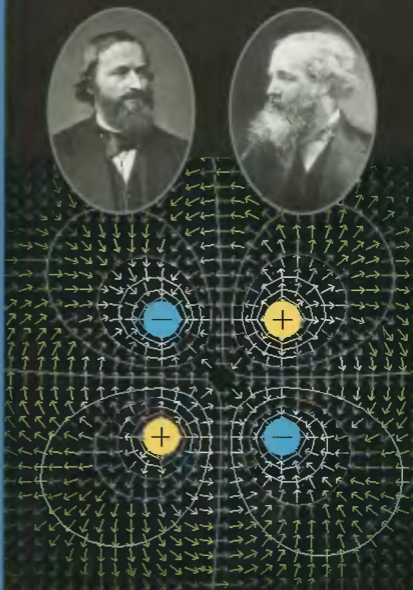


К. Брандиски
Ж. Георгиев
В. Младенов
Р. Станчева

Част I

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА



К. Брандиски

Ж. Георгиев

В. Младенов

Р. Станчева

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА

ЧАСТ I

КИНГ

© К. Брандиски, Ж. Георгиев, автори, 2004
© В. Младенов, Р. Станчева, автори, 2004

ИК КИНГ, 2004

ISBN 954-9518-28-0

СЪДЪРЖАНИЕ

Предговор.....	7
1. ВЪВЕДЕНИЕ В ЕЛЕКТРИЧЕСКИТЕ ВЕРИГИ.....	9
1.1. Определения, класификации, идеализации.....	9
1.1.1. Класификация на елементите в електрическата верига.....	10
1.1.2. Класификация на електрическите вериги.....	11
1.2. Схеми на идеални и на реални елементи на веригата.....	12
1.2.1. Схеми на източници на енергия.....	12
1.2.2. Схеми на пасивни елементи.....	16
1.3. Закони за анализ на електрическите вериги.....	22
1.3.1. Първи закон на Кирхоф.....	22
1.3.2. Втори закон на Кирхоф.....	23
1.3.3. Обобщен закон на Ом.....	25
1.4. Променливи режими в електрическите вериги.....	27
1.4.1. Периодични режими.....	27
1.5. Синусоидални (хармонични) сигнали.....	30
1.5.1. Фази и фазови разлики.....	31
1.5.2. Изобразяване на синусоидални сигнали с вектори.....	32
1.5.3. Изобразяване на синусоидални сигнали с комплекси.....	34
1.5.4. Мощности при синусоидален режим.....	37
1.6. Синусоидален режим при прости линейни електрически вериги.....	44
1.6.1. Въведение.....	44
1.6.2. Верига с един идеален елемент.....	44
1.6.3. Верига от последователно съединени резистор R , индуктивен елемент L и кондензаторен елемент C	49
1.6.4. Двуполусник от паралелно съединени резистор G , индуктивен елемент L и кондензаторен елемент C	54
1.7. Комплексна форма на законите за анализ на електрическите вериги.....	58
1.8. Преобразуване на електрически вериги без индуктивна връзка.....	60
1.8.1. Преобразуване на пасивни участъци.....	61
1.8.2. Преобразуване на активни участъци от веригата.....	69
2. МЕТОДИ И ТЕОРЕМИ ЗА АНАЛИЗ НА ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ.....	81
2.1. Методи за анализ на вериги при променлив ток.....	82
2.1.1. Топология на електрическите вериги.....	82
2.1.2. Метод с клонови токове.....	85
2.1.3. Метод с контурни токове.....	92
2.1.4. Метод с възлови потенциали.....	98
2.1.5. Метод с наслагване.....	110
2.2. Свойства и теореми за електрически вериги.....	116
2.2.1. Пасивност и активност.....	116
2.2.2. Линейност.....	117
2.2.3. Взаимност и обратимост.....	121
2.2.4. Теорема за компенсацията.....	127
2.2.5. Теорема на Тевенен и Нортън.....	128
2.2.6. Теорема на вариациите.....	135
2.2.7. Условия за предаване на максимална активна мощност на консуматор.....	137
2.2.8. Теорема на Ланжвен.....	140
2.2.9. Теорема на Теледжен.....	141
3. РЕЗОНАНС.....	142
3.1. Увод.....	142
3.2. Напрежителен резонанс в последователна RLC верига.....	143
3.2.1. Енергийни процеси в последователен резонансен контур.....	146

3.3.	Токов резонанс в паралелна GLC верига.....	151
3.3.1.	Енергийни процеси в паралелна резонансна верига.....	152
3.4.	Резонанс в сложни вериги.....	153
4.	СИНУСОИДАЛЕН РЕЖИМ В ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ С ИНДУКТИВНИ ВРЪЗКИ.....	161
4.1.	Въведение.....	161
4.2.	Едноименни изводи.....	164
4.3.	Напрежителни падове от електромагнитна индукция.....	166
4.3.1.	Определяне на напрежителните падове.....	166
4.3.2.	Знак на напрежителния пад от взаимна индукция.....	169
4.4.	Приложение на методите и на теоремите за анализ във вериги с индуктивни връзки	172
4.5.	Отстраняване на индуктивната връзка.....	173
4.5.1.	Преобразуване на триполюсно съединение.....	173
4.5.2.	Преобразуване на последователно съединение от двуполусници.....	177
4.5.3.	Преобразуване на паралелно съединение от два двуполусника.....	179
4.6.	Предаване на активна мощност по индуктивен път.....	179
4.7.	Трансформаторно съединение.....	182
4.7.1.	Уравнения на линеен трансформатор.....	183
4.7.2.	Векторна диаграма.....	184
4.7.3.	Еквивалентни схеми на линеен трансформатор.....	186
4.7.4.	Идеален трансформатор.....	189
4.8.	Резонанс в индуктивно свързани колебателни контури.....	190
5.	ЛИНЕЙНИ МАГНИТНИ ВЕРИГИ.....	194
5.1.	Увод.....	194
5.2.	Магнитно съпротивление. Закон на Ом за магнитен участък.....	197
5.3.	Обобщен закон на Ом за магнитен клон.....	199
5.4.	Закони на Кирхоф за магнитна верига.....	200
5.5.	Еквивалентни електрически схеми на магнитните вериги.....	201
6.	МАТРИЧНИ МЕТОДИ ЗА АНАЛИЗ НА ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ.....	205
6.1.	Структурни матрици.....	205
6.1.1.	Възлова матрица.....	205
6.1.2.	Матрица на сеченията.....	207
6.1.3.	Контурна матрица	208
6.1.4.	Връзки между структурните матрици.....	209
6.1.5.	Специална форма на структурните матрици.....	210
6.2.	Матрична форма на метода с клоновите токове за изследване на електрически вериги.....	215
6.3.	Матрична обосновка на метода с контурните токове.....	219
6.4.	Матрична обосновка на метода с възловите потенциали	223
6.5.	Матрична форма на модифицирания метод с възловите потенциали (ММВП).....	229
7.	МЕТОД НА СИГНАЛНИТЕ ГРАФИ.....	237
7.1.	Увод.....	237
7.2.	Преобразуване на сигнални графи.....	242
7.3.	Формула на Мейсън.....	246
8.	ПЕРИОДИЧНИ НЕСИНУСОИДАЛНИ ПРОЦЕСИ В ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ.....	252
8.1.	Увод.....	252
8.2.	Хармоничен анализ – представяне на несинусоидалните функции в ред на Фурие.....	253
8.3.	Определяне на коефициентите A_k и S_k в реда на Фурие.....	254
8.3.1.	Комплексна форма на реда на Фурие.....	256
8.4.	Влияние на симетрията на сигнала върху хармоничния му състав.....	258

8.5.	Ефективни стойности при несинусоидални режими.....	259
8.6.	Мощности при несинусоидални режими.....	260
8.7.	Анализ на периодични несинусоидални режими в линейни вериги.....	261
8.8.	Характеристични коефициенти при несинусоидални режими.....	265
8.9.	Измерване на несинусоидални токове и напрежения.....	267
9.	ТРИФАЗНИ ВЕРИГИ.....	268
9.1.	Увод.....	268
9.1.1.	Симетрична трифазна система	268
9.1.2.	Трифазни вериги.....	270
9.2.	Работни режими на трифазни вериги.....	272
9.2.1.	Изследване на симетричен режим при статичен товар.....	272
9.2.2.	Изследване на несиметричен режим в трифазни вериги.....	277
9.3.	Движещи се магнитни полета	281
9.3.1.	Пулсиращо магнитно поле.....	281
9.3.2.	Въртящо се кръгово магнитно поле на двуфазна токова система	283
9.3.3.	Въртящо се кръгово магнитно поле на трифазна токова система.....	285
9.3.4.	Бягащо магнитно поле на линейно разпределена намотка.....	289
9.4.	Метод със симетричните съставки.....	291
9.4.1.	Свойства на несиметричните трифазни вериги спрямо симетричните съставки.....	292
9.4.2.	Филтри за симетрични съставки.....	293
9.4.3.	Съпротивления на трифазните вериги за токовете от симетричните токови подсистеми.....	295
9.4.4.	Анализ на аварийни режими по метода със симетричните съставки.....	298
9.5.	Мощности в трифазни вериги.....	302
9.5.1.	Мощности при симетричен работен режим.....	304
9.5.2.	Определяне на мощностите с помощта на симетричните съставки.....	304
9.6.	Несинусоидален режим в трифазни вериги.....	305
9.6.1.	Особености в хармоничния състав на фазните величини.....	305
9.6.2.	Хармоници в трифазни вериги при съединение звезда.....	307
9.6.3.	Хармоници в трифазни вериги при съединение триъгълник.....	309
10.	ЧЕТИРИПОЛЮСНИЦИ.....	311
10.1.	Основни определения и класификации.....	311
10.1.1.	Основни положения.....	311
10.1.2.	Основни класификации.....	311
10.2.	Системи уравнения на пасивни четириполусници.....	313
10.2.1.	Y-система уравнения.....	313
10.2.2.	Z-система уравнения.....	314
10.2.3.	Предавателни системи уравнения.....	315
10.2.4.	Хибридни системи уравнения.....	318
10.3.	Опитно определяне параметрите на пасивни четириполусници.....	322
10.4.	Заместващи схеми на пасивни четириполусници.....	324
10.4.1.	T-четириполусник.....	325
10.4.2.	P-четириполусник.....	326
10.4.3.	Заместващи схеми със зависими източници, базирани на системите уравнения на четириполусника.....	328
10.5.	Комплексни входни, повторни и характеристични съпротивления на пасивен четириполусник.....	329
10.5.1.	Комплексни входни съпротивления.....	329
10.5.2.	Комплексни повторни съпротивления.....	331
10.5.3.	Комплексни характеристични съпротивления.....	331
10.6.	Константа на разпространение на взаимен четириполусник. Хиперболичен вид на A-системата уравнения на взаимен четириполусник.....	333
10.6.1.	Константа на разпространение на взаимен четириполусник.....	333
10.6.2.	Хиперболичен вид на A-системата уравнения на взаимен четириполусник.....	334
10.7.	Коефициенти на предаване на пасивни четириполусници.....	338
10.7.1.	Комплексен коефициент на предаване по напрежение.....	338

10.7.2. Комплексен коефициент на предаване по ток.....	339
10.8. Съединения на пасивни четириполусници.....	340
10.8.1. Верижно съединение.....	340
10.8.2. Паралелно съединение.....	341
10.8.3. Последователно съединение.....	342
10.9. Невзаимни и активни четириполусници.....	345
10.9.1. Невзаимни четириполусници.....	345
10.9.2. Активни четириполусници.....	351
10.10. Многополусници.....	353
11. ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ С РАЗПРЕДЕЛЕНИ ПАРАМЕТРИ.....	355
11.1. Основни положения.....	355
11.2. Уравнения за анализ на процеси в еднородна линия.....	356
11.3. Стационарни синусоидални процеси в еднородна линия. Комплексен вид на телеграфните уравнения и техните решения.....	358
11.3.1. Уравнения за еднородна линия при стационарен синусоидален режим.....	358
11.3.2. Комплексни решения на телеграфните уравнения при зададени гранични условия в началото на линията.....	361
11.3.3. Комплексни решения на телеграфните уравнения при зададени гранични условия в края на линията.....	362
11.4. Падащи и отразени вълни. Реални решения на телеграфните уравнения и техните характеристики.....	364
11.5. Входно съпротивление на линията.....	368
11.6. Коефициенти на отражение.....	369
11.7. Уравнения на еднородна линия при различни режими на работа.....	371
11.7.1. Късо съединение в края на линията и прекъсване в края на линията.....	371
11.7.2. Режим на съгласувано натоварване на линията.....	372
11.8. Линия без загуби. Стоящи вълни.....	374
11.8.1. Общи зависимости и уравнения.....	374
11.8.2. Частни случаи.....	375
11.9. Линия без изкривявания.....	380
12. ЗАВИСИМИ ИЗТОЧНИЦИ. ОПЕРАЦИОННИ УСИЛВАТЕЛИ.....	383
12.1. Увод.....	383
12.2. Въвеждане на зависимите източници.....	385
12.2.1. Въвеждане на зависимите източници в метода с контурните токове.....	385
12.2.2. Въвеждане на зависимите източници в метода с възловите потенциали.....	386
12.3. Приложения на зависимите източници.....	387
12.3.1. Модел на усилвател на напрежение.....	387
12.3.2. Транзисторен усилвател по схема общ колектор (емитерен повторител).....	389
12.3.3. Еквивалентна схема на линеен трансформатор, използваща зависим източници.....	392
12.4. Операционни усилватели.....	394
12.4.1. Общи сведения.....	394
12.4.2. Анализ на инвертиращ усилвател с ОУ.....	399
12.4.3. Анализ на неинвертиращ усилвател с ОУ.....	403
12.4.4. Анализ на активен високочестотен филтър с ОУ.....	404
12.4.5. Анализ на активен лентов филтър с ОУ.....	408
<i>Литература.....</i>	413

ПРЕДГОВОР

Учебникът по Теоретична електротехника е предназначен за студентите от бакалавърската степен на обучение в електротехническите специалности на Техническият университет – София. Целта на неговото издаване бе да се предостави на студентите един по-компактен и осъвременен учебник по Теоретична електротехника, съответстващ на настоящата учебна програма и редуцирания хорариум на дисциплината в последните години. Същевременно авторите се стремяха да запазят традициите в излагането на материала и обучението по Теоретична електротехника, трасирани и утвърдени от такива видни професори на ТУ-София като проф. д.т.н. Минчо Златев, проф. д.т.н. Самуил Фархи и проф. д.т.н. Сава Папазов, както и традициите на руската школа в тази област.

Учебникът включва раздели от двете основни части на Теоретичната електротехника – Теория на електрическите вериги и Електромагнитно поле, като настоящата първа част е посветена изцяло на теорията на електрическите вериги. Обхванати са следните раздели: 1. Въведение в електрическите вериги; 2. Методи и теореми за анализ на електрически вериги; 3. Резонанс; 4. Синусоидален режим в линейни електрически вериги с индуктивни връзки; 5. Линейни магнитни вериги; 6. Матрични методи за анализ на електрически вериги; 7. Метод на сигналните графи; 8. Периодични несинусоидални процеси в линейни електрически вериги; 9. Трифазни вериги; 10. Четириполусници; 11. Линейни електрически вериги с разпределени параметри.

Разделите са написани, както следва: Р. Станчева – 1,4,9; К. Брандиски – 3,5,7,8,12; В. Младенов – 2,6,10; Ж. Георгиев – 11.

Учебникът отразява дългогодишния преподавателски опит на авторите в обучението по дисциплината Теоретична електротехника, както и някои нови тенденции при структурирането на материала и средствата за неговото онагледяване.

Той може да бъде полезен и за широк кръг читатели, желаещи да опреснят и задълбочат знанията си в областта на електрическите и магнитните вериги и електромагнитното поле.

Препоръчва се учебникът да се използва заедно с новите „Ръководство за семинарни упражнения по Теоретична електротехника,“ и „Ръководство за лабораторни упражнения по Теоретична електротехника“, както и с „Ръководство за решаване на задачи по Теоретична електротехника с PSpice“ и пособието „CAD системи в електромагнетизма (QuickField и FEMM)“, издадени от катедрата.

Написването и издаването на този учебник стана възможно благодарение на подкрепата от договора на КСОУВО-МОН-Световна Банка, озаглавен „Модернизация на обучението по Теоретична електротехника в ТУ-София“ с ръководител доц. д-р К. Брандиски. С него бе завършен цикълът от 6 учебни помагала по Теоретична електротехника, издадени от катедрата. Части от тези помагала могат да бъдат намерени и в Интернет-базирания курс по Теоретична електротехника, създаден със спонсорството на фондацията DAAD.

Авторите ще приемат с благодарност забележки относно стила и начина на изложение, както и относно забелязани грешки и несъответствия.

София, 2004 г.

От авторите

1

ВЪВЕДЕНИЕ В ЕЛЕКТРИЧЕСКИТЕ ВЕРИГИ

1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ, КЛАСИФИКАЦИИ, ИДЕАЛИЗАЦИИ

Електрическата верига е съвкупност от електрически елементи и устройства, предназначени за разпределение, преобразуване и пренасяне предимно на електрическа енергия. Тук се отнасят веригите от електроенергетиката, вериги и устройства на електрониката, радиосъобщителната техника, автоматиката, изчислителната техника и др. Определящи физически величини в електрическата верига са електродвижещото напрежение e , напрежението u и токът i .

Като се има предвид, че във веригата най-общо протичат електромагнитни процеси, прецизният анализ е свързан с използване на характеризиращите полето във всяка точка величини: ел.интензитет \vec{E} , V/m; ел.индукция \vec{D} , C/m²; плътност на тока \vec{J} , A/m² и потенциал V , V. Обикновено точността на изследване с помощта на законите и методите за анализ от теорията на ел. вериги е напълно достатъчна. В това отношение възможност за *интегрална оценка на процесите във веригата дава използването на величините:* ток i , A; напрежение u , V; електродвижещо напрежение (е.д.н) e , V; ел. заряд q , C и магнитен поток Φ , Wb, както и на свързващите ги *електрически параметри:* съпротивление R , Ω ; проводимост G , S; самоиндуктивност L , H; капацитет C , F и взаимна индуктивност M , H.

Топологията на веригата отразява нейната структура. Елементи на структурата са: *клон, възел и контур.* **Клонът** е участък, по дължината на който токът в даден момент е един и същ. **Възел** е мястото, където три или повече клона се съединяват. **Контурът** е затворена линия, която минава през няколко клона на веригата.

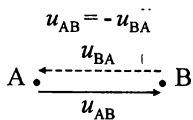
Изследването на електрическите вериги е свързано с решаването на два основни вида задачи. В задачите за анализ са известни: структурата на веригата, източниците на енергия по големина и посока, елементите и техните параметри. Търсят се: токовете, напреженията и мощностите. В *задачите за синтез* са зададени желани функционални характеристики на веригата, а се търсят схемата и параметрите на веригата.

Формулирането и коректното приложение на законите за анализ на електрическите вериги е възможно, след като бъдат дефинирани положителни посоки на ток, напрежение и електродвижещо напрежение. Действителните положителни посоки отразяват физическата същност на величините: *за тока* – това е посоката на придвижване на положителен заряд във вери-

гата; *за напрежението* – посоката от точка с по-висок към точка с по-нисък потенциал; *за електродвижещото напрежение* – посоката от полюса с по-нисък към полюса с по-висок потенциал вътре в източника на е.д.н., тъй като е.д.н. еквивалентно замества работата на неелектрическите сили за пренасяне на единица положителен заряд от точка с по-нисък (–) към точка с по-висок (+) потенциал. С други думи, е.д.н. причинява разделянето на зарядите до появата на определена потенциална разлика между полюсите (изводите) на източника.

При решаването на задачи от анализ токовете и напреженията във веригата са неизвестни. Посоките им се избират произволно и в този смисъл се наричат *условни*. *Връзката между действителната и условната положителна посока се отразява в алгебричния знак на изчислената величина. Условната положителна посока на напрежението е винаги свързана с последователността на индексите към него. Първият индекс означава точката, от която се дефинира напрежението, а вторият – точката, към която е насочено. Тъй като всяко напрежение е разлика от потенциалите на началната и крайната точки, ако се*

обърне посоката на напрежението, променя се и неговият знак. Това се илюстрира (фиг.1.1) с равенството: $u_{AB} = V_A - V_B = -(V_B - V_A) = -u_{BA}$. Отрицателният знак на напрежението, например $u_{AB} < 0$, означава, че потенциалът на първата точка *A* е по нисък от този на втората точка *B*.



Фиг. 1.1

1.1.1. Класификация на елементите в електрическата верига

В повечето ел. вериги електромагнитните процеси се развиват в краен брой участъци. Тези участъци се разглеждат като *елементи на веригата* и са свързани с проводници, които се идеализират. Елементите се делят на две големи групи: *източници на енергия* – наричат се още *активни елементи*, и *приемници на енергия*. Елементите от първата група *преобразуват произволен друг вид енергия в електрическа*, например електромеханични и електронни генератори, галванични токоизточници, фотодиоди и фототранзистори, термоелектрически преобразуватели и др. *Към активните елементи също се отнасят електронни лампи, транзистори и операционни усилватели*, които усилват електрическите сигнали. Елементите от втората група *преобразуват електрическата в друг вид енергия*. Тук може да се отнесат различните видове резистори, ел. двигатели, светодиоди, високоговорители, монитори, течни кристали и др. Опростен вариант на тази група са пасивните елементи от ел. верига, в които става разсейване на електрическа енергия (резисторите), съсредоточаване на енергия (магнитна в индуктивните елементи и електрическа в кондензаторите) или преобразуване на ел. енергия в трансформаторите.

Всеки елемент от веригата се свързва с останалите чрез определен брой изводи. В зависимост от броя на изводите *елементите биват двуполусни и многополусни* (три-, четири- и повече полюсни). Към двуполусните елементи

се отнасят по-голямата част от източниците на енергия, резистори, индуктивности, кондензатори; към триполусните – електронните лампи и транзисторите. Пример за четириполусни елементи са двунамотъчните трансформатори, операционните усилватели и др., а като пример за многополусни може да се посочат многофазните и управляемите източници на енергия, многонамотъчните трансформатори, сложните електронни схеми и др.

В зависимост от това дали параметърът, който характеризира елемента, се изменя или не при изменение на физическата величина (i, u, Φ, q), елементът е *нелинеен* или *линеен*. Нелинейни например са: терморезисторите, при които $R = R(i)$; намотката с феромагнитна сърцевина – $L = L(i)$; варикапът, където $C = C(u)$ и др. Всички елементи L и C , чието електромагнитно поле се разпространява във въздушна среда, са линейни.

Когато параметърът се променя с течение на времето (ефект *старееие*), елементът се нарича *параметричен*. В противен случай той се нарича *непараметричен*, което на практика е една идеализация.

Елементите на електрическата верига могат да удовлетворяват или не *принципа за взаимност*. Той се състои в следното: реакцията на веригата в участъка 2 от въздействие върху участъка 1 е същата, както реакцията на веригата в участъка 1, ако същото въздействие се приложи към участъка 2. В този смисъл може да се говори за *взаимни и невзаимни елементи*. Примери на взаимни елементи са резистори, индуктивности, кондензатори, трансформатори; а на невзаимни – електронни лампи, транзистори, операционни усилватели и др.

1.1.2. Класификация на електрическите вериги

Тя е пряко свързана с вида на елементите, включени във веригата.

Верига, която се състои *само* от линейни елементи, е *линейна*. Много важен за анализа е фактът, че за такава верига важи *принципът с наслагването*: ако във веригата действат няколко различни сигнала, реакцията в даден елемент е алгебрична сума от реакции, дължащи се на поединичното действие на всеки един от тези сигнали. Веригата е нелинейна, ако съдържа поне един нелинеен елемент.

Верига, състояща се само от взаимни елементи е *взаимна*, а ако включва дори само един невзаимен елемент – *невзаимна*.

Когато ефектът старееие на елементите от веригата не се отчита, т.е. всички те се разглеждат като непараметрични, тя самата е *непараметрична*.

Веригата е *активна*, ако се проявява като източник на енергия спрямо произволна двойка изводи. В противен случай тя е *пасивна*.

Може да се счита, че в по-голямата част от ел. вериги процесите на преобразуване и разпределение на енергия са съсредоточени в ограничен брой участъци. Подобни вериги имат краен брой елементи и се наричат *вериги със съсредоточени параметри*. Когато дължината на електромагнитната вълна

е съизмерима или по-малка от линейен размер на веригата, тя се разглежда като верига с разпределени параметри. Такова съотношение се получава при високи честоти или при дълги линии. Тук моментните стойности на тока и напрежението освен от времето зависят още и от линейна координата x , например $i = i(t, x)$ и $u = u(t, x)$. Поради това се въвеждат параметри за единица дължина: R_0, L_0, G_0 и C_0 . Следователно всеки участък с елементарна дължина dx се характеризира с разпределените параметри $R_0 dx, L_0 dx, G_0 dx$ и $C_0 dx$. Типични вериги с разпределени параметри са линиите за предаване на индустриална енергия и на информация при много високи честоти.

1.2. СХЕМИ НА ИДЕАЛНИ И НА РЕАЛНИ ЕЛЕМЕНТИ НА ВЕРИГАТА

Условен графичен образ на веригата е нейната схема. В нея всеки реален елемент на веригата е заместен с един или няколко идеални елемента, така че системата уравнения за реалната верига и за съответния графичен образ са еквивалентни. Следователно схемата представлява математическа идеализация на веригата.

1.2.1. Схеми на източници на енергия

Схемата на източник на енергия (активен елемент) е условно означение на участъка от веригата, в който става необратимото преобразуване на произволен друг вид енергия в електрическа.

Първоначално се приема, че източникът работи в генераторен режим и процесите, представени с интегралните му характеристики e, u и i не зависят от времето.

А. Реален източник на електродвижещо напрежение (е.д.н.)

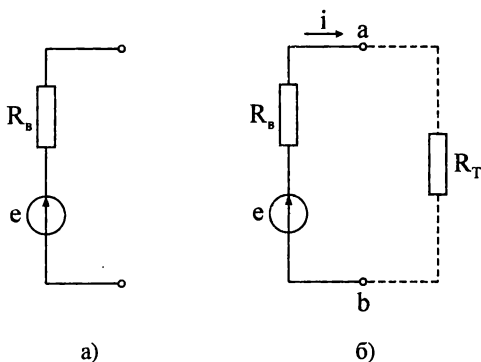
Схемата на реалния източник притежава два участъка (фиг. 1.2а):

- участък, в който под действието на сили с неелектрически произход се поражда електрическо поле с интегрална характеристика e ;
- резистор R_e , който представлява вътрешното съпротивление на реалния източник и символизира участък на необратимото преобразуване на електрическата в топлинна енергия.

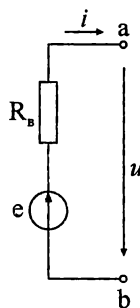
Ако към изводите на източника се включи товар R_T , протича ток i (фиг. 1.2б). Тъй като веригата е изолирана система, важи законът за съхранение на енергията: генерираната мощност p_T е равна на сумата от разсеяните мощности в двата резистора p_e и p_T . Мощността в пасивните елементи се определя

най-общо с израза $p = ui$, а в източника $p_r = ei$, поради което важат уравненията $p_r = p_e + p_T$ или $ei = (R_e i) + (R_T i)$. Оттук се получава

$$e = R_e i + u. \quad (1.1)$$



Фиг. 1.2



Фиг. 1.3

Тук напрежението $u = R_T i$ е напрежителният пад върху товара. От (1.1) следва, че *реалният източник* на енергия се представя със схемата от фиг. 1.3, която се нарича *еквивалентна схема от последователен тип* или накратко *реален източник на е.д.н.*

Б. Реален източник на електродвижещ ток (е.д.т.)

Ако (1.1) се раздели формално на R_e , се получава *уравнение на токовете в реалния източник на енергия*, т.е.

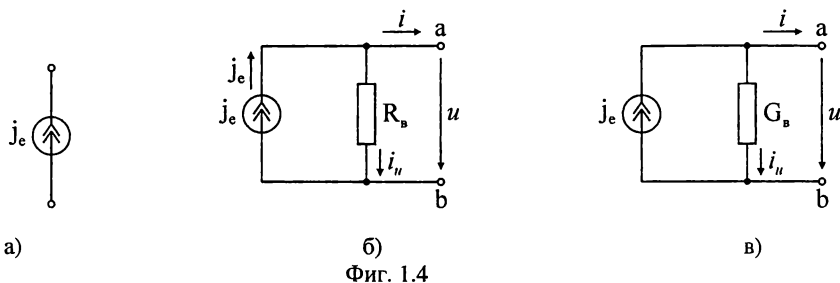
$$\frac{e}{R_e} = \frac{u}{R_e} + i \quad \text{или} \quad eG_e = uG_e + i, \quad \text{при} \quad G_e = \frac{1}{R_e}. \quad (1.2a)$$

Уравнението на токовете се представя още така

$$j_e = i_u + i. \quad (1.2б)$$

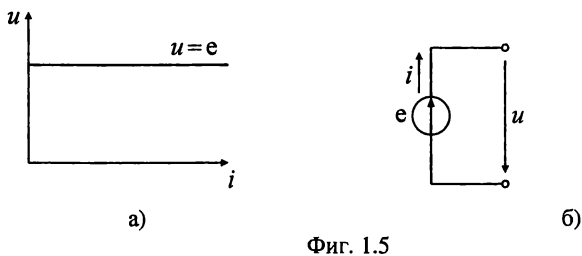
Тук първият член $j_e = e/R_e = eG_e$ представлява ток, чиято стойност зависи само от собствените параметри на реалния източник и поради това се разглежда като генериран от източника. На практика той представлява токът на късо съединение между полюсите на източника (при $R_T = 0$) и се нарича още *електродвижещ ток* (е.д.т.). Неговият символ е показан на фиг. 1.4а. Дясната страна на уравнението е сума от тока i през товара и от тока $i_u = u/R_e = uG_e$.

Еквивалентната схема на *реалния източник (генератор) на ток* е показана на фиг. 1.4б, където е означено съпротивлението R_g на резистора, и на фиг. 1.4в, където е означена проводимостта G_g на същия резистор. Тя представлява *еквивалентна схема от паралелен тип* или накратко *реален източник на електродвижещ ток* (е.д.т.).



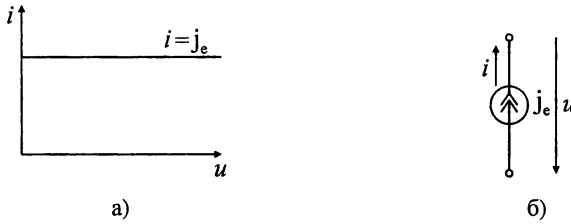
В. Идеализации на източниците на енергия

Идеален източник на е.д.н. Ако собственото съпротивление на реалния източник $R_g = 0$, напрежението u на неговите изводи е постоянно $u = e$ и не зависи от протичащия през него ток (фиг. 1.5а). То има посока, обратна на e спрямо полюсите на елемента. В този случай се говори за *идеален източник на е.д.н.* (фиг. 1.5б). Следователно *идеалният източник на е.д.н. е математическият модел на този реален източник на енергия, чието вътрешно съпротивление е нула*. На практика това са източници на енергия, чието вътрешно съпротивление R_g е пренебрежимо малко. В общия случай, когато e, u и i са функции на времето, зависимостта е аналогична, т.е. $u(t) = e(t)$.



Идеален източник на електродвижещ ток. Той се дефинира, когато вътрешното съпротивление на реалния източник на енергия е безкрайно голямо, т.е. $R_g \rightarrow \infty$. В този случай от уравнения (1.2) се получава $i = j_e$, т.е. токът през товара се определя само от е.д.т. на източника и не зависи от приложеното напрежение u или от товара (фиг. 1.6а). Следователно *идеалният източник (генератор) на е.д.т.* (фиг.1.6б) *е математически модел на този реален из-*

точник на енергия, чието вътрешно съпротивление е безкрайно голямо. На практика това са източници на енергия, чието вътрешно съпротивление R_g е много по-голямо от съпротивлението на товара. Когато e, u и i са функции на времето, връзката между двата тока е в моментни стойности: $i(t) = j_e(t)$.



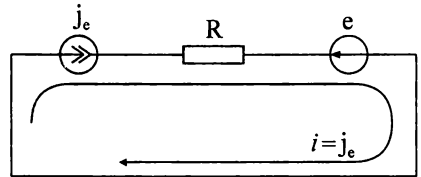
Фиг. 1.6

Пример 1.1. В схемата от фиг. 1.2б към реален източник на енергия с е.д.н $e = 10\text{V}$ и собствено съпротивление $R_g = 10\text{M}\Omega$ е включен товар $R_T = 100\Omega$. Да се изчисли токът i .

Решение: От уравнение (1.1) се определя:

$$i = \frac{e}{R_g + R_T} = \frac{e}{R_g} \frac{1}{1 + R_T/R_g} = \frac{10}{10 \cdot 10^6} \frac{1}{1 + 10^{-5}} \approx 1 \cdot 10^{-6} \text{ A} = 1 \mu\text{A},$$

тъй като $R_T/R_g = 10^{-5} \ll 1$. Очевидно токът i се определя напълно от собствените параметри на източника e и R_g , т.е той съвпада с е.д.т. j_e и не зависи от големината на товара R_T при $R_g \gg R_T$. Тези съотношения показват, че каквито и елементи да са включени последователно с източника на е.д.т. j_e (фиг.1.7), токът i през тях е идентичен по големина и посока с j_e .



Фиг. 1.7

Г. Посоки на токовете и напреженията в идеалните източници

В източника на енергия възниква електрическо поле, което еквивалентно замества действието на сили с неелектрически произход. Под действието на тези сили положителните заряди се насочват към положителния, а отрицателните – към отрицателния полюс на източника. Така полюсите се формират от натрупването върху тях на едноимени заряди, независимо от противодействията на пренасянето на зарядите електростатични сили. Възникналото вътре в

източника електрическо поле се нарича *непотенциално*. Насоченото движение на заряди означава протичане на електрически ток в самия източник в посока от отрицателния към положителния полюс. С други думи и в източника посоката на положителния заряд дефинира посоката на тока. Разделянето на зарядите в източника поражда извън неговите полюси *потенциално* електрическо поле, което съответства на потенциална разлика с посока от положителния към отрицателния полюс. *Следователно посоката на напрежението между полюсите на източника на енергия е противоположна на посоката на електродвижещата величина в него* (фиг. 1.8а,б).

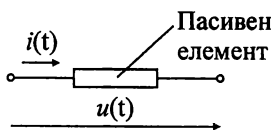


Фиг. 1.8

1.2.2. Схеми на пасивни елементи

А. Посоки на токовете и напреженията в пасивните елементи

Елементите R , L и C , заедно със съединителните проводници, съставят участъците между източниците на енергия от веригата. Те нямат отношение към генерирането на електрическа енергия, поради което се наричат *пасивни елементи*. Пренасянето на положителните заряди през пасивните елементи



Фиг. 1.9

става в потенциално електрическо поле от точка с по-висок към точка с по-нисък потенциал, което съвпада с положителната посока на напрежението. *Следователно, в един пасивен елемент посоката на напрежителния пад винаги съвпада с посоката на тока през него* (фиг. 1.9). Това условие важи както за действителните, така и за условните положителни посоки на тока и напрежението.

Б. Схеми на идеални пасивни елементи

Резисторът символизира участък от електрическата верига, в който електрическата се преобразува необратимо в топлинна енергия. На фиг. 1.10а е показано символичното изображение на резистор.

Връзката между интегралните характеристики напрежение и ток е законът на Ом

$$u_R(t) = R i(t), \quad (1.3a)$$

където R е съпротивлението на елемента. Понеже реципрочният параметър на съпротивлението е проводимостта на елемента $G = 1/R$ (фиг.1.10б), законът на Ом може да се представи и във вида

$$i(t) = G u(t). \quad (1.36)$$

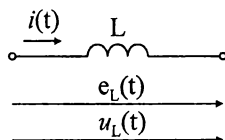


Фиг. 1.10

Съпротивлението на проводящо тяло зависи от неговите линейни размери и от специфичната електрическа проводимост γ, Sm^{-1} на материала. Известно е например, че съпротивлението на отрез от праволинеен проводник с дължина l и с напречно сечение s се определя с израза $R = \frac{l}{\gamma s}$. В практиката се

използва често и реципрочната величина $\rho = 1/\gamma, \Omega \text{m}$, която се нарича специфично електрическо съпротивление. В зависимост от предназначението на резисторите, в електротехниката се използват материали с доста различни изисквания за γ . Например намотките на ел. машини и апарати се изпълняват от проводящи материали с големи стойности на γ , най-често мед с $\gamma = 5,7 \times 10^7 \text{ Sm}^{-1}$ и алуминий с $\gamma = 3,5 \times 10^7 \text{ Sm}^{-1}$. За направата на резистори с големи съпротивления, например за нагреватели, се използват сплави като кантал, а за нуждите на електронната, радиокомуникационната и измервателната техника се използват сплави като манганин, константан и др., които имат високи стойности на специфичното съпротивление, а споменатите – и слаба температурна зависимост.

Индуктивният елемент еквивалентно замества участък от веригата, в който се съсредоточава и преобразува магнитна енергия. В идеалния случай представлява намотка (бобина) без собствено активно съпротивление. Означението на елемента е показано на фиг. 1.11.



Фиг. 1.11

Индуктивният елемент се характеризира с параметъра L , който се нарича *коэффициент на самоиндуктивност* (собствена индуктивност, самоиндуктивност). В линейна магнитна среда самоиндуктивността не зависи от тока. Тогава L представлява коэффициент на пропорционалност между пълния собствен магнитен поток на намотката $\Psi = w\Phi$ и тока i през нея. Тук w е броят на навивките \acute{u} , а Φ е обхванатият от една навивка магнитният поток. Или $\Psi = Li$ и съответно

$$L = \Psi/i. \quad (1.4)$$

Съхранената в елемента магнитна енергия W_μ се определя с израза

$$W_\mu = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \Psi i. \quad (1.5)$$

Когато намотката обхваща променлив във времето пълен собствен поток, съгласно закона на Фарадей в нея се индуцира *е.д.н. на самоиндукция*

$$e_L(t) = -\frac{d\Psi(t)}{dt} = -L\frac{di(t)}{dt}. \quad (1.6)$$

Това е.д.н. се означава винаги съпосочно с тока в елемента. *Знакът минус в (1.6) отразява инерционното свойство на самоиндуктивността*, която се стреми да запази съществуващото състояние. Или когато $i(t)$ нараства, $di(t)/dt > 0$ и $e_L < 0$ (с посока, противна на означената, т.е на тока). Ефектът е обратен, когато $i(t)$ намалява. Следователно e_L противодейства на промяната на тока в елемента. От друга страна, елементът е пасивен и напрежителният пад $u_L(t)$ се означава също съпосочно с тока. Тъй като нарастването на тока може да се разглежда като допълнителна токова съставка, тя всъщност дефинира действителната посока на u_L . Тази съставка е съпосочна с тока, ако е положителна и противоположна на него, ако е отрицателна. Такава е и посоката на u_L . Следователно действителните положителни посоки на u_L и e_L са винаги противоположни. Тази връзка се отразява с равенството

$$u_L(t) = -e_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}. \quad (1.7a)$$

Зависимостта може да се представи и относно тока съответно с изразите

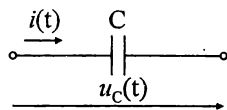
$$i(t) = \frac{1}{L} \int u_L(t) dt \quad \text{или} \quad i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt + i(0). \quad (1.7b)$$

Тук при фиксирана долна граница $t = 0$ се добавя интеграционната константа $i(0)$. Тя съответства на началната стойност на тока в индуктивния елемент.

Самоиндуктивността зависи от броя на навивките на намотката, определящите я геометрични параметри и магнитната проницаемост μ на средата, в

която е разположена. Например се доказва, че участък с дължина d от дълга двупроводна линия има самоиндуктивност $L = \frac{\mu d}{\pi} \ln \frac{D}{a}$, където D е разстоянието между осите на проводниците, а a е радиусът на всеки от тях. Известно е, че *абсолютната магнитна проницаемост* се определя с израз $\mu = \mu_r \mu_0$, където $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ Н/м е магнитната проницаемост на вакуум (въздух), а *относителната магнитна проницаемост* μ_r е число, което характеризира магнитните качества на средата спрямо тези на въздуха. За въздуха $\mu_r = 1$, за диамагнитни материали (сребро, мед, вода и др.) $\mu_r \approx 0.9999$, а за всички ферромагнитни материали $\mu_r \gg 1$.

Капацитивният елемент (кондензатор) еквивалентно замества участък от веригата, в който се съсредоточава и преобразува електрическа енергия. Той се разглежда като идеален кондензатор без загуба на ел. енергия в диелектрика. Означението на елемента е показано на фиг. 1.12.



Фиг. 1.12

Най-общо параметърът C отразява пропорционалността между електрическия заряд q и потенциала V на заредено проводящо тяло спрямо точка с нулево енергийно състояние. Или понеже $q = CV$, се получава

$$C = q/V. \quad (1.8a)$$

Най-просто кондензаторът представлява конфигурация от две проводящи тела (електроди) със заряди съответно $q_1 = q$ и $q_2 = -q$ и напрежение между тях $u = u_C$. Капацитетът на кондензатора се определя с аналогичната зависимост

$$C = \frac{q}{u} \quad (1.8б)$$

и зависи от геометричните параметри, разстоянието между електродите, както и от качествата на диелектрика между тях. Величината, която характеризира качеството на диелектрика, е *абсолютната електрическа проницаемост* $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$. Нейни съставки са електрическата проницаемост на вакуум (въздух) $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F/m и *относителната проницаемост* $\epsilon_r \geq 1$. Тя е число, което характеризира диелектричните качества на средата спрямо тези на въздуха (с $\epsilon_r = 1$). Например се доказва, че капацитетът на плосък кондензатор се определя с израз $C = \frac{\epsilon s}{d}$, където s е сечението на всеки от електродите, а d е

разстоянието между тях. Електрическата енергия на кондензатора W_ϵ се определя с изрза

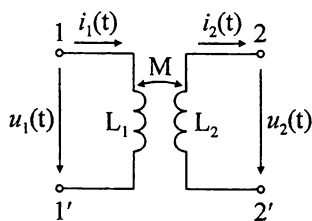
$$W_\epsilon = \frac{1}{2} Cu^2. \quad (1.9)$$

Ако електрическите величини са функция на времето, зарядът $q(t)$ може да се дефинира чрез тока $i(t)$, който преминава през напречното сечение на проводника (електрода) за определено време. Така (1.8б) може да се запише относно капацитивното напрежение

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad \text{или} \quad u_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + u_c(0). \quad (1.10a)$$

В последния израз е добавена интеграционната константа $u_c(0)$, която е определена при долна граница $t=0$ и съответства на началната стойност на капацитивното напрежение. След диференциране на (1.10a) спрямо t се дефинира токът през капацитивния елемент

$$i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}. \quad (1.10б)$$



Фиг. 1.13

Когато между две идеализирани намотки съществува магнитна връзка, те образуват **взаимноиндуктивен четириполюсен елемент**. Той символизира участък на пренасяне и преобразуване на електромагнитна енергия между двете намотки с помощта на тяхното общо магнитно поле. Предполага се, че намотките са идеализирани, т.е. нямат собствени съпротивления и между тях не съществува електрическа (капацитивна) връзка. Елементът е показан на фиг. 1.13.

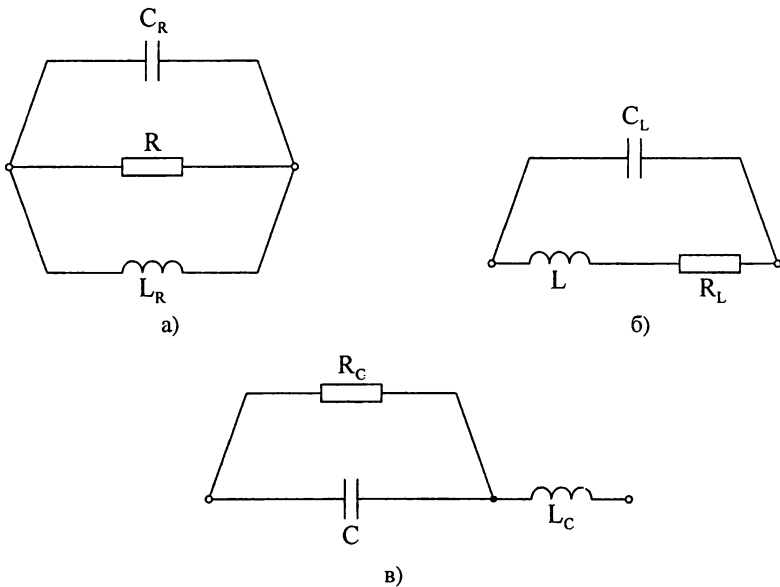
Параметърът M , който характеризира елемента, се нарича **коэффициент на взаимна индукция** или **взаимна индуктивност**. Ако магнитните потоци на намотките 1 и 2 се разпространяват в линейна магнитна среда, $M_{12} = M_{21} = M$ представлява **коэффициент на пропорционалност между пълния, взаимен магнитен поток**, обхванат от всички навивки на едната намотка и тока на другата намотка, възбудил този поток. Така например взаимният пълен поток Ψ_{12} , обхванат от всички навивки на намотката 1, е пропорционален на възбудителния ток i_2 , който протича в другата намотка $\Psi_{12} = M_{12}i_2$ и обратно – $\Psi_{21} = M_{21}i_1$. Следват изразите

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_2} \quad \text{и} \quad M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_1}. \quad (1.11)$$

В. Схеми на реални пасивни елементи

На практика всеки реален електрически елемент е свързан с известна концентрация на електромагнитна енергия в определен участък от веригата. В зависимост от вида на елемента, в него преобладава една от специфичните форми на съществуване на електромагнитното поле.

