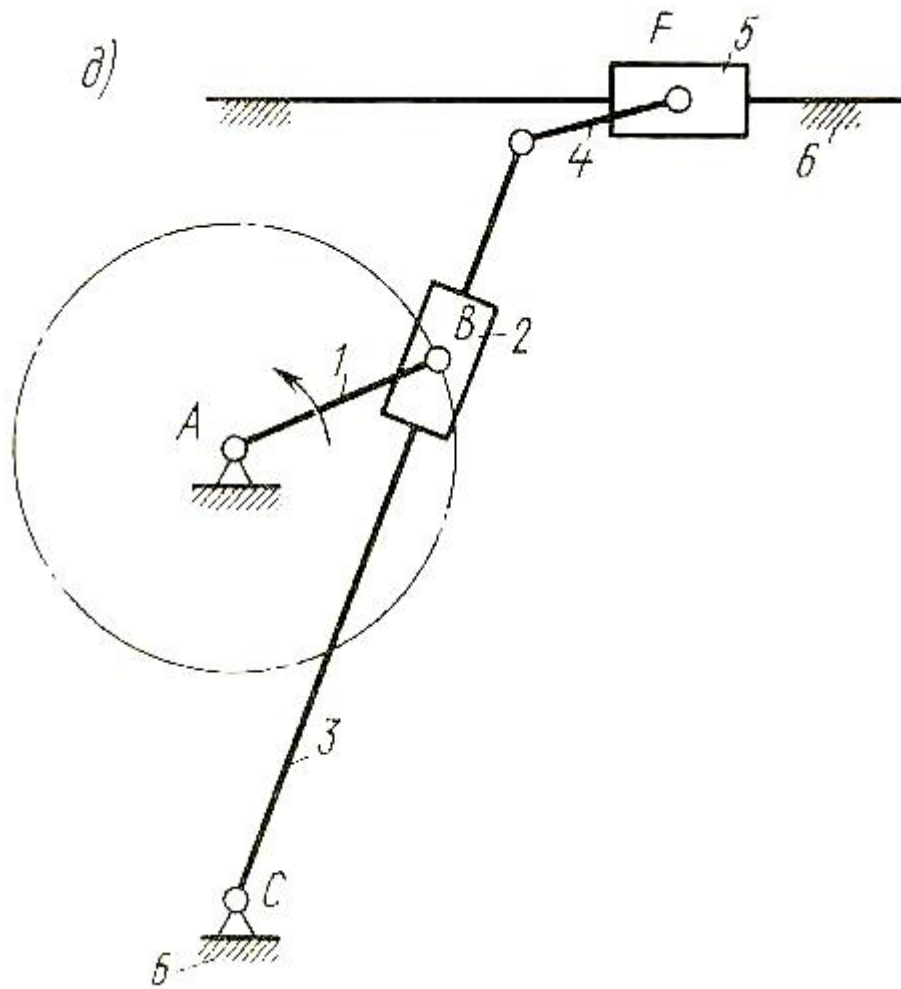


$$\begin{cases} \underline{\mathbf{r}}_{V_{A3}} = \underline{\mathbf{r}}_{V_{A2}} + \underline{\mathbf{r}}_{V_{A32}} \\ \underline{\mathbf{r}}_{V_{A3}} = \underline{\mathbf{r}}_{V_{B3}} + \underline{\mathbf{r}}_{V_{A3B3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{r}}_{a_{A3}} = \underline{\mathbf{r}}_{a_{A2}} + \underline{\mathbf{r}}_{a_{A32}^k} + \underline{\mathbf{r}}_{a_{A32}^r} \\ \underline{\mathbf{r}}_{a_{A3}} = \underline{\mathbf{r}}_{a_{B3}} + \underline{\mathbf{r}}_{a_{A3B3}^n} + \underline{\mathbf{r}}_{a_{A3B3}^t} \end{cases}$$

$$\underline{\mathbf{r}}_{a_{A32}^k} = 2\omega_3 \times \underline{\mathbf{r}}_{A3A2} \quad \underline{\mathbf{r}}_{a_{A3B3}^n} = \omega_3^2 \overline{BA}$$





$$|\underline{\dot{V}}_{B2}| = \omega_1 \cdot \overline{AB} \left[\frac{m}{s} \right]$$

$$\omega_3 = \frac{|\underline{\dot{V}}_{B3}|}{\overline{CB}}$$

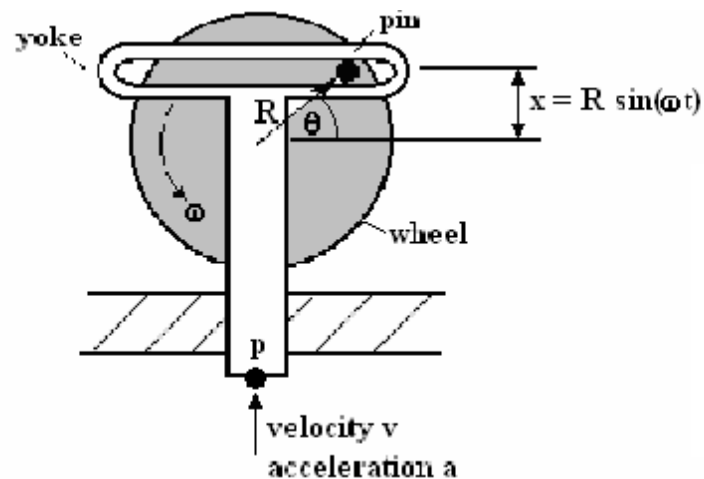
$$\underline{\dot{V}}_{D4} = \underline{\dot{V}}_{D3}$$

$$\begin{aligned} \underline{\dot{V}}_{B3} &= \underline{\dot{V}}_{B2} + \underline{\dot{V}}_{B3B2} \\ \underline{\dot{V}}_{B3} &= \underline{\dot{V}}_c + \underline{\dot{V}}_{B3C3} \end{aligned}$$

$$\underline{\dot{V}}_{D3} = \omega_3 \cdot \overline{CD} \left[\frac{m}{s} \right]$$

$$\underline{\dot{V}}_{F4} = \underline{\dot{V}}_{D4} + \underline{\dot{V}}_{F4D4}$$

Синусов механизъм



Angle $\theta = \omega t$

Displacement $x = R \sin(\omega t)$.

Velocity $v = dx/dt = \omega R \cos(\omega t)$

Acceleration $a = dv/dt = -\omega^2 R \sin(\omega t)$