Ако загубите на електрическа енергия от преобразуването ѝ в топлина доминират, налице е *реален резистор* (фиг. 1.14а). Но при протичането на електрически ток през елемента се поражда и известен магнитен поток. Това налага в еквивалентната схема да бъде включен остатъчният (паразитен) параметър L_R . От друга страна, между изводите на резистора, разглеждани като електроди, съществува електрическо поле. Неговият ефект е още по-силно изразен при проводниковите резистори, между навивките на които съществува паразитен капацитет. Изследванията са показали, че с достатъчна точност влиянието на електрическите полета може да се отрази с включването в схемата на остатъчния (паразитен) капацитет C_R , както е показано на фиг. 1.14а.



Фиг. 1.14

Реалната намотка се разглежда като *реален индуктивен елемент* (фиг. 1.14б) със самоиндуктивност L . Определяща в намотката е концентрацията на магнитна енергия, но намотката има и собствени електрически загуби, чието

влияние се отчита с остатъчното съпротивление R_L . Същевременно между всяка двойка навивки съществува електрическо поле, което е еквивалентно на един елементарен кондензатор. В схемата на реалния индуктивен елемент този ефект интегрално се отразява с кондензатора C_L , чието влияние се проявява при високи честоти.

Ако диелектриктът на даден кондензатор е несъвършен изолатор, кондензаторът се разглежда като **реален капацитивен елемент** (фиг. 1.14в) с капацитет C . Тук същественият дял се пада на електрическата енергия, съсредоточена в C . Електрическите загуби в диелектрика не могат да се пренебрегнат. Те се отразяват с включването в схемата на реалния кондензатор на остатъчния резистор R_C . От друга страна, протичащият през кондензатора електрически ток води до възникването на магнитно поле и съответно на собствен магнитен поток. Физиката на този процес налага в схемата да се включи и остатъчният индуктивен елемент L_C .

В различните клонове на електротехниката изискването за **чистота** на основните пасивни елементи, т.е. за доближаването им по качества до съответния идеален елемент, е от изключителна важност. Всеобщ е стремежът кондензаторите да имат изключително голямо изолационно съпротивление ($R_C \rightarrow \infty$), което се постига с диелектрик въздух, радиокерамика, слюда и др. При високочестотните кондензатори не се използват навити конструкции, с което се намалява паразитната индуктивност L_C . В радиокомуникационната техника намалението на активното съпротивление R_L на бобините се осъществява чрез многожичен проводник (литцендрат). В измервателната техника чистотата на резисторите е първостепенно изискване. С помощта на микрослойна и бифиларна технология се произвеждат резистори с грешка от порядъка на 10^{-3} - 10^{-4} %, при остатъчна индуктивност L_R няколко стотни μH и паразитен капацитет $C_R \leq 1 \text{ pF}$.

1.3. ЗАКОНИ ЗА АНАЛИЗ НА ЕЛЕКТРИЧЕСКИТЕ ВЕРИГИ

Основните закони за анализ на електрическите вериги са *първият, вторият закон на Кирхоф* и *обобщеният закон на Ом*. Те се прилагат при определена посока на алгебрично сумиране. По тези причини всички величини участват в уравненията със своя алгебричен знак.

1.3.1. Първи закон на Кирхоф

Той се отнася за възел от веригата и гласи: *алгебричната сума от токовете на клоновете, присъединени към възел от електрическата верига,*

във всеки един момент е равна на нула. Аналитично законът се представя с израза

$$\sum_{k=1}^K i_{k\Sigma}(t) = 0, \quad (1.12)$$

където K е броят на клоновете, присъединени към разглеждания възел, а индексът Σ напомня, че всеки ток участва със своя алгебричен знак. В частния случай токовете от (1.12) може да бъдат постоянни, т.е. да не зависят от времето.

Посоката на алгебрично сумиране се дефинира спрямо затворена повърхнина, която обхваща възела. Съществуват две възможности за избор: посоката да бъде влизаща или излизаща от възела. Токовете, чиято посока съвпада с избраната, участват в лявата страна на равенството със знак "+", а останалите – със знак „-“. Избраната посока може да е различна за различните възли от веригата.

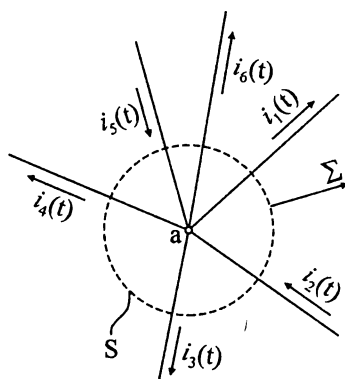
Пример 1.2. На фиг. 1.15 е показан възел от електрическа схема с 6 присъединени към него клона. Означени са посоките на токовете в тези клонове. Да се запише първи закон на Кирхоф при избрана излизаща посока на алгебрично сумиране.

Решение: При алгебрично сумиране се записва уравнението

$$i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) - i_5(t) + i_6(t) = 0. \quad (1.13)$$

Ако посоката на алгебрично сумиране се промени, т.е. стане влизаща във възела, в уравнение (1.13) се променят алгебричните знаци.

Трябва да се отбележи, че законът е валиден и за всички клонове на схемата, които са пресечени от произволна затворена повърхнина. На фиг. 1.16 е показана схема, пресечена от следата на затворената повърхнина S . За всички пресечени от S клонове (3, 4, 5 и 1), при влизаща в S посока на алгебрично сумиране, се записва уравнението: $i_3(t) + j_{e3}(t) + i_4(t) - i_5(t) - i_1(t) = 0$.



Фиг. 1.15

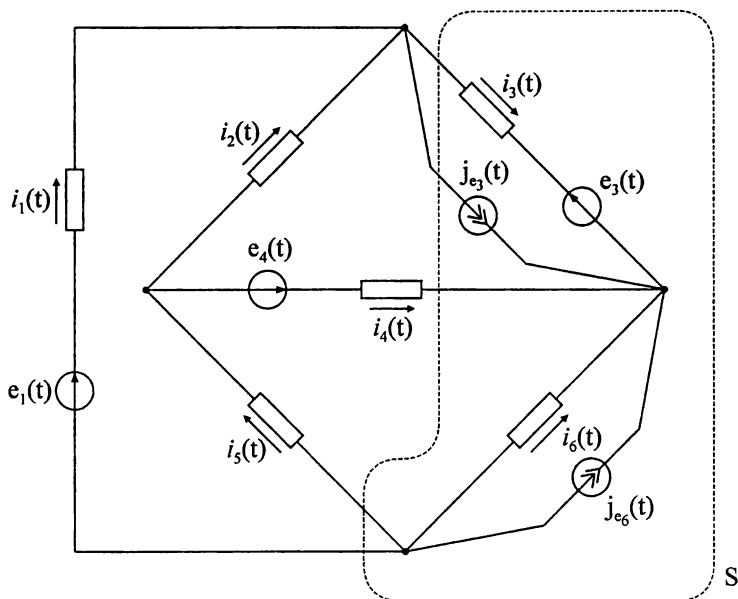
1.3.2. Втори закон на Кирхоф

Той се отнася за контур от веригата и гласи: *алгебричната сума от напрежителните надове и напреженията в контур от електрическа верига във всеки момент е равна на алгебричната сума от електродвижещите напрежения в контура.* Трябва да се поясни, че когато през пасивен участък от веригата протича ток, между началната и крайната точка на участъка има

напрежителен пад. Но при отсъствие на пряка проводяща връзка, между две произволни точки от веригата съществува *напрежение*. Аналитично законът се представя с израза

$$\sum_{k=1}^K u_{k\Sigma}(t) = \sum_{k=1}^K e_{k\Sigma}(t), \quad (1.14)$$

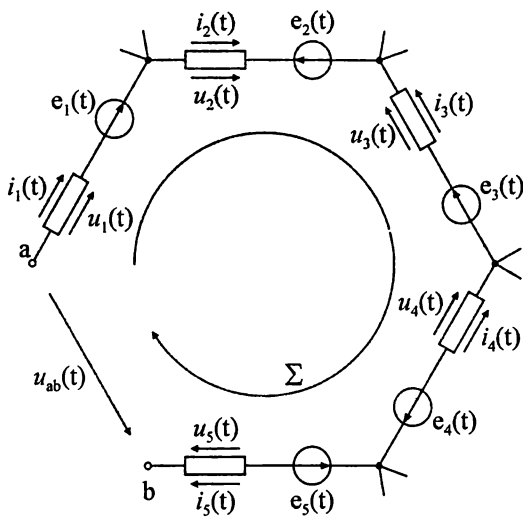
където K е броят на клоновете, включени в контура. Индексът Σ напомня, че всяка от величините участва със своя алгебричен знак. Участващите в уравнението величини може да бъдат и постоянни, т.е. да не зависят от времето.



Фиг. 1.16

Посоката на алгебрично сумиране е по направление на избрания контур, като съществуват две възможности: да съвпада с посоката на въртене на часовниковата стрелка или да бъде обратна на нея.

Пример 1.3. На фиг. 1.17 е показан контур от електрическа верига, в който е избрана посоката на алгебрично сумиране. Пасивните участъци са означени с правоъгълници. Във всеки от тях напрежителният пад $u_k(t)$ е съпосочен с тока $i_k(t)$. Между полюсите a и b контурът е отворен, но съществува напрежение в означената посока $u_{ab}(t)$. Да се приложи вторият закон на Кирхоф за означения контур.



Фиг. 1.17

Решение: Съгласно казаното се записва уравнението

$$u_1(t) + u_2(t) - u_3(t) - u_4(t) + u_5(t) - u_{ab}(t) = e_1(t) - e_2(t) - e_3(t) + e_4(t) - e_5(t).$$

Ако в пасивния участък k са включени последователно резистор R_k , индуктивност L_k и кондензатор C_k , общият напрежителен пад $u_k(t)$ е сума от падовете в тези елементи, т.е. $u_k(t) = R_k i_k(t) + L_k \frac{di_k(t)}{dt} + \frac{1}{C_k} \int i_k(t) dt$.

1.3.3. Обобщен закон на Ом

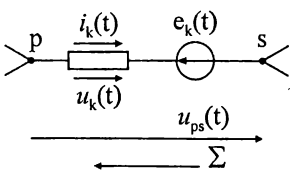
Той се отнася за активен клон (с е.д.н.) от електрическа верига и гласи: *сумата от алгебричните стойности на напрежението между възлите на клона и електродвижещото напрежение в клона е равна на алгебричната стойност на напрежителния пад в клона.*

Разглежда се клон от електрическа схема, включен между възлите p и s (фиг. 1.18) с ток $i_k(t)$ и е.д.н. $e_k(t)$. Съгласно дефиницията се записва

$$u_{ps\Sigma}(t) + e_{k\Sigma}(t) = u_{k\Sigma}(t). \quad (1.15)$$

Индексът Σ подсказва, че величините участват с алгебричен знак.

Посоката на алгебрично сумиране е по направление на клона с две възможности: наляво или надясно – за хоризонтален клон и нагоре или надолу – за вертикален клон.



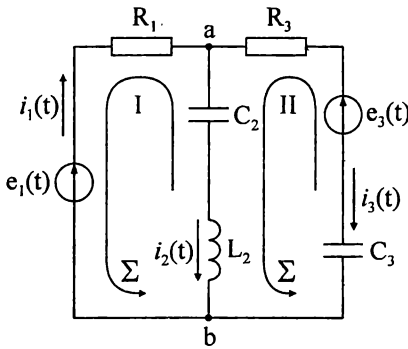
Фиг. 1.18

За избраната посока на фиг. 1.18 по обобщения закон на Ом се записва $-u_{ps}(t) + e_k(t) = -u_k(t)$.

В много случаи е удобно за посока на алгебрично сумиране да се използва посоката на тока в клона. Така знакът на напрежителния пад е винаги "+". Същото важи и за знака на напрежението между възлите на клона, ако то е дефинирано в посоката на тока. В този случай се съобразява само знакът на

е.д.н., в зависимост от посоката му спрямо тази на клоновия ток. Например за фиг. 1.18 алгебричното сумиране по посоката на тока $i_k(t)$ води до уравнението $u_{ps}(t) - e_k(t) = u_k(t)$, където $u_{ps}(t)$ е напрежението между възлите на клона в посоката на клоновия ток.

Пример 1.4. За веригата от фиг. 1.19 да се запишат уравнения по законите на Кирхоф: по първия закон за възела a и по втория закон – за двата контура в означените посоки на алгебрично сумиране.



Фиг. 1.19

За възел a :
$$i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) = 0,$$

за контур I:
$$-R_1 i_1(t) - L_2 \frac{di_2(t)}{dt} - \frac{1}{C_2} \int i_2(t) dt = -e_1(t),$$

за контур II:
$$\frac{1}{C_2} \int i_2(t) dt + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} - \frac{1}{C_3} \int i_3(t) dt - R_3 i_3(t) = e_3(t).$$

1.4. ПРОМЕНЛИВИ РЕЖИМИ В ЕЛЕКТРИЧЕСКИТЕ ВЕРИГИ

Променливи са токовете и напреженията, които се изменят с времето. Стойностите им в даден момент t се наричат *моментни* и се означават с малки символи: $i = i(t)$ и $u = u(t)$. Моментните стойности на тока и напрежението могат да се променят по големина и по знак във времето. Промяната на знака е равностойна на смяна на тяхната посока. Следователно i и u са дефинирани, ако са известни техните моментни стойности по големина и знак.

Променливите токове и напрежения могат да бъдат неперiodични и периодични. Периодичността се изразява в повтаряемост на формата на функциите $i = i(t)$ и $u = u(t)$ през равни интервали от време.

1.4.1. Периодични режими

Нормалната работа на повечето електротехнически устройства протича при променливи периодични режими. Токът или напрежението са периодични, ако зависимостта им от времето се подчинява на общото условие за периодичност на функция

$$\varphi(t) = \varphi(t + kT). \quad (1.16)$$

Моментната стойност $\varphi(t)$ се повтаря след равни интервали от време, тъй като в израза k е цяло положително число. Интервалът на повторение T се нарича *период*, а реципрочната му стойност – *честота*. Тя се бележи с f и има размерност *херц* (Hz). С други думи зависимостта

$$f = \frac{1}{T} \quad (1.17)$$

показва колко пъти за единица време се повтаря периодичната величина. При $T = 1\text{ s}$ честотата е $f = 1\text{ Hz}$, т.е. $1\text{ Hz} = 1\text{ s}^{-1}$. Типичен пример на периодичен сигнал е синусоидалната функция. Например токът може да се представи с израза $i(t) = i_m \sin \omega t$, където $\omega = 2\pi f$ се нарича *кръгова честота*. Диапазонът от честоти на токовете в електротехниката и радиоелектрониката е много широк – започва някъде от 10^{-6} Hz (инфраниски честоти) и достига до около 10^{15} Hz (свръхвисоки честоти). В електроенергетиката на България и Европа се използва стандартната промишлена честота 50 Hz , а в САЩ – 60 Hz .

Постоянният ток може да се разглежда като граничен случай на периодичен ток с безкрайно голям период, т.е. с честота, равна на нула.

А. Основни параметри на токове и напрежения

Например за тока те са:

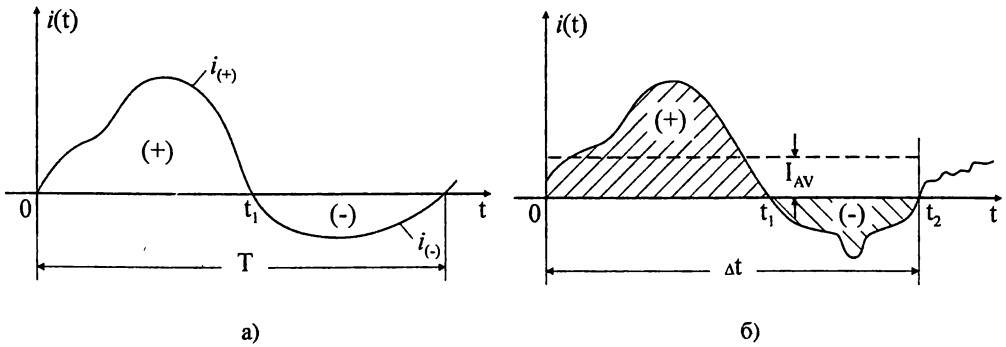
1. *Моментна стойност* $i(t)$, която вече е дефинирана по-горе;
2. *Максимална (амплитудна, пикова, върхова) стойност* i_m – най-голямата от всички моментни стойности;
3. *Средна стойност* I_{AV} – средноаритметичната стойност за определен интервал от време.

В общия случай на променлив ток $i(t)$ с произволна форма във времето (фиг.1.20а) средната стойност може да се определи за произволен интервал от време Δt , съгласно израза

$$I_{AV} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} i(t) dt, \quad (1.18)$$

където за простота се приема, че началото на кривата съвпада с началото на координатната система. Като се отчитат различните знаци на защрихованите площи в разглеждания интервал Δt ; (1.18) се трансформира на

$$I_{AV} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{t_1} i(t) dt - \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt = I_{AV1} - I_{AV2}. \quad (1.19)$$

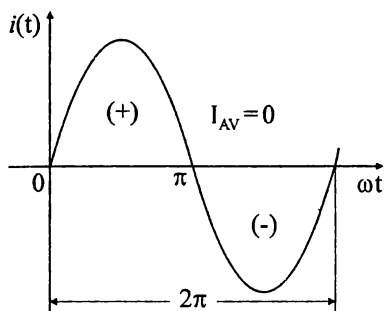


Фиг. 1.20

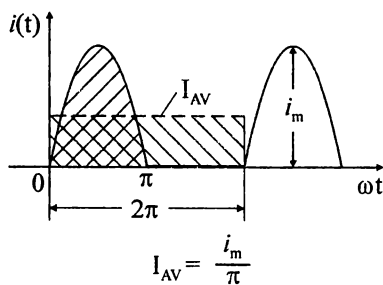
Величините I_{AV1} и I_{AV2} представляват средните стойности на тока съответно за интервалите t_1 и $t_2 - t_1$. Когато $i(t)$ или $u(t)$ са периодични функции, средната им стойност се определя за $\Delta t = T$, т.е. за периода T (фиг. 1.20б).

На фиг. 1.21 са означени средните стойности на три периодични сигнала: (а) синусоидален от вида $i(t) = i_m \sin \omega t$; (б) еднополупериоден синусоидален изправен ток; (в) ток с импулсна форма, за който интеграционните граници са изместени и съвпадат с дефиниционните граници на импулсната функция, но

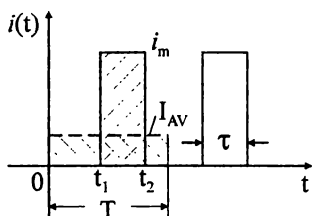
не започват от началото на координатната система. При решението на случаите (а) и (б) се използват съответствията $T \rightarrow 2\pi$ и $T/2 \rightarrow \pi$ rad. Физическият смисъл на средната стойност на тока най-ясно личи от заштрихованите площи: при (а) те са равни, но с обратен знак и *средната стойност на синусоидалната величина за един период е 0*; при (в) този смисъл се отразява с равенството $I_{AV}T = i_m \tau$, където τ е продължителността на импулса.



а)



б)



$$I_{AV} = i_m \frac{t_2 - t_1}{T} = i_m \frac{\tau}{T}$$

в)

Фиг. 1.21

4. *Ефективна стойност I* е средноквадратичната стойност за един период. Дефинира се само при периодични сигнали. Връзката с моментната стойност се дава с израза

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} . \quad (1.20)$$

В общия случай $i(t)$ може да бъде периодичен несинусоидален ток (фиг. 1.20б). Ако в случая Δt съвпада с T , решението на (1.20) може да се представи така

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{t_1} i^2(t) dt + \frac{1}{T} \int_{t_1}^T i^2(t) dt} = \sqrt{I_{(+)}^2 + I_{(-)}^2} , \quad (1.21)$$

където $I_{(+)}$ и $I_{(-)}$ са съответно ефективните стойности за двата интервала. При синусоидален ток от вида $i(t) = i_m \sin \omega t$, интервалът $t_1 = T/2$ и от (1.21) следва

$$I = \sqrt{\frac{i_m^2}{4} + \frac{i_m^2}{4}} = \frac{i_m}{\sqrt{2}}. \quad (1.22)$$

Същият резултат за ефективната стойност на синусоидален ток може да се получи директно и от решението на (1.20), след заместване $i(t) = i_m \sin \omega t$.

Аналогично се дефинират моментна, максимална, средна и ефективна стойност на периодично променливо напрежение $u(t)$.

Б. Характерни коефициенти за периодичните величини

Информация за формата на периодичния сигнал и степента на доближаването ѝ до синусоидалната се получава от числените стойности на следните коефициенти:

1. Коефициент на амплитудата k_a , който представлява отношение на амплитудната към ефективната стойност на тока (напрежение): $k_a = i_m / I$. За синусоидален сигнал $k_a = \sqrt{2}$. В импулсната техника k_a достига и дори може да надвиши 10;

2. Коефициент на формата k_f . Дефинира се с отношението на ефективната към средната стойност, т.е. $k_f = I / I_{AV}$.

За синусоидален сигнал k_f става неопределен, тъй като I_{AV} за един период е нула. За да се избегне това неудобство и се получи подобна количествена оценка, *средната стойност на синусоидалните сигнали се определя за модулите на сигнала за двата полупериода*, което е равностойно за двуполупериоден синусоидален изправен ток. Тази стойност е два пъти по-голяма от средната стойност на еднополупериодния синусоидален изправен ток (фиг. 1.21б), т.е. $I_{AV} = 2i_m / \pi$. *Следователно при сигнал със синусоидална форма се*

$$\text{получава } k_f = \frac{i_m}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2i_m} \approx 1.11.$$

Чрез сравняване на числените стойности на коефициентите на различни сигнали с тези при синусоидален сигнал може да се направи оценка, доколко формата им се доближава до синусоидалната.

1.5. СИНУСОИДАЛНИ (ХАРМОНИЧНИ) СИГНАЛИ

Повечето технически устройства работят или се предпочита да работят при синусоидални сигнали, което налага те специално да бъдат изучени. Като

частен случай на периодичните, синусоидалните сигнали се характеризират също с моментна, максимална (амплитудна), ефективна и средна стойност. Елементите на моментната стойност, например на тока $i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i)$, са:

- i_m – максимална(амплитудна) стойност;
- $\theta_i = \omega t + \psi_i$ – фаза на сигнала, аргумент на функцията синус. Измерва се в радиани, rad или в ъгли в градуси, deg. Интервалът от време $t = T$ съответства на фаза 2π , rad или 360 , deg;
- $(\theta_i)_{t=0} = +\psi_i$ – фазата в момента $t = 0$. Нарича се начална фаза;
- $\omega = \frac{d\theta_i}{dt}$ – ъглова (кръгова) честота, с размерност $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ или s^{-1} . Тъй

като за дадена синусоидална величина $\omega = \text{const}$, може да се запише $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$. Така при $f = 50 \text{ Hz}$, $\omega = 314 s^{-1}$.

Следователно хармоничният сигнал е дефиниран, ако са известни три величини: *амплитуда*, *честота* или *период*, и *начална фаза*.

Пример 1.5. Моментната стойност на синусоидално напрежение е $u(t) = 200\sqrt{2} \sin(1000t - 2\pi/3)$, V. Да се определят елементите на синусоидалния сигнал.

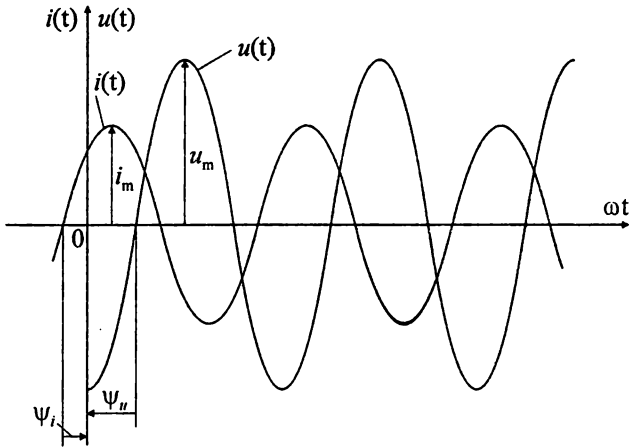
Решение: Елементите на сигнала са: $u_m = 200\sqrt{2}$, V; $\omega = 1000 s^{-1}$ и $\psi_u = -2\pi/3$, rad или $\psi_u = -120^\circ$. Ефективната стойност на напрежението е $U = u_m / \sqrt{2} = 200\sqrt{2} / \sqrt{2} = 200$ V.

1.5.1. Фази и фазови разлики

Два синусоидални сигнала може да бъдат сравнявани, само ако са с еднаква честота, т.е. са изохронни. На фиг. 1.22 са показани графиките на две хармонични функции с еднаква честота, различни амплитуди и различни начални фази: $i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i)$ и $u(t) = u_m \sin(\omega t + \psi_u)$.

Началната фаза на даден хармоничен сигнал се отчита по оста ωt от най-близкото до началото първо преминаване през нулева стойност в положителна посока до началото на координатната система. Ако това отчитане е в посока на растящите стойности на t , началната фаза е положителна, докато в противен случай тя е отрицателна. На фиг. 1.22 началните фази са $\psi_i > 0$ и $\psi_u < 0$. От същата графика може още да се прецени *коя от синусоидалните функции изпреварва и коя закъснява във времето*. За целта се сравнява едно и също характерно фазово състояние на двете функции, например за $\theta = \pi/2$ (положителните амплитуди) или за $\theta = -\pi/2$ (отрицателните амплитуди) и т.н. *Когато сравняването фазово състояние за един от синусо-*

идалните сигнали е по-близо до началото, т.е. е по-рано във времето, този сигнал изпреварва другия по фаза. Например за посочената фигура $i(t)$ изпреварва $u(t)$ (респ. $u(t)$ закъснява спрямо $i(t)$).



Фиг. 1.22

Фазовата разлика φ се дефинира само за два синусоидални сигнала с еднаква честота. В този случай тя се свежда до разлика между техните начални фази. Като правило фазовата разлика φ между напрежението и тока в даден участък се определя спрямо фазата на напрежението $\varphi = \theta_u - \theta_i = \psi_u - \psi_i$. Поради това фазовата разлика между $u(t)$ и $i(t)$ на фиг. 1.22 е $\varphi < 0$. В зависимост от числената стойност на φ са възможни следните случаи: $\varphi = 0$ – сигналите са във фаза (синфазни сигнали); $\varphi = \pm \pi/2$ – фазово-квадратурни и $\varphi = \pm \pi$ – в противофаза (противопосочни сигнали).

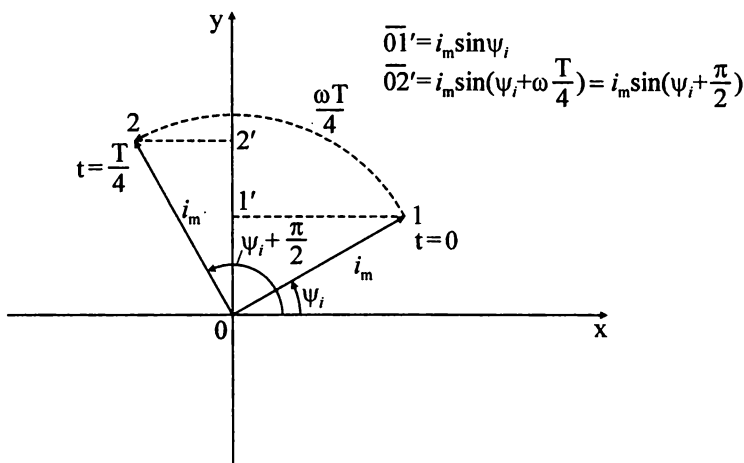
1.5.2. Изобразяване на синусоидални сигнали с вектори

Всеки синусоидален сигнал (ток или напрежение) може да се изобрази с въртящ се вектор, който се нарича *векторен образ*. Той отговаря на следните условия:

- Големината на вектора е равна в съответен мащаб на амплитудата на сигнала;
- При $t = 0$ векторът сключва с положителната посока на абсцисната ос Ox ъгъл, равен на началната фаза на сигнала. Отчитането винаги започва от положителната посока на абсцисната ос. Ако началната фаза е с положителен знак, ъгълът се означава в посока, обратна на въртенето на часовниковата стрелка. При отрицателен знак означаването е в посоката на въртене на часовниковата стрелка;

– Векторът се върти с ъглова скорост, равна на кръговата честота ω на сигнала. След време t ъгълът, сключен с положителната посока на оста Ox нараства с ωt и става $\omega t + \psi$.

Във всеки момент проекцията на въртящия се вектор върху ординатната ос е числено равна на моментната стойност на сигнала. На фиг. 1.23 е построен векторният образ на сигнала $i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i)$. Изобразени са две моментни положения: 1 и 2 на въртящия се вектор, съответстващи на $t = 0$ и $t = T/4$. Техните проекции върху ординатната ос са числено равни на съответните моментни стойности: $i(0) = i_m \sin \psi_i$ и $i(T/4) = i_m \sin(\psi_i + \pi/2)$.



Фиг. 1.23

Векторните образи на синусоидалните токове и на напрежителните падове с еднаква честота ω в дадена електрическа верига се изобразяват в една координатна система. Съвкупността от тези образи се нарича *векторна диаграма на веригата*. Когато е съставена от въртящите се векторни образи, тя се нарича *кинематична*. Тъй като векторните образи се въртят еднопосочно с постоянна ъглова скорост ω , при въртенето тяхното взаимно положение не се променя. Това означава, че не се променят фазовите разлики между изобразените физически величини. Изменят се моментните стойности, но техните елементи (амплитуди, честота и начални фази) са постоянни при въртенето. По тези причини е по-удобно да се строи векторна диаграма, съответстваща на кинематичната векторна диаграма в даден момент. Когато е съставена от неподвижни векторни образи, тя се нарича *статична векторна диаграма* и най-често се строи при $t = 0$. В този случай ъгълът между векторния образ и положителната посока на оста Ox е равен на началната фаза на изобразяваната синусоидална величина. Обикновено тук големината на векторите съответства на

ефективните стойности. За улеснение може да се приеме, че една от синусоидалните величини във веригата е с нулева начална фаза. Нейният векторен образ съвпада с оста Ox и служи като база за построяване на диаграмата. Ако веригата е с проста структура, с нулева начална фаза се приема величината, която е обща за всички елементи. При верига от последователно съединени елементи това е токът, а при паралелно съединение – напрежението на веригата.

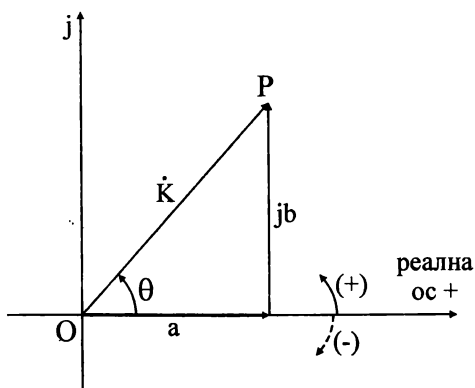
Трябва да се поясни, че векторен образ може да се построи само на хармоничен сигнал, представен в явна синусоидална форма. Например сигналът $u(t) = 100 \cos \omega t$ може да се изобрази като вектор, след като се преобразува във вида $u(t) = 100 \sin(\omega t + \pi/2)$.

1.5.3. Изобразяване на синусоидални сигнали с комплекси

А. Кратко въведение в комплексните числа

Комплексните числа имат две форми на представяне. За комплексното число \dot{K} тези форми са:

1. $\dot{K} = a + jb$ е алгебричната форма, където a е реалната част, b е имагинерната част, а $j = \sqrt{-1}$ е имагинерната единица.



Фиг. 1.24

2. $\dot{K} = Ke^{j\theta}$ е експоненциалната форма, при която комплексното число е записано в полярна координатна система. Тук K е модулът, а θ е аргументът на комплексното число.

Преходът от едната към другата форма се определя от векторното изобразяване на комплексното число. В комплексната равнина \dot{K} се представя като вектор \vec{OP} (фиг. 1.24) с големина $|\vec{OP}| = K$.

Преминването от едната към другата форма следва от геометричните съотношения:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} K = \sqrt{a^2 + b^2}, \\ \theta = \arctg b/a, \end{array} \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \rightarrow 1 \\ 1 \rightarrow 2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} a = K \cos \theta, \\ b = K \sin \theta. \end{array}$$

Двете форми на запис се отнасят за едно и също комплексно число. Според горните равенства то е

$$\dot{K} = a + jb = K \cos \theta + jK \sin \theta = K(\cos \theta + j \sin \theta) = Ke^{j\theta}.$$

Отгук следва формулата на Ойлер

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta. \quad (1.23)$$

С важно значение за изчисленията са частните случаи на (1.23):

$$e^{\pm j\frac{\pi}{2}} = \cos \pi/2 \pm j \sin \pi/2 = \pm j, \quad e^{\pm j\pi} = \cos \pi \pm j \sin \pi = -1 \quad \text{и} \quad e^{j0} = 1. \quad (1.24)$$

Б. Комплексен образ на синусоидална величина

Комплексният образ на синусоидална величина представлява комплексно число в експоненциален вид, чиито модул и аргумент са съответно равни на амплитудата и фазата на синусоидалната величина. Например комплексният образ на тока $i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i)$ е $\dot{i}(t) = i_m e^{j(\omega t + \psi_i)}$.

За едно конкретно напрежение от вида $u(t) = 220\sqrt{2} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$ комплексният образ е $\dot{u}(t) = 220\sqrt{2} e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}$. Ако към $\dot{i}(t) = i_m e^{j(\omega t + \psi_i)}$ се приложи формулата на Ойлер се установява, че синусоидалната величина е равна на имагинерната част на своя комплексен образ. Тъй като $\dot{i}(t) = i_m \cos(\omega t + \psi_i) + j i_m \sin(\omega t + \psi_i)$, следва, че $i(t) = \text{Im}[\dot{i}(t)] = i_m \sin(\omega t + \psi_i)$.

В. Комплексна ефективна стойност (комплекс)

Комплексният образ зависи от времето t , което е доста голямо неудобство при анализа на електрически вериги. Ето защо се предпочита друга комплексна величина, която съдържа цялата информация за синусоидалния сигнал, но не зависи от времето. Тя се нарича *комплексна ефективна стойност (комплекс)*. Комплексната ефективна стойност \dot{I} се дефинира в експоненциален вид с модул, равен на ефективната стойност и с аргумент – началната фаза на синусоидалната величина. Или

$$\dot{I} = I e^{j\psi_i}.$$

Връзката между комплекса и комплексния образ става ясна от техните експоненциални записи

$$\dot{i}(t) = \sqrt{2} I e^{j(\omega t + \psi_i)} = \sqrt{2} I e^{j\psi_i} e^{j\omega t} = \sqrt{2} \dot{I} e^{j\omega t}. \quad (1.25)$$

Понякога е удобно да се работи с комплексната амплитуда $\dot{I}_m = i_m e^{j\psi_i} = \sqrt{2} \dot{I}$. Аналогични са зависимостите и за напрежението.

Възможно е и обратно преобразуване от комплексен образ в моментна стойност. Ако е известна комплексната ефективна стойност $\dot{I} = a + jb$ и кръговата честота ω на съответния синусоидален ток, моментната му стойност $i(t)$ може да се намери по следния начин:

– Преобразува се комплексът в експоненциален вид

$$\dot{I} = a + jb = \sqrt{a^2 + b^2} e^{j \arctg \frac{b}{a}};$$

– Определят се ефективната стойност $I = \sqrt{a^2 + b^2}$ и началната фаза

$\psi_i = \arctg \frac{b}{a}$ на синусоидалната величина. За целта се изхожда от дефиницията

за комплекс $\dot{I} = I e^{j\psi_i}$;

– Моментната стойност на синусоидалната величина се записва във вида $i(t) = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \psi_i)$. Тук се заместват получените изрази за I и ψ_i .

Например, ако $\dot{I} = -3 - j4$, експоненциалният му запис е $\dot{I} = \sqrt{3^2 + 4^2} e^{j \arctg \frac{-4}{-3}} = 5 e^{-j126.87^\circ}$. Следователно ефективната стойност на тока е $I = 5$, началната фаза е $\psi_i = -126.87^\circ$, а за моментната стойност се получава $i(t) = 5\sqrt{2} \sin(\omega t - 126.87^\circ)$.

Посочените право и обратно преобразувания са аналогични и за синусоидални напрежения.

Комплексният образ или комплексът на хармоничната величина могат да се запишат само след като тя бъде преобразувана в явна синусоидална форма. Например, комплексният образ на $\frac{di(t)}{dt} = \omega i_m \cos(\omega t + \Psi_i)$ се определя, след като величината се представи във вида $\omega i_m \cos(\omega t + \Psi_i) = \omega i_m \sin(\omega t + \psi_i + \pi/2)$. Търсеният комплексен образ в случая ще бъде

$$\left[\frac{di(t)}{dt} \right] = \omega i_m e^{j(\omega t + \Psi_i + \frac{\pi}{2})} = \omega i_m e^{j(\omega t + \Psi_i)} e^{j\frac{\pi}{2}} = j \omega i_m e^{j(\omega t + \Psi_i)} = j \omega \dot{I}(t).$$

Комплексната ефективна стойност на $i(t) = 10\sqrt{2} \cos(\omega t - \pi/6)$ се намира от явната синусоидална форма $i(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t - \pi/6 + \pi/2) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/3)$. Получава се комплексът $\dot{I} = 10 e^{j\pi/3} = 10(\cos 60^\circ + j \sin 60^\circ) = 5 + j8.67, A$.

1.5.4. Мощности при синусодален режим

А. Видове мощности

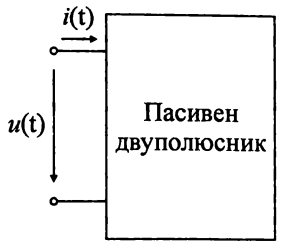
Разглежда се пасивен двуполусник (фиг. 1.25), т.е. верига от пасивни елементи с един вход или някакъв пасивен участък от нея.

На входа на двуполусника е приложено напрежение с моментна стойност $u(t) = u_m \sin(\omega t + \psi_u)$, а токът е $i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i)$. За двуполусника се дефинират следните видове мощности.

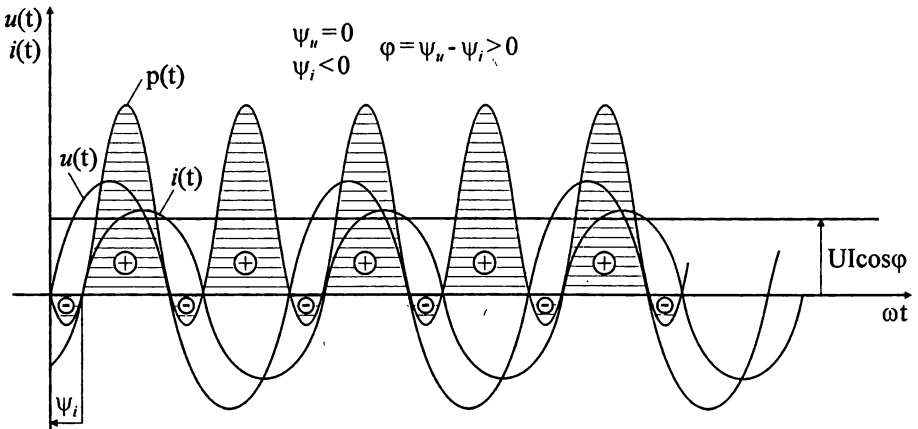
Моментна мощност $p(t) = u(t)i(t)$, с размерност W (ват). Тя е произведение от моментните стойности на напрежението и тока. Получава се

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{u_m i_m}{2} [\cos(\psi_u - \psi_i) - \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)] = \\ &= UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i), \end{aligned} \quad (1.26)$$

където φ е фазовата разлика между напрежението и тока. Следователно моментната мощност има независима от времето постоянна съставка $UI \cos \varphi$ и хармонична съставка с удвоена честота $UI \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)$. От (1.26) се вижда, че при $\varphi = 0$, $p(t) \geq 0$. В този случай моментната мощност се предава еднопосочно към двуполусника. При $\varphi \neq 0$ мощността променя знака си, като пулсира по синусодален закон около средната си стойност $UI \cos \varphi$. Графиките на $u(t)$, $i(t)$ и $p(t)$ са показани на фиг. 1.26.



Фиг. 1.25



Фиг. 1.26

На фигурата са разгледани сигналите с $\psi_u = 0$, $\psi_i < 0$ и $\varphi > 0$. От графиката се вижда, че $p(t)$ се изменя синусоидално с удвоена честота 2ω около права, успоредна на абсцисната ос, с ордината $UI \cos \varphi$. За време t отдаваната от мрежата към двуполусника енергия е равна на $\int_0^t p(t) dt$. Тя съответства на

ограничената за времето t площ от кривата $p(t)$ и абсцисната ос. Отбелязаните със знаците плюс и минус заштриховани площи са пропорционални на енергията, която съответно постъпва към двуполусника или се връща от него към веригата. В интервалите от време, за които $u > 0$, $i < 0$ или $u < 0$, $i > 0$, мощността $p(t) < 0$, т.е. двуполусникът връща електрическа енергия към мрежата, а в интервалите, за които u и i са с еднакви знаци, $p(t) > 0$ и енергията постъпва от мрежата към двуполусника. Постоянната съставка $UI \cos \varphi$ съответства на резултантната енергия, която се подава еднопосочно от мрежата към двуполусника и се преобразува необратимо в топлина.

Активна мощност P, W . Дефинира се като средна стойност за един период на моментната мощност

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\omega t) d\omega t = UI \cos \varphi. \quad (1.27)$$

Резултатът се получава, след като изразът за $p(t)$ се замести под интеграла в (1.27). Взема се предвид, че средната стойност за период на всяка синусоидална съставка е нула.

Мощност $P = 0$ се получава, само ако $\varphi = |\pi/2|$. Този случай е теоретично възможен, ако двуполусникът е съставен само от индуктивни и капацитивни елементи. Понеже косинусоидалната функция е четна, винаги $P \geq 0$.

Дефинираните по-горе изрази за моментната мощност $p(t) = u(t)i(t)$ и за активната мощност (1.27) са валидни и за периодични несинусоидални сигнали.

Реактивна мощност $Q, \text{var (вар)}$. При синусоидални сигнали тя се въвежда по аналогия с активната мощност

$$Q = UI \sin \varphi. \quad (1.28)$$

Поради нечетността на синусоидалната функция реактивната мощност има алгебричен знак: при $\varphi > 0$, $Q > 0$ и при $\varphi < 0$, $Q < 0$. В електроенергетиката реактивната мощност се разглежда както активната мощност: тя се свързва с условното (помощно) понятие реактивна енергия, като предавана, приемана и разпределяна реактивна мощност за определено време.

Реактивната мощност се дефинира само за синусоидални режими. В общия случай изразът (1.28) е валиден и за едноименните хармоници на напрежението и тока, които се получават при разлагането на съответните периодични несинусоидални сигнали в ред на Фурие.

Пълна (привидна) мощност S, VA . Тя се определя с произведението от ефективните стойности на напрежението и тока

$$S = UI . \tag{1.29}$$

Пълната мощност се използва за изчислителна мощност при много електротехнически устройства (електрически машини, апарати и др.), тъй като те се конструират да работят с определени стойности на напрежението и тока. Отношението на активната към пълната мощност дефинира *фактора на мощността* на двуполусника $P/S = UI \cos \varphi / UI = \cos \varphi$. Електрическите машини и апарати се използват толкова по-ефективно, колкото $\cos \varphi$ е по-близо до 1. Например, за да се гарантира активна мощност $P = 3000 \text{ W}$ в пасивен двуполусник при $\cos \varphi = 1$, същият трябва да бъде проектиран за изчислителна мощност $S = 3000 \text{ VA}$. При $\cos \varphi = 0,7$ същата активна мощност се получава при $S = 4286 \text{ VA}$, което означава завишаване на изчислителната мощност с 43%. Висок фактор на мощността ($\cos \varphi \rightarrow 1$) е необходим и за намаляване на загубите при предаване на енергия по далекопроводите. При зададена (фиксирана) активна мощност P и захранващо напрежение на консуматора с нарастването на $\cos \varphi$ токът намалява, а заедно с него намаляват и загубите в линията.

От изразите (1.27), (1.28) и (1.29) става ясно, че при синусоидален режим между P , Q и S съществува връзката:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} . \tag{1.30}$$

Комплексна мощност \dot{S} . Тя се използва при изчисляването на електрически вериги с комплекси и се дефинира като произведение от комплекса на напрежението със спрегнатия комплекс на тока през двуполусника

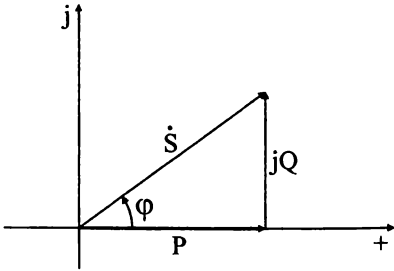
$$\dot{S} = \dot{U} I^* . \tag{1.31}$$

От дефиницията на комплекс и формулата на Ойлер (1.23) $\dot{I} = I e^{j\psi_i} = I \cos \psi_i + jI \sin \psi_i$, за I се получава $I = I \cos \psi_i - jI \sin \psi_i = I e^{-j\psi_i}$. След заместване на I в (1.31) изразът добива вида

$$\dot{S} = \dot{U} \dot{I} = Ue^{j\psi_u} Ie^{-j\psi_i} = UIe^{j\varphi} = Se^{j\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ. \quad (1.32)$$

Удобството от използването на \dot{S} за изчисляването на мощности при синусоидални режими става ясно от двете съставки на комплексната мощност

$$P = \text{Re}(\dot{S}) = \text{Re}(\dot{U} \dot{I}^*) \quad \text{и} \quad Q = \text{Im}(\dot{S}) = \text{Im}(\dot{U} \dot{I}^*). \quad (1.33)$$



Фиг. 1.27

В комплексната равнина \dot{S} се изобразява с вектор, чиято големина е пълната мощност S , реалната част е P , имагинерната част е Q , а ъгълът, сключен с положителната посока на реалната ос, е φ . Получава се *триъгълник на мощностите* (фиг. 1.27), от който следват някои тригонометрични връзки, например $\varphi = \text{arctg } Q/P$ и др.

Б. Източници на енергия и консуматори

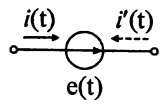
Беше пояснено, че при анализа на електрическа верига за токовете се приемат условни посоки. В избраните посоки те се изчисляват със съответен алгебричен знак. Ако в даден клон на верига за постоянен ток се получи отрицателен знак на тока, това означава, че действителната посока на тока в клона е обратна на избраната. *Следователно действителната посока на тока се уточнява допълнително.* По същия начин може да се постъпи и с мощността в даден елемент: условно той може да бъде отнесен към източниците на енергия или към консуматорите. *Едва след изчисляването на мощността по знак се уточнява дали всъщност елементът е източник или консуматор на енергия.* При условната категоризация на източниците на енергия чрез мощността на елемента тя се изчислява като произведение от е.д.н. между полюсите на същия елемент и тока през него

$$p_{\Gamma_{\text{усл}}}(t) = \pm e(t) i(t). \quad (1.33)$$

Знакът „+“ се записва, ако избраната посока на $i(t)$ съвпада с посоката на $e(t)$, а знакът „-“, ако избраната посока на тока е обратна на посоката на $e(t)$.

Така например, за избраната посока на тока $i(t)$ от фиг. 1.28 се записва $p_{\Gamma_{\text{усл}}}(t) = +e(t) i(t)$, а ако се приеме, че през $e(t)$ протича токът $i'(t)$, ус-

ловната мощност ще бъде $p_{Г\text{ усл}}(t) = -e(t)i'(t)$. Знакът на тока след анализа на веригата определя действителният знак на $p_{Г\text{ усл}}(t)$. Условното твърдение е правилно, ако $p_{Г\text{ усл}}(t) > 0$. Тогава елементът работи в генераторен режим, т.е. той е източник на енергия. И обратно, при $p_{Г\text{ усл}}(t) < 0$, елементът работи като електрически консуматор.

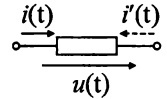


Фиг. 1.28

При условната категоризация на елемента като консуматор мощността се намира като произведение от напрежението върху елемента и тока през него

$$p_{К\text{ усл}}(t) = \pm u(t)i(t). \quad (1.34)$$

И тук знакът пред произведението е положителен, ако избраната посока на тока $i(t)$ съвпада с посоката на $u(t)$ и е отрицателен, когато техните посоки са различни. В съответствие с избраната посока на тока $i(t)$ или $i'(t)$ за елемента от фиг. 1.29 се записва $p_{К\text{ усл}}(t) = +u(t)i(t)$ или съответно $p_{К\text{ усл}}(t) =$

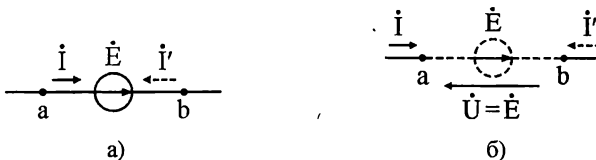


Фиг. 1.29

$= -u(t)i'(t)$. В резултат на изчисленията се уточняват алгебричните знаци на величините $u(t)$ и $i(t)$ (респ. $i'(t)$), след което се уточнява и знакът на мощността $p_{К\text{ усл}}(t)$. Ако $p_{К\text{ усл}}(t) > 0$, условното твърдение е правилно и елементът работи в консуматорен режим. Обратно, при $p_{К\text{ усл}}(t) < 0$ елементът реално работи като електрически генератор (източник на енергия).

Независимо от това дали елементът условно е приет за източник или консуматор на енергия, резултатите за числената стойност на мощността и за неговата реална категоризация са едни и същи. За удобство по-долу е направена числена илюстрация при синусоиден режим с използването на комплекси за три случая: 1) идеален източник на е.д.н; 2) комплексно съпротивление Z и 3) идеален източник на е.д.ток.

Пример 1.6. На фиг. 1.30а е показан идеален източник на е.д.н., чиято стойност е $\dot{E} = 2 - j3$, V. Токът през елемента е $\dot{I} = -4 + j5$, A.



Фиг. 1.30

а) Да се изчисли активната мощност P на източника и да се уточни неговият режим на работа. Да се направи проверка на резултата, като мощността

се изчисли още по следните три начина: б) чрез тока $\dot{I}' = -\dot{I} = 4 - j5$, А. и \dot{E} ; в) чрез напрежението $\dot{U} = \dot{E} = 2 - j3$, V между полюсите на източника и тока \dot{I} (фиг.1.30б); г) чрез \dot{U} и тока \dot{I}' .

Решение: а) Най-напред елементът се разглежда като условен генератор.

Мощността $P_{Г\text{ усл}} = \text{Re}(\dot{E} \dot{I}) = \text{Re}[(2 - j3)(-4 - j5)] = -23 \text{ W}$ се определя при еднакви посоки на \dot{E} и \dot{I} . Тъй като $P_{Г\text{ усл}} < 0$, допускането, че елементът работи като генератор, е грешно. Елементът работи реално в консуматорен режим.

б) Елементът се разглежда също като условен генератор, но при ток \dot{I}' (с посока, обратна на \dot{E}). Получава се $P_{Г\text{ усл}} = \text{Re}(-\dot{E} \dot{I}') = \text{Re}[-(2 - j3)(4 + j5)] = -23 \text{ W}$, т.е. същият резултат.

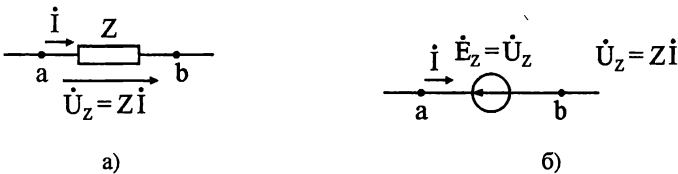
в) Елементът се разглежда като условен консуматор. Определя се $P_{К\text{ усл}} = \text{Re}(-\dot{U} \dot{I}) = \text{Re}[-(2 - j3)(-4 - j5)] = +23 \text{ W} > 0$. При записа се взема предвид, че напрежението \dot{U} и токът \dot{I} са противоположни. Резултатът за знака показва, че условната категоризация на елемента е правилна и той работи в консуматорен режим.

г) Елементът се разглежда също като условен консуматор със съпосочни напрежение \dot{U} и ток \dot{I}' . И тук $P_{К\text{ усл}} = \text{Re}(\dot{U} \dot{I}') = \text{Re}[(2 - j3)(4 + j5)] = +23 \text{ W} > 0$, което потвърждава, че той действително работи в консуматорен режим.

При всеки от четирите начина на разглеждане резултатът е един и същ. Елементът работи реално в консуматорен режим и консумираната активна мощност е 23 W.

Пример 1.7. На фиг. 1.31а е даден пасивен участък с комплексно съпротивление $Z = R + jX = 3 - j4$, Ω и ток $\dot{I} = 8 + j6$, А в означената посока.

а) Да се изчисли отделената активна мощност P и да се изследва знакът на резултата, ако елементът се разглежда като условен консуматор; б) Да се направи проверка на получената стойност за P и на оценката за характера на участъка, при условие че той се разглежда като условен генератор (фиг. 1.31б).



Фиг. 1.31

Решение: а) По дефиницията за определяне на активна мощност

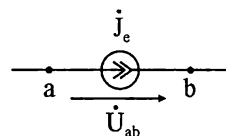
$$P_{К\text{ усл}} = \text{Re}(+\dot{U}_Z \dot{I}) = \text{Re}[Z \dot{I} \dot{I}] = \text{Re}[Z I^2] = \text{Re}[(R + jX) I^2] = R I^2 = 3(8^2 + 6^2) =$$

$= 300 \text{ W}$. Тук I е ефективната стойност на тока. Тъй като условието $P_{K \text{ усл}} = RI^2 > 0$ е винаги изпълнено при $R \neq 0$, следва, че участъкът е реален консуматор.

б) Същият участък може да се отнесе формално и към условните източници на енергия. За целта напрежението между фиктивните възли a и b се заменя с е.д.н. $\dot{E} = \dot{U}_Z = Z\dot{I}$, чиято посока е обратна на заменения пад $\dot{U}_Z = Z\dot{I}$ (фиг. 1.31б). Условно генерираната активна мощност на участъка се определя с

израза $P_{Г \text{ усл}} = \text{Re}(-\dot{E}_Z^* \dot{I}) = \text{Re}[-\dot{U}_Z^* \dot{I}] = \text{Re}[-Z\dot{I}^* \dot{I}] = \text{Re}[-(R + jX)I^2] = -RI^2 = -300 \text{ W} < 0$. При $R \neq 0$ винаги $P_{Г \text{ усл}} < 0$ и следователно участъкът е реален консуматор. *Крайният резултат е един и същ, независимо от формалната категоризация на елемента като условен генератор или условен консуматор.*

Пример 1.8. На фиг. 1.32 е показан източник на е.д.ток $\dot{J}_e = 1 + j$, mA, с напрежение върху източника в работен режим $\dot{U}_{ab} = 20 + j20$, mV. Да се изчисли активната мощност на източника и да се изследва знакът на резултата.



Фиг. 1.32

Решение: Елементът се разглежда като условен консуматор на мощност.

Определя се $P_{K \text{ усл}} = \text{Re}(\dot{U}_{ab} \dot{J}) = \text{Re}[(20 + j20)(1 - j)] = 40 \cdot 10^{-3} \text{ m W} = 40 \mu \text{ W} > 0$. Тъй като $P_{K \text{ усл}} > 0$, следва, че този елемент е реален (маломощен) консуматор.

В. Баланс на мощностите

Съгласно принципа за съхранение на енергията във всяка затворена система, сумарната генерирана и сумарната консумирана енергия са равни. Този принцип е валиден за електрическата верига като една изолирана система и намира израз в *уравнението за баланса на мощностите във веригата*. Уравнението е в сила както за комплексните условни мощности на елементите от веригата, така и за комплексните действителни мощности на елементите. При синусоиден режим уравнението за баланса на комплексните условни мощности например се представя с израза

$$\sum_{n=1}^N \dot{S}_{Г \text{ усл}}^n = \sum_{r=1}^R \dot{S}_{К \text{ усл}}^r \quad (1.35)$$

Тук с N е означен броят на елементите на веригата, разглеждани като условни генератори, а с R – броят на елементите, приети за условни консумато-

ри. От (1.35) се достига до уравненията за баланса на активните и за баланса на реактивните мощности

$$\sum_{n=1}^N P_{Г\text{ усл}}^n = \sum_{r=1}^R P_{К\text{ усл}}^r \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^N Q_{Г\text{ усл}}^n = \sum_{r=1}^R Q_{К\text{ усл}}^r \quad (1.36)$$

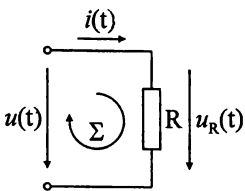
1.6. СИНУСОИДАЛЕН РЕЖИМ ПРИ ПРОСТИ ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ

1.6.1. Въведение

Разглеждат се електрически вериги с един елемент R , L или C , както и такива, които включват последователно или паралелно съединение от тези елементи. Предполага се, че остатъчните параметри на елементите са пренебрежимо малки, поради което те могат да се считат за *идеални*. Освен това се приема, че електрическите вериги са *линейни*, т.е. параметрите R , L и C не зависят от тока или напрежението върху тях. Линейността на веригата се разпростира и върху инвариантността на елементите от влиянието на дестабилизиращи външни фактори като температура, влага, налягане, стареене и др. *Във всяка линейна електрическа верига видът на входния сигнал (напрежение или ток) определя вида на съответната му реакция. Ако във веригата са включени повече от един източник на енергия, при анализа може да се приложи принципът с наслабяването: реакцията (ток или напрежение) в определен участък от веригата представлява сума от частни реакции, които се дължат на самостоятелното действие на всеки един от източниците на енергия.*

1.6.2. Верига от един идеален елемент

А. Верига от един резистор



Фиг. 1.33

Постановка на задачата. На фиг. 1.33 са известни: съпротивлението R на резистора и напрежението $u(t) = u_m \sin(\omega t + \psi_u)$. Търси се токът $i(t)$ и мощностите $p(t)$, P , Q и S .

Анализ. Тъй като веригата е линейна, при това входно напрежение токът е синусоидален и има същата честота, т.е. $i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i)$. Решението се свежда само до определяне на амплитудата i_m и началната фаза ψ_i на тока.

За означения контур по втория закон на Кирхоф се записват следните равностойни уравнения: $u_R(t) - u(t) = 0$ и $u_{Rm} \sin(\omega t + \psi_{uR}) = u_m \sin(\omega t + \psi_u)$. Двете синусоидални величини са равни, ако са равни техните амплитуди и фази, откъдето следва

$$u_{Rm} = u_m \quad \text{и} \quad \psi_{uR} = \psi_u. \quad (1.37)$$

Резисторът е единственият елемент, при който законът на Ом е валиден по отношение на моментните стойности на тока и напрежението, т.е.

$$u_R(t) = Ri(t). \quad (1.38)$$

След съответно заместване се получава $u_{Rm} \sin(\omega t + \psi_{uR}) = Ri_m \sin(\omega t + \psi_i)$. От приравняването на амплитудите и на фазите на двете синусоидални величини се достига до търсените зависимости

$$\left. \begin{aligned} Ri_m &= u_{Rm}, \\ \omega t + \psi_i &= \omega t + \psi_{uR}, \end{aligned} \right\} \text{и съответно} \left\{ \begin{aligned} I &= \frac{U_R}{R}, \\ \psi_i &= \psi_{uR}, \end{aligned} \right. \quad \text{откъдето } \varphi = 0. \quad (1.39)$$

Моментната $p(t)$, активната P , пълната S и реактивната мощност Q в резисторната верига се определят, както следва:

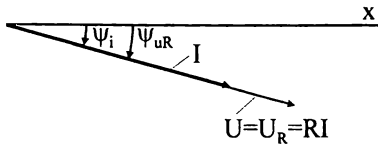
$$p(t) = u(t)i(t) = Ri^2(t) = 2UI \sin^2(\omega t + \psi_u) = UI[1 - \cos 2(\omega t + \psi_u)],$$

$$P = S = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}, \quad Q = 0.$$

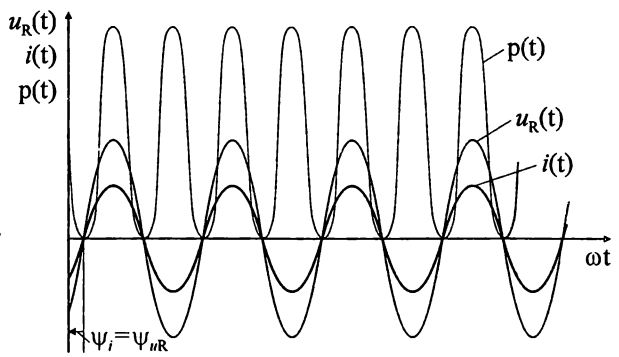
На фиг. 1.34а е показана статичната векторна диаграма на веригата при $\psi_i = \psi_{uR} < 0$, а на фиг. 1.34б - графиките на изменението на $i(t)$, $u_R(t) = u(t)$ и $p(t)$.

Изводи:

- » Законът на Ом е валиден както за амплитудните, така и за ефективните стойности на напрежителния пад и тока в резистора;
- » По характер съпротивлението R на резистора е активно и не се променя както при постоянен, така и при променливотоков режим на работа;
- » Токът и напрежителният пад в резистора съвпадат по фаза и фазовата разлика между тях е нула;
- » Моментната мощност $p(t)$ се променя в границите от 0 до $2UI$ и винаги е положителна. Тя се предава еднопосочно от мрежата към веригата, като постъпилата енергия в резистора се преобразува необратимо в топлина;
- » Активната мощност P съвпада с пълната мощност S , а реактивната мощност Q е равна на нула.



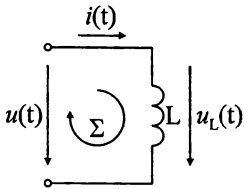
а)



б)

Фиг. 1.34

Б. Верига от един индуктивен елемент



Фиг. 1.35

Постановка на задачата. За веригата от фиг. 1.35 са известни: напрежението $u(t) = u_m \sin(\omega t + \psi_u)$ и параметърът L на индуктивния елемент. Търси се токът $i(t)$ и мощностите $p(t)$, P , Q и S .

Анализ. Тъй като веригата е линейна, при зададеното входно напрежение токът е синусоидален и има същата честота, т.е. $i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i)$. Решението се свежда само до определяне на амплитудата i_m и началната фаза ψ_i на тока.

По втория закон на Кирхоф за означения контур се записват уравненията $u_L(t) - u(t) = 0$, $u_L(t) = u(t)$ и $u_{Lm} \sin(\omega t + \psi_{uL}) = u_m \sin(\omega t + \psi_u)$. Равенството на двете синусоидални напрежения позволява да се търси директно връзката между $u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ и тока през елемента. След заместването на $i(t)$ в този израз се получава $u_{Lm} \sin(\omega t + \psi_{uL}) = \omega L i_m \cos(\omega t + \psi_i)$. Дясната страна се преобразува в явна синусоидална форма $u_{Lm} \sin(\omega t + \psi_{uL}) = \omega L i_m \sin(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2})$, след което се приравняват амплитудите и съответно аргументите на двете синусоидални величини. Така се достига до зависимостите

$$\left| \begin{array}{l} \omega L i_m = u_{Lm}, \\ \omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2} = \omega t + \psi_{uL}, \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left| \begin{array}{l} i_m = \frac{u_{Lm}}{\omega L}, \text{ откъдето } I = \frac{U_L}{X_L}, \\ \psi_i = \psi_{uL} - \frac{\pi}{2} \text{ или } \varphi = \psi_{uL} - \psi_i = \frac{\pi}{2}. \end{array} \right. \quad (1.40)$$

Моментната, активната, реактивната и пълната мощности се определят с изразите

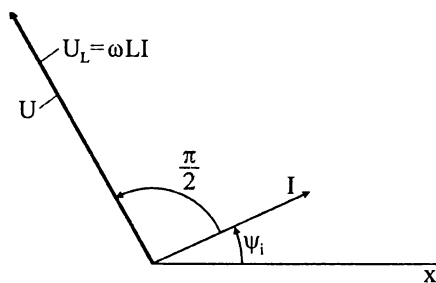
$$p(t) = u_L(t)i(t) = L \frac{di(t)}{dt} i(t) = \omega L i_m^2 \cos(\omega t + \psi_i) \sin(\omega t + \psi_i) = \omega L I^2 \sin 2(\omega t + \psi_i)$$

$$P = UI \cos \varphi = 0; \quad Q = S = U_L I = X_L I^2.$$

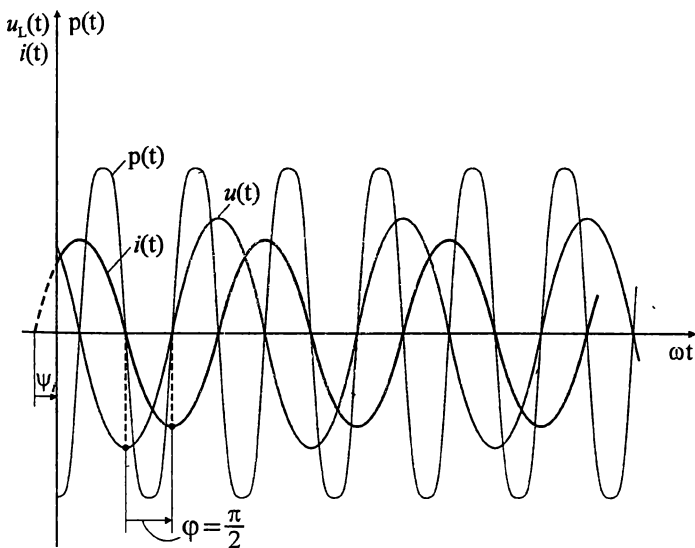
Изводи:

- » Законът на Ом е валиден както за амплитудните, така и за ефективните стойности на напрежителния пад и тока в индуктивния елемент;
- » Съпротивлението на елемента при синусоиден режим е $X_L = \omega L$. То има реактивен характер и се нарича индуктивно съпротивление;
- » Токът изостава от напрежителния пад с 90° или $\pi/2$, rad;
- » Фазовата разлика между напрежителния пад и тока в елемента е $\omega = +\pi/2 > 0$;
- » Средната стойност на моментната мощност $p(t)$ е нула. Следователно елементът не консумира активна мощност, респ. активна енергия;
- » Пълната мощност S е равна на реактивната Q , тъй като $P = 0$;
- » Реактивната мощност е винаги с положителен знак.

На фиг. 1.36а е показана статичната векторна диаграма на веригата при $\psi_i > 0$, а на фиг. 1.36б – графиките на $i(t)$, $u_L(t) = u(t)$ и $p(t)$.

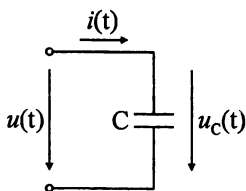


Фиг. 1.36а



Фиг. 1.36б

В. Вери́га от един капа́цитивен елемент



Фиг. 1.37

Постановка на задачата. За веригата от фиг. 1.37 са известни: напрежението $u(t) = u_m \sin(\omega t + \psi_u)$ и капацитетът C на кондензатора. Търси се токът $i(t)$ и мощностите $p(t)$, P , Q и S .

Анализ. Тъй като веригата е линейна, при зададеното входно напрежение токът е синусоидален и има същата честота, т.е. $i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i)$. И тук решени-

ето се свежда до намиране на амплитудата i_m и началната фаза ψ_i на тока.

За означения контур по втория закон на Кирхоф се записват следните уравнения: $u_C(t) - u(t) = 0$ и $u_{Cm} \sin(\omega t + \psi_{uC}) = u_m \sin(\omega t + \psi_u)$. Равенството на синусоидалните напрежения $u_C(t)$ и $u(t)$ позволява да се определи директно връзката между $u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$ и $i(t)$. След заместването на $i(t)$ в този

израз се получава $u_{Cm} \sin(\omega t + \psi_{uC}) = -\frac{1}{\omega C} i_m \cos(\omega t + \psi_i)$. Премахва се към

явна синусоидална форма $u_{Cm} \sin(\omega t + \psi_{uC}) = \frac{1}{\omega C} i_m \sin(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2})$. Прирав-

няват се амплитудите и съответно аргументите на синусоидалните величини от двете страни на равенството и се получават зависимостите

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\omega C} i_m = u_{Cm}, \\ \omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2} = \omega t + \psi_{uC}, \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} i_m = \frac{u_{Cm}}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{u_{Cm}}{X_C} \quad \text{или} \quad I = \frac{U_C}{X_C}, \\ \psi_i = \psi_{uC} + \frac{\pi}{2}; \quad \varphi = \psi_{uC} - \psi_i = -\frac{\pi}{2}. \end{array} \right. \quad (1.41)$$

Моментната, активната, реактивната и пълната мощности се определят с изразите

$$p(t) = i(t) \frac{1}{C} \int i(t) dt = -\frac{1}{\omega C} i_m^2 \cos(\omega t + \psi_i) \sin(\omega t + \psi_i) = -X_C I^2 \sin 2(\omega t + \psi_i)$$

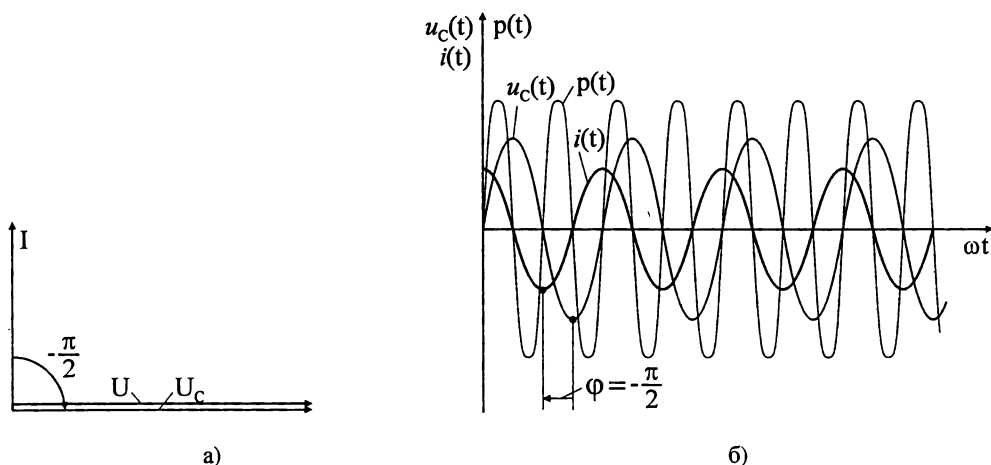
$$\left. \begin{array}{l} P = UI \cos \varphi = 0 \\ Q = -U_C I = -X_C I^2 \end{array} \right\} \quad \text{и следователно} \quad S = |Q|.$$

Изводи:

» Законът на Ом е валиден както за амплитудните, така и за ефективните стойности на напрежителния пад и тока в капацитивния елемент;

- » Съпротивлението на елемента при синусоиден режим е $X_C = \frac{1}{\omega C}$. По характер то е реактивно и се нарича капацитивно съпротивление;
- » Токът изпреварва напрежителния пад с 90° , т.е. с $\pi/2$, rad;
- » Фазовата разлика между напрежителния пад и тока в елемента е $\varphi = -\pi/2 < 0$;
- » Средната стойност на моментната мощност $p(t)$ е нула. Следователно елементът не консумира активна мощност, респективно активна енергия;
- » Пълната мощност S е равна по абсолютна стойност на реактивната Q ;
- » Реактивната мощност, $Q = -X_C I^2$ е винаги с отрицателен знак.

На фиг. 1.38а е показана статичната векторна диаграма на веригата при $\psi_u = 0$, а на фиг. 1.38б – графиките на $i(t)$, $u_C(t) = u(t)$ и $p(t)$.



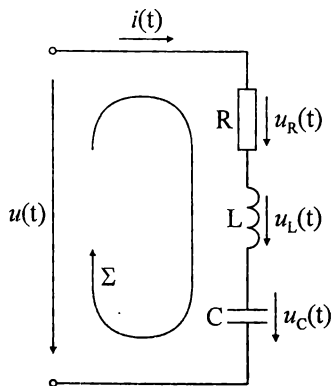
Фиг. 1.38

1.6.3. Верига от последователно съединени резистор R , индуктивен елемент L и капацитивен елемент C

Постановка на задачата. За веригата от фиг. 1.39 са известни напрежението $u(t) = u_m \sin(\omega t + \psi_u)$ и параметрите R, L и C на последователно включените елементи. Търси се токът $i(t)$ и мощностите $p(t)$, P , Q и S .

Анализ. В изследваната линейна електрическа верига токът е синусоидален $i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i)$ и има честотата на входното напрежение. Решението се свежда до определяне на амплитудата i_m и началната фаза ψ_i на тока.

а) Решение с комплекси. По втория закон на Кирхоф за означения контур се записва $u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) - u(t) = 0$ или $u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = u(t)$. След заместване на трите напрежителни пада с техните определящи изрази се получава



Фиг. 1.39

$$R i(t) + L \frac{d i(t)}{d t} + \frac{1}{C} \int i(t) d t = u(t). \quad (1.42)$$

Съгласно дефиницията всяка моментна стойност на синусоидална величина се замества в горния израз с имагинерната част на съответния комплексен образ

$$R \operatorname{Im} \dot{i}(t) + L \frac{d \operatorname{Im} \dot{i}(t)}{d t} + \frac{1}{C} \int \operatorname{Im} \dot{i}(t) d t = \operatorname{Im} \dot{u}(t)$$

Резултатът не се променя, ако към целия израз отляво на горното равенство се приложи операцията за вземане на имагинерна част

$$\operatorname{Im} \left[R \dot{i}(t) + L \frac{d \dot{i}(t)}{d t} + \frac{1}{C} \int \dot{i}(t) d t \right] = \operatorname{Im} [\dot{u}(t)]. \quad (1.43a)$$

Зависимостта е в сила и ако се изхожда от равенството на изразите в средните скоби от двете страни на (1.43a). Това води до решаването на по-общото уравнение

$$R \dot{i}(t) + L \frac{d \dot{i}(t)}{d t} + \frac{1}{C} \int \dot{i}(t) d t = \dot{u}(t). \quad (1.43b)$$

Известно е, че равенството на две комплексни числа (в случая (1.43b)) означава не само равенство на имагинерните им части (1.43a), но и на техните реални части, т.е. от (1.43a) не следва директно валидността на (1.43b). Тъй като в случая интерес представляват само имагинерните части, възможно е да се решава по-общото уравнение (1.43b), защото това се оказва по-удобно. Като се има предвид (1.25), (1.43b) се трансформира до $R \sqrt{2} \dot{I} e^{j\omega t} + L j \omega \sqrt{2} \dot{I} e^{j\omega t} + \frac{1}{C j \omega} \sqrt{2} \dot{I} e^{j\omega t} = \sqrt{2} \dot{U} e^{j\omega t}$. Оттук след съкращаване на общите множители се

достига до: $R \dot{I} + L j \omega \dot{I} + \frac{1}{C j \omega} \dot{I} = \dot{U}$. Полученият израз се преобразува окончателно във вида

$$(R + j \omega L - j \frac{1}{\omega C}) \dot{I} = Z \dot{I} = \dot{U}. \quad (1.44)$$

Тук величината $Z = R + j \omega L - j \frac{1}{\omega C}$ се нарича *комплексно съпротивление*

на веригата. В експоненциален вид то е $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} e^{j \arctg \frac{X_L - X_C}{R}}$.

Модульът $z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ се нарича пълно (привидно) съпротивление (импеданс). Аргументът на комплексното съпротивление е $\varphi_z = \operatorname{arctg} \frac{X_L - X_C}{R}$.

От (1.44) следва законът на Ом в комплексна форма

$$i = \frac{\dot{U}}{Z}. \quad (1.45)$$

Моментната стойност на тока се търси от връзката $i(t) = \operatorname{Im}[\sqrt{2} \dot{I} e^{j\omega t}]$.

Съгласно представената процедура уравненията за веригата, записани в моментни стойности с помощта на производни и интегрални зависимости, се заместват от алгебрични уравнения, относно комплексите на токовете, електродвижещите величини и комплексните съпротивления и веригата се решава по символичния метод с комплексни числа. Моментните и ефективните стойности на токовете и напреженията и съответните мощности се определят въз основа на получените в комплексна форма резултати.

б) Аналитично решение. За да се определят ефективната (амплитудната) стойност и началната фаза на тока в уравнение (1.45), комплексите се представят с техните дефиниционни изрази

$$I e^{j\psi_i} = \frac{U e^{j\psi_u}}{z e^{j\varphi_z}}, \text{откъдето следва} \begin{cases} I = \frac{U}{z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \\ \psi_i = \psi_u - \varphi_z; \quad \varphi = \varphi_z = \operatorname{arctg} \frac{X_L - X_C}{R}. \end{cases} \quad (1.46)$$

Зависимостите след скобата от (1.46) дават възможност за бързо аналитично решение на веригата. След намиране на I и ψ_i се записва моментната стойност на тока $i(t) = \sqrt{2} \frac{U}{z} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi)$.

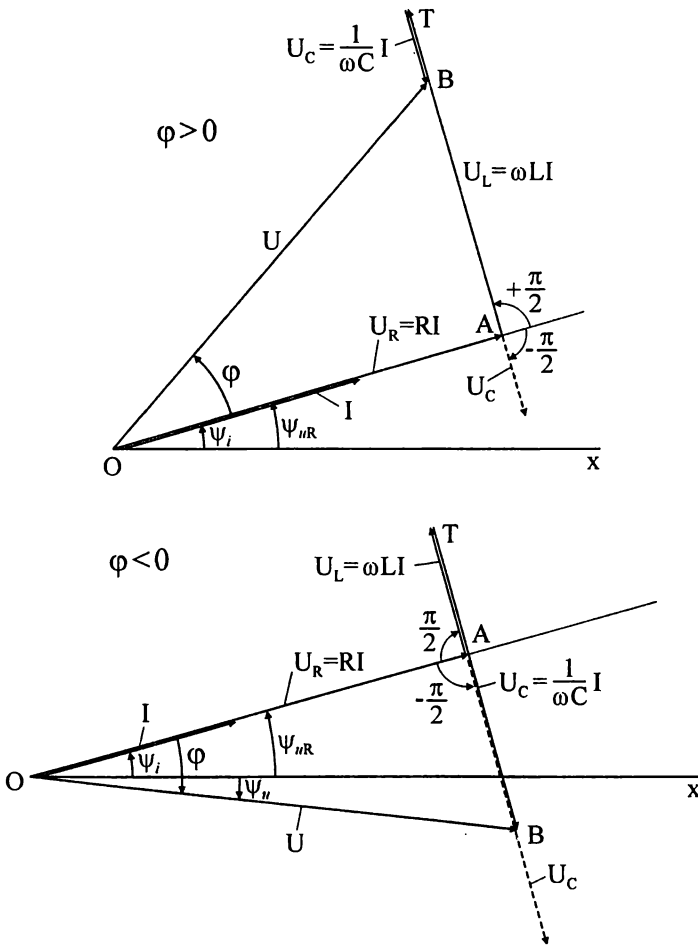
в) Решение с векторна диаграма. Тъй като токът е синусоидален, лявата страна на уравнение (1.42) е сума от синусоидални величини. Във векторната диаграма на веригата тя се замества със сумата от съответните векторни образи. В резултат се получава векторният образ на синусоидалната величина от дясно на равенството. При построяването на статичната векторна диаграма (фиг. 1.40а,б) се взема предвид, че през всички елементи на веригата протича един и същ ток. Затова векторният образ на тока е основен за построяване на диаграмата. Известни са връзките между напрежителните падове във всеки от идеалните елементи и тока. За ефективните стойности на падовете важи законът на Ом

$$U_R = RI; \quad U_L = \omega LI = X_L I \quad \text{и} \quad U_C = \frac{1}{\omega C} I = X_C I. \quad (1.47)$$

Началните фази се определят допълнително в зависимост от вида на елемента

$$\psi_{uR} = \psi_i; \quad \psi_{uL} = \psi_i + \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \psi_{uC} = \psi_i - \frac{\pi}{2}. \quad (1.48)$$

При сумирането на векторните образи се спазва изискването началото на всеки следващ вектор да съвпада с края на предишния. Векторният образ на резултата свързва началото на първия с края на последния от сумираните векторни образи. На фиг. 1.40а е показана векторната диаграма при $\varphi > 0$, ($X_L > X_C$), а на фиг. 1.40б – при $\varphi < 0$, ($X_L < X_C$).



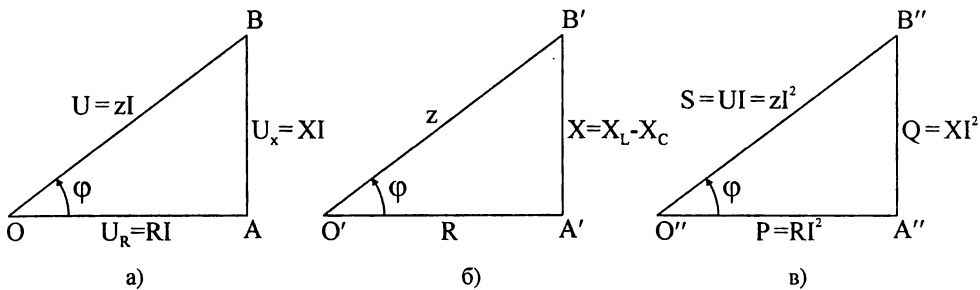
Фиг. 1.40а,б

От двете диаграми на фиг. 1.40 следват геометричните зависимости:

$$\overline{OA} m_u = U_R = RI; \quad \overline{AT} m_u = U_L = X_L I; \quad \overline{TB} m_u = U_C = X_C I;$$

$$\overline{AB} m_u = |\overline{AT} - \overline{TB}| m_u = |U_L - U_C| = |X_L I - X_C I| = |X_L - X_C| I = |X| I = U_x,$$

където m_u е мащабът на напреженията. В $\triangle OAB$ (фиг. 1.41а), наречен *триъгълник на напреженията*, всяка от страните е пропорционална на напрежителните падове U_R, U_x и U . Разглежда се случаят $\varphi > 0$. Ако всяка от тези страни се раздели на тока I , се получава *триъгълникът на съпротивленията* $\triangle O'A'B'$ (фиг. 1.41б), чиито страни са пропорционални на $R, X = X_L - X_C$ и z . Ако страните на триъгълника $\triangle OAB$ се умножат с I или на $\triangle O'A'B'$ с I^2 , се получава *триъгълник на мощностите* $\triangle O''A''B''$ със страни P, Q и S (фиг. 1.41в).



Фиг. 1.41

з) *Мощности*. И трите вида мощности P, Q и S се оценяват посредством комплексната мощност, която постъпва към веригата

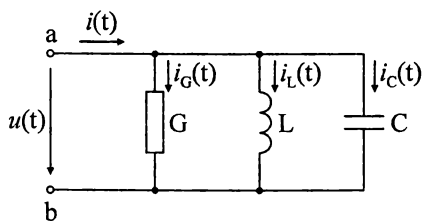
$$\left| \begin{aligned} \dot{S} = \dot{U} I^* = (ZI)^* I = Z I e^{j\psi_i} I e^{-j\psi_i} = Z I^2 = (R + jX) I^2 = R I^2 + j X I^2; \\ P = \text{Re}(\dot{S}) = R I^2 \quad \text{и} \quad Q = \text{Imag}(\dot{S}) = X I^2. \end{aligned} \right. \quad (1.49)$$

Изводи:

» Фазовата разлика (дефазирането) между напрежението $u(t)$ и тока $i(t)$ при $X_L > X_C$ е $\varphi > 0$, а при $X_L < X_C$ е $\varphi < 0$. В първия случай веригата има индуктивен характер и резултантното реактивно съпротивление $X > 0$, а във втория – характерът на веригата е капацитивен и $X < 0$;

- » От правоъгълните триъгълници на напреженията, съпротивленията и мощностите следват съответни тригонометрични зависимости, полезни за изчисленията;
- » В пасивен участък от веригата с комплексно съпротивление $Z = R + jX$ и ефективна стойност на тока I , комплексната мощност е $\dot{S} = ZI^2$, активната мощност е $P = RI^2$, а реактивната мощност – $Q = XI^2$.

1.6.4. Двуполусник от паралелно съединени резистор G , индуктивен елемент L и кондензаторен елемент C



Фиг. 1.42

Постановка на задачата. За показаната на фиг. 1.42 верига са известни напрежението $u(t) = u_m \sin(\omega t + \psi_u)$ и параметрите G, L и C на паралелно включените елементи. Търси се токът $i(t)$ и мощностите $p(t), P, Q$ и S .

Анализ. Тъй като електрическата верига е линейна, токът също е синусоидален $i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i)$ и има честотата на входното напрежение. Определят се амплитудата i_m и началната фаза ψ_i на тока.

а) Решение с комплекси. По първия закон на Кирхоф се записва уравнението за общия възел a : $i_G(t) + i_L(t) + i_C(t) - i(t) = 0$ или $i_G(t) + i_L(t) + i_C(t) = i(t)$. Взема се предвид, че паралелното съединение се характеризира с равенство на напреженията $u_G(t) = u_L(t) = u_C(t) = u(t)$. Отчита се връзката между моментните стойности на напрежителния пад и тока във всеки един идеален елемент, а именно:

$$i_G(t) = \frac{1}{R} u(t) = G u(t); \quad i_L(t) = \frac{1}{L} \int u(t) dt; \quad i_C(t) = C \frac{du(t)}{dt}.$$

След заместване на трите тока с техните определящи изрази, уравнението за възела a се преобразува във вида

$$G u(t) + C \frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{L} \int u(t) dt = i(t), \quad (1.50)$$

където с $G = 1/R$ е означена проводимостта на резистора за съответния клон. Съгласно дефиницията моментните стойности на тока и напрежението в (1.50) се заместват с имагинерните части на съответните комплексни образи. Уравне-

нието остава тъждествено и след прилагането на операцията за вземане на имажинерна част към целия израз в лявата страна, при което се получава

$$\operatorname{Im}[G \dot{u}(t) + C \frac{d \dot{u}(t)}{dt} + \frac{1}{L} \int \dot{u}(t) dt] = \operatorname{Im}[\dot{i}(t)]. \quad (1.51a)$$

По аналогия с решението на (1.43a) и като се има предвид свързаното с него пояснение, и тук се преминава към решаване на по-общото равенство на изразите в средните скоби

$$G \dot{u}(t) + \frac{1}{L} \int \dot{u}(t) dt + C \frac{d \dot{u}(t)}{dt} = \dot{i}(t). \quad (1.51b)$$

В (1.51b) комплексните образи $\dot{i}(t)$ и $\dot{u}(t)$ се заместват с техните дефиниционни изрази и се достига до уравнението

$$G \sqrt{2} \dot{U} e^{j\omega t} + \frac{\sqrt{2} \dot{U} e^{j\omega t}}{Lj\omega} + j\omega C \sqrt{2} \dot{U} e^{j\omega t} = \sqrt{2} \dot{I} e^{j\omega t} \quad \text{и} \quad G \dot{U} + \frac{\dot{U}}{Lj\omega} + j\omega C \dot{U} = \dot{I}.$$

Като се преобразува последният израз, се получава решението за \dot{I}

$$\dot{I} = (G - j \frac{1}{\omega L} + j\omega C) \dot{U} = Y \dot{U}. \quad (1.52)$$

Тук с $Y = G - j(\frac{1}{\omega L} - \omega C) = G - j(B_L - B_C) = G - jB = ye^{j\varphi_y}$ е означена комплексната проводимост. Елементи на това комплексно число са съответните проводимости на всеки от паралелно свързаните клонове: *активна проводимост* $G = 1/R$, *индуктивна проводимост* $B_L = \frac{1}{\omega L}$ и *капацитивна проводимост* $B_C = \omega C$. Величината $B = B_L - B_C$ се нарича *еквивалентна реактивна проводимост* на разглежданата верига. Комплексната проводимост Y има модул $y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2}$ и аргумент $\varphi_y = -\arctg \frac{B_L - B_C}{G}$. От (1.52) се определя комплексът на тока

$$\dot{I} = Y \dot{U}, \quad (1.53)$$

а реалното решение се получава от връзката $i(t) = \operatorname{Im}[\sqrt{2} \dot{I} e^{j\omega t}]$.

б) Аналитично решение. Ефективната (или амплитудната) стойност и началната фаза на тока се определят в съответствие с (1.53), като се изравнят модулите и аргументите от двете страни на уравнението: $Ie^{j\psi_i} = ye^{j\varphi_y} Ue^{j\psi_u}$. Получава се

$$\left| \begin{aligned} I = Uy, \quad y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} = \sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}; \\ \psi_i = \psi_u + \varphi_y \quad \text{или} \quad \varphi_y = -(\psi_u - \psi_i) = -\varphi \quad \text{и} \quad \varphi = -\varphi_y = \arctg \frac{B_L - B_C}{G}. \end{aligned} \right. \quad (1.54)$$

От тези уравнения непосредствено се достига до моментната стойност на тока $i(t) = \sqrt{2}Uy \sin(\omega t + \psi_u - \varphi)$. Посоченото аналитично решение е най-бързият и прост начин за определянето на тока $i(t)$. Това решение, обаче, е приложимо само при елементарни електрически вериги от последователно или паралелно свързани идеални елементи.

в) Решение с векторна диаграма. Лявата страна на уравнение (1.50) е сума от синусоидални величини. Във векторната диаграма на веригата тя се замества със сума от съответните векторни образи. В резултат се получава векторният образ на синусоидалната величина отлясно на равенството.

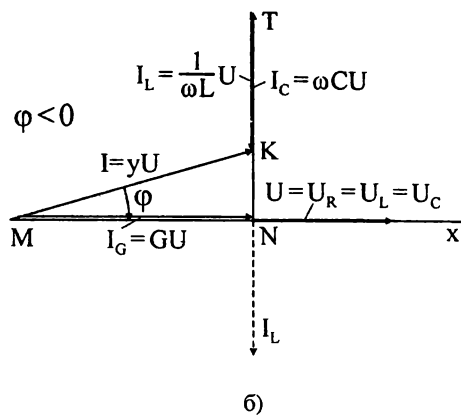
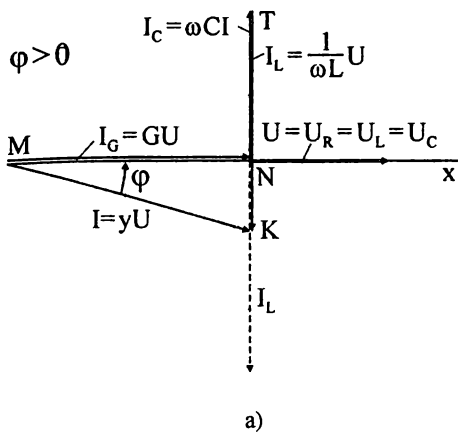
Тъй като към всички елементи на веригата е приложено едно и също напрежение, векторният образ на напрежението $u(t)$ е основен за построяване на статичната векторна диаграма. Използват се вече установените зависимости. Ефективните стойности на токовете се намират по закона на Ом

$$\begin{aligned} U = U_R = RI_G, \quad I_G = GU; \\ U = U_L = X_L I_L, \quad I_L = \frac{U}{X_L} = B_L U; \\ U = U_C = X_C I_C, \quad I_C = \frac{U}{X_C} = B_C U \end{aligned} \quad (1.55)$$

Началните фази се определят допълнително в зависимост от вида на елемента

$$\psi_{iR} = \psi_{uR} = \psi_u, \quad \psi_{iL} = \psi_{uL} - \frac{\pi}{2} = \psi_u - \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \psi_{iC} = \psi_{uC} + \frac{\pi}{2} = \psi_u + \frac{\pi}{2}. \quad (1.56)$$

На фиг. 1.43а и 1.43б са показани съответно векторните диаграми при $\varphi > 0$, ($B_L > B_C$) и при $\varphi < 0$, ($B_L < B_C$). И двете диаграми са построени при $\psi_u = 0$.



Фиг. 1.43

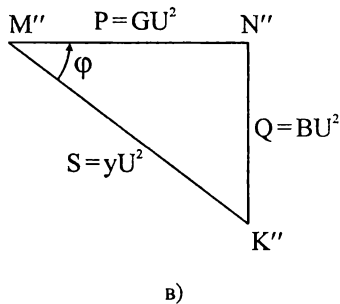
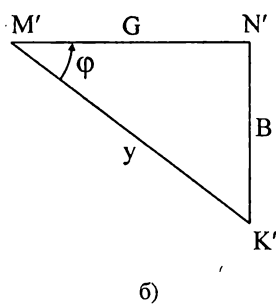
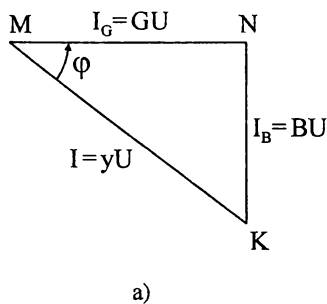
От фиг. 1.43 следват геометричните зависимости:

$$\overline{MN} m_i = I_G = GU, \quad \overline{TK} m_i = I_L = B_L U, \quad \overline{NT} m_i = I_C = B_C U$$

и

$$\overline{NK} m_i = |\overline{TK} - \overline{NT}| m_i = |I_L - I_C| = |B_L U - B_C U| = |B_L - B_C| U = |B| U = I_B.$$

В ΔMNK (напр. този от фиг. 1.44а, $\varphi > 0$), наречен *триъгълник на токовете*, всяка от страните е пропорционална съответно на I_G, I_B и I . Ако всяка от тези страни се раздели на U , се получава *триъгълникът на проводимостите* $\Delta M'N'K'$ (фиг. 1.44б) със страни, пропорционални на G, B и y . Когато страните на ΔMNK се умножат с U или на $\Delta M'N'K'$ – с U^2 , се получава $\Delta M''N''K''$ – *триъгълник на мощностите* P, Q и S (фиг. 1.44в).



Фиг. 1.44

2) *Мощности*. Мощностите P, Q и S се определят като съставки на подаваната към веригата комплексна мощност

$$\left| \begin{aligned} \dot{S} = \dot{U} I^* = \dot{U} (\dot{U} Y)^* = \dot{U} U^* \dot{Y} = U e^{j\psi_u} U e^{-j\psi_u} \dot{Y} = \dot{Y} U^2 = (G + jB) U^2, \\ \text{където } P = \operatorname{Re}(\dot{S}) = GU^2 \quad \text{и} \quad Q = \operatorname{Im}(\dot{S}) = BU^2. \end{aligned} \right. \quad (1.57)$$

Изводи:

- » Дефазирането между напрежението $u(t)$ и тока $i(t)$ е $\varphi > 0$ при $B_L > B_C$ и $\varphi < 0$ при $B_L < B_C$. В първия случай характерът на веригата е индуктивен, а във втория той е капацитивен;
- » От правоъгълните триъгълници на токовете, проводимостите и мощностите се получават полезни за изчисленията тригонометрични зависимости между съответните еднородни физически величини;
- » В пасивен участък с комплексна проводимост $Y = G - jB$ и с ефективна стойност на напрежението U , комплексната мощност е $\dot{S} = \dot{Y} U^2$, активната мощност е $P = GU^2$, а реактивната – $Q = BU^2$. Ясно е, че при $B_L > B_C$ (индуктивен характер на веригата) $Q > 0$ и при $B_L < B_C$ (капацитивен характер на веригата) $Q < 0$.

1.7. КОМПЛЕКСНА ФОРМА НА ЗАКОНИТЕ ЗА АНАЛИЗ НА ЕЛЕКТРИЧЕСКИТЕ ВЕРИГИ

От т. 1.6.3 и т. 1.6.4 става ясно, че в законите за анализ на електрически вериги участват моментните стойности на токовете и напреженията, например (1.42) и (1.50). Това налага да се решават системи диференциални уравнения, които описват състоянието на веригата. *При синусоидални режими тези уравнения се трансформират в алгебрични уравнения с комплекси.* За целта всяка синусоидална величина се замества с имагинерната част на съответния комплексен образ; преминава се към уравнения с комплексните образи и накрая – към уравнения с комплекси. Прилага се символичният метод за решение с използването на комплексни числа и се намира търсенят комплекс. Имагинерната част на неговия комплексен образ определя моментната стойност на търсената синусоидална величина. Този подход беше подробно разгледан и приложен за анализ на двуполусниците от т. 1.6.3 и т. 1.6.4.

По същия начин става преходът към уравненията с комплекси в основните закони за анализ на електрически вериги.

Първи закон на Кирхоф. Записва се в моментни стойности $\sum_{k=1}^K i_{k\Sigma}(t) = 0$;

преминава се към равностойните еквивалентни записи $\sum_{k=1}^K \operatorname{Im}[i_{k\Sigma}(t)] = 0$ и

$\text{Im} \sum_{k=1}^K i_{k\Sigma}(t) = 0$; решава се по-общото уравнение относно комплексните образи

$\sum_{k=1}^K \sqrt{2} i_{k\Sigma} e^{j\omega t} = 0$. След съкращаване на общите множители в последния израз

се достига до първия закон на Кирхоф с комплекси

$$\sum_{k=1}^K i_{k\Sigma} = 0. \quad (1.58)$$

Втори закон на Кирхоф. Записва се в моментни стойности $\sum_{k=1}^K u_{k\Sigma}(t) =$

$= \sum_{k=1}^K e_{k\Sigma}(t)$. Премахва се последователно към съответните еквивалентни запи-

си с участието на комплексните образи $\sum_{k=1}^K u_{k\Sigma}(t) = \sum_{k=1}^K e_{k\Sigma}(t)$ и $\sum_{k=1}^K \sqrt{2} \dot{U}_{k\Sigma} e^{j\omega t} =$

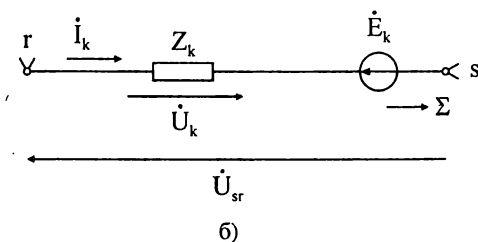
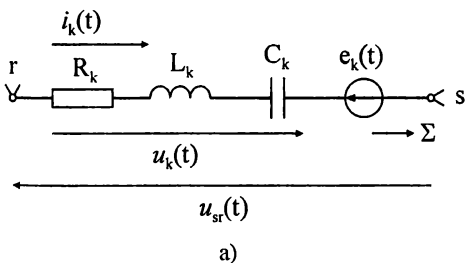
$= \sum_{k=1}^K \sqrt{2} \dot{E}_{k\Sigma} e^{j\omega t}$. И тук общите множители се съкращават. Достига се до вто-

рия закон на Кирхоф в комплексна форма

$$\sum_{k=1}^K \dot{U}_{k\Sigma} = \sum_{k=1}^K \dot{E}_{k\Sigma} \quad \text{и съответно} \quad \sum_{k=1}^K Z_k \dot{I}_{k\Sigma} = \sum_{k=1}^K \dot{E}_{k\Sigma}, \quad (1.59)$$

като се има предвид, че напрежителните падове във всички пасивни участъци с комплексни съпротивления Z_k са от вида $Z_k \dot{I}_{k\Sigma}$.

Обобщен закон на Ом. По начина на приложение законът се отнася винаги за конкретен клон. Разглежда се клон k (фиг. 1.45а) между възлите r и s на електрическа верига. Клонът се характеризира с ток $i_k(t)$, е.д.н. $e_k(t)$ и напрежителен пад върху пасивния участък $u_k(t)$. За този клон в моментни стойности, обобщеният закон на Ом се представя с израза: $u_{sr\Sigma}(t) + e_{k\Sigma}(t) = u_{k\Sigma}(t)$.



Фиг. 1.45

За избраната посока на алгебрично сумиране се записва $-u_{sr}(t) - e_k(t) = u_k(t)$. При условие, че пасивният участък включва R , L и C елементи, напрежителният пад $u_k(t)$ е от вида

$$u_k(t) = Ri_k(t) + L_k \frac{di_k(t)}{dt} + \frac{1}{C_k} \int i_k(t) dt.$$

По описаната по-горе процедура обобщеният закон на Ом се трансформира в следната комплексна форма:

$$\dot{U}_{sr\Sigma} + \dot{E}_{k\Sigma} = \dot{U}_{k\Sigma} = Z_k \dot{I}_{k\Sigma}. \quad (1.60)$$

Тук $Z_k = R_k + j\omega L_k - j\frac{1}{\omega C_k}$ е комплексното съпротивление на пасивния участък (фиг. 1.45б). С въведените означения и в избраната посока на алгебрично сумиране законът се представя с уравнението $-\dot{U}_{sr} - \dot{E}_k = \dot{U}_k = Z_k \dot{I}_k$

Изводи:

- » Най-общата форма на запис на законите за анализ на електрическите вериги е с моментните стойности на участващите величини;
- » При синусоидални режими законите за анализ на електрическите вериги се записват за комплексните ефективни стойности на токовете, напрежителните падове, напреженията и с участието на комплексните съпротивления на пасивните участъци от веригата;
- » За да се приложат законите за анализ в комплексна форма се използва схема с комплексните съпротивления по клонове или елементи, както и комплексите на токовете и напреженията във веригата.

1.8. ПРЕОБРАЗУВАНЕ НА ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ БЕЗ ИНДУКТИВНА ВРЪЗКА

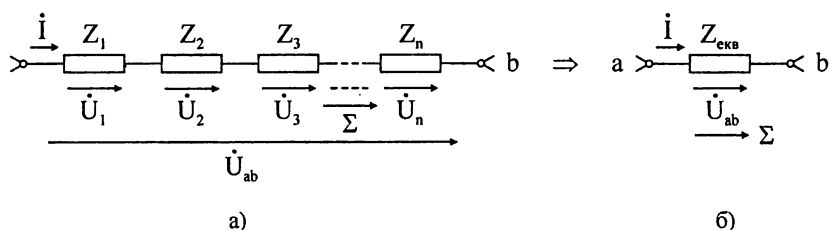
Основният подход се подчинява на принципа на еквивалентното преобразуване. За да бъдат преобразуваната и изходната верига еквивалентни, напреженията и токовете в непреобразуваните им части трябва да се запазят без изменение.

Първата съществена стъпка е да се разграничат в схемата на веригата основните структурни звена, които се преобразуват по известни формули. Тези базови звена са: последователно, паралелно, смесено съединение, съединение в триъгълник или съединение в звезда.

1.8.1. Преобразуване на пасивни участъци

А. Последователно съединение

Постановка на задачата. Между възлите a и b на електрическа верига са включени последователно n на брой комплексни съпротивления $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$ (фиг. 1.46а). Търси се еквивалентното (общото) комплексно съпротивление $Z_{\text{екв}}$ между двата възела (фиг. 1.46б).



Фиг. 1.46

Анализ. За участъка между двата възела се прилага законът на Ом в означената посока на алгебрично сумиране. Тъй като токът през елементите е един и същ, се получава

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dots + \dot{U}_k + \dots + \dot{U}_n = \sum_{k=1}^n iZ_k = i \sum_{k=1}^n Z_k. \quad (1.61)$$

Напрежението \dot{U}_{ab} и токът \dot{I} се отнасят както към преобразуваната, така и към външната непреобразувана част на веригата. Ето защо те се запазват в еквивалентната схема и участват в закона на Ом за еквивалентното съединение (фиг. 1.46б)

$$\dot{U}_{ab} = \dot{I}Z_{\text{екв}}. \quad (1.62)$$

От сравнението на (1.61) и (1.62) следва, че еквивалентното комплексно съпротивление на последователното съединение се определя с израза

$$Z_{\text{екв}} = \sum_{k=1}^n Z_k. \quad (1.63)$$

При постоянен ток или за участък, съставен само от последователно съединени резистори, общото съпротивление ще бъде

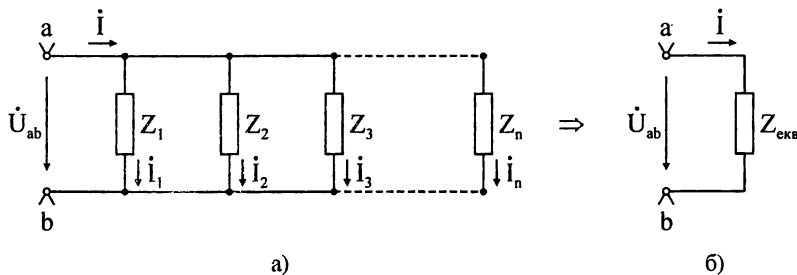
$$R_{\text{екв}} = \sum_{k=1}^n R_k. \quad (1.64)$$

В частния случай, когато се изпълнява $R_1 = R_2 = R_3 = \dots = R_n = R$, екивалентното съпротивление нараства n пъти

$$R_{\text{екв}} = nR. \quad (1.65)$$

Б. Паралелно (успоредно) съединение

Постановка на задачата. Между възлите a и b на електрическа верига са включени в паралел n на брой комплексни съпротивления $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$ (фиг. 1.47а). Търси се екивалентното комплексно съпротивление $Z_{\text{екв}}$ на участъка \overline{ab} (фиг. 1.47б).



Фиг. 1.47

Анализ. Характерно за паралелно съединените клонове е, че към всички тях е приложено едно и също напрежение. Това е напрежението между общите възли a и b . Записва се първият закон на Кирхоф за възела a :

$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_n = \sum_{k=1}^n i_k. \quad (1.66)$$

Всеки от клоновете токове се дефинира по закона на Ом $i_1 = \dot{U}_{ab}/Z_1, \dots, i_k = \dot{U}_{ab}/Z_k$ и т.н. След заместване на тези изрази в (1.66) се получава

$$i = \sum_{k=1}^n \frac{\dot{U}_{ab}}{Z_k} = \dot{U}_{ab} \sum_{k=1}^n \frac{1}{Z_k}. \quad (1.67)$$

Напрежението \dot{U}_{ab} и токът i на входа на екивалентната схема от фиг. 1.47б са същите, както на изходната схема. Връзката между тях се дава от закона на Ом

$$i = U_{ab} \frac{1}{Z_{\text{екв}}}. \quad (1.68)$$

От сравнението на (1.67) и (1.68) следват зависимостите:

$$\frac{1}{Z_{\text{екв}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{Z_k} \quad \text{и съответно} \quad Y_{\text{екв}} = \sum_k Y_k. \quad (1.69)$$

В последния израз с $Y_k = \frac{1}{Z_k}$ е означена комплексната проводимост на клоната k , а с $Y_{\text{екв}}$ – еквивалентната комплексна проводимост на съединението.

В частния случай само на две успоредно съединени съпротивления Z_1 и Z_2 еквивалентната проводимост Y_{12} ще бъде

$$Y_{12} = Y_1 + Y_2 \quad \text{или} \quad \frac{1}{Z_{12}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}.$$

На практика е удобно да се работи с еквивалентното съпротивление Z_{12} , за което непосредствено следва

$$Z_{12} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}. \quad (1.70)$$

При постоянен ток или за участък, съставен само от паралелно свързани резистори, уравнение (1.69) добива вида

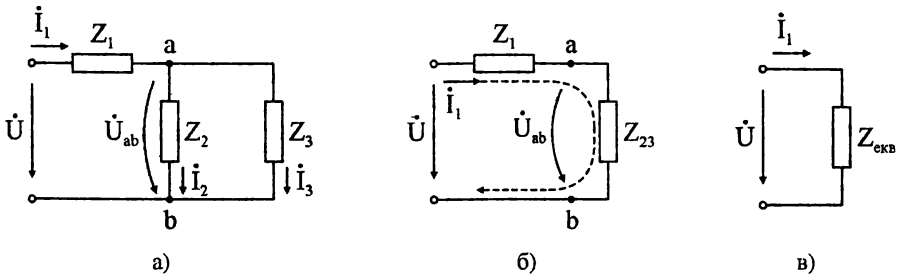
$$\frac{1}{R_{\text{екв}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}. \quad (1.71)$$

Ако паралелно включените n на брой съпротивления са равни, т.е. $R_1 = R_2 = R_3 = \dots = R_n = R$, еквивалентното съпротивление намалява n пъти. Или

$$R_{\text{екв}} = \frac{R}{n}. \quad (1.72)$$

В. Смесено съединение

Постановка на задачата. В смесеното съединение (фиг. 1.48а) са известни комплексните съпротивления Z_1, Z_2 и Z_3 , както и напрежението \dot{U} . Търсят се токовете \dot{I}_1, \dot{I}_2 и \dot{I}_3 .



Фиг. 1.48

Анализ. Изчисляването на такива пасивни вериги се извършва, като най-напред се преобразува веригата до еквивалентно комплексно съпротивление $Z_{\text{екв}}$ спрямо входа. Намира се токът през $Z_{\text{екв}}$. След това последователно се определя разпределението на токовете в клоновете на веригата.

За смесеното съединение от фиг. 1.48б еквивалентното комплексно съпротивление е $Z_{\text{екв}} = Z_1 + Z_{23} = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}$. В непрообразуваната част (през Z_1) токът i_1 се запазва. Следователно в едноконтурната верига през еквивалентното съпротивление Z_{23} токът също е i_1 . Той се определя с изрази (фиг. 1.48в)

$$i_1 = \frac{\dot{U}}{Z_{\text{екв}}} \quad (1.73)$$

В схемите от фиг. 1.48а и фиг. 1.48б напрежението U_{ab} се запазва, което се отразява с равенството $\dot{U}_{ab \text{ cx1}} = \dot{U}_{ab \text{ cx2}}$. Или

$$Z_2 i_2 = Z_3 i_3 = Z_{23} i_1 \quad (1.74)$$

От (1.74) може да бъде намерен всеки от токовете i_2 и i_3 в паралелните клонове:

$$i_2 = i_1 \frac{Z_{23}}{Z_2} = i_1 \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} \quad \text{и} \quad i_3 = i_1 \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} \quad (1.75)$$

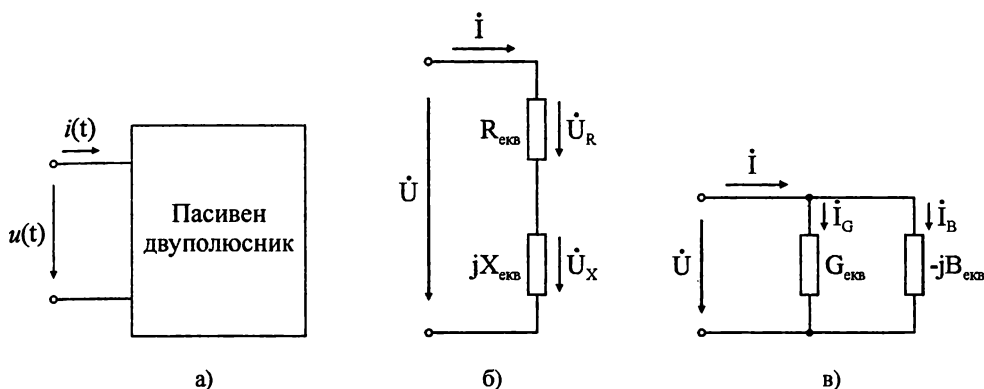
По-лесно е третият ток, например i_3 , да бъде изчислен по първия закон на Кирхоф за един от двата възела: $i_3 = i_1 - i_2$.

Г. Еквивалентни схеми на пасивен двуполусник. Взаимно преминаване

Всяка пасивна електрическа верига, разглеждана от страната на два нейни извода, се нарича *пасивен двуполусник*.

Постановка на задачата. Известни са моментните стойности на напрежението и тока на входа на пасивния дуполуосник (фиг. 1.49а):

$u(t) = u_m \sin(\omega t + \psi_u)$ и $i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i)$. Търсят се видът и параметрите на еквивалентната (заместваща) схема на дуполуосника.



Фиг. 1.49

Анализ. Анализът се свежда до две опростени решения с въвеждането на комплексите $\dot{U} = Ue^{j\psi_u}$ и $\dot{I} = Ie^{j\psi_i}$.

а) **Последователна заместваща схема.** Съставя се отношението

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\psi_u}}{Ie^{j\psi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\psi_u - \psi_i)} = ze^{j\varphi} = z \cos \varphi + jz \sin \varphi = Z, \quad (1.76)$$

където $z = U/I$ е модулът, а $\varphi = \psi_u - \psi_i$ е аргументът на комплексно съпротивление $Z = R_{\text{екв}} + jX_{\text{екв}}$. Това комплексно съпротивление в алгебричен вид има реална съставка $R_{\text{екв}} = z \cos \varphi$ и имагинерна съставка $X_{\text{екв}} = z \sin \varphi$. Ако след изчисления се получи $\varphi > 0$, следва, че $X_{\text{екв}} > 0$ и елементът със съпротивление $X_{\text{екв}}$ е индуктивен; обратно, той е капацитивен ($X_{\text{екв}} < 0$) при $\varphi < 0$. С въвеждането на Z уравнението (1.76) се преобразува във вида

$$\dot{U} = Z\dot{I} = R_{\text{екв}}\dot{I} + jX_{\text{екв}}\dot{I} = \dot{U}_R + \dot{U}_X. \quad (1.77)$$

На този запис съответства заместваща схема от последователен тип с ток \dot{I} през двата елемента (фиг. 1.49б).

б) **Паралелна заместваща схема.** Съставя се отношението

$$\frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{Ie^{j\psi_i}}{Ue^{j\psi_u}} = \frac{I}{U} e^{j(\psi_i - \psi_u)} = ye^{-j\varphi} = y \cos \varphi - jy \sin \varphi = G_{\text{екв}} - jB_{\text{екв}} = Y. \quad (1.78)$$

В получения израз $y = I/U$ е модулът, а $-\varphi = \psi_i - \psi_u$ е аргументът на комплексна проводимост $Y = G_{\text{екв}} - jB_{\text{екв}}$. Тя има реална съставка $G_{\text{екв}} = y \cos \varphi$ и имагинерна съставка $B_{\text{екв}} = y \sin \varphi$. Ако след изчисления се установи, че $\varphi > 0$, следва $B_{\text{екв}} > 0$ и елементът с проводимост $B_{\text{екв}}$ е индуктивен; при $\varphi < 0$, $B_{\text{екв}} < 0$ и елементът е капацитивен. С въвеждането на комплексната проводимост Y уравнението (1.78) може да се представи във вида

$$\dot{i} = Y\dot{U} = G_{\text{екв}}\dot{U} + (-jB_{\text{екв}})\dot{U} = \dot{i}_G + \dot{i}_B. \quad (1.79)$$

Този запис съответства на паралелна заместваща схема, която се характеризира с едно и също приложено напрежение върху двата елемента (фиг. 1.49е).

в) *Връзка между параметрите на двете заместващи схеми.* Тя се намира, като се състави производението от определящите изрази на Z и Y . Установява се

$$ZY = \frac{\dot{U}}{i} \frac{i}{\dot{U}} = 1. \quad (1.80)$$

От горната зависимост следва, че ако са известни параметрите $R_{\text{екв}}$ и $X_{\text{екв}}$ на първата схема, параметрите на втората схема се определят от израза:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R_{\text{екв}} + jX_{\text{екв}}} = \frac{R_{\text{екв}} - jX_{\text{екв}}}{R_{\text{екв}}^2 + X_{\text{екв}}^2} = \frac{R_{\text{екв}}}{R_{\text{екв}}^2 + X_{\text{екв}}^2} - j \frac{X_{\text{екв}}}{R_{\text{екв}}^2 + X_{\text{екв}}^2}.$$

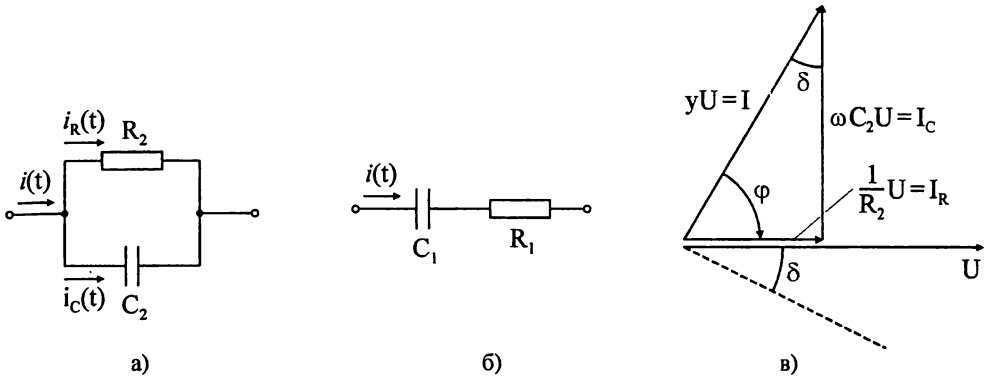
Две комплексни числа в алгебричен вид са равни, ако са равни както реалните, така и имагинерните им части. Оттук се получават формулите

$$G_{\text{екв}} = \frac{R_{\text{екв}}}{R_{\text{екв}}^2 + X_{\text{екв}}^2} \quad \text{и} \quad B_{\text{екв}} = \frac{X_{\text{екв}}}{R_{\text{екв}}^2 + X_{\text{екв}}^2}. \quad (1.81)$$

Аналогично, при известни параметри на заместващата схема от паралелен тип $G_{\text{екв}}$ и $B_{\text{екв}}$, параметрите на схемата от последователен тип се намират от отношението $Z = \frac{1}{Y}$. Установява се, че

$$R_{\text{екв}} = \frac{G_{\text{екв}}}{G_{\text{екв}}^2 + B_{\text{екв}}^2} \quad \text{и} \quad X_{\text{екв}} = \frac{B_{\text{екв}}}{G_{\text{екв}}^2 + B_{\text{екв}}^2}. \quad (1.82)$$

Пример 1.9. На фиг. 1.50а е показана паралелната заместваща схема на реален кондензатор с параметри C_2 и R_2 . Схемата има смисъл при ниски честоти, тъй като в граничния случай при $\omega = 0$ капацитивният клон е прекъснат и нищожният постоянен ток (ток на утечка) преминава през изолационното съпротивление R_2 на диелектрика. Да се определят параметрите C_1 и R_1 на заместващата схема от последователен тип (фиг. 1.50б), която намира приложение при високи честоти.



Фиг. 1.50

Решение. Комплексната проводимост на заместващата схема от паралелен тип е $Y = G_2 - jB_2 = 1/R_2 + j\omega C_2$, а комплексното съпротивление на заместващата схема от последователен тип е $Z = R_1 + jX_1 = R_1 - j1/\omega C_1$. Като се приложат формулите (1.82) за параметрите на последователната заместваща схема се получава

$$R_1 = \frac{G_2}{G_2^2 + B_2^2} = \frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_2^2} + \omega^2 C_2^2} = \frac{R_2}{1 + \omega^2 C_2^2 R_2^2} = R_2 \left(\frac{\operatorname{tg}^2 \delta}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} \right) \approx R_2 \operatorname{tg}^2 \delta,$$

$$X_1 = \frac{B_2}{G_2^2 + B_2^2}, \quad -\frac{1}{\omega C_1} = \frac{-\omega C_2}{\frac{1}{R_2^2} + \omega^2 C_2^2}$$

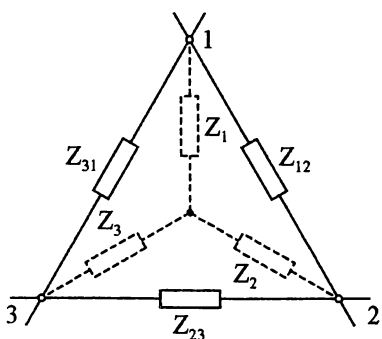
или

$$C_1 = \frac{1 + \omega^2 C_2^2 R_2^2}{\omega^2 C_2 R_2^2} = C_2 (1 + \operatorname{tg}^2 \delta) \approx C_2$$

Направените приближения са коректни, тъй като ъгълът на загубите δ е много малък (фиг. 1.50в) и $\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{\omega C_2 R_2} \ll 1$. Съпротивлението R_1 е честотно

зависимо и удовлетворява съотношението $R_1 \ll R_2$. Трябва да се отбележи, че R_1 допълнително нараства при високи честоти вследствие на завишените загуби на диелектрика. Освен това в тази посока действа и ефектът диелектрична абсорбция, който е свързан със забавената ориентация на диполите и невъзможността им безинерционно да следват високочестотното изменение на приложеното напрежение.

Д. Преобразуване на триъгълник в звезда и обратно



Фиг. 1.51

а) Преобразуване на триъгълник в звезда

Постановка на задачата. Известни са комплексните съпротивления Z_{12} , Z_{23} и Z_{31} на *триъгълното* съединение (фиг. 1.51) от електрическа верига. Търсят се съпротивленията Z_1 , Z_2 и Z_3 на еквивалентното *съединение в звезда*.

Анализ. В съответствие с принципа за еквивалентното преобразуване, независимо дали съединението между възлите е триъгълник или звезда, напрежението между всяка от двойките възли 1,2; 2,3 и 3,1 и токовете из-

вън тях трябва да останат без изменение. Следователно входните съпротивления към съединението спрямо всяка от двойките възли трябва да останат непроменени след неговото преобразуване. При това се счита, че е прекъсната връзката на третия възел към веригата. Съставя се системата уравнения

$$\left\{ \begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= \frac{Z_{12}(Z_{23} + Z_{31})}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}, \\ Z_2 + Z_3 &= \frac{Z_{23}(Z_{12} + Z_{31})}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}, \\ Z_3 + Z_1 &= \frac{Z_{31}(Z_{12} + Z_{23})}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}. \end{aligned} \right. \quad (1.83)$$

Сумират се всяка от двойките уравнения и от получената сума се изважда третото уравнение. Така се достига до изразите за изчисляване съпротивленията на еквивалентната звезда

$$Z_1 = \frac{Z_{12}Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}, \quad Z_2 = \frac{Z_{23}Z_{12}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}, \quad Z_3 = \frac{Z_{31}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}. \quad (1.84)$$

б) Преобразуване на звезда в триъгълник

Постановка на задачата. Известни са комплексните съпротивления Z_1, Z_2 и Z_3 на съединението в звезда от фиг. 1.51. Търсят се съпротивленията Z_{12}, Z_{23} и Z_{31} на еквивалентното съединение в триъгълник.

Анализ. Системата уравнения (1.84) определя съпротивленията на звездата чрез тези на триъгълника. Тя формално се решава спрямо съпротивленията на триъгълника, ако са известни тези на звездата. За целта се съставя сумата

$$Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1 = \frac{Z_{12} Z_{31} Z_{23} (Z_{12} + Z_{23} + Z_{31})}{(Z_{12} + Z_{23} + Z_{31})^2} = \frac{Z_{12} Z_{31} Z_{23}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}. \quad (1.85)$$

Използват се отново зависимостите (1.84). Не е трудно да се установи, че в дясната страна на (1.85) участва едно от съпротивленията на звездата, умножено с едно съпротивление на триъгълника. Или

$$Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1 = \frac{Z_{12} Z_{31} Z_{23}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} = Z_1 Z_{23} = Z_2 Z_{31} = Z_3 Z_{12}. \quad (1.86)$$

Последните три равенства на (1.83) позволяват да се определят съпротивленията на еквивалентния триъгълник

$$\left| \begin{array}{l} Z_{12} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_3} = Z_2 + Z_1 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3} \\ Z_{23} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_1} = Z_2 + Z_3 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_1} \\ Z_{31} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2} = Z_3 + Z_1 + \frac{Z_3 Z_1}{Z_2} \end{array} \right. \quad (1.87)$$

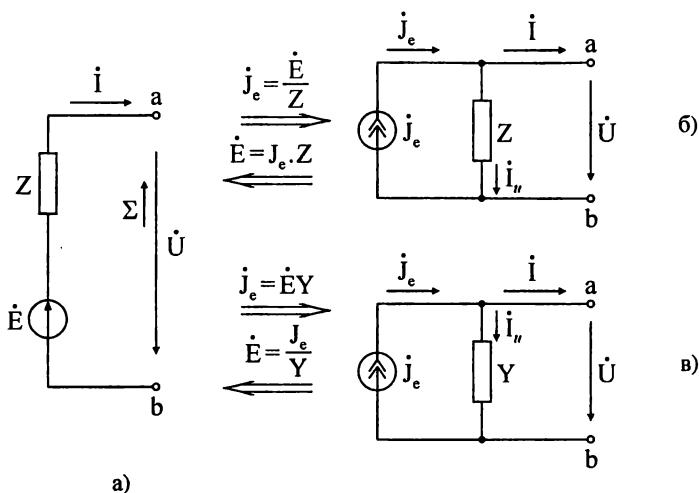
1.8.2. Преобразуване на активни участъци от веригата

А. Еквивалентни схеми на реален източник на е.д.н. и реален източник на електродвижещ ток. Взаимно преминаване

Всеки клон с източник на енергия представлява елементарен активен двуполусник спрямо възлите, между които е включен.

Постановка на задачата. Реалният източник на е.д.н. представлява активен двуполусник от последователен тип и се състои от последователно включени е.д.н. \dot{E} и вътрешно (собствено) съпротивление Z (фиг. 1.52а). Токът през източника е \dot{I} , а напрежението между полюсите е \dot{U} . Да се премине

към еквивалентна заместваща схема на *реален източник на електродвижещ ток* (е.д.т.) и да се определят нейните параметри. Да се уточни връзката между параметрите на двете схеми.



Фиг. 1.52

Анализ. За означената посока на алгебрично сумиране в клон се записва обобщеният закон на Ом $-\dot{U} + \dot{E} = Z\dot{I}$. След преобразуване се получава изразът $\dot{E} = \dot{U} + Z\dot{I}$. Ако двете страни на това равенството се разделят с вътрешното съпротивление на източника Z , се достига до уравнение относно токовете

$$\frac{\dot{E}}{Z} = \frac{\dot{U}}{Z} + \dot{I} \quad \text{или} \quad \dot{J}_e = \dot{I}_u + \dot{I}. \quad (1.88)$$

Токът $\dot{J}_e = \frac{\dot{E}}{Z} = \dot{E}Y$ зависи само от собствените параметри на реалния източник на е.д.н. и по тези причини се нарича *електродвижещ ток*. Той представлява токът на късо съединение $\dot{I}_{\text{кc}}$ между полюсите на реалния източник на е.д.н., откъдето следва, че $\dot{J}_e = \dot{I}_{\text{кc}}$. С $\dot{I}_u = \dot{U}/Z = \dot{U}Y$ е означен токът през Z (респ. през $Y = 1/Z$) при условие, че към елемента е приложено входното напрежение \dot{U} . На алгебричната сума от токовете (1.88) (първи закон на Кирхоф) съответства възел от новата *еквивалентна схема*. Отчита се още, че напрежението \dot{U} и токът \dot{I} се подават към непреобразуваната външна част на двуполусника и поради това се запазват по големина и посока в новата схема. За да отговаря на изброените по-горе особености, съставената еквивалентна схема е от паралелен тип (фиг. 1.52б и в). Съответствията между двете схеми и формулите за преобразуване са дадени на фиг. 1.52б и фиг. 1.52в и се обобщават в посочените по-долу изводи.

Изводи:

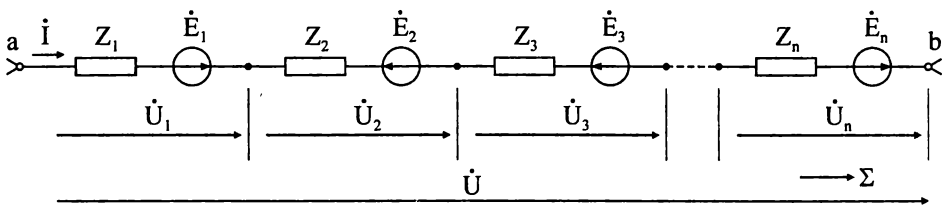
- » Посоките на източниците \dot{E} и \dot{J}_e в двете схеми са еднакво ориентирани спрямо фиксиран възел. В схемите от фиг. 1.52 и двата източника сочат към възела a ;
- » Ако са известни елементите \dot{E} и Z на еквивалентната схема от последователен тип, елементите на схемата от паралелен тип имат следните параметри: източник на е.д.т. $\dot{J}_e = \frac{\dot{E}}{Z}$ или $\dot{J}_e = \dot{E}Y$ и паралелно включено комплексно съпротивление Z , респ. комплексна проводимост $Y = 1/Z$;
- » Ако са известни елементите \dot{J}_e и Z (или Y) на еквивалентната схема от паралелен тип, елементите на еквивалентната схема от последователен тип имат следните параметри: източник на е.д.н. $\dot{E} = \dot{J}_e Z$ или $\dot{E} = \dot{J}_e / Y$ и последователно включено комплексно съпротивление $Z = 1/Y$.

Б. Съединение от активни двуполусници

Разглежда се еквивалентно преобразуване на съединение от реални източници на е.д.н. Предполага се, че ако в съединението са включени реални източници на е.д.т., последните предварително са преобразувани в реални източници на е.д.н.

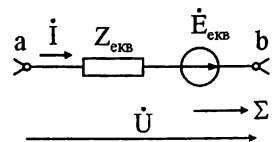
а) Последователно съединение.

Постановка на задачата. Участък от електрическа верига се състои от n на брой последователно съединени активни двуполусника с еквивалентни схеми от последователен тип (фиг. 1.53а). Известни са комплексните съпротивления Z_1, Z_2, \dots, Z_n , а също и електродвижещите напрежения $\dot{E}_1, \dot{E}_2, \dots, \dot{E}_n$ на двуполусниците. Търсят се параметрите $\dot{E}_{\text{екв}}$ и $Z_{\text{екв}}$ на еквивалентния активен двуполусник от последователен тип (фиг. 1.53б).



Фиг. 1.53а

Анализ. За да бъдат сравнявани получените уравнения в двете схеми, се избира една и съща посока на алгебрично сумиране, а именно посоката на тока в съединението. За всеки от двуполусниците на първата



Фиг. 1.53б

схема се прилага обобщеният закон на Ом. Приема се, че напреженията между възлите на двуполусниците са еднопосочни и са в посоката на алгебричното сумиране. В такъв случай алгебричен знак в уравнението има само електродвижещото напрежение на съответния двуполусник. Общият вид на уравнение-то за k -ти двуполусник е от вида

$$\dot{U}_k + \dot{E}_{k\Sigma} = Z_k \dot{I}. \quad (1.89)$$

След сумиране на уравненията за всички активни двуполусници се получава израза $\sum_k \dot{U}_k + \sum_k \dot{E}_{k\Sigma} = \sum_k Z_k \dot{I}$. Той свързва напрежението \dot{U} и тока \dot{I} на цялото съединение

$$\dot{U} + \sum_k \dot{E}_{k\Sigma} = \dot{I} \sum_k Z_k. \quad (1.90)$$

Аналогичен резултат се получава, ако обобщеният закон на Ом се приложи към еквивалентния активен двуполусник

$$\dot{U} + \dot{E}_{\text{екв}\Sigma} = \dot{I} Z_{\text{екв}}. \quad (1.91)$$

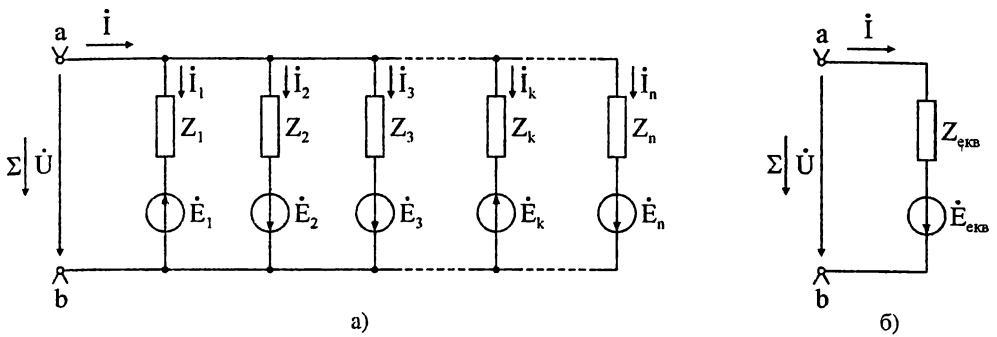
Тъй като \dot{U} и \dot{I} са входно напрежение и съответно входен ток и за двете схеми, след сравняване на структурата и членовете на уравненията (1.90) и (1.91) се достига до следните връзки

$$\begin{cases} Z_{\text{екв}} = \sum_k Z_k, \\ \dot{E}_{\text{екв}} = \sum_k \dot{E}_{k\Sigma}. \end{cases} \quad (1.92)$$

Всички е.д.н., чиято посока съвпада с тази на еквивалентното е.д.н. спрямо фиксиран възел, участват в алгебричната сума на второто уравнение с положителен алгебричен знак. Останалите е.д.н. имат отрицателен знак.

б) Паралелно съединение от активни двуполусници

Постановка на задачата. Участък от електрическа верига се състои от n на брой паралелно съединени активни двуполусници с еквивалентни схеми от последователен тип (фиг. 1.54а). Известни са комплексните съпротивления Z_1, Z_2, \dots, Z_n , а също и електродвижещите напрежения $\dot{E}_1, \dot{E}_2, \dots, \dot{E}_n$ на двуполусниците. Търсят се параметрите $\dot{E}_{\text{екв}}$ и $Z_{\text{екв}}$ на еквивалентния активен двуполусник от последователен тип (фиг. 1.54б).



Фиг. 1.54

Анализ. Удобно е уравненията за изходната и еквивалентната схема да бъдат приложени в една и съща посока на алгебрично сумиране – посоката на напрежението на входа на веригата. За да се избегне допълнителното въвеждане на алгебрични знаци, за токовете във всички паралелни клонове се приема една и съща посока от възел a към възела b . Когато $\dot{E}_1, \dot{E}_2, \dots, \dot{E}_n$ са с различни посоки, посоката на $\dot{E}_{екв}$ в еквивалентния двуполусник се избира произволно. Съгласно първия закон на Кирхоф за възела a от фиг. 1.54а и обобщения закон на Ом за всеки от двуполусниците, се записва

$$i = \sum_k i_k ; \quad (1.93)$$

$$\dot{U} + \dot{E}_{к\kappa} = Z_k i_k . \quad (1.94)$$

В двете уравнения алгебричните знаци на дясната страна са винаги положителни, тъй като всички клонови токове са в посоката на алгебрично сумиране. От уравнение (1.94) се определя токът на k -ти клон $i_k = \frac{\dot{U} + \dot{E}_{к\kappa}}{Z_k} = \dot{U} Y_k + Y_k \dot{E}_{к\kappa}$. Резултатът се замества в (1.93), откъдето след преобразуване се получава

$$\dot{i} = \dot{U} \sum_k Y_k + \sum_k Y_k \dot{E}_{к\kappa} . \quad (1.95)$$

За еквивалентния активен двуполусник по обобщения закон на Ом е валидно уравнението $\dot{U} + \dot{E}_{екв} = \dot{i} Z_{екв}$, откъдето се определя токът в двуполусника

$$\dot{i} = \dot{U} Y_{екв} + \dot{E}_{екв} Y_{екв} . \quad (1.96)$$

Токът \dot{i} и напрежението \dot{U} се подават към външната непреобразувана верига, поради което са еднакви за съединението и за еквивалентния двупо-

люсник. От сравнението на еднотипните уравнения (1.95) и (1.96) се установяват връзките

$$Y_{\text{екв}} = \sum_k Y_k, \text{ като се има предвид още, че } Z_{\text{екв}} = \frac{1}{Y_{\text{екв}}}, \quad (1.97a)$$

$$\dot{E}_{\text{екв}} = \frac{\sum_k \dot{E}_{k\Sigma} Y_k}{Y_{\text{екв}}} \quad (1.97b)$$

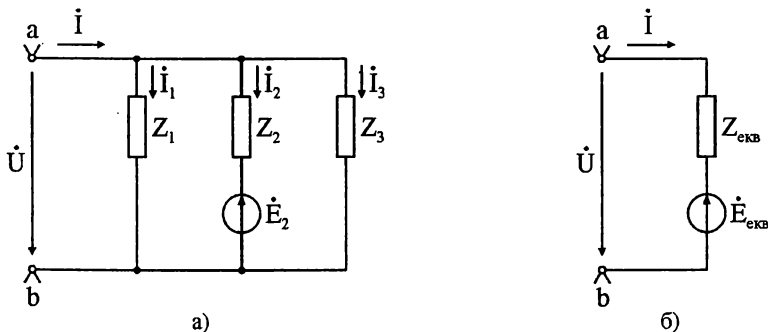
И тук всички е.д.н. с посоката на еквивалентното е.д.н. спрямо фиксиран възел участват в алгебричната сума на (1.97б) с положителен алгебричен знак, а всички останали с отрицателен знак. Ако (1.97б) се приложи за съединението от фиг. 1.54а, се получава

$$\dot{E}_{\text{екв}} = \frac{-\dot{E}_1 Y_1 + \dot{E}_2 Y_2 + \dot{E}_3 Y_3 + \dots - \dot{E}_k Y_k + \dots + \dot{E}_n Y_n}{Y_{\text{екв}}}. \quad (1.98)$$

Дори само един от всичките паралелно съединени двуполусници да е активен, преобразуването се извършва както на паралелни активни двуполусници. Така например, при преобразуване на съединението от фиг. 1.55а, параметрите на еквивалентния активен двуполусник (фиг. 1.55б) са:

$$Z_{\text{екв}} = \frac{Z_1 Z_{23}}{Z_1 + Z_{23}}, \text{ където } Z_{23} = \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}, \quad Y_{\text{екв}} = \frac{1}{Z_{\text{екв}}} \text{ и } \dot{E}_{\text{екв}} = \frac{\dot{E}_2 Y_2}{Y_{\text{екв}}}.$$

В този случай, за да се избегне алгебричният знак, посоката на $\dot{E}_{\text{екв}}$ се избира да съвпада с тази на \dot{E}_2 спрямо фиксиран възел, например възела a .

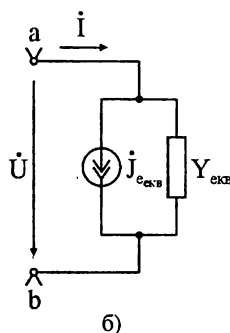
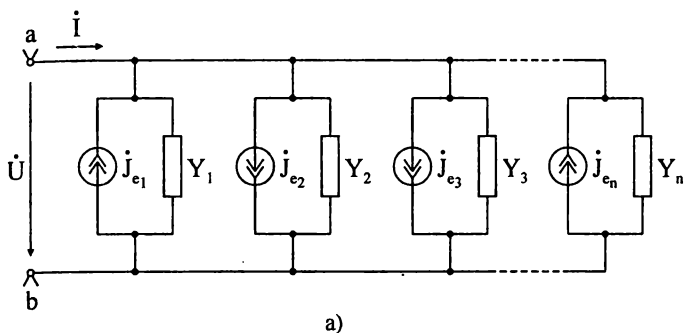


Фиг. 1.55

Изразите (1.97а,б) могат да бъдат използвани и при преобразуване на съединение от паралелно свързани реални източници на електродвижещ ток (фиг. 1.56а). В този случай е удобно еквивалентната заместваща схема да

бъде активен двуполюсник от паралелен тип (фиг. 1.56б). Като се вземат предвид уравненията на връзката между реален източник на е.д.н. и реален източник на е.д.т., формулите (1.97) се трансформират във вида:

$$\begin{cases} Y_{\text{екв}} = \sum_k Y_k; \\ J_{\text{екв}} = \sum_k J_{e k \Sigma}. \end{cases} \quad (1.99)$$



Фиг. 1.56

За примера $J_{\text{екв}} = -J_{e_1} + J_{e_2} + J_{e_3} + \dots + J_{e_n}$.

В. Пренасяне на източник на е.д.н. през възел

Постановка на задачата. Във възел a от електрическа верига са присъединени n клона с комплексни съпротивления Z_1, Z_2, \dots, Z_n (фиг. 1.57а), част от които са с източници на енергия. Един от източниците, например \dot{E}_3 , трябва да бъде отстранен от клона, в който е включен. Да се намери еквивалентната схема, в която \dot{E}_3 е пренесен през възела a .

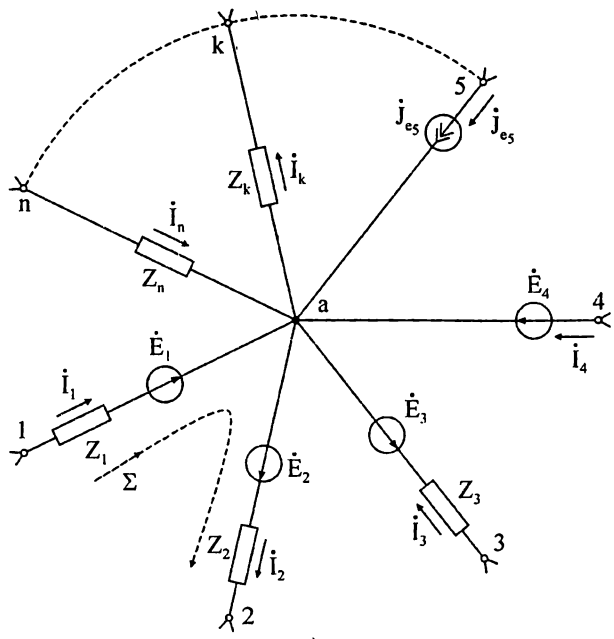
Анализ. Извършва се преобразуване, след което се доказва, че изходната и преобразуваната схема са еквивалентни.

Процедурата на преобразуването включва следните стъпки:

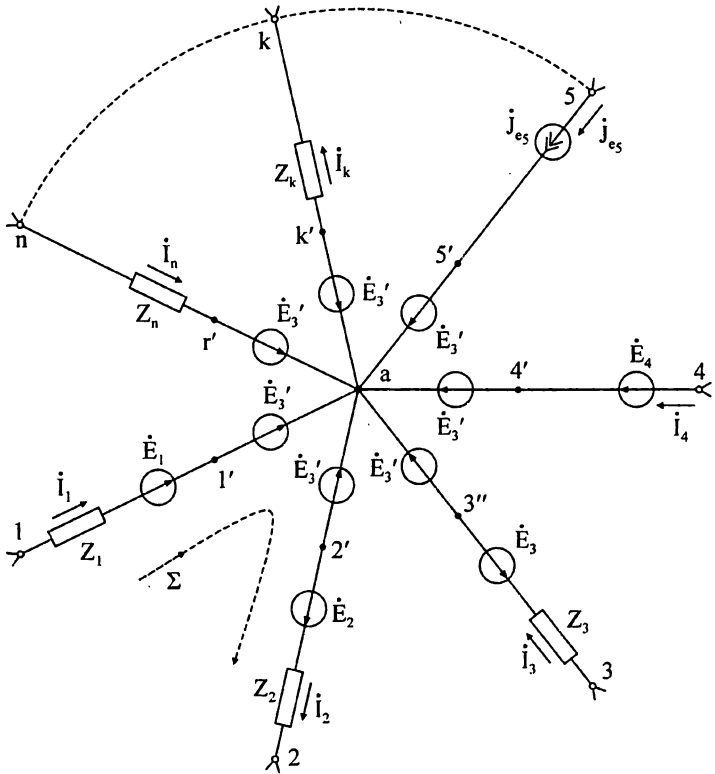
– В клона с източник \dot{E}_3 се въвежда е.д.н. \dot{E}'_3 , равно по големина и с посока, обратна на прехвърляното е.д.н., така че $\dot{E}'_3 = -\dot{E}_3$.

– Във всички останали клонове се включва е.д.н., равно по големина и със същата посока спрямо възела a , както въведеното вече \dot{E}'_3 (фиг. 1.57б).

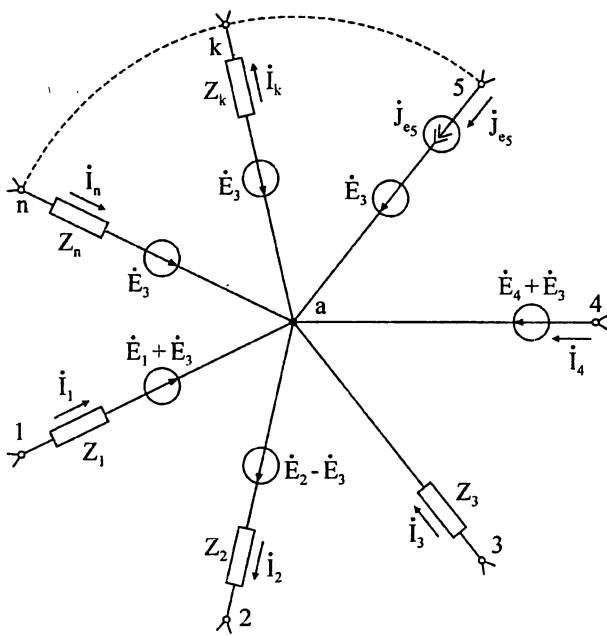
Еквивалентност на изходната и на преобразуваната верига. Доказва се, че изходната и преобразуваната схема се описват от една и съща система уравнения по следните причини:



a)



b)



в)
Фиг. 1.57

– Ако се приеме условно, че възелът a има потенциал, равен на нула, по обобщения закон на Ом се доказва, че потенциалите на възлите $1', 2', 3'', \dots, n'$ са равни на $-\dot{E}_3'$, т.е. $V_{1'} = V_{2'} = V_{3''} = \dots = V_{n'} = -E_3'$.

– Известно е, че възли с еднакъв потенциал може да се заместят с един общ възел, т.е. $1' \equiv 2' \equiv 3'' \equiv \dots \equiv n'$. При това разглеждане във веригата не настъпва изменение. Клоновете, присъединени към новия възел, съвпадат с тези, присъединени към възела a . Това означава, че се запазват и техните токове. Следователно уравнението по първия закон на Кирхоф за новия възел съвпада със записаното за възела a в изходната схема.

– За съответните контури, минаващи през възела a в преобразуваната и в изходната схема, уравненията по втория закон на Кирхоф съвпадат. Например уравненията, записани по втория закон на Кирхоф за означените на фиг. 1.57а и фиг. 1.57б контури, са еквивалентни:

$$\begin{aligned} \dots + Z_1 \dot{I}_1 + Z_2 \dot{I}_2 + \dots &= \dots + \dot{E}_1 + \dot{E}_2 + \dots \\ \dots + Z_1 \dot{I}_1 + Z_2 \dot{I}_2 + \dots &= \dots + \dot{E}_1 + \dot{E}_3' - E_3' + \dot{E}_2 + \dots \end{aligned}$$

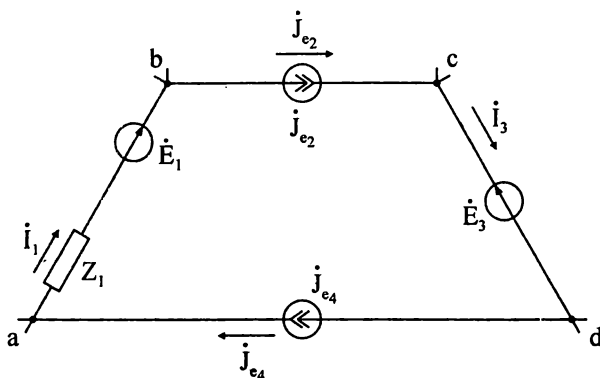
Изводи:

» В клон с пренесеното през възела е.д.н. \dot{E}_3' резултантното е.д.н. става нула, т.е. след преобразуването в този клон вече няма електродвижещо напрежение (фиг. 1.57в);

» Ако се преобразува клон с идеален източник на е.д.н., т.е. $Z_3 = 0$, след отстраняването на \dot{E}_3 двата гранични възела на клона се оказват свързани наکشо ($3 \equiv 3' \equiv a$). Те може да се слоят като възли с еднакъв потенциал. Така се решава верига с клон по-малко. След определяне на токовете в редуцираната верига, токът в клона $\overline{3a}$ се изчислява по първия закон на Кирхоф, записан за един от граничните възли на клона.

Г. Пренасяне на източник на е.д.т. в контур

Постановка на задачата. Клон с източник на е.д.т. \dot{J}_{e_4} (фиг.1.58а) е част от контур на електрическа верига. Да се намери еквивалентната схема, в която клонът е отстранен, като \dot{J}_{e_4} е пренесен в контура.



Фиг. 1.58а

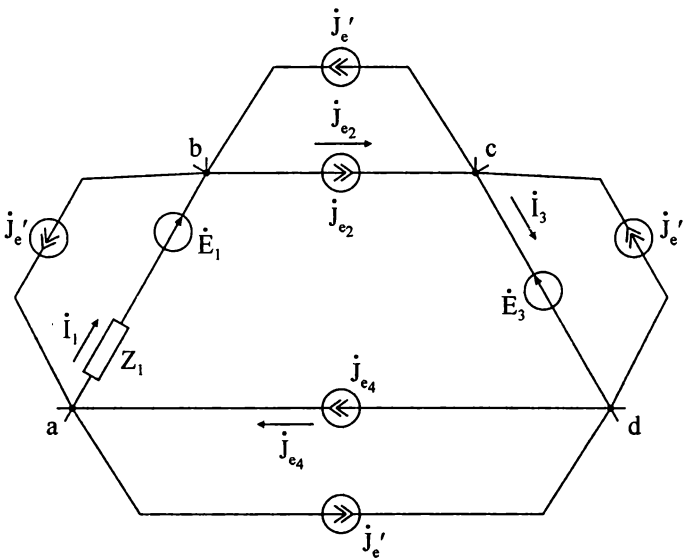
Анализ. Извършва се преобразуване, след което се доказва, че изходната и преобразуваната схема са еквивалентни. За целта се сравняват системите уравнения за двете схеми.

Процедура на преобразуването:

– В паралел на пренасяния източник на е.д.т. във веригата се включва допълнителен клон с източник на е.д.т. Този източник и пренасяният е.д.т. са с еднаква големина $\dot{J}'_e = \dot{J}_{e_4}$ и с различна посока спрямо един от граничните възли на клона (фиг. 1.58б).

– В паралел на всеки от останалите клонове на контура се включва клон с източник на е.д.т. \dot{J}'_e .

– Посоките на допълнително включените източници на е.д.т. са еднакво ориентирани спрямо една обща посока на обхождане на контура. Тя се задава от посоката на първия допълнително включен източник \dot{J}'_e . Схемата с допълнително включените източници на ток е показана на фиг. 1.58б.



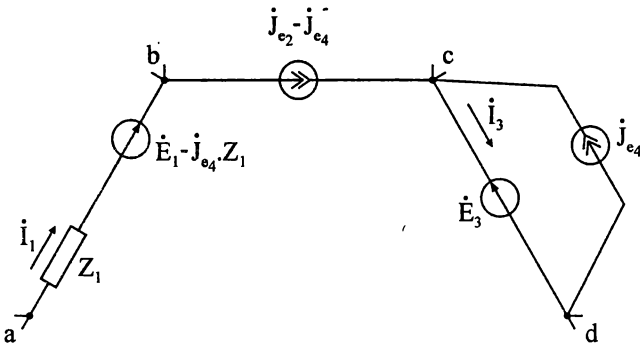
Фиг. 1.58б

Еквивалентност на изходната и на преобразуваната схема. Доказва се, че двете схеми се описват от една и съща система уравнения по следните причини:

– За изходната и за преобразуваната схема уравненията, записани по първия закон на Кирхоф за произволен възел от контура, са еднакви. Например уравненията за възела *a* от фиг. 1.58а и фиг. 1.58б съвпадат, т.е.

$$\dots + \dot{I}_1 - \dot{J}_{e_4} + \dots = 0 \quad \text{и} \quad \dots + \dot{I}_1 - \dot{J}_{e_4} - \dot{J}'_e + \dot{J}'_e + \dots = 0.$$

– Съгласно принципа за еквивалентно преобразуване токовете в непреобразуваната част на веригата остават без изменение. По тези причини, уравненията по втория закон на Кирхоф за разглеждания контур, както и за всички контури, които граничат с него, остават без изменение.



Фиг. 1.58в

Редуциране на преобразуваната схема. В някои случаи и в частност за разглеждания пример еквивалентната схема може да бъде допълнително опростена. За фиг. 1.58*в* токовете не се променят, ако се отстранят пренасяния и допълнително включения в паралел източник на е.д.т., тъй като от уравненията по първия закон на Кирхоф за граничните възли отпада по една нулева сума. За възела *a* (фиг. 1.58*б*) отпада сумата $(-J'_e + J'_e)$, а за възела *d* – сумата $(+J'_e - J'_e)$. Клоновете между възлите *b* и *c* се преобразуват в еквивалентен източник на е.д.т. $(\dot{J}_{e2} - \dot{J}_{e4})$. Реалният източник на е.д.т между възлите *a* и *b* се замества от реален източник с е.д.н. $\dot{J}_{e4} Z_1$, което заедно със съществуващото в клон *l* е.д.н. \dot{E}_1 , се обединява в еквивалентен източник с е.д.н. $(\dot{E}_1 - \dot{J}_{e4} Z_1)$.

/

В теорията на веригите съществуват две основни задачи – задача за анализ и задача за синтез на вериги. При задачата за анализ са дадени структурата на веригата (начинът на свързване на отделните елементи), параметрите на елементите и вида и стойностите на източниците (електродвижещите величини на независимите генератори; коефициентите на управление на зависимите генератори). Търсят се токовете в клоновете на веригата, потенциалите на възлите, напреженията върху отделните елементи и мощностите. Трябва да се отбележи, че за намирането на токовете в клоновете на дадена верига и напреженията върху източниците на ток е достатъчно да бъдат определени потенциалите на възлите, напреженията върху елементите, както и да се изчислят генерираната и консумираната мощности. Поради това в тази глава задачата за анализ на вериги ще бъде разглеждана само до етапа на определяне на токовете в клоновете на веригите и напреженията върху източниците на ток.

При задачата за синтез са известни стойностите на някои токове, потенциали (напрежения) или на някои характеристики, свързани с тях. Търсят се съответната структура на веригата, стойностите на параметрите и на източниците, които осигуряват зададените токове, потенциали (напрежения) или характеристики. Важно е да се има предвид, че задачите за синтез са много по-сложни от задачите за анализ и обикновено решението на такива задачи е нееднозначно (т.е. съществуват множество решения). Същевременно решаването на задачите за синтез изисква познания за решаването на задачите за анализ на вериги и в много случаи е свързано с многократно решаване на такива задачи при различни данни.

Предмет на изложението в тази глава са методите за решаване на задачата за анализ на вериги при синусоидални режими, както и някои основни свойства и теореми за електрическите вериги. За целта се използва символичният подход с комплексни числа и се работи със схеми за комплексни величини. Постоянните режими могат да се разглеждат просто като следствие при нулеви имагинерни части на комплексните съпротивления и комплексите на източниците.

Разглежданите методи за анализ на електрически вериги при синусоидални режими могат да бъдат използвани и при анализ на преходни процеси, като за целта те трябва да се прилагат за т. нар. операторни заместващи схеми.

2.1. МЕТОДИ ЗА АНАЛИЗ НА ВЕРИГИ ПРИ ПРОМЕНЛИВ ТОК

Нека броят на клоновете на дадена електрическа верига е означен с m , а броят на възлите с n . Задачата за анализ на веригата се свежда до съставяне на m независими уравнения за m неизвестни величини (клонови токове или напрежения върху източници на ток). За целта се използват основните закони за електрически вериги (законите на Кирхоф), но за да бъдат съответните уравнения независими, възлите (сеченията), за които се записва първият закон на Кирхоф и контурите, за които се записва вторият закон на Кирхоф трябва да бъдат подходящо избрани. В този параграф се разглеждат някои въпроси, свързани с топологията на електрическите вериги, които са в пряка връзка с независимостта на уравненията, записани по законите на Кирхоф, както и основните методи за анализ на електрически вериги.

2.1.1. Топология на електрическите вериги

Топологията на дадена електрическа верига се определя от клоновете на веригата и начина на тяхното свързване (от което се определят и възлите на веригата). Топологията по същество определя структурата на веригата и по-нататък тези две понятия (топология и структура) ще бъдат използвани за отрязване на едно и също нещо.

Трябва да се отбележи, че основните закони за електрическите вериги са свързани с топологията на разглежданата верига. Както е известно, в най-общ вид първият закон на Кирхоф е свързан с възлите (сеченията) в дадена верига и може да се запише по следния начин:

$$\sum_k \dot{I}_k = 0,$$

където с \dot{I}_k са означени комплексите на токовете в клоновете, опиращи се на даден възел (сечение).

Стойностите на токовете се вземат със знак плюс или минус, в зависимост от посоката на съответния ток по отношение на положителната посока на възела (обикновено за положителна се приема посоката на излизане). От горното се вижда, че уравненията, съставени по първия закон на Кирхоф, зависят от това дали определени клонове се опират на съответния възел или не, т.е. от топологията на веригата.

Вторият закон на Кирхоф е свързан с контурите в дадена електрическа верига и в най-общ вид може да се запише по следния начин:

$$\sum_k \dot{U}_k = 0,$$

където с \dot{U}_k са означени комплексите на напреженията между възлите на клоновете от даден контур.

Стойностите на напреженията се вземат със знак плюс или минус, в зависимост от това дали посоката на съответния клон съвпада или е обратна на посоката на обхождане на контура. И в този случай се вижда, че уравнението, съставено по втория закон на Кирхоф зависи от това дали определени клонове са включени в съответния контур или не, т.е. от топологията на веригата.

От горното разглеждане може да се направи заключение, че уравненията, съставени по законите на Кирхоф, зависят от това как са свързани клоновете във веригата, и не зависят от параметрите на съответните елементи и вида и стойностите на източниците. Поради това, за да могат да бъдат записани основните закони за дадена електрическа верига не е необходимо да се чертаят елементите и източниците, а клоновете просто да бъдат заместени с линии. В резултат на това се получава геометрично изображение на веригата, състоящо се от линии и точки (местата, където се свързват линиите). Това изображение може да се представи като граф.

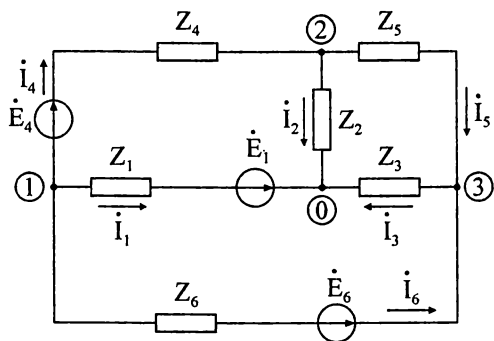
Графът е математически обект, който се дефинира с две множества – ребра и върхове, и съответните изображения, свързващи тези множества. За целите на по-нататъшното изложение графът се разглежда като геометрично изображение на веригата, при което клоновете се заменят с линии, които се наричат ребра, а възлите се заместват с точки, които се наричат върхове. По този начин се установява взаимно еднозначно съответствие между дадена верига и съответстващия ѝ граф.

Графите са въведени от Ойлер през 1736 г., когато с тяхна помощ той решава знаменитата задача за Кьонигсбергските мостове. Графите биват различни видове. Следващите две класификации са важни в аспекта на приложението им в теорията на веригите.

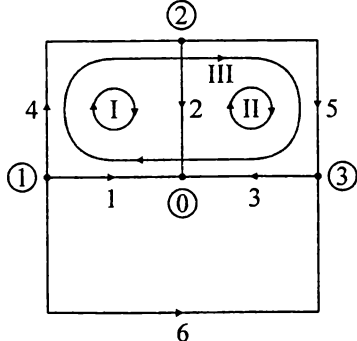
По отношение на това дали могат или не могат да бъдат разположени в една равнина, без да има пресичане на ребра, графите биват *планарни* и *непланарни*. По отношение на това дали с ребрата са асоциирани посоки, графите биват *насочени* и *ненасочени*. В теорията на веригите основно се използват планарни, насочени графи, които представляват геометрично изображение на планарни вериги. За веригата от фиг. 2.1а насоченият граф е даден на фиг. 2.1б.

Графът на разглежданата верига може да бъде начертан и както е показано на фиг. 2.1в, т.е. не е задължително линиите да бъдат прави. Важно е да се запазва взаимно еднозначното съответствие на клоновете на веригата с ребрата на графа и на възлите на веригата с неговите върхове. Поради това върховете на графа и съответните възли на веригата се номерират еднакво. Същевременно ребрата на графа се номерират по същия начин, по който са номерирани клоновете на веригата и графът се ориентира с посоките на токовете в клоновете.

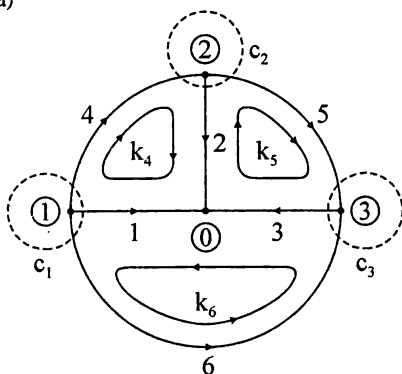
Път в графа се нарича последователност от ребра, в която всяко ребро и връх се срещат само по един път.



a)



б)



в)

Фиг. 2.1

Контур в графа е затворен път, т.е. когато последният връх съвпада с първия и всички останали ребра и върхове се срещат само по един път. Лесно се забелязва, че контурите в даден граф съответстват на контурите в електрическата верига, топологията на която се изобразява с разглеждания граф.

Дърво на графа се нарича съвкупност (множество) от ребра, които свързват всички върхове, без да се образуват затворени контури. Съответните клонове на веригата също се наричат ребра.

Допълнение на дървото на графа е съвкупност (множество) от ребра, които допълват ребрата от дървото до пълния граф. Тези ребра понякога се наричат хорди. Съответните клонове на веригата също се наричат хорди.

Нека броят на клоновете на дадена верига (респ. броят на ребрата на съответния ѝ граф) е означен с m , а броят на възлите (респ. броят на върховете на графа) с n . Тогава лесно се вижда, че броят на ребрата от дървото е $n - 1$, а броят на ребрата от допълнението на дървото е $k = m - n + 1$. Трябва да се отбележи, че изборът на дърво за даден граф е нееднозначен, т.е. съществуват краен брой варианти за избор на дърво и респективно допълнение на дървото. За примера от фиг. 2.1а за дърво на графа (фиг. 2.1б и фиг. 2.1в) могат да бъдат

избрани ребрата 1, 2 и 3, а за допълнение на дървото остават ребрата 4, 5 и 6. Същевременно за същия пример за дърво могат да бъдат избрани и ребрата 1, 2 и 6, а за допълнение на дървото ребрата 3, 4 и 5.

Главни сечения за графа (респ. веригата) са такива сечения, които включват само едно ребро от дървото и произволен брой ребра-хорди. Сеченията в случая могат да съвпадат с върховете на графа (респ. възлите на веригата). Броят на главните сечения е $n - 1$.

Главни контури за графа (респ. веригата) са такива контури, които съдържат едно ребро-хорда и произволен брой ребра от дървото. Броят на главните контури е $k = m - n + 1$.

При дърво, състоящо се от ребрата 1, 2 и 3 и хордите 4, 5 и 6, главните сечения c_1 , c_2 и c_3 за веригата от фиг. 2.1а съвпадат с върховете 1, 2 и 3, а главните контури са k_4 , k_5 и k_6 (фиг. 2.1б).

Основното съображение за въвеждане на главни сечения и главни контури е, че уравненията, съставени по първия закон на Кирхоф за главните сечения и тези по втория закон на Кирхоф за главните контури, са независими. Това е така, тъй като във всяко уравнение съществува една величина (ток в даден клон на дървото или напрежение върху клон-хорда), която не влиза в никое от останалите уравнения. Поради това тази величина не може да бъде получена при линейна комбинация на останалите уравнения и затова системата уравнения, записана по този начин, е система от независими уравнения.

Трябва да се отбележи, че съществува известно удобство, ако положителните посоки за главните сечения и главните контури не се избират произволно. Обикновено за всяко главно сечение за положителна се избира посоката на клона от дървото, свързан с това сечение, а за всеки главен контур положителната посока на обхождане е посоката, съпадаща с посоката на клон-хорда, свързана със съответния главен контур. Както беше споменато по-горе, клоновете на веригата, съответстващи на ребра от дървото на графа \dot{u} ще бъдат наричани клонове от дървото, а клоновете, съответстващи на ребра от множеството на хордите, ще бъдат наричани клонове-хорди.

2.1.2. Метод с клонови токове

Методът с клоновите токове се базира на съставяне на система уравнения по законите на Кирхоф за неизвестните клонови токове. Нека веригата има m клона и n възела. Ако във веригата няма източници на ток, то величините, които се търсят при решаването на задачата за анализ на веригата са m -те токове, свързани с нейните клонове. Ако в някои от клоновете на веригата има източници на ток, неизвестната величина за съответния клон е напрежението върху източника на ток. Системата уравнения с комплексни величини, съставена по законите на Кирхоф е линейна, т.е. разглежданите вериги са линейни (вж. т. 2.2). След като бъде съставена съответната линейна система уравнения с комплексни коефициенти, съществуват редица методи за намиране на нейното решение.

Основен проблем при метода с клоновите токове е уравненията, които могат да бъдат съставени по законите на Кирхоф, да бъдат независими. Нека разгледаме отново примера от фиг. 2.1а. Уравненията, съставени по първия закон на Кирхоф за възлите 1, 2, 3 и 0 са, както следва:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 + \dot{I}_4 + \dot{I}_6 &= 0 \quad (\text{възел } 1), \\ \dot{I}_2 - \dot{I}_4 + \dot{I}_5 &= 0 \quad (\text{възел } 2), \\ \dot{I}_3 - \dot{I}_5 - \dot{I}_6 &= 0 \quad (\text{възел } 3), \\ -\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 &= 0 \quad (\text{възел } 0). \end{aligned}$$

Ако съберем горните уравнения ще се получи тъждество $0 = 0$, т.е. те са линейно зависими. С други думи, всяко едно от тях може да се получи като линейна комбинация от останалите. Това е вярно и в най-общ случай, тъй като даден клон се опира на два възела, като е с посока на излизане от единия възел и на влизане в другия възел. По този начин клонът фигурира в две от уравненията, записани по първия закон на Кирхоф. В едното от тях е със знак плюс, а в другото – с минус. След събиране на уравненията за всички възли, всички токове се анулират и в резултат се получава тъждество $0 = 0$.

Следователно максималният брой независими уравнения, които могат да бъдат съставени с използване на първия закон на Кирхоф е $n - 1$. Останалите $k = m - (n - 1) = m - n + 1$ уравнения трябва да бъдат съставени по втория закон на Кирхоф. Осигуряването на тяхната независимост, обаче, е свързано със специален начин на подбор на контурите.

За веригата от фиг. 2.1а $m = 6$, $n = 4$, $n - 1 = 3$, $k = m - n + 1 = 3$. Системата уравнения за контури I, II, и III (фиг. 2.1б) е, както следва:

$$\begin{cases} -Z_1 \dot{I}_1 + Z_4 \dot{I}_4 + Z_2 \dot{I}_2 = \dot{E}_4 - \dot{E}_1 \quad (\text{контур I}) \\ -Z_2 \dot{I}_2 + Z_3 \dot{I}_3 + Z_5 \dot{I}_5 = 0 \quad (\text{контур II}) \\ -Z_1 \dot{I}_1 + Z_3 \dot{I}_3 + Z_4 \dot{I}_4 + Z_5 \dot{I}_5 = \dot{E}_4 - \dot{E}_1 \quad (\text{контур III}). \end{cases}$$

От горната система уравнения се вижда, че уравнението за контур III може да се получи след сумиране на уравненията за контури I и II. Следователно, при този избор на контури, въпреки че броят им е $k = m - n + 1 = 3$, уравненията, съставени по втория закон на Кирхоф, са зависими.

На практика съществуват няколко метода за избор на независими контури. Тук ще споменем само два по-важни и най-често използвани метода. Първият метод е т.нар. метод на елементарните клетки. При него контурите са свързани с елементарните клетки, на които графът на веригата разделя площта, на която е разположен. В случая за веригата от фиг. 2.1а това са контурите k_4 , k_5 и k_6 от фиг. 2.1в. Вторият метод е строго топологичен и е свързан с избор на

дърво на графа на разглежданата верига. Както беше разгледано в предния параграф, изборът на дървото еднозначно определя главните сечения и главните контури. Тогава за независими контури се избират главните контури.

Ако за дърво на графа на веригата от фиг. 2.1а са избрани ребрата 1, 2 и 3, то главните контури са k_4 , k_5 и k_6 , т.е. те съвпадат с елементарните клетки. Ако за дърво са избрани ребрата 1, 2 и 6, допълнението на дървото се състои от хордите 3, 4 и 5. В този случай главните сечения и главните контури са показани на фиг. 2.1б.

Тук индексът на сечението (c_1 , c_2 или c_6) съответства на номера на клона от дървото, свързан с това главно сечение, а индексът на контура (k_3 , k_4 или k_5) съответства на номера на клон-хорда, свързан с този главен контур.

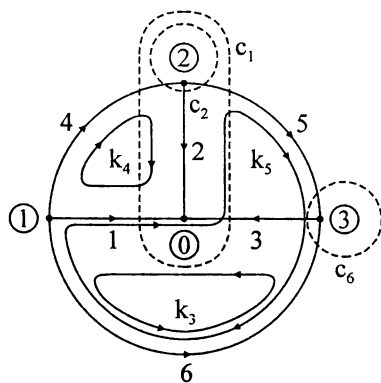
За случая на избор на дърво, състоящо се от ребрата 1, 2 и 3 (фиг. 2.1а), системата независими уравнения, съставена по законите на Кирхоф, е:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 + \dot{I}_4 + \dot{I}_6 = 0 \text{ (възел 1)} \\ \dot{I}_2 - \dot{I}_4 + \dot{I}_5 = 0 \text{ (възел 2)} \\ \dot{I}_3 - \dot{I}_5 - \dot{I}_6 = 0 \text{ (възел 3)} \end{cases} \quad \begin{cases} -Z_1 \dot{I}_1 + Z_4 \dot{I}_4 + Z_2 \dot{I}_2 = \dot{E}_4 - \dot{E}_1 \text{ (контур } k_4) \\ -Z_2 \dot{I}_2 + Z_3 \dot{I}_3 + Z_5 \dot{I}_5 = 0 \text{ (контур } k_5) \\ -Z_1 \dot{I}_1 + Z_3 \dot{I}_3 + Z_6 \dot{I}_6 = \dot{E}_6 - \dot{E}_1 \text{ (контур } k_6). \end{cases} \quad (2.1)$$

Ако бъде избрано дърво на графа на веригата, състоящо се от ребрата 1, 2 и 6, както е показано на фиг. 2.1б, то системата независими уравнения по законите на Кирхоф за главните сечения и главните контури от фиг. 2.1б е:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 + \dot{I}_3 + \dot{I}_4 - \dot{I}_5 = 0 \text{ (сечение } c_1) \\ \dot{I}_2 - \dot{I}_4 + \dot{I}_5 = 0 \text{ (сечение } c_2) \\ \dot{I}_3 - \dot{I}_5 - \dot{I}_6 = 0 \text{ (сечение } c_6) \\ -Z_1 \dot{I}_1 + Z_3 \dot{I}_3 + Z_6 \dot{I}_6 = \dot{E}_6 - \dot{E}_1 \text{ (контур } k_3) \\ -Z_1 \dot{I}_1 + Z_4 \dot{I}_4 + Z_2 \dot{I}_2 = \dot{E}_4 - \dot{E}_1 \text{ (контур } k_4) \\ Z_1 \dot{I}_1 - Z_2 \dot{I}_2 + Z_5 \dot{I}_5 - Z_6 \dot{I}_6 = \dot{E}_1 - \dot{E}_6 \text{ (контур } k_5). \end{cases} \quad (2.2)$$

Важна особеност при прилагането на метода с клонови токове е изборът на независими контури при наличие на източници на ток в схемата на разглежданата верига. Същата особеност ще бъде дискутирана и при метода с контурните токове, който е разгледан по-нататък. В този случай независимите



фиг. 2.1г

контури трябва да бъдат избрани по такъв начин, че даден клон с източник на ток да участва само в един контур и да не участва в другите. Това е еквивалентно на такъв избор на дървото на графа на веригата, че ребрата, съответстващи на клоновете с източници на ток да бъдат от допълнението на дървото на графа, т.е. да са хорди. При такъв избор на контурите всяко от напреженията върху източниците на ток участва само в едно уравнение, съставено по втория закон на Кирхоф.

Ако във веригата има m_j източника на ток, броят на неизвестните клонови токове е $m - m_j$ и те могат да бъдат определени, като се решат съвместно $m - m_j$ уравнения ($n - 1$ по първия закон на Кирхоф и $m - n + 1 - m_j = k - m_j$ по втория). След намирането на клоновите токове, напреженията върху източниците на ток се намират от останалите m_j уравнения, записани по втория закон на Кирхоф за контурите, в които участват източниците на ток. Следователно, при наличие на източници на ток, броят на уравненията, които трябва да бъдат решавани съвместно, намалява с броя на източниците на ток.

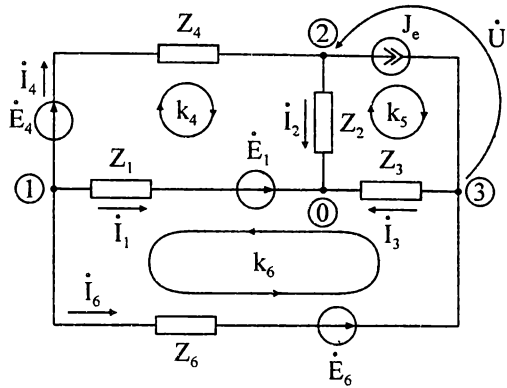
Планът за работа при прилагане на метода с клоновите токове е следният:

1. Построява се веригата за комплексни величини (в случай на резистивни вериги тази точка се пропуска);
2. Избират се независими сечения (възли) и независими контури;
3. Избират се посоки на токовете в клоновете на веригата;
4. Избират се положителни посоки за сеченията и посоки на обхождане на контурите;
5. За $n - 1$ независими сечения (възли) се записва първият закон на Кирхоф;
6. За $k = m - n + 1$ независими контури се записва вторият закон на Кирхоф;
7. Решава се получената система от m уравнения с m неизвестни (клоновите токове и напреженията върху източниците на ток) и се определят неизвестните величини;
8. Потенциалите на възлите, напреженията върху отделните елементи и мощностите се определят с използване на обобщения закон на Ом и формулите за изчисляване на генерирана и консумирана мощност.

Веригата от фиг. 2.2 се различава от веригата от фиг. 2.1а по това, че в клона 2 има източник на ток. Графите на двете вериги са еднакви (фиг. 2.1б) и $m = 6$, $n = 4$.

В случая величините, които се търсят при анализа на разглежданата верига, са комплексите на токовете $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3, \dot{I}_4, \dot{I}_6$ и напрежението върху идеалния източник на ток \dot{U} . Ако изборът на главни сечения и главни контури е базиран на дърво на графа, състоящо се от ребрата 1, 2 и 3, както е показано на фиг. 2.1б, то главните сечения съвпадат с възлите 1, 2 и 3, а главните контури k_4, k_5 и k_6 са елементарните клетки, на които графът от фиг. 2.1б разделя

площта, върху която е построен. Този избор е подходящ за случая, тъй като клонът 5, в който се намира източникът на ток, е клон-хорда. Понеже във веригата има един източник на ток ($m_j = 1$) и съответният клон участва само в един контур k_5 , броят на уравнения спрямо клоновите токове, които трябва да бъдат решавани независимо, е $m - m_j = 5$. След намирането на съответните клонови токове напрежението \dot{U} се определя директно от уравнението за контура k_5 .



фиг. 2.2

Системата уравнения за веригата е:

$$\begin{cases}
 \dot{I}_1 + \dot{I}_4 + \dot{I}_6 = 0 \text{ (възел 1)} \\
 \dot{J}_e - \dot{I}_4 + \dot{I}_2 = 0 \text{ (възел 2)} \\
 \dot{I}_3 - \dot{J}_e - \dot{I}_6 = 0 \text{ (възел 3)} \\
 -Z_1 \dot{I}_1 + Z_4 \dot{I}_4 + Z_2 \dot{I}_2 = \dot{E}_4 - \dot{E}_1 \text{ (контур } k_4) \\
 -Z_1 \dot{I}_1 + Z_3 \dot{I}_3 + Z_6 \dot{I}_6 = \dot{E}_6 - \dot{E}_1 \text{ (контур } k_6) \\
 -\dot{U} + Z_3 \dot{I}_3 - Z_2 \dot{I}_2 = 0 \text{ (контур } k_5).
 \end{cases} \quad (2.3)$$

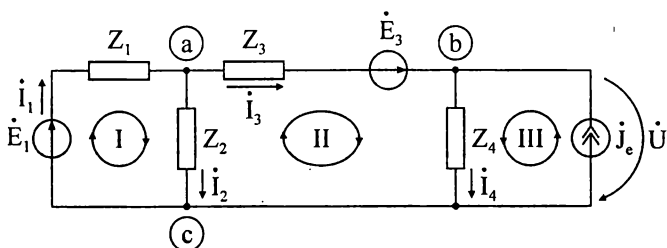
Тъй като стойността на източника на ток е известна, \dot{J}_e може да бъде прехвърлен в дясната част на уравненията за възлите 2 и 3. В резултат дясната част на горната система уравнения е известна и зависи от източниците във веригата. Съвместното решаване на първите 5 уравнения на (2.3) води до намирането на неизвестните клонови токове $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3, \dot{I}_4, \dot{I}_6$. Напрежението върху източника на ток \dot{U} се определя от последното уравнение на (2.3)

$$\dot{U} = Z_3 \dot{I}_3 - Z_2 \dot{I}_2$$

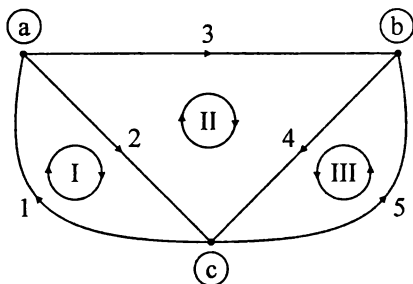
Пример 2.1. Веригата от фиг. 2.3а има следните параметри: $Z_1 = 1\Omega$, $Z_2 = j1\Omega$, $Z_3 = -j\Omega$, $Z_4 = 1\Omega$, $\dot{E}_1 = 1V$. Комплексите на източниците са $\dot{E}_3 = 1 + j, V$, $\dot{J}_e = jA$. Да се определят комплексите на токовете в клоновете и напрежението върху източника на ток.

Решение: За разглежданата верига $n = 3$, $m = 5$, $m_j = 1$. Графът на веригата е даден на фиг. 2.3б. Ако за дърво на графа бъдат избрани ребрата 2 и 4, то

хорди са ребрата 1, 3 и 5, и тогава главните контури съответстват на елементарните клетки, както е показано на фиг. 2.3а и б. Източникът на ток в клон 5 съответства на ребро-хорда, поради което напрежението \dot{U} върху него ще участва само в уравнението за контура III и няма да участва в останалите две уравнения по втория закон на Кирхоф.



а)



б)

Фиг. 2.3

За $(n - 1) = 2$ възли се записва първият закон на Кирхоф:

$$-\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0 \quad (\text{за възел } a),$$

$$-\dot{I}_3 + \dot{I}_4 - \dot{J}_e = 0 \quad (\text{за възел } b).$$

Вторият закон на Кирхоф, записан за двата независими контура ($m - n + 1 - m_j = 2$) е:

$$Z_1 \dot{I}_1 + Z_2 \dot{I}_2 = \dot{E}_1 \quad (\text{контур I}),$$

$$-Z_2 \dot{I}_2 + Z_3 \dot{I}_3 + Z_4 \dot{I}_4 = \dot{E}_3 \quad (\text{контур II}).$$

В резултат на съвместното решаване на горните уравнения се получават следните стойности за комплексите на клоновите токове:

$$\dot{I}_1 = (0,6 + j0,2), \text{ A}; \quad \dot{I}_2 = (-0,2 - j0,4), \text{ A},$$

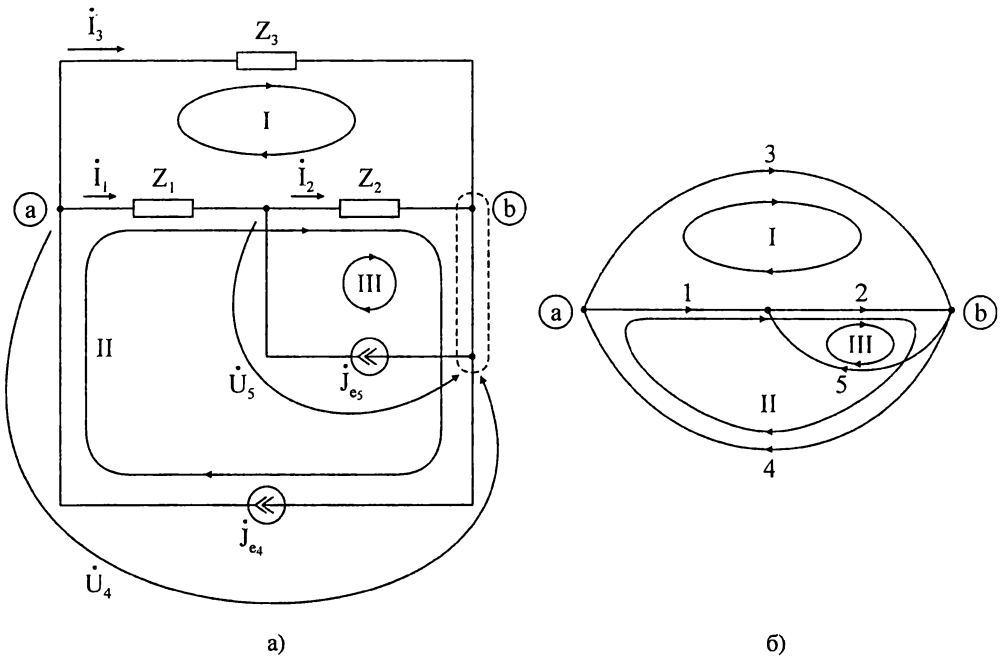
$$\dot{I}_3 = (0,6 + j0,2), \text{ A}; \quad \dot{I}_4 = (0,8 + j1,6), \text{ A}.$$

Напрежението върху източника на ток се намира от уравнението за контура III

$$-\dot{U} + Z_4 \dot{I}_4 = 0,$$

откъдето $\dot{U} = Z_4 \dot{I}_4 = (0,8 + j1,6), V$.

Пример 2.2. За веригата от фиг. 2.4а са известни комплексните съпротивления $Z_1 = j\Omega$, $Z_2 = -j2\Omega$, $Z_3 = 2\Omega$ и комплексите на източниците $\dot{J}_{e4} = 4 A$ и $\dot{J}_{e5} = -j2 A$. Да се определят комплексите на токовете в клоновете и напреженията върху източниците на ток.



Фиг. 2.4

Решение: За разглеждания пример $n = 3$, $m = 5$, $m_j = 2$. Графът на веригата е показан на фиг. 2.4б. За дървото на графа са избрани ребрата 1 и 2, а за хорди – 3, 4, и 5. В случая $n - 1 = 2$ и $m - n + 1 - m_j = 1$. Уравненията по първия закон на Кирхоф за възлите a и b са:

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_3 - \dot{J}_{e4} = 0 \text{ (за възел } a),$$

$$\dot{I}_2 + \dot{I}_3 - \dot{J}_{e4} - \dot{J}_{e5} = 0 \text{ (за възел } b).$$

Източниците на ток \dot{J}_{e4} и \dot{J}_{e5} са в клонове-хорди, които определят контурите II и III . Следователно само уравнението за контур I , който съответства

на клона-хорда 3 трябва да се разглежда съвместно с уравненията за възлите *a* и *b*. Това уравнение е от вида:

$$-Z_1 \dot{I}_1 - Z_2 \dot{I}_2 + Z_3 \dot{I}_3 = 0 \text{ (контур } I).$$

Съвместното решаване на горните уравнения води до следния резултат за комплексите на клоновите токове:

$$\dot{I}_1 = (4,8 + j2,4), \text{ A}; \quad \dot{I}_2 = (4,8 + j0,4), \text{ A}; \quad \dot{I}_3 = (-0,8 - j2,4), \text{ A}.$$

Напреженията върху източниците на ток могат директно да се определят от уравненията за контурите *II* и *III*:

$$Z_1 \dot{I}_1 + Z_2 \dot{I}_2 - \dot{U}_4 = 0 \text{ (контур } II),$$

$$Z_2 \dot{I}_2 - \dot{U}_5 = 0 \text{ (контур } III).$$

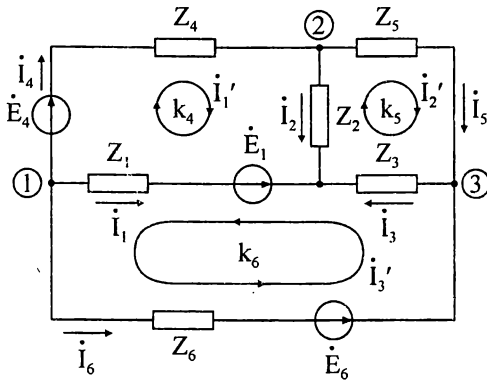
Оттук

$$\dot{U}_4 = Z_1 \dot{I}_1 + Z_2 \dot{I}_2 = (-1,6 - j4,8), \text{ V},$$

$$\dot{U}_5 = Z_2 \dot{I}_2 = (0,8 - j9,6), \text{ V}.$$

2.1.3. Метод с контурни токове

Основен недостатък на метода с клоновите токове е, че при верига с много клонове редът на системата линейни уравнения за режима във веригата е висок. Идеята на метода с контурните токове е получаване на система от по-нисък ред. При този метод броят на независимите уравнения е $k = m - n + 1$, където m , както и преди е броят на клоновете, а n е броят на възлите в разглежданата верига.



Фиг. 2.5

За илюстрация на метода отново се разглежда веригата от фиг. 2.1а, за която на база метода с клоновите токове е съставена системата уравнения (2.1). Първите три уравнения са съставени по първия закон на Кирхоф за възлите 1, 2 и 3, а последните три са съставени по втория закон на Кирхоф за контурите k_4 , k_5 и k_6 (фиг. 2.1б). Тази верига отново е дадена на фиг. 2.5, като за дърво на графа са избрани клоновете 1, 2 и 3, а хордите са съответно 4, 5 и 6.

Ако от уравненията по първия закон на Кирхоф бъдат изразени токовете в клоновете от дървото на графа посредством токовете в клоновете хорди, се получава:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= -\dot{I}_4 - \dot{I}_6 \quad (\text{възел } 1), \\ \dot{I}_2 &= \dot{I}_4 - \dot{I}_5 \quad (\text{възел } 2), \\ \dot{I}_3 &= \dot{I}_5 + \dot{I}_6 \quad (\text{възел } 3). \end{aligned}$$

Като заместим тези токове в уравненията по втория закон на Кирхоф, за контурите k_4 , k_5 и k_6 се получава система от $k = m - n + 1$ уравнения по отношение на $k = m - n + 1$ неизвестни токове в клоновете–хорди:

$$\begin{cases} (Z_1 + Z_2 + Z_4)\dot{I}_4 - Z_2\dot{I}_5 + Z_1\dot{I}_6 = \dot{E}_4 - \dot{E}_1 \quad (\text{контур } k_4) \\ -Z_2\dot{I}_4 + (Z_2 + Z_3 + Z_5)\dot{I}_5 + Z_3\dot{I}_6 = 0 \quad (\text{контур } k_5) \\ Z_1\dot{I}_4 + Z_3\dot{I}_5 + (Z_1 + Z_3 + Z_6)\dot{I}_6 = \dot{E}_6 - \dot{E}_1 \quad (\text{контур } k_6). \end{cases}$$

Във връзка с горната система уравнения може да се приеме, че токовете \dot{I}_4 , \dot{I}_5 и \dot{I}_6 се затварят през всички клонове съответно на контурите k_4 , k_5 и k_6 и ще бъдат наричани контурни токове. Така първоначално може да се счита, че с всеки контур е свързан контурен ток $\dot{I}'_1 = \dot{I}_4$, $\dot{I}'_2 = \dot{I}_5$, $\dot{I}'_3 = \dot{I}_6$ и няма други токове, освен контурните. При „протичане“ в съответния контур всеки от контурните токове обуславя т. нар. собствен напрежителен пад, който е равен на сумата от всички комплексни съпротивления в контура (ако се разгледа изолиран всеки контур, съпротивленията в него са свързани последователно), умножена по контурния ток. Всеки контурен ток обуславя и т. нар. взаимни напрежителни падове между контурите. По този начин системата уравнения по отношение на контурните токове може да бъде записана по формални правила:

$$\begin{cases} (Z_1 + Z_2 + Z_4)\dot{I}'_1 - Z_2\dot{I}'_2 + Z_1\dot{I}'_3 = \dot{E}_4 - \dot{E}_1 \quad (\text{контур } k_4) \\ -Z_2\dot{I}'_1 + (Z_2 + Z_3 + Z_5)\dot{I}'_2 + Z_3\dot{I}'_3 = 0 \quad (\text{контур } k_5) \\ Z_1\dot{I}'_1 + Z_3\dot{I}'_2 + (Z_1 + Z_3 + Z_6)\dot{I}'_3 = \dot{E}_6 - \dot{E}_1 \quad (\text{контур } k_6). \end{cases} \quad (2.4)$$

Така например уравнението за контура k_4 съдържа следните напрежителни падове: $(Z_1 + Z_2 + Z_4)\dot{I}'_1$, $Z_2\dot{I}'_2$ и $Z_1\dot{I}'_3$.

$(Z_1 + Z_2 + Z_4)\dot{I}'_1$ се нарича собствен напрежителен пад, който е равен на сумата от всички комплексни съпротивления в контура k_4 , умножена по собствения контурен ток;

$-Z_2 \dot{I}_2'$ и $Z_1 \dot{I}_3'$ са взаимни напрежителни падове, които отразяват влиянието на останалите контурни токове \dot{I}_2' и \dot{I}_3' върху контура с контурен ток \dot{I}_1' . Взаимният напрежителен пад $-Z_2 \dot{I}_2'$ е равен на общото комплексно съпротивление на контурите k_4 и k_5 , умножено по контурния ток \dot{I}_2' . Знаците на взаимните напрежителни падове зависят от посоките на контурните токове в общите клонове. Ако съвпадат, знакът е плюс, а ако са противоположни, знакът е минус.

Дясната част на всяко уравнение е като при втория закон на Кирхоф – алгебрична сума от комплексите на електродвижещите напрежения на източниците на напрежение в съответните контури и се нарича комплексно контурно електродвижещо напрежение.

В общия случай системата уравнения по метода с контурните токове може да бъде записана по следния начин:

$$Z_{pp}' \dot{I}_p' + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^k Z_{pq}' \dot{I}_q' = \dot{E}_p', \quad p = 1, 2, \dots, k,$$

където Z_{pp}' е собственото комплексно контурно съпротивление на контура p . То е равно на сумата от всички комплексни съпротивления в контура. Z_{pq}' е взаимното комплексно контурно съпротивление между контурите p и q , и то е равно на сумата от комплексните съпротивления в клоновете общи за контурите p и q . \dot{E}_p' е комплексното контурно електродвижещо напрежение на контура p и то е равно на алгебричната сума от комплексите на източниците на е.д.н. в контура. За положителна се приема посоката на контурния ток, свързан с контура.

Знаците на взаимните напрежителни падове $Z_{pq}' \dot{I}_q'$ могат да бъдат отчетени във взаимните комплексни контурни съпротивления: ако контурните токове \dot{I}_p' и \dot{I}_q' са с еднакви посоки в общите клонове за контурите p и q , то знакът на Z_{pq}' е положителен. Ако посоката на контурните токове \dot{I}_p' и \dot{I}_q' в общите клонове за контурите p и q е различна, то знакът на Z_{pq}' е отрицателен.

Влиянието на комплексните съпротивления в различните клонове върху собствените и взаимните комплексни контурни съпротивления може да бъде показано с примера от фиг. 2.6. Нека клоновете p , q и s се опират на възела (s). При положение, че той съответства на главно сечение, само един клон s е клон от дървото на графа, а p и q са клонове-хорди.

В този случай клонът s е общ за двата контура k_p и k_q , а контурните токове са $\dot{I}_p' = \dot{I}_p$, $\dot{I}_q' = \dot{I}_q$. Уравненията съгласно втория закон на Кирхоф за тези контури са:

$$\dots + Z_p \dot{I}_p + Z_s \dot{I}_s + \dots = \dots + \dot{E}_s + \dots$$

(за контур k_p)

$$\dots + Z_q \dot{I}_q - Z_s \dot{I}_s + \dots = \dots - \dot{E}_s - \dot{E}_q \dots$$

(за контур k_q).

От първия закон на Кирхоф за възела (s) може да бъде изразен токът в клона на дървото s чрез токовете в клоновете хорди p и q :

$$\dot{I}_s = \dot{I}_p - \dot{I}_q.$$

Заместването на това равенство в горните уравнения за двата контура k_p и k_q води до следните зависимости:

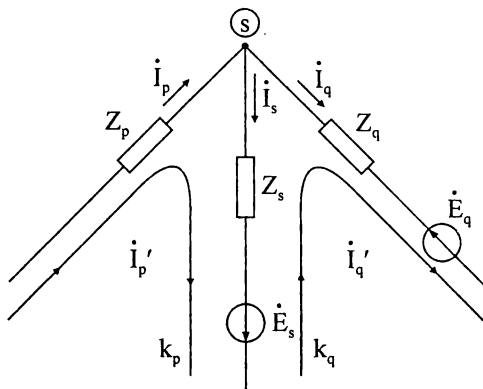
$$\dots + (Z_p + Z_s) \dot{I}_p - Z_s \dot{I}_q + \dots = \dots + \dot{E}_s + \dots$$

$$- Z_s \dot{I}_s + (Z_q + Z_s) \dot{I}_q + \dots = \dots - \dot{E}_s - \dot{E}_q.$$

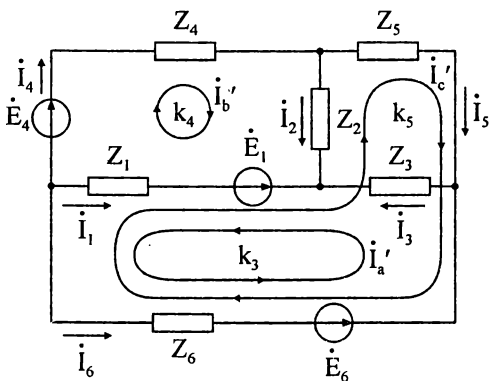
Като се отчетат равенствата $\dot{I}_p = \dot{I}_p'$ и $\dot{I}_q = \dot{I}_q'$ се вижда, че върху собственото комплексно контурно съпротивление влияят всички комплексни съпротивления от контура (то е сума от тях), а върху взаимните комплексни контурни съпротивления влияят общите съпротивления между контурите.

Съотношенията $\dot{I}_p = \dot{I}_p'$, $\dot{I}_q = \dot{I}_q'$ и $\dot{I}_s = \dot{I}_p' - \dot{I}_q'$ дават връзката между клоновете и контурните токове. От тях се вижда, че даден клонов ток може да бъде определен като алгебрична сума на контурните токове, „преминаващи“ през клона. За положителна посока за даден клон се счита посоката на клоновия ток. За токовете в клоновете-хорди горното е вярно, т.е. всеки контурен ток е равен на тока в клона-хорда, съответстващ на този контур. За токовете в клоновете от дървото това съотношение следва от първия закон на Кирхоф за съответното главно сечение.

Нека за веригата от фиг. 2.1а изборът на независими контури е направен, както е показано на графа от фиг. 2.1г, т.е. за дърво на графа на веригата са избрани ребрата 1, 2 и б, а за допълнение на дървото – 3, 4 и 5. Така разглежданият пример е показан на фиг. 2.7.



Фиг. 2.6



Фиг. 2.7

Контурните токове, свързани с контурите k_3 , k_4 и k_5 , са съответно \dot{I}'_a , \dot{I}'_b , \dot{I}'_c . При показания избор на посоки на контурните токове, токовете в клоновете-хорди са съответно $\dot{I}_3 = \dot{I}'_a$, $\dot{I}_4 = \dot{I}'_b$, $\dot{I}_5 = \dot{I}'_c$. Трите уравнения, съставени по метода с контурните токове, са:

$$\begin{aligned} (Z_1 + Z_2 + Z_3)\dot{I}'_a + Z_1\dot{I}'_b + (Z_1 + Z_6)\dot{I}'_c &= \dot{E}_6 - \dot{E}_1, \\ Z_1\dot{I}'_a + (Z_1 + Z_2 + Z_4)\dot{I}'_b - Z_2\dot{I}'_c &= \dot{E}_4 - \dot{E}_1, \\ -(Z_1 + Z_6)\dot{I}'_a - Z_2\dot{I}'_b + (Z_1 + Z_3 + Z_6)\dot{I}'_c &= -\dot{E}_6. \end{aligned}$$

Решаването на тази система води до намиране на контурните токове \dot{I}'_a , \dot{I}'_b , \dot{I}'_c , а оттам и на клоновите токове в клоновете-хорди \dot{I}_3 , \dot{I}_4 , \dot{I}_5 . Клоновите токове в клоновете от дървото на веригата се намират като алгебрична сума от контурните токове, „преминаващи“ през съответния клон: $\dot{I}_1 = -\dot{I}'_a - \dot{I}'_b + \dot{I}'_c$, $\dot{I}_2 = \dot{I}'_b - \dot{I}'_c$ и $\dot{I}_6 = \dot{I}'_a - \dot{I}'_c$.

Разгърнатата форма на общия вид на системата уравнения, записана по метода с контурните токове е, както следва:

$$\begin{aligned} Z_{11}\dot{I}'_1 + Z_{12}\dot{I}'_2 + \dots + Z_{1k}\dot{I}'_k &= \dot{E}_1 \\ Z_{12}\dot{I}'_1 + Z_{22}\dot{I}'_2 + \dots + Z_{2k}\dot{I}'_k &= \dot{E}_2 \\ \dots & \\ Z_{k1}\dot{I}'_1 + Z_{k2}\dot{I}'_2 + \dots + Z_{kk}\dot{I}'_k &= \dot{E}_k, \end{aligned} \quad (2.5)$$

където Z_{pq} , $p = 1, \dots, k$; $q = 1, \dots, k$, са съответно собствените и взаимните комплексни контурни съпротивления, а \dot{E}_p , $p = 1, \dots, k$, са комплексните електродвижещи напрежения.

Горната система има две важни свойства:

а) матрицата на тази система е симетрична, т.е. взаимните комплексни контурни съпротивления Z_{pq} и Z_{qp} са равни;

б) при резистивни вериги в много случаи елементите в главния диагонал на матрицата на системата са по-големи от сумата от модулите на всички елементи в съответния ред:

$$R_{pp}' \geq |R_{p1}'| + |R_{p2}'| + \dots + |R_{pp-1}'| + |R_{pp+1}'| + \dots + |R_{pk}'|, \quad p = 1, \dots, k,$$

т.е. матрицата на системата е диагонално-доминантна. Това свойство може да се използва при прилагане на числени методи за решаване на съответните системи уравнения.

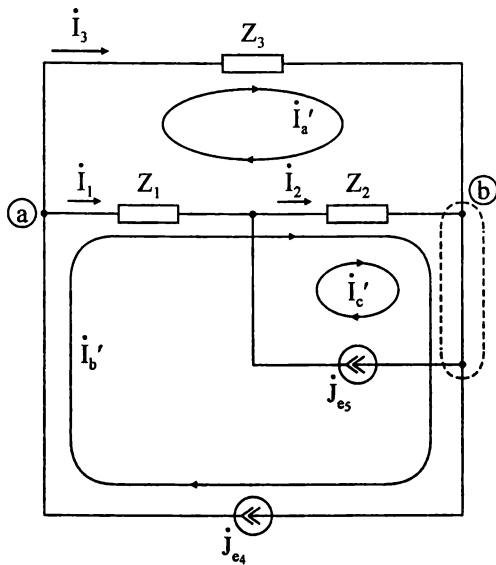
Планът за работа при прилагане на метода с контурните токове е следният:

1. Построява се веригата за комплексни величини (в случай на резистивни вериги тази точка се пропуска);
2. Избират се посоки на токовете в клоновете на веригата;
3. Избират се независимите контури (k на брой, $k = m - n + 1$);
4. Избират се положителни посоки на обхождане на контурите;
5. Избират се контурни токове свързани с контурите, като посоките им съвпадат с положителните посоки на обхождане;
6. Съставя се системата уравнения (2.5) по отношение на контурните токове;
7. Решава се системата уравнения от k уравнения с k неизвестни и се намират съответните контурни токове;
8. Клоновите токове се определят като алгебрична сума от контурните токове, „преминаващи“ през съответните клонове;
9. Потенциалите на възлите, напреженията върху отделните елементи и мощностите се определят с използване на обобщения закон на Ом и формулите за изчисляване на генерирана и консумирана мощност.

При използване на метода с контурните токове възникват някои особености при наличие на източници на ток в разглежданата верига. Те са свързани с това, че източниците на ток трябва да бъдат в клоновете–хорди. Тогава съответните контурни токове са равни на токовете на източниците на ток, т.е. те са известни и за такива контури не се пишат уравнения. Ако броят на източниците на ток във веригата е m_j , то редът на системата уравнения по метода с контурните токове е $k - m_j = m - n + 1 - m_j$. В тази връзка възниква въпросът за максималния брой на източници на ток в една електрическа верига. Тъй като броят на клоновете–хорди е $k = m - n + 1$, то максималният брой източници на ток в една верига е k и те трябва да могат да бъдат разположени в клонове–хорди. Ако това условие е нарушено, то във веригата съществуват сечения (възли), на които се опират клонове само с източници на ток. Такава верига е нереализуема на практика, тъй като за съответното сечение (възел) трябва да се удовлетворява първият закон на Кирхоф.

Пример 2.3. Да се реши задачата от пример 2.2, като се използва методът с контурните токове.

Решение: Схемата на веригата е дадена на фиг. 2.8. За случая $m = 5$, $n = 3$, $m_j = 2$. Както и в пример 2.2, за дърво са избрани клоновете 1 и 2, а за хорди 3,



Фиг. 2.8

Клоновите токове се намират, както следва:

$$\begin{aligned}
 i_1 &= i_b' - i_a' = (4,8 + j2,4), \text{ A}, \\
 i_2 &= -i_a' + i_b' + i_c' = (4,8 + j0,4), \text{ A}, \\
 i_3 &= i_a' = (-0,8 - j2,4), \text{ A}.
 \end{aligned}$$

2.1.4. Метод с възлови потенциали

Както беше показано преди, режимът в дадена верига се характеризира със система уравнения, записана по законите на Кирхоф. За определяне на токовете във всичките m клона на веригата по метода с клонови токове е необходимо да бъде съставена система от m уравнения с m неизвестни. Методът с контурните токове дава възможност за намаляване на броя уравнения, с които се описва режима във веригата, до $k = m - n + 1$ на брой. Друга възможност за намаляване броя на уравненията дава методът с възловите потенциали. При него уравненията, с които се описва режимът във веригата, се редуцират до $n - 1$. Представянето на метода ще бъде направено за веригата от фиг. 2.9.

Нека потенциалът на възел 0 бъде избран за нула, т.е. $\dot{V}_0 = 0$. Този избор не намалява общността на разглежданията, тъй като токовете в клоновете на веригата зависят от разликата на потенциалите на възлите, на които се опират тези клонове, а не от самите стойности на тези потенциали. Възелът с нулев потенциал се означава на схемите със символа „земя“.

4, и 5, т.е. двата източника са в клонове-хорди. Тогава $i_b' = j_{e4}$, а $i_c' = j_{e5}$ и броят на независимите уравнения по метода с контурните токове е $k - m_j = m - n + 1 - m_j = 1$. Единственото уравнение трябва да бъде записано за контура с контурен ток i_a' и то е от вида:

$$\begin{aligned}
 (Z_1 + Z_2 + Z_3)i_a' - (Z_1 + Z_2)i_b' - \\
 - Z_2i_c' = 0
 \end{aligned}$$

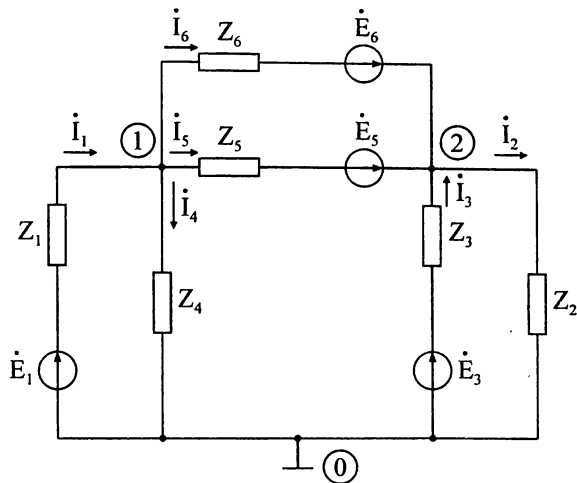
Оттук

$$\begin{aligned}
 i_a' &= \frac{(Z_1 + Z_2)i_b' + Z_2i_c'}{(Z_1 + Z_2 + Z_3)} = \\
 &= (-0,8 - j2,4), \text{ A}
 \end{aligned}$$

При избраните посоки на токовете в клоновете първият закон на Кирхоф за възлите 1 и 2 (в общия случай $n - 1$ на брой) е:

$$\begin{aligned} -\dot{I}_1 + \dot{I}_4 - \dot{I}_5 + \dot{I}_6 &= 0, \\ \dot{I}_2 - \dot{I}_3 + \dot{I}_5 - \dot{I}_6 &= 0. \end{aligned}$$

Токовете в клоновете могат да бъдат изразени чрез обобщения закон на Ом по следния начин:



Фиг. 2.9

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= (-\dot{V}_1 + \dot{E}_1)Y_1, & \dot{I}_4 &= \dot{V}_1 Y_4, \\ \dot{I}_2 &= \dot{V}_2 Y_2, & \dot{I}_5 &= (\dot{V}_2 - \dot{V}_1 + \dot{E}_5)Y_5, \\ \dot{I}_3 &= (-\dot{V}_2 + \dot{E}_3)Y_3, & \dot{I}_6 &= (\dot{V}_1 - \dot{V}_2 + \dot{E}_6)Y_6, \end{aligned}$$

където \dot{V}_1 и \dot{V}_2 са комплексите на потенциалите на възлите 1 и 2, а $Y_1 = 1/Z_1$, $Y_2 = 1/Z_2, \dots, Y_6 = 1/Z_6$ са комплексните проводимости на клоновете. Заместването на изразите за токовете в първия закон на Кирхоф води до $n - 1$ уравнения по отношение на неизвестните $n - 1$ комплекси на потенциалите на възлите:

$$\begin{aligned} (Y_1 + Y_4 + Y_5 + Y_6)\dot{V}_1 - (Y_5 + Y_6)\dot{V}_2 &= Y_1\dot{E}_1 + Y_5\dot{E}_5 - Y_6\dot{E}_6, \\ -(Y_5 + Y_6)\dot{V}_1 + (Y_2 + Y_3 + Y_5 + Y_6)\dot{V}_2 &= -Y_3\dot{E}_3 - Y_6\dot{E}_6. \end{aligned}$$

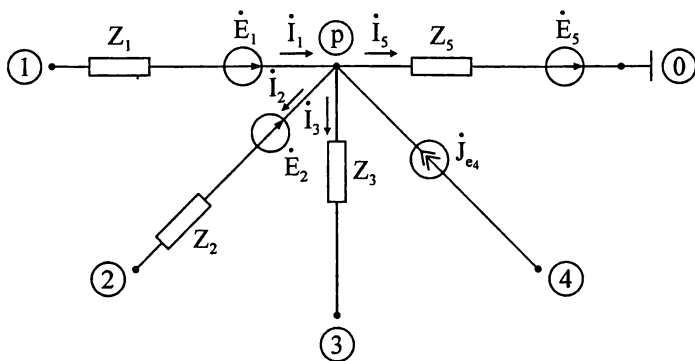
В горната система $(Y_1 + Y_4 + Y_5 + Y_6)$ е сумата от комплексните проводимости на клоновете, опиращи се на възел 1 и се нарича собствена комплексна проводимост на възела 1. Аналогично $(Y_2 + Y_3 + Y_5 + Y_6)$ е собствената комплексна проводимост на възела 2.

Клоновете 5 и 6 директно свързват възлите 1 и 2, а $(Y_5 + Y_6)$ е сумата от техните проводимости. Тя се нарича взаимна комплексна проводимост между възли 1 и 2.

Дясната част на всяко от уравненията е алгебрична сума на произведенията от комплексите на източниците на е.д.н. и съответните комплексни проводимости в клоновете, опиращи се на възлите, за които се пише съответното уравнение. Елементите в дясната част имат смисъл на електродвижещи токове и се наричат възлови електродвижещи токове. Компонентите от типа $Y_\kappa \dot{E}_\kappa$ са положителни, ако източникът \dot{E}_κ е с посока към възела, за който се пише уравнението.

Важно е да се подчертае, че видът на уравненията, записани за двата възела, не зависи от избраните положителни посоки на токовете. Лесно може да се провери, че и при други посоки видът на двете уравнения е същият.

В общия случай влиянието на комплексните съпротивления в клоновете и източниците върху собствените и взаимните комплексни възлови проводимости и възловия електродвижещ ток може да бъде показано с примера от фиг. 2.10.



Фиг. 2.10

Нека клоновете 1, 2, 3, 4 и 5 се опират на възела p , като $\dot{V}_5 = 0$. Първият закон на Кирхоф за възела p е от вида:

$$-\dot{i}_1 + \dot{i}_2 + \dot{i}_3 - \dot{j}_{e4} + \dot{i}_5 = 0.$$

Токовете в клоновете 1, 2 и 3 могат да бъдат изразени чрез потенциалите на възлите посредством обобщения закон на Ом:

$$\begin{aligned} \dot{i}_1 &= (\dot{V}_1 - \dot{V}_p + \dot{E}_1)Y_1, \\ \dot{i}_2 &= (\dot{V}_p - \dot{V}_2 + \dot{E}_2)Y_2, \\ \dot{i}_3 &= (\dot{V}_p - \dot{V}_3)Y_3, \\ \dot{i}_5 &= (\dot{V}_p + \dot{E}_5)Y_5, \end{aligned}$$

където $Y_1 = \frac{1}{Z_1}$, $Y_2 = \frac{1}{Z_2}$, $Y_3 = \frac{1}{Z_3}$ и $Y_5 = \frac{1}{Z_5}$ са комплексните проводимости в клоновете 1, 2, 3 и 5.

След заместване на тези изрази в първия закон на Кирхоф за възела p се получава

$$(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_5)\dot{V}_p - Y_1\dot{V}_1 - Y_2\dot{V}_2 - Y_3\dot{V}_3 = Y_1\dot{E}_1 - Y_2\dot{E}_2 + \dot{j}_{e4}.$$

От този израз се вижда, че върху собствената възлова проводимост $Y_{pp}' = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_5}$ влияят само проводимостите на клоновете, опиращи се на съответния възел p , а взаимните комплексни възлови проводимости се определят от проводимостите на общите клонове между съответните възли.

Възловият електродвижещ ток за възела p , $J'_{ep} = Y_1 \dot{E}_1 - Y_2 \dot{E}_2 + J_{e4}$ включва еквивалентните електродвижещи токове в клоновете, опиращи се на възела p . Ако клонът е пасивен, като клонът 3 например, то съответният компонент на възловия електродвижещ ток е нула. Ако клонът е последователно свързване на източник на е.д.н. и комплексно съпротивление, като клоновете 1, 2 и 5 например, то съответният компонент на възловия електродвижещ ток е равен на произведението от комплекса на източника на напрежение и комплексната проводимост, свързана с клона, като знакът му е положителен, ако посоката на източника е към възела. Ако клонът съдържа източник на ток, като клоната 4 например, то съответният компонент на възловия електродвижещ ток е алгебричната стойност на източника на ток, като знакът е положителен при посоката на влизане към възела.

Тъй като потенциалът на възела 5 е приет за нула ($\dot{V}_5 = 0$), то компонент от вида $Y_5 \dot{V}_5$ в уравнението за възела p няма.

В общия случай системата уравнения по отношение на неизвестните $n - 1$ комплекси на възловите потенциали има следния вид:

$$Y_{pp}' \dot{V}_p - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^{n-1} Y_{pq}' \dot{V}_q = J'_{ep}, \quad p = 1, 2, \dots, n - 1.$$

В разгърнат вид горната система се записва по следния начин:

$$\begin{aligned} Y_{11}' \dot{V}_1 - Y_{12}' \dot{V}_2 - \dots - Y_{1n-1}' \dot{V}_{n-1} &= J'_{e1} \\ -Y_{21}' \dot{V}_1 + Y_{22}' \dot{V}_2 - \dots - Y_{2n-1}' \dot{V}_{n-1} &= J'_{e2} \\ \dots & \\ -Y_{n-11}' \dot{V}_1 - Y_{n-12}' \dot{V}_2 - \dots + Y_{n-1n-1}' \dot{V}_{n-1} &= J'_{en-1}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

където: Y_{pp}' , $p = 1, 2, \dots, n - 1$ е собствената комплексна възлова проводимост на възела p и тя е сума от проводимостите на всички клонове, опиращи се на възел p ;

Y_{pq}' е взаимната комплексна възлова проводимост между възлите p и q , и е равна на сумата от комплексните проводимости на клоновете, директно опиращи се на възли p и q ;

J'_{ep} е възловият електродвижещ ток, свързан с възела p , който е равен на алгебричната сума от еквивалентните електродвижещи токове, свързани с клоновете, които се опират на възела p . Съответните компоненти се вземат със знак плюс, ако източниците са насочени към възела.

Системата уравнения (2.6) има същите свойства, каквито и системата уравнения, съставена по метода с контурните токове (2.5):

а) матрицата на (2.6) е симетрична, т.е. взаимните комплексни възлови проводимости Y'_{pq} и Y'_{qp} са равни;

б) при резистивни вериги елементите в главния диагонал на матрицата на системата са по-големи от сумата от модулите на всички елементи в съответния ред

$$G'_{pp} \geq G'_{p1} + G'_{p2} + \dots + G'_{pp-1} + G'_{pp+1} + \dots + G'_{pn-1}, \quad p = 1, \dots, n - 1,$$

т.е. матрицата на системата е диагонално-доминантна. Това свойство може да се използва при прилагане на числени методи за решаване на съответните системи уравнения.

В резултат на прилагането на формалните правила, описани дотук, може да се състави система уравнения по отношение на неизвестните възлови потенциали. Матрицата на тази система уравнения, както и при метода с контурните токове, е симетрична, т.е. взаимните комплексни възлови проводимости са равни. В резултат на решаване на системата се определят комплексите на неизвестните възлови потенциали. Клоновите токове се определят с използване на обобщения закон на Ом.

Планът за работа при прилагане на метода с възловите потенциали е, както следва:

1. Построява се веригата за комплексни величини (в случай на резистивни вериги тази точка се пропуска);
2. Избира се възелът с нулев потенциал и се номерират останалите възли (от 1 до $n - 1$ например);
3. Съставя се системата уравнения (2.6) по отношение на възловите потенциали;
4. Решава се системата уравнения от $n - 1$ уравнения с $n - 1$ неизвестни и се намират съответните възлови потенциали;
5. Избират се посоки на токовете в клоновете на веригата;
6. Клоновите токове се определят с използване на обобщения закон на Ом;
7. Напреженията върху отделните елементи и мощностите се определят с използване на закона на Ом и формулите за изчисляване на генерирана и консумирана мощност.

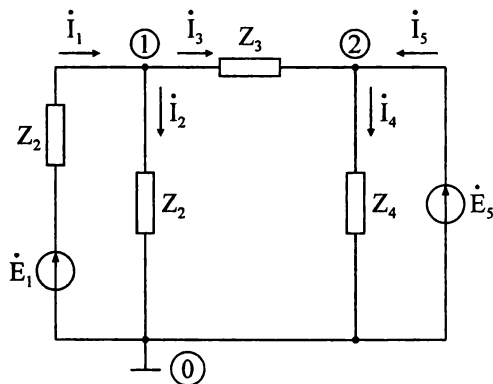
Особености при приложението на метода с възловите потенциали се появяват при наличие на клонове само с идеални източници на е.д.н., тъй като техните вътрешни съпротивления са нула, респективно комплексните про-

димости, свързани с тези източници, са безкрайност. При наличие на един идеален източник на е.д.н. комплексът на потенциала на единия от възлите, на който се опира източникът, се приема да бъде нула. Тогава стойността на комплекса на потенциала на другия възел директно се определя от стойността на източника и за него не се пише уравнение. Така броят на уравненията по метода с възлови потенциали намалява с едно. В този случай токът през идеалния източник на напрежение се намира с използване на първия закон на Кирхоф, след като бъдат определени останалите токове с помощта на обобщения закон на Ом.

Пример 2.4. За веригата от фиг. 2.11 е дадено:

$\dot{E}_1 = 38V$, $\dot{E}_5 = (24 - j24)V$, $Z_1 = 1 + j\Omega$, $Z_3 = 2\Omega$, $Z_2 = j4\Omega$. Да се определят токовете в клоновете на веригата.

Решение: За веригата от разглеждания пример $m = 5$, $n = 3$. Тази верига има идеален източник на напрежение и затова за нулев се избира потенциалът на единия от възлите, на който се опира източникът: $\dot{V}_0 = 0$. Тогава потенциалът на възела 2 е $\dot{V}_2 = \dot{V}_2 - \dot{V}_0 = \dot{E}_5 = (24 - j24)V$. Тъй като $n - 1 = 2$ и има идеален източник на напрежение, веригата се описва само с едно уравнение (за възел 1) по метода с възловите потенциали



Фиг. 2.11

$$\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}\right)\dot{V}_1 - \frac{1}{Z_3}\dot{V}_2 = \frac{\dot{E}_1}{Z_1}.$$

Оттук

$$\dot{V}_1 = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}\right)^{-1} \frac{\dot{E}_1}{Z_1} - \frac{1}{Z_3}\dot{V}_2 = \frac{\frac{\dot{E}_1}{Z_1} + \frac{\dot{V}_2}{Z_3}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}} = \frac{\frac{\dot{E}_1}{Z_1} + \frac{\dot{E}_5}{Z_3}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}} = (20,67 - j20,67)V.$$

Токовете в клоновете 1, 2, 3 и 4 се намират с използване на обобщения закон на Ом:

$$\dot{i}_1 = \frac{-\dot{V}_1 + \dot{E}_1}{Z_1} = (19 + j1,67)A,$$

$$\dot{i}_2 = \frac{\dot{V}_1}{Z_2} = 20,67A,$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{V}_1 - \dot{V}_2}{Z_3} = \frac{\dot{V}_1 - \dot{E}_5}{Z_3} = (-1,67 + j1,67) \text{ A},$$

$$\dot{I}_4 = \frac{\dot{V}_2}{Z_4} = \frac{\dot{E}_5}{Z_4} = (-6 - j6) \text{ A}.$$

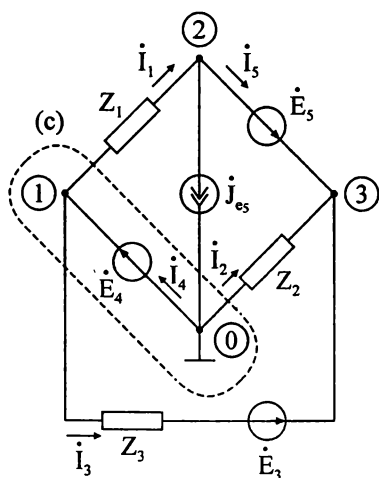
Токът \dot{I}_5 в клон с идеалния източник на е.д.н. се намира с използване на първия закон на Кирхоф за възела 2:

$$-\dot{I}_3 + \dot{I}_4 - \dot{I}_5 = 0,$$

откъдето

$$\dot{I}_5 = \dot{I}_4 - \dot{I}_3 = (-4,33 - j7,67) \text{ A}.$$

При наличие на повече идеални източници на е.д.н. възможен подход е модифициране на веригата след прехвърлянето им през възли и прилагане на метода с възловите потенциали за еквивалентната верига.



Фиг. 2.12

Веригата от фиг. 2.12 има два идеални източника на е.д.н. За тази верига $m = 6$, $n = 4$.

Ако изберем потенциала на единия от възлите, на които се опира \dot{E}_4 за нулев, $\dot{V}_0 = 0$, то за потенциала на другия възел се получава $\dot{V}_1 = \dot{E}_4$. Връзката между потенциалите на възлите 2 и 3 е, както следва

$$\dot{V}_3 - \dot{V}_2 = \dot{E},$$

откъдето

$$\dot{V}_3 = \dot{E}_5 + \dot{V}_2.$$

Като се използва обобщеният закон на Ом може да бъдат записани следните съотношения между токовете \dot{I}_1 , \dot{I}_2 и \dot{I}_3 и възловите потенциали:

$$i_1 = \frac{\dot{V}_1 - \dot{V}_2}{Z_1}, \quad i_2 = \frac{\dot{V}_0 - \dot{V}_3}{Z_2}, \quad i_3 = \frac{\dot{V}_1 - \dot{V}_3 + \dot{E}_5}{Z_3},$$

След заместване на горните зависимости в уравнението, съставено по първия закон на Кирхоф за сечението (*c*)

$$i_1 + i_2 + i_3 - j_{e6} = 0$$

се получава:

$$\frac{\dot{V}_1 - \dot{V}_2}{Z_1} + \frac{\dot{V}_0 - \dot{V}_3}{Z_2} + \frac{\dot{V}_1 - \dot{V}_3 + \dot{E}_5}{Z_3} - j_{e6} = 0,$$

$$\frac{\dot{E}_4 - \dot{V}_2}{Z_1} + \frac{0 + (\dot{V}_2 + \dot{E}_5)}{Z_2} + \frac{\dot{E}_4 - (\dot{V}_2 + \dot{E}_5) + \dot{E}_3}{Z_3} - j_{e6} = 0,$$

$$\frac{\dot{E}_4 - \dot{V}_2}{Z_1} + \frac{0 + (\dot{V}_2 + \dot{E}_5)}{Z_2} + \frac{\dot{E}_4 - (\dot{V}_2 + \dot{E}_5) + \dot{E}_3}{Z_3} - j_{e6} = 0.$$

Оттук се намира

$$\dot{V}_2 = \frac{\frac{\dot{E}_4}{Z_1} + \frac{\dot{E}_5}{Z_2} + \frac{\dot{E}_3 + \dot{E}_4 + \dot{E}_5}{Z_3} - j_{e6}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}}.$$

След определянето на потенциала \dot{V}_2 , потенциалът на възела 3 се намира от съотношението

$$\dot{V}_3 = \dot{E}_5 + \dot{V}_2.$$

Клоновите токове i_1 , i_2 и i_3 се намират с помощта на обобщения закон на Ом, а токовете през идеалните източници на е.д.н. i_4 и i_5 се намират с помощта на първия закон на Кирхоф:

$$i_2 + i_4 - j_{e6} = 0 \Rightarrow i_4 = -i_2 + j_{e6},$$

$$-i_1 + i_5 + j_{e6} = 0 \Rightarrow i_5 = i_1 - j_{e6}.$$

От примера се вижда, че броят на независимите уравнения по отношение на неизвестните възлови потенциали е $n - 1 - m_e$, където m_e е броят на клоновете, които съдържат идеални източници на е.д.н. В общия случай максималният брой на идеални източници на е.д.н. е $n - 1$, като те трябва да могат да бъдат разположени в клонове от дървото на графа на веригата. В противен случай ще

има контури, образувани само от идеални източници на е.д.н., а такава верига е практически нереализуема.

Методът с възловите потенциали е основен метод за изследване на електронни схеми. По-голямата му популярност по отношение на метода с контурните токове се дължи на факта, че контурите в дадена сложна схема се определят по-сложно. Известните симулатори на електронни схеми като PSpice, Cadence и др., са базирани на него. Приложението му изисква използване на модели на електронните елементи. Тези модели се базират основно на използване на зависими източници и операционни усилватели (вж. Глава 12). По-долу ще разгледаме модификация на метода, която позволява използването на такива елементи.

Отчитането на източниците на ток, управлявани с напрежение, става непосредствено. Например, ако даден източник на ток, управляван с напрежение с коефициент на управление G се опира на възлите i и j с посока от i към j , а управляващото напрежение е между възлите p и q с посока от p към q , то в i -тото и в j -тото уравнение по метода с възловите потенциали се появяват съответно компонентите

$$i \quad \dots + G(\dot{V}_p - \dot{V}_q) + \dots =, \quad j \quad \dots - G(\dot{V}_p - \dot{V}_q) + \dots =. \quad (2.7)$$

Компонентите от (2.7) въвеждат допълнителни коефициенти $+G$ към взаимните комплексни проводимости Y'_{ip} и Y'_{jq} и $-G$ към взаимните комплексни проводимости Y'_{iq} и Y'_{jp} . Лесно се вижда, че източниците на ток, управлявани с напрежение, се отразяват като проводимости в случай, когато възлите, на които се опира източникът, съвпадат с възлите на управляващото напрежение. В общия случай при наличие на източници на ток, управлявани с напрежение, се нарушава симетрията на матрицата на системата уравнения, съставена по метода с възловите потенциали.

В разгледания дотук вариант на метода с възловите потенциали не може да бъде отчетено влиянието на редица елементи, каквито са например зависимите източници и операционните усилватели. Тези елементи са основни гравитивни модули в електротехническите устройства и електронните схеми. С цел отчитането им в уравненията за анализ, по-долу накратко е описан модифициран вариант на метода с възловите потенциали.

Модифицираният метод с възловите потенциали (ММВП) е модификация на основния вариант на метода, която дава възможност за формиране на уравненията за изследване на режима в дадена верига по-просто, отколкото с използване на обобщени възли и сечения. При този вариант на метода лесно се отчита и влиянието на идеалните източници на е.д.н. Той основно се използва при автоматичното съставяне на системите уравнения за режимите в изследваните вериги при използване на симулатори на електронни схеми.

При ММВП елементите на дадена верига се делят на три групи:

1) Елементи, токът през които може да се изрази непосредствено посредством разлика от потенциали (съпротивления, бобини, кондензатори и източници на ток, управлявани с напрежение);

2) Елементи, токът през които не може непосредствено да се изрази посредством разлика от потенциали, т.е. трябва да участва като допълнителна променлива в уравненията за анализ;

3) Идеални източници на ток.

След групиране на различните токове, първият закон на Кирхоф за всеки от възлите в дадена верига може да се запише във вида:

$$\sum_k \dot{i}_{1k} + \sum_k \dot{i}_{2k} = \sum_k \dot{i}_{3k}, \quad (2.8)$$

където \dot{i}_{1k} , \dot{i}_{2k} , и \dot{i}_{3k} са токовете, свързани с елементите от гореизброените три групи.

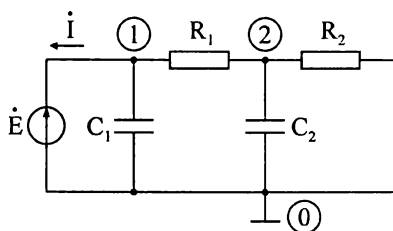
Токовете \dot{i}_{1k} от първата група се изразяват чрез потенциални разлики и проводимостта (коэффициента на управление за източници на ток, управлявани с напрежение) на съответния елемент. Токовете \dot{i}_{2k} от втората група трябва да бъдат включени във вектора на неизвестните, т.е. векторът с $n - 1$ неизвестни възлови потенциала се разширява с токовете, свързани с елементите от втората група. В същото време всеки от елементите от втората група въвежда допълнително уравнение (свързано с действието на елемента) към системата (2.8). Токовете \dot{i}_{3k} от третата група участват във възловите електродвижещи токове със знак плюс, ако източникът е насочен към възела и със знак минус при посока на излизане от възела.

По-долу е разгледан начинът за въвеждане на допълнителните неизвестни и допълнителните уравнения за елементите от втората група.

Като пример за приложение на ММВП при наличие на идеални източници на напрежение се разглежда веригата от фиг. 2.13 при стационарен синусоиден режим. Параметрите на веригата са: $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$; $C_1 = 1 \text{ }\mu\text{F}$; $C_2 = 1 \text{ }\mu\text{F}$; $\dot{E} = 100V$, и $\omega = 1000 \text{ s}^{-1}$. В този случай $m = 5$, $n = 3$, $n - 1 = 2$. Наличието на идеален източник на напрежение въвежда тока \dot{I} през него като допълнително неизвестно, а допълнителното уравнение, което отчита наличието на източника, в случая е

$$\dot{V}_1 = \dot{E}.$$

Системата уравнения за режима във веригата съставена по ММВП е:



Фиг. 2.13

$$\begin{cases} (G_1 + j\omega C_1)\dot{V}_1 - G_2\dot{V}_2 + 1.\dot{I} = 0 \\ G_2\dot{V}_1 + (G_1 + G_2 + j\omega C_2)\dot{V}_2 + 0.\dot{I} = 0 \\ \dot{V}_1 + 0.\dot{V}_2 + 0.\dot{I} = \dot{E} \end{cases} \quad (2.9)$$

Третото уравнение на (2.9) по същество е допълнителното уравнение, което е свързано с идеалния източник на е.д.н. Токът \dot{I} в първото уравнение отчита допълнителното неизвестно, свързано с този източник.

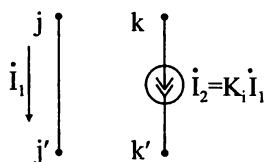
В резултат на съвместно решаване на уравненията от (2.9) се получават следните стойности за комплексите на възловите потенциали за възлите 1 и 2 и за тока през идеалния източник на е.д.н.:



Фиг. 2.14

Източникът на напрежение, управляван с напрежение от фиг. 2.14, се характеризира с допълнителното уравнение

$$\dot{V}_k - \dot{V}_{k'} - K_e(\dot{V}_j - \dot{V}_{j'}) = 0.$$

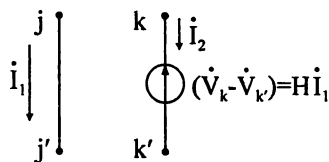


Фиг. 2.15

Този източник въвежда като допълнително неизвестно тока през него (за положителна се приема посоката от k към k' , съвпадаща с посоката на електрическото напрежение).

Източникът на ток, управляван с ток от фиг. 2.15, се характеризира с две допълнителни уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{V}_j - \dot{V}_{j'} &= 0 \\ \dot{I}_2 &= K_i \dot{I}_1. \end{aligned}$$



Фиг. 2.16

Този източник въвежда като допълнително неизвестно само управляващия ток \dot{I}_1 , тъй като токът \dot{I}_2 се получава от \dot{I}_1 след отчитането на закона за управление $\dot{I}_2 = K_i \dot{I}_1$.

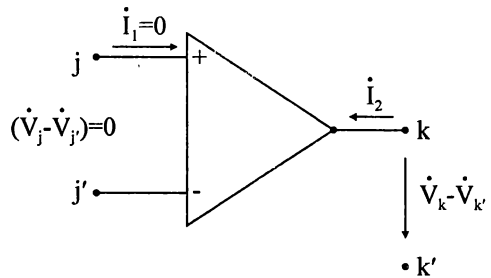
Източникът на напрежение, управляван с ток от фиг. 2.16, се характеризира с две допълнителни уравнения:

$$\begin{aligned}\dot{V}_j - \dot{V}_{j'} &= 0 \\ \dot{V}_k - \dot{V}_{k'} - H\dot{I}_1 &= 0.\end{aligned}$$

При този източник допълнителните неизвестни са управляващият ток \dot{I}_1 и токът през източника на напрежение \dot{I}_2 (за положителна посока на тока се приема посоката от k към k' , съвпадаща с посоката на електрическото напрежение).

Операционният усилвател (ОУ) от фиг. 2.17 се характеризира с допълнително уравнение

$$\dot{V}_j - \dot{V}_{j'} = 0.$$



Фиг. 2.17

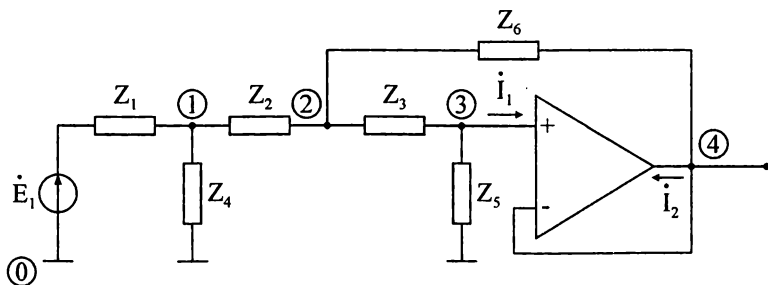
При този елемент входният ток \dot{I}_1 е нула (поради безкрайно голямото входно съпротивление на идеалния ОУ), а допълнителното неизвестно е изходният ток \dot{I}_2 (за положителна посока на тока \dot{I}_2 се приема посоката на влизане към ОУ). Той трябва да бъде отчетен в уравненията за възлите k и k' (на излизане от k и влизане в k'). При много от приложенията на операционните усилватели възелът k' е възелът с нулев потенциал и в този случай уравнение за този възел не се пише.

За веригата от фиг. 2.18 допълнителното неизвестно е токът \dot{I}_2 , а системата уравнения по ММВП е:

$$\begin{cases} (Y_1 + Y_2 + Y_3)\dot{V}_1 - Y_2\dot{V}_2 - 0\dot{V}_3 - 0\dot{V}_4 + 0\dot{I}_2 = Y_1\dot{E}_1 & (\text{възел 1}) \\ -Y_2\dot{V}_1 + (Y_2 + Y_3 + Y_6)\dot{V}_2 - Y_3\dot{V}_3 - Y_6\dot{V}_4 + 0\dot{I}_2 = 0 & (\text{възел 2}) \\ -0\dot{V}_1 - Y_3\dot{V}_2 + (Y_3 + Y_5)\dot{V}_3 - 0\dot{V}_4 + 0\dot{I}_2 = 0 & (\text{възел 3}) \\ -0\dot{V}_1 - Y_6\dot{V}_2 - 0\dot{V}_3 + Y_6\dot{V}_4 + 1\dot{I}_2 = 0 & (\text{възел 4}) \\ 0\dot{V}_1 + 0\dot{V}_2 + 1\dot{V}_3 - 1\dot{V}_4 + 0\dot{I}_2 = 0_1 & (\text{доп. уравнение}), \end{cases}$$

където
$$Y_1 = \frac{1}{Z_1}, Y_2 = \frac{1}{Z_2}, Y_3 = \frac{1}{Z_3}, Y_4 = \frac{1}{Z_4}, Y_5 = \frac{1}{Z_5}, Y_6 = \frac{1}{Z_6}.$$

Входният ток \dot{I}_1 на операционния усилвател е нула и затова не се отчита в уравненията за възлите 3 и 4.



Фиг. 2.18

2.1.5. Метод с наслагване

Този метод се базира на принципа на наслагването, който е валиден за линейни системи и в частен случай за линейни вериги. В най-общ случай този принцип може да бъде формулиран по следния начин. За дадена линейна система реакцията на сума от няколко въздействия може да се получи като сума от реакциите на всяко от въздействията разгледани поотделно.

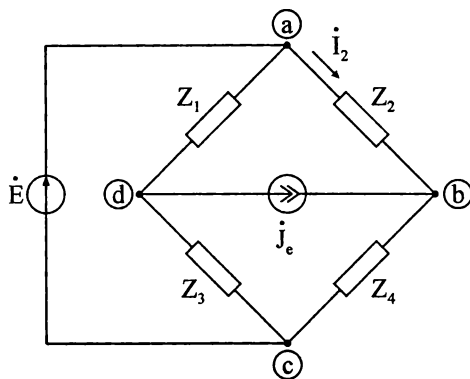
В случая за линейни електрически вериги този принцип може да се интерпретира по следния начин. Нека разгледаме една линейна електрическа верига. Тази верига може да се разглежда като линейна система. Реакция на тази система може да бъде даден ток, напрежение, потенциал на даден възел или няколко такива величини, в зависимост от приложението на системата. Нека по-конкретно считаме, че се търси токът в даден клон на веригата. Входни въздействия за системата (веригата) са независимите източници. Тогава търсеният ток под въздействие на всички независими източници във веригата може да бъде намерен като се сумират компонентите на този ток при въздействието на всеки от независимите източници поотделно.

При прилагането на горното разглеждане трябва да се има предвид следното:

- Когато се изследва веригата под въздействието на даден източник, останалите източници се отстраняват, но вътрешните им съпротивления трябва да бъдат отчетени, т.е. източниците на е.д.н. се дават накъсо, а източниците на ток се прекъсват;

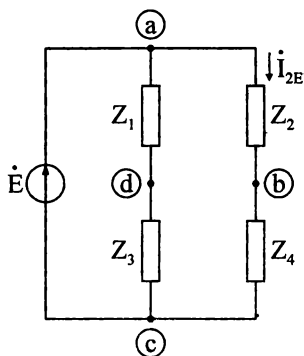
- Компонентите на търсения ток, дължащи се на всеки от независимите източници поотделно, трябва да се отчитат със съответен знак плюс или минус. За целта се избира положителна посока на търсения ток. Също така се избират условни положителни посоки за компонентите на този ток, дължащи се на въздействието на независимите източници поотделно. Тогава в израза за търсения ток компонентите се отчитат със знак плюс или минус, в зависимост от това, дали техните условни положителни посоки съвпадат или не съвпадат с положителната посока за търсения ток.

Като пример за прилагането на метода с наслагването се разглежда веригата от фиг. 2.19а.

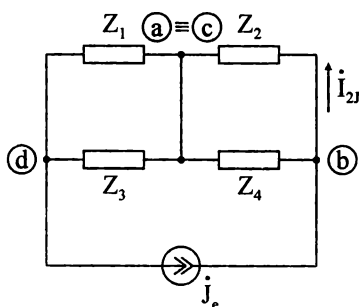


Фиг. 2.19а

Тази верига има два независими източника и нека се търси токът \dot{I}_2 . Компонентите на \dot{I}_2 , дължащи се на действието на всеки от независимите източници поотделно, могат да бъдат определени със схемите от фиг. 2.19б и 2.19в.



Фиг. 2.19б



Фиг. 2.19в

За веригата от фиг. 2.19б компонентът \dot{I}_{2E} на \dot{I}_2 , дължащ се на самостоятелното действие на източника \dot{E} , е:

$$\dot{i}_{2E} = \frac{\dot{E}}{Z_2 + Z_4}.$$

За веригата от фиг. 2.19в компонентът \dot{I}_{2J} на \dot{I}_2 , дължащ се на самостоятелното действие на източника \dot{J}_e , е:

$$\dot{i}_{2J} = \dot{j}_e \frac{Z_4}{Z_2 + Z_4}.$$

След прилагане на принципа на наслагването за комплекса на търсения ток \dot{i}_2 се получава:

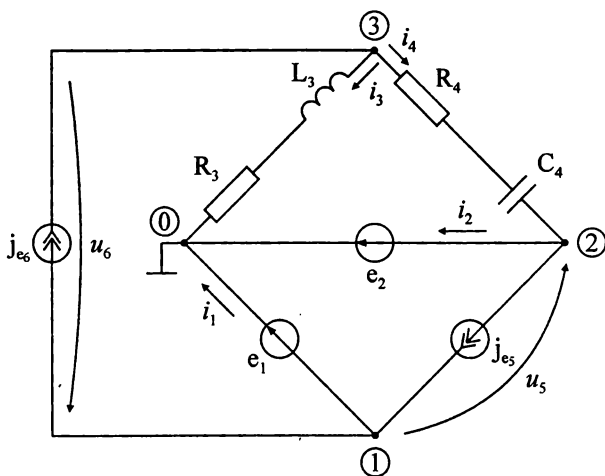
$$\dot{i}_2 = \dot{i}_{2E} - \dot{i}_{2J}$$

Трябва да се подчертае, че методът с наслагването е удачно да бъде използван главно в два случая:

- При наличие на два или три независими източника във веригата. При повече източници се налага поотделно изследване на повече схеми и тогава е по-удачно да се използват някои от другите методи за анализ;

- При вариране на стойностите на някои независими източници. Тогава вариациите могат да бъдат разглеждани като допълнителни източници. Ако е изследван режимът при изходните стойности на независимите източници, то не е необходимо да се изследва отново режимът във веригата при новите стойности на източниците. Може да се изследва само влиянието на допълнителните източници, отчитащи вариациите и да се използва наслагването. Същият подход ще бъде използван в следващия параграф при приложението на теоремата за вариациите.

Използването на дотук разгледаните методи за анализ на електрически вериги ще бъде разгледано за веригата от фиг. 2.20а.

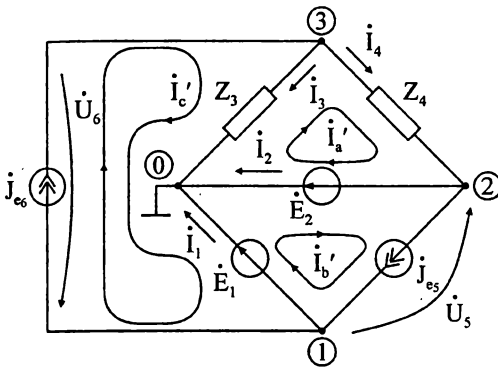


Фиг. 2.20а

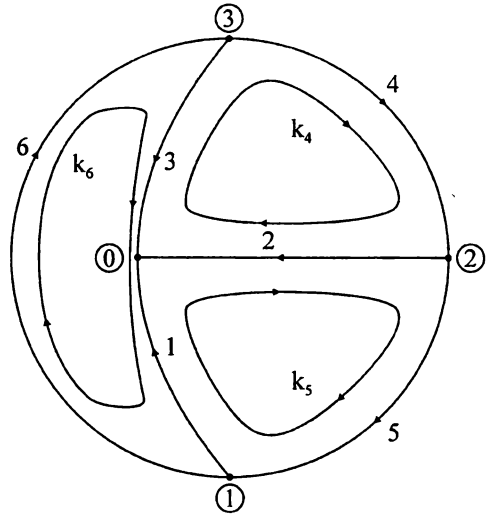
Пример 2.5. Параметрите на веригата от фиг. 2.20а и стойностите на източниците са: $R_3 = R_4 = 120\Omega$, $L_3 = 20 \text{ mH}$, $C = 12,5 \mu\text{F}$, $\omega = 2000 \text{ s}^{-1}$, $e_1 = 100\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ), V$, $e_2 = 200\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ), V$, $j_{e6} = \sqrt{2} \sin(\omega t), A$, $j_{e5} = 1.5\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ), A$. Да се определят комплексите на токовете в клоновете на веригата и напреженията върху източниците на ток.

Решение: Схемата на веригата за комплексни величини е дадена на фиг. 2.20б. Комплексните съпротивления и комплексите на източниците са: $Z_3 = (120 + j40)\Omega$, $Z_4 = (120 - j40)\Omega$, $\dot{E}_1 = -j100, V$, $\dot{E}_2 = j200, V$, $\dot{J}_{e5} = j1,5, A$, $\dot{J}_{e6} = 1, A$.

Веригата от фиг. 2.20б има $m = 6$ клона и $n = 4$ възела. Броят на източниците на ток е $m_j = 2$, а броят на идеалните източници на е.д.н. е $m_e = 2$. Графът на тази верига е даден на фиг. 2.20в. Клоновете и възлите са номерирани, както е показано на фиг. 2.20.



Фиг. 2.20б



Фиг. 2.20в

I. Метод с клоновите токове

Нека за дърво на графа на веригата изберем клоновете 1, 2 и 3, а за хорди – клоновете 4, 5 и 6. При този избор главните сечения $n - 1 = 3$ съвпадат с възлите 1, 2 и 3, а главните контури $k = m - n + 1 = 3$ с елементарните клетки k_4 , k_5 и k_6 . При този избор на контури, уравненията спрямо неизвестните токове $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3, \dot{I}_4$ са $m - m_j = 4$ на брой, от тях $n - 1 = 3$ по първия закон на Кирхоф и $m - n + 1 - m_j = 1$ по втория.

$$\begin{cases} \dot{I}_1 - \dot{J}_{e5} + \dot{J}_{e6} = 0 \text{ (възел 1)} \\ \dot{I}_2 - \dot{I}_4 + \dot{J}_{e5} = 0 \text{ (възел 2)} \\ \dot{I}_3 + \dot{I}_4 - \dot{J}_{e6} = 0 \text{ (възел 3)} \\ -Z_3 \dot{I}_3 + Z_4 \dot{I}_4 = \dot{E}_2 \text{ (контур } k_4) \end{cases}$$

Съвместното решение на горните уравнения води до следните резултати по отношение на комплексите на неизвестните токове $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3, \dot{I}_4$:

$$\begin{aligned} \dot{I}_3 &= -\dot{I}_4 + \dot{J}_{e6} \Rightarrow -Z_3(-\dot{I}_4 + \dot{J}_{e6}) + Z_4\dot{I}_4 = \dot{E}_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{I}_4 &= \frac{\dot{E}_2 + Z_3\dot{J}_{e6}}{Z_3 + Z_4} = (0,5 + j)A, \\ \dot{I}_3 &= -\dot{I}_4 + \dot{J}_{e6} = (0,5 - j)A, \\ \dot{I}_2 &= \dot{I}_4 - \dot{J}_{e5} = (0,5 - j0,5)A, \\ \dot{I}_1 &= \dot{J}_{e5} - \dot{J}_{e6} = (-1 + j1,5)A. \end{aligned}$$

Комплексите на напреженията върху идеалните източници на ток се намират, като се използва вторият закон на Кирхоф за контурите k_5 и k_6 :

$$\begin{aligned} -\dot{U}_5 &= \dot{E}_1 - \dot{E}_2 \quad (\text{контур } k_5) \Rightarrow \dot{U}_5 = -\dot{E}_1 + \dot{E}_2 = j300, V, \\ -\dot{U}_6 + Z_3\dot{I}_3 &= -\dot{E}_1 \quad (\text{контур } k_6) \Rightarrow \dot{U}_6 = Z_3\dot{I}_3 + \dot{E}_1 = (100 - j200)V. \end{aligned}$$

II. Метод с контурните токове

За контурите k_4 , k_5 и k_6 контурните токове са:

$$\dot{I}'_a = \dot{I}_4, \quad \dot{I}'_b = \dot{J}_{e5} = j1,5, A, \quad \dot{I}'_c = \dot{J}_{e6} = 1A.$$

При този избор на контури контурните токове \dot{I}'_b и \dot{I}'_c са известни и тогава трябва да се състави само едно ($m - n + 1 - m_j = 1$) уравнение (за контура k_4 , с контурен ток \dot{I}'_a) по метода с контурните токове

$$(Z_3 + Z_4)\dot{I}'_a - 0\dot{I}'_b - Z_3\dot{I}'_c = \dot{E}_2.$$

От горното уравнение за комплекса на контурния ток \dot{I}'_a се получава:

$$\dot{I}'_a = \frac{\dot{E}_2 + Z_3\dot{I}'_c}{Z_3 + Z_4} = (0,5 + j)A.$$

Комплексите на клоновите токове се намират като алгебрична сума от комплексите на контурните токове, „преминаващи“ през съответните клонове:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{I}'_b - \dot{I}'_c = (-1 + j1,5)A, \\ \dot{I}_2 &= \dot{I}'_a - \dot{I}'_b = (0,5 - j0,5)A, \\ \dot{I}_3 &= -\dot{I}'_a + \dot{I}'_c = (0,5 - j)A, \\ \dot{I}_4 &= \dot{I}'_a = (0,5 + j)A. \end{aligned}$$

Комплексите на напреженията върху идеалните източници на ток се намират, като се използва вторият закон на Кирхоф за контурите k_5 и k_6 , както е показано по-горе.

III. Метод с възловите потенциали

Ако изберем потенциала на възел 0 за нулев, то:

$$\dot{V}_0 = 0, V; \quad \dot{V}_1 = -\dot{E}_1 = j100, V; \quad \dot{V}_2 = -\dot{E}_2 = -j200, V.$$

В този случай трябва да се състави само едно ($n - 1 - m_e = 1$) уравнение (за възела 3 по метода с възловите потенциали), а именно:

$$\left(\frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4} \right) \dot{V}_3 - \frac{1}{Z_4} \dot{V}_4 = j_{e6}.$$

От горното уравнение за комплекса на възловия потенциал на възела 3 се получава:

$$\dot{V}_3 = \frac{\frac{1}{Z_4} \dot{V}_4 + j_{e6}}{\left(\frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4} \right)} = \frac{-\frac{\dot{E}_2}{Z_4} + j_{e6}}{\left(\frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4} \right)} = (100 - j100)V.$$

Комплексите на клоновите токове \dot{i}_3 и \dot{i}_4 се намират, като се приложи обобщеният закона на Ом:

$$\dot{i}_3 = \frac{\dot{V}_3 - \dot{V}_0}{Z_3} = (0,5 - j)A,$$

$$\dot{i}_4 = \frac{\dot{V}_3 - \dot{V}_2}{Z_4} = (0,5 + j1)A.$$

Комплексите на токовете, свързани с идеалните източници на е.д.н., се намират с помощта на първия закон на Кирхоф:

$$\dot{i}_1 = j_{e5} - j_{e6} = (-1 + j1,5)A,$$

$$\dot{i}_2 = \dot{i}_4 - j_{e5} = (0,5 - j0,5)A.$$

Комплексите на напреженията върху идеалните източници на ток се намират като разлика от потенциалите на възлите, на които се опираят съответните източници:

$$\begin{aligned} \dot{U}_5 &= \dot{V}_1 - \dot{V}_2 = -\dot{E}_1 + \dot{E}_2 = j300, V, \\ \dot{U}_6 &= \dot{V}_3 - \dot{V}_1 = (100 - j200) V. \end{aligned}$$

Разглежданията дотук показват, че при решаването на задачи за анализ на електрически вериги най-удачно е да се използва този метод, който свежда решаването на задачата до съвместното решаване на система уравнения от по-нисък ред. Това е така, защото в общия случай задачата за анализ на линейни електрически вериги при синусоидален режим е свързана с решаване на линейни системи уравнения с комплексни коефициенти. Така че, ако $m - n + 1 - m_j < n - 1 - m_e$, по-удачно е да се използва методът с контурните токове, а при $n - 1 - m_e < m - n + 1 - m_j$ е по-удачно да се използва методът с възловите потенциали.

2.2. СВОЙСТВА И ТЕОРЕМИ ЗА ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ

В този параграф се разглеждат някои основни свойства и теореми за електрически вериги, които са свързани с анализа и синтеза на веригите. Познаването и прилагането им в много случаи улеснява изследването на режимите в електрическите вериги.

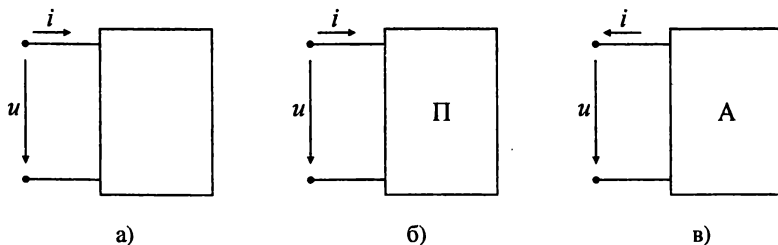
2.2.1. Пасивност и активност

При разглеждането на това свойство се използва концепцията за двуполусници и многополусници.

Двуполусникът е верига или част от верига, разглеждана между два извода (полюса).

Многополусникът е верига или част от верига, разглеждана между няколко извода (полюса). Двуполусниците са частен случай на многополусниците.

Често използвани многополусници в практиката са триполусниците и четириполусниците (вж. гл. 10). Без да се намалява общността, разглежданията в този параграф са направени за двуполусници. Четириполусниците са разгледани в гл. 10. Двуполусниците се означават, както е показано на фиг. 2.21а.



Фиг. 2.21

Обикновено посоките на тока и напрежението, свързани с двата извода, се избират, както е показано на фигурата, т.е. съгласувано.

Даден двуполусник е *пасивен*, ако в схемата му няма независими източници. Ако схемата на двуполусника е неизвестна, то проверката за пасивност е свързана с определяне на напрежението на изводите на двуполусника при прекъсване на изводите и на тока при късо съединение на изводите.

Ако напрежението на изводите на двуполусника при прекъсване (когато към тях няма свързана външна верига) е нула и токът при късо съединение между изводите е нула, то двуполусникът е *пасивен*.

В общ случай това не означава, че във веригата няма независими източници, т.е. може да има такива и те взаимно да компенсират влиянието си, така че напрежението на прекъсване и токът на късо съединение да са нула. Пасивните двуполусници се означават с правоъгълник и буквата “П” в него (фиг. 2.21б), а активните – с правоъгълник и буквата “А” в него (фиг. 2.21в).

Посоките на тока и напрежението за активните двуполусници обикновено се избират съгласувано, т.е. както е показано на фиг. 2.21в.

2.2.2. Линеиност

Дадена верига е *линейна*, ако е съставена от линейни елементи, т.е. такива елементи, при които връзките между режимните характеристики (напрежение и ток) са линейни. *Линейните вериги* са предмет на разглеждане в гл. 1-13 от I и II част на учебника. Основни понятия и методи за изследване на нелинейни вериги са дадени в гл. 14. Режимите в *линейните вериги* се описват със системи *линейни уравнения*. Стационарните режими се описват с алгебрични системи линейни уравнения (с реални или комплексни коефициенти), а преходните процеси се описват с линейни системи диференциални уравнения (вж. гл. 13). В този смисъл линейните вериги могат да бъдат разглеждани като линейни системи, за които важи принципът на наслагването (суперпозицията). Този принцип е в основата на метода с *наслагване* за изследване на линейни електрически вериги, който е разгледан в т. 2.1.

Нека е дадена линейна верига, която при стационарен синусоидален режим се описва със система линейни уравнения с комплексни коефициенти от вида

$$AX = B, \quad (2.10)$$

където A е $m \times m$ матрица с комплексни коефициенти, B е m -мерен вектор с комплексни числа и X е m -мерен вектор на комплексите на неизвестните клонови токове и напрежения върху независимите източници на ток.

Горната система може да бъде съставена по метода с клоновите токове. Тогава част от елементите на вектора B са линейна комбинация от независимите източници във веригата, а някои от елементите, които съответстват на уравнения, съставени по първия закон на Кирхоф, са нула. Следователно век-

торът B , който се определя от независимите източници във веригата, може да бъде представен във вида

$$B = \sum_{p=1}^m D_p \dot{E}_p + \sum_{q=1}^m D_q J_{e_q},$$

където \dot{E}_p , $p = 1, 2, \dots, m$ са източниците на е.д.н. в клоновете на веригата, D_p , $p = 1, 2, \dots, m$, D_q , $q = 1, 2, \dots, m$ са m -мерни вектори, които определят кой източник в кои уравнения участва. Ако в даден клон p или q няма източник, то съответната стойност \dot{E}_p , респ. J_{e_q} , е нула.

Ако уравненията за режима във веригата са независими, то A е неособена матрица и тогава решението на системата уравнения за режима във веригата може да бъде записано по следния начин:

$$X = A^{-1}B = \sum_{p=1}^m A^{-1}D_p \dot{E}_p + \sum_{q=1}^m A^{-1}D_q J_{e_q} = \sum_{p=1}^m T_p \dot{E}_p + \sum_{q=1}^m T_q J_{e_q},$$

където $T_p = A^{-1}D_p$, $p = 1, 2, \dots, m$, $T_q = A^{-1}D_q$, $q = 1, 2, \dots, m$ са m -мерни вектори.

Следователно даден клонов ток \dot{I}_s , който е елемент от вектора X може да се представи като

$$\dot{I}_s = \sum_{p=1}^m T_{sp} \dot{E}_p + \sum_{q=1}^m T_{sq} J_{e_q},$$

където T_{sp} е s -тият елемент на вектора T_p , а T_{sq} е s -тият елемент на вектора T_q . В общия случай T_{sp} и T_{sq} са комплексни величини. Тъй като \dot{I}_s е ток, а \dot{E}_p е напрежение, то T_{sp} има качество на комплексна проводимост, която се нарича *взаимна комплексна проводимост* $Y_{sp} = T_{sp}$ между клоновете s и p . Y_{ss} е *входната (собствена) комплексна проводимост* за клон s . По същата причина T_{sq} е комплексно число, което е безразмерна величина и се нарича *комплексен коефициент на предаване на ток* между клонове s и q K_{sq}^i , като $K_{ss}^i = 1$.

На база на разглежданията дотук за комплекса на тока \dot{I}_s в клон s , може да се запише:

$$\dot{I}_s = \sum_{p=1}^m Y_{sp} \dot{E}_p + \sum_{q=1}^m K_{sq}^i J_{e_q}. \quad (2.11)$$

По същите съображения формулата за комплекса на напрежението \dot{U}_s върху източника на ток от клона s , който е елемент от вектора X , е:

$$\dot{U}_s = \sum_{p=1}^m K_{sp}^u \dot{E}_p + \sum_{q=1}^m Z_{sq} \dot{J}_{eq}, \quad (2.12)$$

където K_{sp}^u е комплексният коефициент на предаване по напрежение между клоновете s и q ($K_{ss}^u = 1$), а Z_{sq} е взаимното комплексно съпротивление между клоновете s и q . Z_{ss} е входното (собственото) комплексно съпротивление за клон s .

Формулите (2.11) и (2.12) по същество отразяват принципа на наслагането за линейни електрически вериги. Те показват, че комплексите на даден клон ток \dot{I}_s или напрежение върху източник на ток \dot{U}_s могат да бъдат определени като алгебрична сума от влиянието на всички източници. Тези формули също дават начина за определяне на параметрите Y_{sp} , Z_{sq} , K_{sp}^u и K_{sq}^i .

Така например

$$Y_{sp} = \left(\frac{\dot{I}_s}{\dot{E}_p} \right)_{\substack{\dot{E}_p=0 \\ q \neq p \\ \dot{J}_{eq}=0}}. \quad (2.13)$$

Формула (2.13) показва, че Y_{sp} може да се определи, като се изчисли токът \dot{I}_s , дължащ се само на действието на източника на е.д.н. в клон p , като всички други източници на е.д.н. и ток са отстранени, при запазване на вътрешните им съпротивления.

Формулите за определяне на K_{sq}^i , K_{sp}^u и Z_{sq} са:

$$K_{sq}^i = \left(\frac{\dot{I}_s}{\dot{J}_{eq}} \right)_{\substack{\dot{E}_p=0 \\ p \neq q \\ \dot{J}_{ep}=0}}, \quad (2.14)$$

$$K_{sp}^u = \left(\frac{\dot{U}_s}{\dot{E}_p} \right)_{\substack{\dot{E}_q=0 \\ q \neq p \\ \dot{J}_{eq}=0}}, \quad (2.15)$$

$$Z_{sq} = \left(\frac{\dot{U}_s}{\dot{J}_{eq}} \right)_{\substack{\dot{E}_p=0 \\ p \neq q \\ \dot{J}_{ep}=0}}. \quad (2.16)$$

Пример 2.6. Да се определи токът \dot{I}_2 за веригата от фиг. 2.19а.

Решение: За примера от фиг. 2.19а, формулата (2.11) добива вида

$$\dot{I}_2 = Y_{2E} \dot{E} + K_{2J}^i \dot{J}_e,$$

където

$$Y_{2E} = \left(\frac{\dot{I}_2}{\dot{E}} \right)_{\dot{J}_e=0} = \frac{\dot{I}_{2E}}{\dot{E}}, \quad K_{2J}^i = \left(\frac{\dot{I}_2}{\dot{J}_e} \right)_{\dot{E}=0} = \frac{\dot{I}_{2J}}{\dot{J}_e}.$$

При определянето на K_{2J}^i посоката на \dot{I}_{2J} трябва да бъде същата като на \dot{I}_2 от фиг. 2.19а, т.е. от *a* към *b*. Следователно при това разглеждане посоката на \dot{I}_{2J} трябва да бъде обратна на тази от фиг. 2.19в.

Параметрите Y_{2E} и K_{2J}^i се определят, като се използват схемите от фиг. 2.19б и фиг. 2.19в. След отстраняване на източника на ток \dot{J}_e се получава веригата от фиг. 2.19б, за която

$$\dot{I}_{2E} = \frac{\dot{E}}{Z_2 + Z_4}.$$

Следователно

$$Y_{2E} = \left(\frac{\dot{I}_2}{\dot{E}} \right)_{\dot{J}_e=0} = \frac{\dot{I}_{2E}}{\dot{E}} = \frac{1}{Z_2 + Z_4}.$$

След отстраняване на източника на е.д.н. \dot{E} се получава веригата от фиг. 2.19в и се разглежда \dot{I}_{2J} с посока, обратна на тази от фиг. 2.19в.

Тогава

$$Y_{2J} = -\frac{Z_4}{Z_2 + Z_4} \dot{J}_e.$$

Отгук

$$K_{2J}^i = \left(\frac{\dot{I}_2}{\dot{J}_e} \right)_{\dot{E}=0} = \frac{\dot{I}_{2J}}{\dot{J}_e} = -\frac{Z_4}{Z_2 + Z_4}.$$

Следователно

$$\dot{I}_2 = Y_{2E} \dot{E} + K_{2J}^i \dot{J}_e = \frac{1}{Z_2 + Z_4} \dot{E} - \frac{Z_4}{Z_2 + Z_4} \dot{J}_e.$$

Свойството *линейност* на една електрическа верига е свързано освен с принципа на наслагването и с принципа на *пропорционалността*. В случая този принцип може да се формулира по следния начин. Ако комплексите на

всички независими източници във веригата се променят k пъти, където k е комплексно число, то токовете, напреженията и потенциалите във веригата също се променят k пъти.

Принципът на пропорционалността се прилага особено често при вериги с един източник. Ако се приеме произволна начална фаза на този източник и се определят комплексите на всички токове и напрежения и ако в същия клон на веригата действа източник със същата ефективна стойност, но с друга начална фаза, то токовете, напреженията и потенциалите имат същите ефективни стойности. Началните им фази обаче се различават от тези в случая на първия източник с фазовата разлика на двата източника. Това може да се покаже лесно, ако се използва комплексен коефициент на пропорционалност k с модул 1 и аргумент, равен на фазовата разлика на двата източника.

2.2.3. Взаимност и обратимост

Линейните електрически вериги от *взаимен* тип са вериги, в които няма *зависими източници*. Свойството *взаимност* отразява факта, че в такива вериги взаимните параметри с разменен ред на индексите са равни.

Дотук бяха разгледани няколко типа взаимни параметри: *взаимните комплексни контурни съпротивления*, *взаимните комплексни възлови проводимости* и *взаимните проводимости и съпротивления*. Нека разгледаме линейна електрическа верига от *взаимен* тип с m клона и n възела. Нека във веригата има k източника на е.д.н., разположени в $k = m - n + 1$ клонове-хорди. Нека за система от независими контури са избрани главните контури, на всеки от които съответства клон-хорда. Системата уравнения, съставена по метода с контурните токове в този случай е:

$$Z_{pp}' i_p' + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^k Z_{pq}' i_q' = \dot{E}_p', \quad p = 1, 2, \dots, k,$$

където $k = m - n + 1$ е броят на независимите контури, i_p' , $p = 1, \dots, k$ са контурните токове, Z_{pp}' и Z_{pq}' са съответно собствените и взаимните комплексни контурни съпротивления и \dot{E}_p' , $p = 1, \dots, k$ са комплексите на контурните електродвижещи напрежения, всяко от които е равно на електродвижещото напрежение в съответния клон-хорда $\dot{E}_1' = \dot{E}_1$, $\dot{E}_2' = \dot{E}_2$, ..., $\dot{E}_k' = \dot{E}_k$.

Решението на тази система по отношение на неизвестните контурни токове може да се запише с използване на формулите на Крамер:

$$i_p' = \frac{\Delta_p}{\Delta}, \quad p = 1, \dots, k,$$

където Δ е детерминантата на матрицата на системата уравнения, а Δ_p е детерминантата на матрицата, получена от матрицата на системата, като p -тата колона е заменена с колоната на комплексните контурни електродвижещи напрежения.

Ако се развие детерминантата Δ_p по елементите на p -тата колона се получава:

$$\dot{I}_p = \frac{\Delta_{1p}}{\Delta} \dot{E}_1 + \frac{\Delta_{2p}}{\Delta} \dot{E}_2 + \dots + \frac{\Delta_{kp}}{\Delta} \dot{E}_k, \quad p = 1, 2, \dots, k.$$

Ако клоновете-хорди са номерирани от 1 до p , то $\dot{I}_1 = \dot{I}'_1$, $\dot{I}_2 = \dot{I}'_2$, ..., $\dot{I}_k = \dot{I}'_k$ и тогава за комплексите на тези токове се получава:

$$\dot{I}_p = \frac{\Delta_{1p}}{\Delta} \dot{E}_1 + \frac{\Delta_{2p}}{\Delta} \dot{E}_2 + \dots + \frac{\Delta_{kp}}{\Delta} \dot{E}_k, \quad p = 1, 2, \dots, k.$$

Въз основа на горното представяне не е трудно да се провери, че отношенията $\frac{\Delta_{rp}}{\Delta}$ имат качество на комплексни проводимости $Y_{pr} = \frac{\Delta_{rp}}{\Delta}$. Следователно комплексите на токовете в клоновете-хорди могат да се изразят по следния начин:

$$\dot{I}_p = Y_{p1} \dot{E}_1 + Y_{p2} \dot{E}_2 + \dots + Y_{pk} \dot{E}_k, \quad p = 1, 2, \dots, k, \quad (2.17)$$

където Y_{pp} , $p = 1, \dots, k$ са *собствените (входните) комплексни проводимости*, а Y_{pq} , $p = 1, \dots, k$, $q = 1, \dots, k$ са *взаимните комплексни проводимости* между клоновете p и q .

Тъй като взаимните комплексни контурни съпротивления са равни, матрицата на системата уравнения, съставена по метода с контурните токове, е симетрична. Тогава съответните адюнгирани количества Δ_{pr} и Δ_{rp} са равни, а оттук и взаимните комплексни проводимости между клоновете на веригата Y_{rp} и Y_{pr} са равни.

Изборът на дърво на графа на веригата, респ. на клонове-хорди, може да бъде направен по различни начини, така че всеки клон може да бъде избран за хорда. Следователно (2.17) се отнася за произволен клон на разглежданата верига и по същество отразява принципа на наслагването за влиянието на всички независими източници при изчисляването на клоновите токове. Въз основа на (2.17) *собствените* и *взаимните комплексни проводимости* могат да бъдат определени по следния начин:

$$Y_{pp} = \left(\frac{\dot{I}_p}{\dot{E}_p} \right)_{\substack{\dot{E}_q=0 \\ q \neq p}}, \quad Y_{pr} = \left(\frac{\dot{I}_p}{\dot{E}_r} \right)_{\substack{\dot{E}_q=0 \\ q \neq r}}.$$

Y_{pp} се изчислява, като първо се определи токът \dot{I}_p , дължащ се само на източника \dot{E}_p в клона p . За целта източниците на е.д.н. в останалите клонове се отстраняват, като се запазва вътрешното им съпротивление (т.е. дават се накъсо).

Y_{pr} се изчислява, като се определи токът \dot{I}_p , дължащ се само на източника \dot{E}_q в клона q , като за целта източниците на е.д.н. в останалите клонове се отстраняват, а вътрешните им съпротивления се запазват (т.е. дават се накъсо).

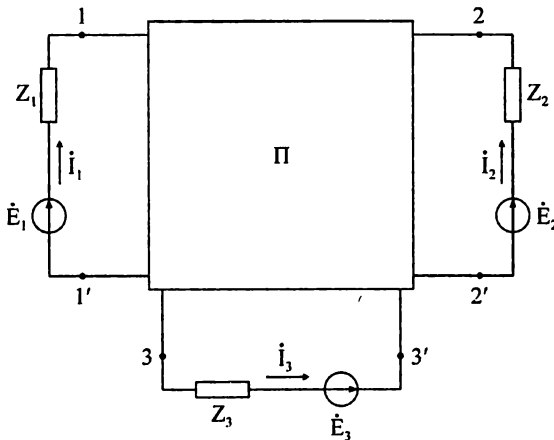
Веригата от фиг. 2.22а се състои от пасивен многополюсник (шестполюсник), като на трите двойки изводи полюси има свързани активни двуполюсници от последователен тип.

Входната комплексна проводимост Y_{11} може да се определи с използване на схемата от фиг. 2.22б:

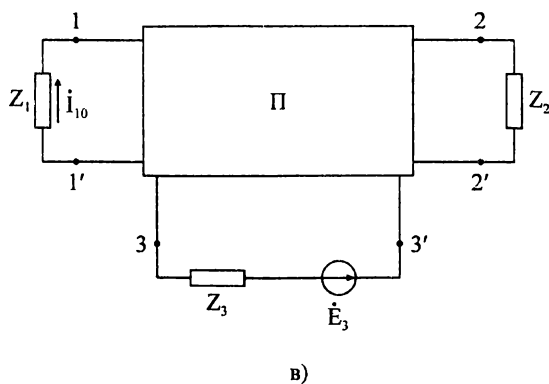
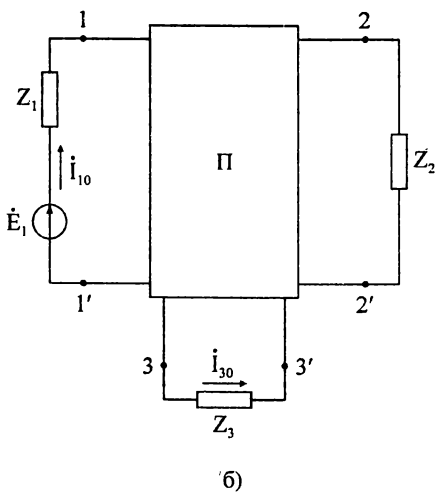
$$Y_{11} = \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{E}_1} \right)_{\substack{\dot{E}_2=0 \\ \dot{E}_3=0}} = \frac{\dot{I}_{10}}{\dot{E}_1}.$$

Взаимните комплексни проводимости Y_{13} и Y_{31} се определят, като се използват схемите от фиг. 2.22б и 2.22в.

$$Y_{13} = \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{E}_3} \right)_{\substack{\dot{E}_1=0 \\ \dot{E}_2=0}} = \frac{\dot{I}_{10}}{\dot{E}_3}, \quad Y_{31} = \left(\frac{\dot{I}_3}{\dot{E}_1} \right)_{\substack{\dot{E}_2=0 \\ \dot{E}_3=0}} = \frac{\dot{I}_{30}}{\dot{E}_1}.$$



Фиг. 2.22а



Фиг. 2.22

Тъй като веригата е от взаимен тип, достатъчно е да бъде определена само една от двете взаимни проводимости Y_{13} или Y_{31} . В различните случаи се избира тази взаимна комплексна проводимост, която се определя по-лесно.

Нека е дадена линейна верига от взаимен тип с m клон и n възела. Във веригата има само $n - 1$ независими източници на ток $\dot{J}_{e1}, \dots, \dot{J}_{en-1}$, всеки от които се опира на един от възлите с номера от 1 до $n - 1$.

Системата уравнения по метода с възловите потенциали в този случай е:

$$Y_{pp}' \dot{V}_p - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^{n-1} Y_{pq}' \dot{V}_q = \dot{J}_{ep}', \quad p = 1, 2, \dots, n-1,$$

където \dot{V}_p , $p = 1, \dots, n - 1$ са комплексите на възловите потенциали, Y_{pp}' и Y_{pq}' са собствените и взаимните комплексни проводимости, а $\dot{J}_{ep}' = \dot{J}_{ep}$, $p = 1, \dots, n - 1$ са комплексите на възловите електродвижещи токове.

Аналогично на разглежданията дотук решението на горната система може да се запише във вида:

$$\dot{U}_{p0} = \dot{V}_p = Z_{p1} \dot{J}_{e1} + Z_{p2} \dot{J}_{e2} + \dots + Z_{pn-1} \dot{J}_{en-1}, \quad p = 1, \dots, n-1, \quad (2.18)$$

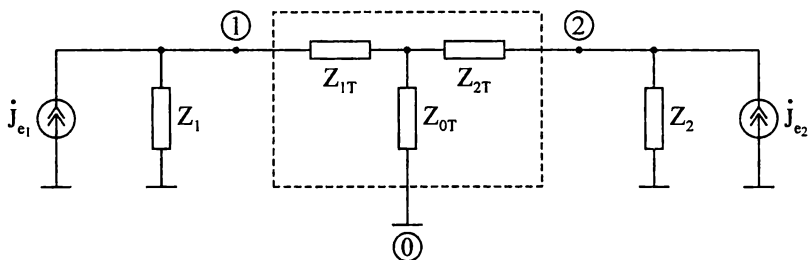
където Z_{pp} и Z_{pq} са съответно *собствените (входните)* и *взаимните комплексни съпротивления*, а \dot{U}_{p0} е напрежението между възела с номер p и възела с номер 0.

При вериги от *взаимен* тип системата уравнения по метода с възловите потенциали е симетрична и поради това *взаимните комплексни съпротивления* са равни. Тъй като номерацията на възлите във веригата може да бъде произволна, (2.18) се отнася за всяко напрежение в разглежданата верига и по същество отразява принципа на наслагването.

Собствените и взаимните комплексни съпротивления могат да бъдат определени при изследване на веригата само под въздействие на един източник на ток и отстраняване на останалите, като се запазват вътрешните им съпротивления (прекъсват се):

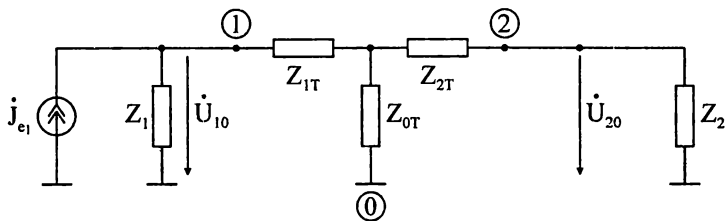
$$Z_{pp} = \left(\frac{\dot{U}_{p0}}{j_{ep}} \right)_{\substack{j_{eq}=0 \\ q \neq p}}, \quad Z_{pr} = \left(\frac{\dot{U}_{p0}}{j_{er}} \right)_{\substack{\dot{E}_q=0 \\ q \neq r}}$$

Веригата от фиг. 2.23а се състои от пасивен триполусник, като на двете двойки изводи са свързани активни двуполусници от паралелен тип.



Фиг. 2.23а

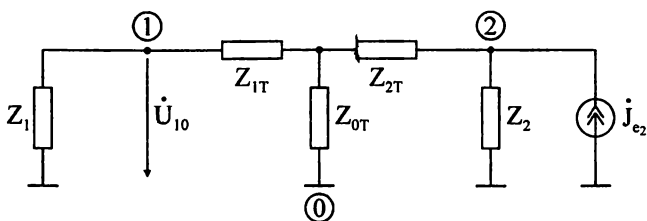
Входното комплексно съпротивление Z_{11} и взаимното комплексно съпротивление Z_{21} могат да бъдат определени с помощта на схемата от фиг. 2.23б.



Фиг. 2.23б

$$Z_{11} = \left(\frac{\dot{U}_{10}}{j_{e1}} \right)_{j_{e2}=0}, \quad Z_{21} = \left(\frac{\dot{U}_{20}}{j_{e1}} \right)_{j_{e2}=0}$$

Взаимното комплексно съпротивление Z_{12} се определя с помощта на схемата от фиг. 2.23б.



Фиг. 2.23в

$$Z_{12} = \left(\frac{\dot{U}_{10}}{\dot{J}_{e2}} \right)_{j_{e1}=0}$$

Понеже веригата е от *взаимен* тип ($Z_{12} = Z_{21}$), достатъчно е да бъде определено само едното от тях.

Както беше споменато преди, свойството *взаимност* е свързано с факта, че за веригите от взаимен тип взаимните параметри с разменен ред на индексите са равни. По-общо това свойство може да се формулира по следния начин. Нека е дадена линейна верига от взаимен тип и се търси реакцията (ток или напрежение) при действие само на един независим източник (сигнал). Тогава отношението *реакция/сигнал* е инвариантно и при размяна на местата на клона, където се търси реакцията и клона, където е включен независимият източник (сигналът).

Когато се премества един и същ независим източник, реакцията (ток или напрежение) не се променя. Това по същество представлява свойството *обратимост*. То може да се докаже просто на базата на свойството взаимност. Да разгледаме веригата от фиг. 2.23б, като се търси напрежението \dot{U}_{20} (реакция) под действието на независимия източник \dot{J}_{e1} . $\dot{U}_{20} = Z_{21} \dot{J}_{e1}$.

Да преместим източника на ток \dot{J}_{e1} паралелно на Z_2 , т.е. сменяме мястото му и го включваме паралелно на клоната 2, вече като \dot{J}_{e2} . В този случай за комплекса на напрежението върху клоната 1 \dot{U}_{10} (където е бил включен \dot{J}_{e1}) от фиг. 2.23б се получава: $\dot{U}_{10} = Z_{12} \dot{J}_{e2}$.

Ако $\dot{J}_{e1} = \dot{J}_{e2} = \dot{J}_e$, то $\dot{U}_{20} = Z_{21} \dot{J}_e$, $\dot{U}_{10} = Z_{12} \dot{J}_e$.

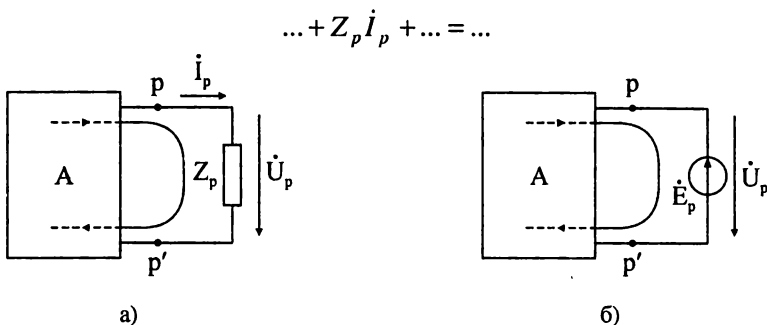
Тъй като веригата е от *взаимен* тип ($Z_{12} = Z_{21}$) следва, че

$$\dot{U}_{10} = \dot{U}_{20} = \dot{U}_0.$$

В този смисъл веригите от *взаимен* тип са *обратими* по отношение на мястото, където се определя реакцията и мястото, където се подава сигнала.

2.2.4. Теорема за компенсацията

Нека е дадена електрическа верига. Да разгледаме тази верига като активен двуполусник (фиг. 2.24а) по отношение на клон p , който е избран да бъде клон-хорда. В този случай напрежението върху Z_p е включено само в уравнението за контура, съответстващ на клон-хорда p :



Фиг. 2.24

Напрежението $\dot{U}_p = Z_p \dot{I}_p$ може да бъде прехвърлено в дясната част на горното уравнение, но със знак минус и тогава се получава:

$$\dots = \dots - Z_p \dot{I}_p \dots$$

Това е еквивалентно на използване на източник на е.д.н. със същата големина и обратна посока на \dot{U}_p , т.е. $\dot{E}_p = \dot{U}_p$. Тогава за разглеждания контур уравнението е същото

$$\dots = \dots - \dot{E}_p \dots$$

Теоремата за *компенсацията* може да бъде формулирана по следния начин. Всяко напрежение или напрежителен пад може еквивалентно да бъде заменено с идеален източник на е.д.н. със същата големина и обратна посока.

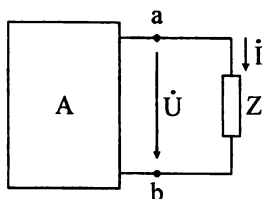
Трябва да се подчертае, че тази замяна е еквивалентна по отношение на останалата верига, т.е. за активния двуполусник от фиг. 2.24а и фиг. 2.24б. В този смисъл режимът в активния двуполусник ще бъде същият и в двата случая.

Ако напрежението \dot{U}_p е напрежителен пад върху Z_p , т.е. $\dot{U}_p = Z_p \dot{I}_p$, то източникът на е.д.н. \dot{E}_p зависи от тока \dot{I}_p , $\dot{E}_p = \dot{U}_p = Z_p \dot{I}_p$. Следователно той може да се разглежда като зависим източник (източник на напрежение, управляван с ток) с коефициент на управление Z_p .

Теоремата за *компенсацията* може да бъде формулирана и за токове по следния начин. Всеки клон с ток \dot{I}_p в дадена верига може еквивалентно да бъде заменен с независим източник на ток $\dot{J}_{ep} = \dot{I}_p$ със същата големина и посока. В този случай режимът във веригата няма да се промени при еквивалентната замяна.

2.2.5. Теорема на Тевенен и Нортън

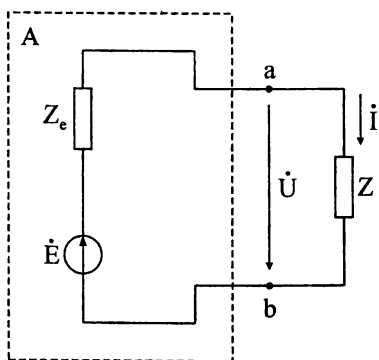
Теоремите на Тевенен и Нортън са известни още като *теорема на активния двуполусник*. Нека е дадена електрическа верига и се търси токът в даден клон с комплексно съпротивление Z , опиращ се на възлите a и b . Останалата електрическа верига по отношение на изводите a и b се представя като активен двуполусник (фиг. 2.25а).



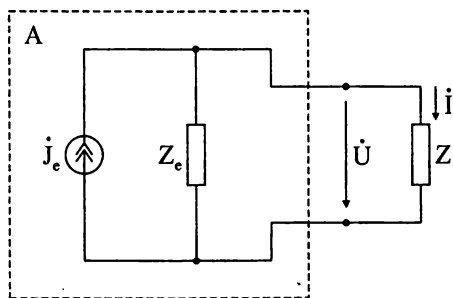
Фиг. 2.25а

Същността на теоремите на Тевенен и Нортън се състои в използването на еквивалентни заместващи схеми на активния двуполусник по отношение на клонна, който се опира на възлите a и b . Еквивалентността е в смисъл, че режимът в клонна със съпротивление Z е един и същ в случаите, когато се разглежда цялата верига, представена като активен двуполусник, и когато се използва заместваща схема. Това означава, че токът и напрежението, свързани с този клон, са едни и същи и

в двата случая. Най-простите заместващи схеми на еквивалентния двуполусник са от последователен и паралелен тип. Теоремата на Тевенен е свързана със схемата от последователен тип (фиг. 2.25б), а теоремата на Нортън е свързана със схемата от паралелен тип (фиг. 2.25в).



Фиг. 2.25б



Фиг. 2.25в

Основната задача при прилагането на теоремите на Тевенен и Нортън е определянето на параметрите \dot{E} , Z_e и \dot{J}_e , Z_e на еквивалентните схеми от

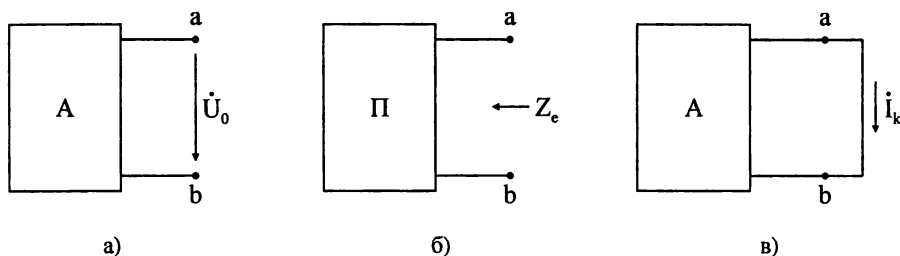
фиг. 2.25б и фиг. 2.25в на активния двуполюсник. Когато параметрите на схемите от тези фигури са известни, комплексът на тока в клона със съпротивление Z се определя, както следва:

$$\dot{i} = \frac{\dot{E}}{Z_e + Z} \quad (2.19)$$

$$\dot{i} = \dot{j}_e \frac{Z_e}{Z_e + Z} \quad (2.20)$$

Формула (2.19) по същество представлява израза за определянето на тока в клона със съпротивление Z по теоремата на Тевенен, а формула (2.20) дава израза за определянето на същия ток по теоремата на Нортън.

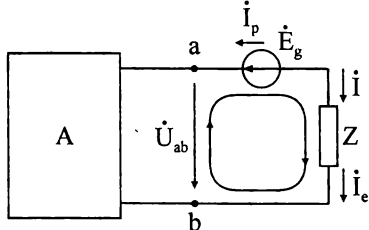
Теоремата на Тевенен може да бъде формулирана по следния начин. Активният двуполюсник от фиг. 2.25а, опиращ се на възлите a и b , може да бъде заменен с еквивалентна схема на Тевенен (фиг. 2.25б) с параметри \dot{E} и Z_e . Стойността на източника на е.д.н. \dot{E} е равна на напрежението при прекъсване (отстраняване) на клона със съпротивление Z (фиг. 2.26а). Z_e е еквивалентно съпротивление на пасивния двуполюсник, разгледан между възлите a и b при отстраняване на клона със съпротивление Z (фиг. 2.26б).



Фиг. 2.26

За да се премине от активен към пасивен двуполюсник, източниците на независими сигнали се отстраняват, като се оставят вътрешните им съпротивления.

Според теоремата на Нортън, активният двуполюсник от фиг. 2.25а, опиращ се на възлите a и b , може да бъде заменен с еквивалентна схема на Нортън (фиг. 2.25в) с параметри \dot{j}_e и Z_e . Стойността на източника на ток \dot{j}_e е равна на тока на късо съединение \dot{i}_k при даден накъсо клон със съпротивление Z (фиг. 2.26в). Z_e е също както при теоремата на Тевенен, еквивалентно съпротивление на пасивния двуполюсник, разгледан между възлите a и b при отстраняване на клона със съпротивление Z .



Фиг. 2.27

При доказателството на теоремата на Тевенен се използва принципът на наслагването. Да разгледаме изходната верига, като в клона със съпротивление Z е добавен допълнителен източник на е.д.н. \dot{E}_g с обратна посока на тока \dot{I} (фиг. 2.27).

Този източник обуславя ток \dot{I}_g , който може да бъде намерен като се използва принципът на наслагването. За целта всички източници в активната верига се отстраняват (като се запазват вътрешните им съпротивления). В този случай активният двуполусник става пасивен и токът \dot{I}_g се определя с израза:

$$\dot{I}_g = \frac{\dot{E}_g}{Z_e + Z}, \quad (2.21)$$

където Z_e е съпротивлението на пасивния двуполусник между изводите a и b (фиг. 2.26б).

Според принципа на наслагването, токът \dot{I}_e в клона със съпротивление Z за веригата от фиг. 2.27 е

$$\dot{I}_e = \dot{I} - \dot{I}_g. \quad (2.22)$$

Формулата (2.22) важи при избраните посоки на фиг. 2.27. Тъй като токът \dot{I}_g , а посредством него и токът \dot{I}_e , зависят от \dot{E}_g , с промяната на \dot{E}_g резултантният ток \dot{I}_e може да бъде направен нула. Нека стойността на \dot{E}_g бъде избрана така, че токът \dot{I}_e да се анулира, т.е. $\dot{I}_e = 0$. От втория закон на Кирхоф за контура от фиг. 2.27 се получава

$$Z\dot{I}_e - \dot{U}_{as} = -\dot{E}_g. \quad (2.23)$$

Ако токът \dot{I}_e е нула ($\dot{I} = \dot{I}_g$), то това съответства на прекъсване (отстраняване) на клона със съпротивление Z и тогава напрежението на изводите на активния двуполусник \dot{U}_{as} е точно напрежението при прекъсване \dot{U}_0 , както е показано на фиг. 2.26а. Като се отчете, че при $\dot{I}_e = 0$ $\dot{U}_{as} = \dot{U}_0$, то

$$\dot{U}_0 = \dot{E}_g, \quad \dot{I} = \dot{I}_g. \quad (2.24)$$

След заместване на (2.24) в (2.21) се получава

$$i = \frac{\dot{U}_0}{Z_e + Z}. \quad (2.25)$$

Формулата (2.25) съответства на схемата от фиг. 2.25б за определяне на тока \dot{I} , при $\dot{E} = \dot{U}_0$. Следователно активният двуполусник от фиг. 2.25а може да бъде заместен с еквивалентната схема на Тевенен с параметри $\dot{E} = \dot{U}_0$ и Z_e .

За обосновка на теоремата на Нортън числителят и знаменателят на уравнение (2.25) формално се умножават със Z_e и се получава:

$$i = \frac{\dot{U}_0}{Z_e} \frac{Z_e}{Z_e + Z}. \quad (2.26)$$

Величината $\frac{\dot{U}_0}{Z_e}$ има качество на електродвижещ ток

$$j_e = \frac{\dot{U}_0}{Z_e}. \quad (2.27)$$

При $\dot{E} = \dot{U}_0$ този ток може да се определи, като се използва веригата от фиг. 2.25б при $Z = 0$, т.е. късо съединение на клона със съпротивление Z :

$$i_k = \frac{\dot{U}_0}{Z_e} \quad (2.28)$$

Тъй като при $\dot{E} = \dot{U}_0$ веригата от фиг. 2.25б е еквивалентна на изходната верига (по отношение на режима в клона със съпротивление Z), токът \dot{I}_k може да се определи с помощта на веригата от фиг. 2.26в.

Като се отчете (2.28), формула (2.27) добива вида:

$$i = j_e \frac{Z_e}{Z_e + Z}. \quad (2.29)$$

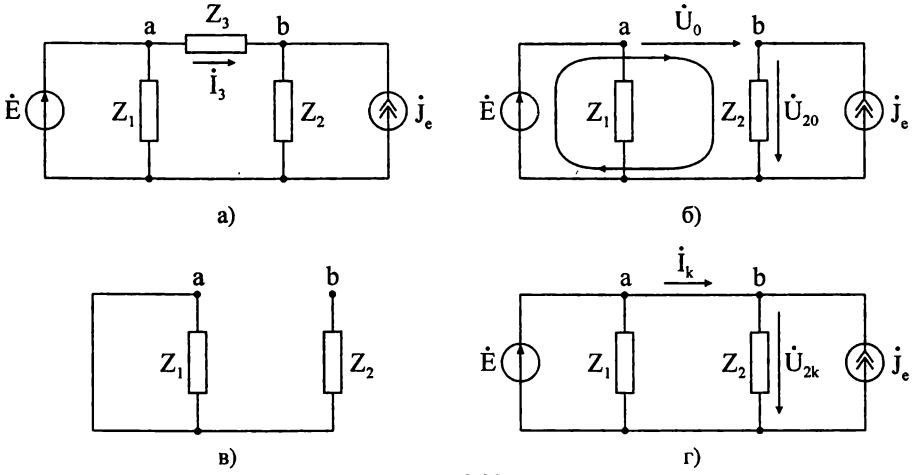
Формулата (2.29) съответства на схемата от фиг. 2.25в за определяне на тока \dot{I} , с $j_e = \dot{I}_k$. Следователно активният двуполусник от фиг. 2.25а може да бъде заместен с еквивалентната схема на Нортън с параметри $j_e = \dot{I}_k$ и Z_e .

За веригата от фиг. 2.28а формулите за определяне на тока \dot{I}_3 с използване на теоремите на Тевенен и Нортън са:

$$i_3 = \frac{\dot{U}_0}{Z_e + Z_3} \quad (2.30)$$

$$i_3 = i_k \frac{Z_e}{Z_e + Z_3}, \quad (2.31)$$

като \dot{U}_0 се определя чрез схемата от фиг. 2.28б.



Фиг. 2.28

В този случай $\dot{U}_{20} = \dot{J}_e Z_2$ и след прилагане на втория закон на Кирхоф за означения контур се получава:

$$\dot{U}_0 + \dot{U}_{20} = \dot{E} \Rightarrow \dot{U}_0 = \dot{E} - \dot{J}_e Z_2. \quad (2.32)$$

$Z_e = Z_2$ е комплексното съпротивление между изводите a и b за схемата от фиг. 2.28в. В случая са отстранени клонът със съпротивление Z_3 и независимите източници, като са отчетени вътрешните им съпротивления.

Токът i_k се определя, като се използва схемата от фиг. 2.28г. В случая потенциалите на a и b са равни и тогава комплексът на напрежението \dot{U}_{2k} върху Z_2 е $\dot{U}_{2k} = \dot{E}$. Като се приложи първият закон на Кирхоф за възела b се получава:

$$i_k = \frac{\dot{U}_{2k}}{Z_e} - \dot{J}_e = \frac{\dot{E}}{Z_e} - \dot{J}_e. \quad (2.33)$$

Комплексът на тока i_k може да бъде намерен и като се използва \dot{U}_0 от (2.32) и се отчете, че $i_k = \frac{\dot{U}_0}{Z_e}$ и $Z_e = Z_2$.

Токът i_3 се определя след заместване на (2.32) и (2.33) в (2.30) и (2.31). Като се вземе предвид, че $Z_e = Z_2$, се получава:

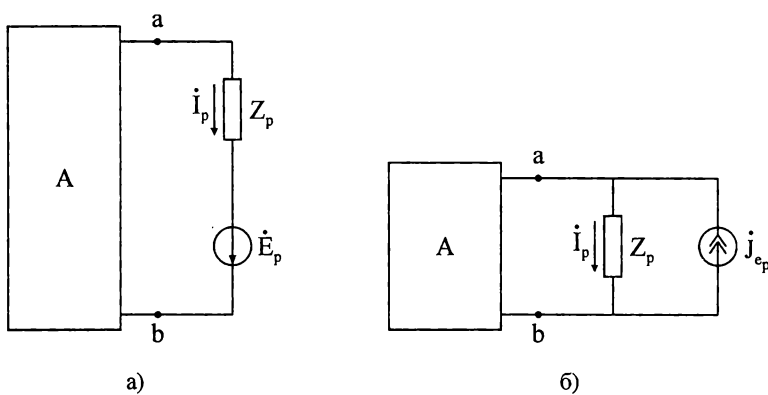
$$i_3 = \frac{\dot{E} - Z_2 j_e}{Z_2 + Z_3} = \left(\frac{\dot{E}}{Z_e} - j_e \right) \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3}.$$

От разглежданията дотук е ясно, че *теоремите на Тевенен и Нортън* е удачно да бъдат да прилагани, когато се търси само един ток в даден клон на изследваната верига.

Ако клонът p , в който се търси токът, е активен, както е показано на фиг. 2.29а, формулата за определянето на комплекса на тока, свързан с този клон, е:

$$i_p = \frac{\dot{U}_0 + \dot{E}_p}{Z_e + Z_p} \quad (2.34)$$

Ако посоката на \dot{E}_p е обратна на \dot{i}_p , то знакът на \dot{E}_p във формула (2.34) е отрицателен.



Фиг. 2.29

Ако клонът p , чийто ток се търси, е активен от паралелен тип, както е показано на фиг. 2.29б, то за определянето на комплекса на този ток се използва формулата:

$$i_p = (i_k + j_{ep}) \frac{Z_e}{Z_e + Z_p}. \quad (2.35)$$

Ако посоката на j_{ep} е обратна на тази от фиг. 2. 29б, то знакът на j_{ep} във формула (2.35) е отрицателен.

Използването на теоремите на Тевенен и Нортън за определяне на тока в даден клон е еквивалентно. Обикновено се предпочита да се използва този вариант, в който е по-лесно определянето на \dot{U}_0 или \dot{i}_k . Ако двуполусникът, чийто ток се търси, е активен от последователен тип (фиг. 2.29а), удачно е да се използва *теоремата на Тевенен*, а ако е активен от паралелен тип (фиг. 2.29б), по-добре е да се използва *теоремата на Нортън*.

Пример 2.7. За веригата от пример 2.2 (фиг. 2.4а) да се определи комплексът на тока \dot{I}_1 .

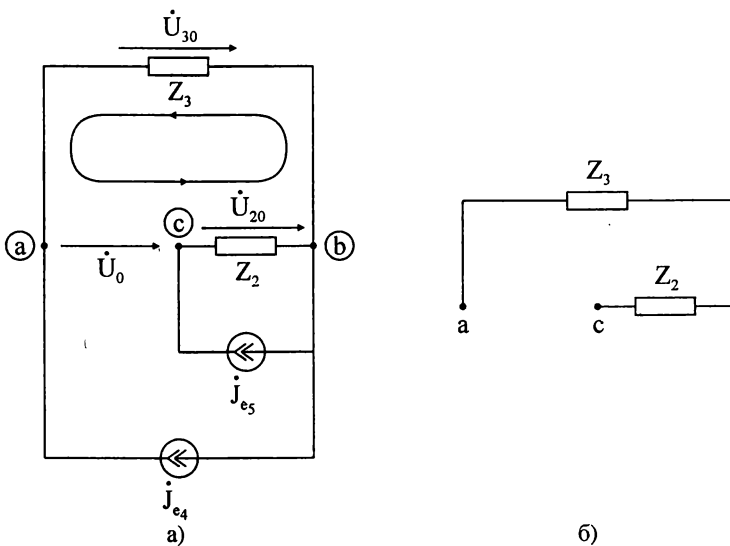
Решение: Формулата за определяне на комплекса на тока \dot{I}_1 с помощта на теоремата на Тевенен е:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_0}{Z_e + Z_1}.$$

За определяне на \dot{U}_0 се използва схемата от фиг. 2.30а.

В случая $\dot{U}_{20} = Z_2 \dot{J}_{e5}$, а $\dot{U}_{30} = Z_3 \dot{J}_{e4}$. След прилагане на втория закон на Кирхоф за показания на фиг. 2.30а контур се получава:

$$\dot{U}_0 + \dot{U}_{20} - \dot{U}_{30} = 0, \quad \dot{U}_0 = \dot{U}_{30} - \dot{U}_{20} = Z_3 \dot{J}_{e4} - Z_2 \dot{J}_{e5} = 8 - (-j2)(-j2) = 12V.$$



Фиг. 2.30

Комплексното съпротивление Z_e е съпротивлението между a и c за пасивната верига от фиг. 2.30б.

$$Z_e = Z_2 + Z_3 = (2 - j2)\Omega.$$

Следователно

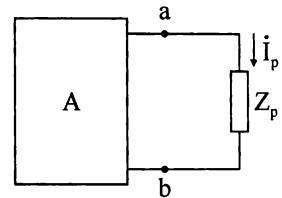
$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_0}{Z_e + Z_1} = \frac{Z_3 \dot{J}_{e4} - Z_2 \dot{J}_{e5}}{Z_2 + Z_3 + Z_1} = (4,8 + j2,4)A.$$

2.2.6. Теорема на вариациите

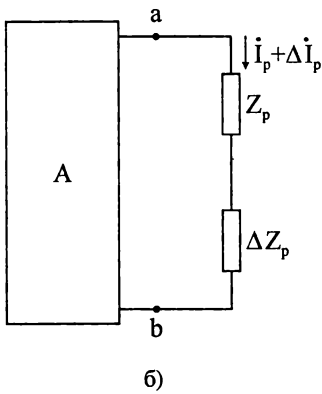
Нека е дадена сложна електрическа верига и в резултат на анализа на тази верига са определени токовете и напреженията, свързани с веригата. Нека комплексното съпротивление в клон p се промени с ΔZ_p , т.е. новата стойност на това съпротивление е $Z_p + \Delta Z_p$. Токовете и напреженията във веригата с новата стойност на комплексното съпротивление в клон p са различни от тези в изходната верига и могат да бъдат определени, ако повторно се направи анализ на веригата, но с новата стойност на комплексното съпротивление в клон p . Тъй като анализът на сложни вериги при синусоиден режим е свързан с решаване на линейни системи уравнения с комплексни коефициенти от висок ред, повторният цялостен анализ на веригата не е желателен, при положение, че може да бъде избегнат.

Теоремата на вариациите дава възможност като се използват стойностите на токовете и напреженията от анализа на веригата с изходно съпротивление Z_p в клон p , да се определят новите им стойности след промяна на Z_p с ΔZ_p , без да се прави отново анализ на веригата.

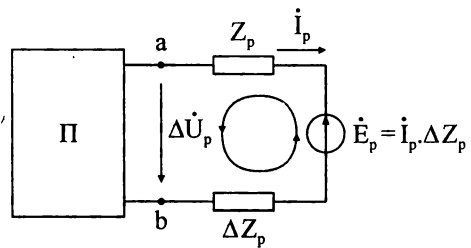
Да отделим клон с комплексно съпротивление Z_p от останалата верига, както е показано на фиг. 2.31а. Ако клонът е активен, то източникът може да се включи към активния двуполусник.



Фиг. 2.31а



б)



в)

фиг. 2.31

Като се приложи теоремата на Тевенен, за комплекса на тока в клон p се получава:

$$\dot{i}_p = \frac{\dot{U}_0}{Z_e + Z_p}.$$

Нека Z_p се промени с ΔZ_p (фиг. 2.31б). Тъй като клонът p не е включен към активния двуполусник от фиг. 2.31а, той не се променя (\dot{U}_0 и Z_e са същите). Комплексът на тока в клона с комплексно съпротивление $Z_p + \Delta Z_p$ е $\dot{I}_p + \Delta \dot{I}_p$ и той може да се определи като се използва теоремата на Тевенен за веригата от фиг. 2.31б

$$\dot{I}_p + \Delta \dot{I}_p = \frac{\dot{U}_0}{Z_e + (Z_p + \Delta Z_p)}.$$

Тогава промяната $\Delta \dot{I}_p$ на комплекса на тока \dot{I}_p е:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{I}_p &= (\dot{I}_p + \Delta \dot{I}_p) - \dot{I}_p = \frac{\dot{U}_0}{Z_e + (Z_p + \Delta Z_p)} - \frac{\dot{U}_0}{Z_e + Z_p} = \\ &= \frac{-\dot{U}_0 \Delta Z_p}{(Z_e + Z_p)(Z_e + Z_p + \Delta Z_p)} = -\dot{I}_p \frac{\Delta Z_p}{(Z_e + Z_p + \Delta Z_p)}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Зависимостта (2.36) може да се представи с еквивалентната схема от фиг. 2.31в.

В случая се използва пасивният двуполусник между изводите a и v , чието еквивалентно съпротивление е Z_e , а напрежителният пад $\Delta Z_p \dot{I}_p$ е заместен с независим източник на е.д.н. \dot{E}_p съгласно теоремата за компенсацията. Поради отрицателния знак във формула (2.36), посоката на независимия източник \dot{E}_p от фиг. 2.31в е обратна на $\Delta \dot{I}_p$.

Напрежението $\Delta \dot{U}$, дължащо се на източника \dot{E}_p , който отразява промяната на комплекса на тока \dot{I}_p с $\Delta \dot{I}_p$, се определя с помощта на втория закон на Кирхоф за контура от фиг. 2.31в:

$$\Delta \dot{U} - Z_p \Delta \dot{I}_p - \Delta Z_p \Delta \dot{I}_p = \dot{E}_p,$$

откъдето

$$\begin{aligned} \Delta \dot{U} &= \dot{E}_p + Z_p \Delta \dot{I}_p + \Delta Z_p \Delta \dot{I}_p = \Delta Z_p \dot{I}_p + Z_p \Delta \dot{I}_p + \Delta Z_p \Delta \dot{I}_p = \\ &= (Z_p + \Delta Z_p) \Delta \dot{I}_p + \Delta Z_p \dot{I}_p. \end{aligned}$$

Като се отчете (2.36), се получава

$$\Delta \dot{U} = -\frac{(Z_p + \Delta Z_p) \Delta Z_p \dot{I}_p}{Z_e + Z_p + \Delta Z_p} + \Delta Z_p \dot{I}_p = \frac{Z_e \Delta Z_p \dot{I}_p}{Z_e + Z_p + \Delta Z_p} = -Z_e \Delta \dot{I}_p. \quad (2.37)$$

Следователно промяната на Z_p с ΔZ_p е свързана с въвеждането на допълнителен източник на е.д.н. $\dot{E}_p = \Delta Z_p \dot{I}_p$. Промените на всички токове и напрежения във веригата се дължат на този източник. Тези промени могат да бъдат определени като се използва принципа на наслагането и се разгледа цялата верига под действие на допълнителния източник \dot{E}_p в клон p . За целта източниците в активния двуполусник се отстраняват (той става пасивен) и се разглежда веригата от фиг. 2.31в. Напрежението $\Delta \dot{U}_p$ на входа на пасивния двуполусник се дава с (2.37). Като се изследва пасивният двуполусник от фиг. 2.31в под действие на $\Delta \dot{U}_p$ се определят промените на комплексите на токовете и напреженията в клоновете му.

Новите стойности на токовете и напреженията във веригата с новата стойност на комплексното съпротивление в клон p се определят с помощта на принципа на наслагането.

2.2.7. Условия за предаване на максимална активна мощност на консуматор

Разглежда се веригата от фиг. 2.31а, където Z_p е пасивен двуполусник, а останалата верига е заменена с активния двуполусник между възлите a и b . Ако се използва еквивалентна схема на Тевенен от последователен тип на активния двуполусник от фиг. 2.32, комплексът на тока \dot{I}_p се дава с формулата:

$$\dot{I}_p = \frac{\dot{E}}{Z_e + Z_p}, \quad (2.38)$$

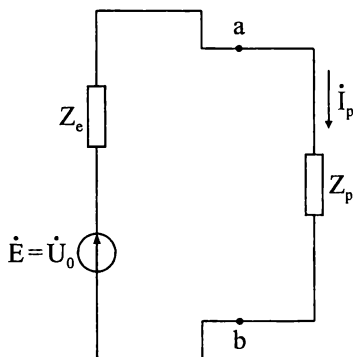
където параметрите на еквивалентната схема на Тевенен $\dot{E} = \dot{U}_0$ и Z_e са съответно напрежението при прекъсване и еквивалентното съпротивление на пасивния двуполусник.

Нека

$$\dot{E} = E e^{j\psi_e} = U_0 e^{j\psi_{u_0}}, \quad Z_e = R_e + jX_e = z_e e^{j\varphi_e}, \quad Z_p = R_p + jX_p = z_p e^{j\varphi_p}.$$

Тогава за ефективната стойност на тока I_p се получава

$$I_p = \frac{E}{\sqrt{(R_e + R_p)^2 + (X_e + X_p)^2}},$$



Фиг. 2.32

а активната мощност консумирана в пасивния двуполусник Z_p се дава с израза

$$P = R_p I_p^2 = \frac{R_p E^2}{(R_e + R_p)^2 + (X_e + X_p)^2}. \quad (2.39)$$

Активната мощност, консумирана в Z_p , може да се представи и като функция на z_p и φ_p по следния начин:

$$\begin{aligned} P = R_p I_p^2 &= \frac{E^2 z_p \cos \varphi_p}{(z_e \cos \varphi_e + z_p \cos \varphi_p)^2 + (z_e \sin \varphi_e + z_p \sin \varphi_p)^2} = \\ &= \frac{E^2 z_p \cos \varphi_p}{z_e^2 + z_p^2 + 2z_e z_p \cos(\varphi_p - \varphi_e)}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Ако P се разглежда като функция на R_p и X_p , то трябва да се използва формулата (2.39). Тогава $P = P(R_p, X_p)$ и функцията има екстремум, когато

$$\frac{\partial P}{\partial R_p} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial P}{\partial X_p} = 0.$$

Като се изследва функцията, лесно се установява, че горното условие се постига при

$$R_p = R_e, \quad X_p = -X_e$$

и за тези стойности екстремумът е от тип максимум, като максималната стойност на консумираната мощност е

$$P_{\max} = \frac{E^2}{4R_e} = \frac{U_0^2}{4R_e}.$$

Следователно активната мощност, консумирана в клоната p , има максимум, когато комплексното съпротивление $Z_p = R_p + jX_p$ на клоната се дава с формулата

$$Z_p = Z_e^*,$$

в която реалните и имагинерните части имат вида

$$R_p = R_e \quad \text{и} \quad X_p = -X_e.$$

Лесно се проверява, че в този случай максималната активна мощност, предавана към консуматора Z_p , е половината от активната мощност, генерирана от веригата. Останалата активна мощност е свързана с Z_e и затова този случай не се използва в практиката.

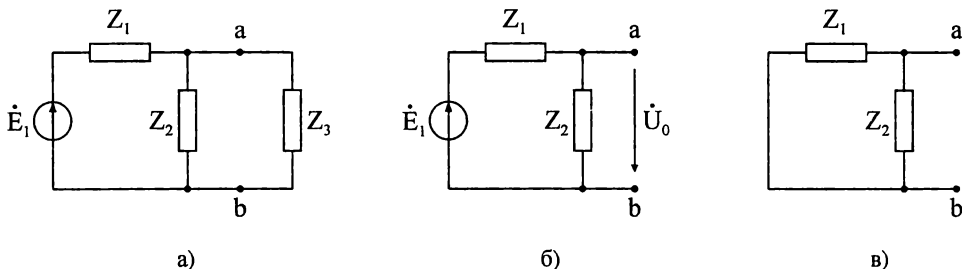
Ако P се разглежда като функция на z_p , то трябва да се използва формула (2.40). Тогава $P = P(z_p)$ и функцията има екстремум, когато

$$\frac{\partial P}{\partial z_p} = 0.$$

Изследването на функцията $P = P(z_p)$ показва, че тя има екстремум от тип максимум при $z_p = z_e$ и стойността на максималната консумирана мощност е

$$P_{\max} = \frac{E^2 \cos \varphi_p}{2z_e [1 + \cos(\varphi_p - \varphi_e)]}.$$

Пример 2.8. Веригата от фиг. 2.33а е с параметри $\dot{E}_1 = 1V$, $Z_1 = 1\Omega$, $Z_2 = -j\Omega$. Да се определят параметрите R_3 и X_3 на Z_3 така, че в клоната 3 да се консумира максимална активна мощност, както и да се определи стойността на тази мощност.



Фиг. 2.33

Решение: Параметрите на еквивалентната схема на Тевенен за активния двуполусник, разглеждан между възлите a и b , се определят с помощта на схемите от фиг. 2.33б и фиг. 2.33в.

$$\dot{U}_0 = \frac{\dot{E}_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{-j}{1-j} = \left(\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\right)V,$$

$$Z_e = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1(-j)}{1-j} = \left(\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\right)\Omega.$$

Съгласно условието за предаване на максимална активна мощност:

$$Z_3 = Z_e^* = \left(\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\right)\Omega.$$

Следователно

$$R_3 = \frac{1}{2}\Omega, \quad X_3 = \frac{1}{2}\Omega.$$

В този случай максималната консумирана мощност в Z_3 е:

$$P_{\max} = \frac{U_0^2}{4R_e} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{4 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}W.$$

2.2.8. Теорема на Ланжвен

Теоремата на Ланжвен е свързана с баланса на комплексните мощности в една верига. Нека веригата има m клона и n възела, M_e независими източници на е.д.н. и M_j независими източници на ток. Тогава

$$\dot{S}_K = \dot{S}_\Gamma, \quad (2.41)$$

където \dot{S}_K е комплексната мощност, консумирана във веригата. Тя е равна на сумата от комплексните мощности, свързани с пасивните елементи:

$$\begin{aligned} S_K^* &= \sum_{p=1}^m Z_p \dot{I}_p I_p^* = \sum_{p=1}^m Z_p I_p^2 = \sum_{p=1}^m (R_p + jX_p) I_p^2 = \\ &= \sum_{p=1}^m R_p I_p^2 + j \sum_{p=1}^m X_p I_p^2 = P_K + jQ_K \end{aligned} \quad (2.42)$$

\dot{S}_Γ е комплексната генерирана мощност във веригата. Тя е равна на сумата от комплексните генерирани мощности от всички независими източници:

$$\dot{S}_\Gamma = \sum_{q=1}^{M_e} \dot{E}_q I_q^* + \sum_{r=1}^{M_j} \dot{U}_r J_{er}^* = P_\Gamma + jQ_\Gamma. \quad (2.43)$$

Компонентите $\dot{E}_q I_q^*$ участват със знак плюс, ако посоките на \dot{E}_q и \dot{I}_q съвпадат. Компонентите $\dot{U}_r J_{er}^*$ участват със знак плюс, ако посоките на \dot{U}_r и \dot{J}_{er} са различни.

Равенството на активните генерирани и консумирани мощности е следствие на принципа за съхранение на енергията. *Теоремата на Ланжевен* по същество е свързана с равенството на генерираните и консумираните реактивни мощности.

2.2.9. Теорема на Теледжен

Нека разгледаме електрическа верига с m клона и n възела, като посоките на напреженията и токовете, свързани със всеки клон, са избрани съгласувано, т.е. посоките на u_k и i_k съвпадат за $k = 1, 2, \dots, m$.

Тогава

$$p = \sum_{k=1}^m u_k i_k = 0, \quad (2.44)$$

Трябва да се отбележи, че (2.44) важи за моментните стойности на величините и означава, че сумата от моментните мощности, свързани с клоновете на дадена верига, е нула.

Теоремата на Теледжен има и по-обща формулировка. В този случай не е задължително напрежението u_k да обуславя (да съответства на) тока i_k . Важно е обаче системата напрежения u_1, \dots, u_m и системата токове i_1, \dots, i_m да са свързани с един и същи граф, т.е. те може да са от различни вериги, които са с една и съща структура. Тогава компонентите $u_k i_k$ се наричат квазимощности и *теоремата на Теледжен* е свързана с тях.

3.1. УВОД

Резонансът е явление, при което напрежението и токът на изводите на пасивен двуполюсник, съдържащ резистори, бобини и кондензатори, при синусоиден режим съвпадат по фаза. При това комплексното съпротивление на двуполюсника ще има чисто резистивен характер.

Оттук непосредствено следва, че фазовото условие за резонанс има вида

$$\varphi_e = 0 \quad (3.1)$$

Фазовата разлика може да се представи най-общо като:

$$\varphi_e = \arctg \frac{X_e}{R_e} = \arctg \frac{B_e}{G_e} \quad (3.2)$$

Когато една верига се разглежда като последователен двуполюсник с еквивалентно комплексно съпротивление $Z_e = R_e + jX_e$, условието $\varphi_e = 0$ се свежда до $X_e = 0$, т.е. двуполюсникът има поведение на резистор със съпротивление R_e . Когато веригата се разглежда като паралелен двуполюсник с еквивалентна комплексна проводимост $Y_e = G_e - jB_e$, условието $\varphi_e = 0$ се свежда до $B_e = 0$, т.е. двуполюсникът има поведение на резистор с проводимост G_e .

Резонансните явления имат важно място в съвременната електротехника и радиоелектронна техника. Особено важно значение те имат в комуникационната техника – радиоприемната и радиопредавателната техника, както и в измервателната техника за високи честоти. Могат да се посочат следните важни области на приложение:

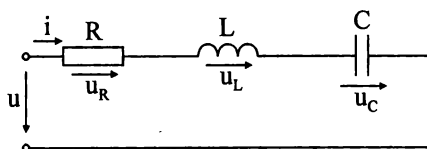
1. Получаване на усилване по ток или по напрежение в радиоприемната техника при проектирането на резонансни усилвателни стъпала.
2. Използване на резонанс в честотно-селективни вериги – проектиране на лентови и заграждащи филтри в аудио- и комуникационната техника, както и използването на селективните свойства на тези вериги за настройка на входни стъпала и антени на радиоприемни и радиопредавателни устройства.
3. Получаване на чисто активен товар и предаване на максимална мощност в него, както и подобряване на фактора на мощността в мощни електроенергийни установки.

Освен полезни за практиката свойства резонансът може да има и вредни последици. Такъв е случаят с последователно свързани кондензатор, бобина и малко съпротивление. При резонанс върху реактивните елементи могат да се появят много високи напрежения, които да доведат до пробив на кондензатора, ако той не е избран с достатъчно високо пробивно напрежение. Типични примери са включване на ненатоварени дълги линии към генератори или трансформатори, при което могат да се появят пренапрежения, ако честотата е близка до резонансната. Тук може да се направи аналогия с разрушителни последици от съвпадането на честотата на механичния резонанс на строителни конструкции с честотата на ветрови или сеизмични въздействия.

Поради тези причини свойствата на резонансните вериги трябва да са добре известни на съвременния електро- или комуникационен инженер.

3.2. НАПРЕЖИТЕЛЕН РЕЗОНАНС В ПОСЛЕДОВАТЕЛНА RLC ВЕРИГА

Даден е последователен двуполусник със съпротивление R , индуктивност L и кондензатор C .



Фиг. 3.1

Когато ъгловата честота ω на входния синусоиден сигнал стане равна на резонансната честота ω_p , фазовата разлика φ_e се анулира, т.е. настъпва резонанс. Еквивалентното комплексно съпротивление на последователната RLC верига се определя като:

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX_e \quad (3.3)$$

Еквивалентното реактивно съпротивление X_e е равно на нула при резонанс. От полученото уравнение може да се намери резонансната честота:

$$X_e(\omega_p) = \omega_p L - \frac{1}{\omega_p C} = 0; \quad (3.4)$$

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3.5)$$

Тук трябва да се отбележи, че резонанс може да се получи и с изменение на величините L и C .

Еквивалентното комплексно съпротивление Z_p на двуполусника при резонанс има само реална съставка:

$$Z_p = z_p = R \quad (3.6)$$

Следователно за ефективната стойност на резонансния ток I_p се получава

$$I_p = \frac{U}{z_p} = \frac{U}{R} = I_{\max} \quad (3.7)$$

т.е., токът достига до своя максимум при резонансната честота. Използвайки това свойство, резонансната честота може да се определи експериментално по максималната стойност на тока в последователния RLC контур.

Ефективните стойности на напреженията върху реактивните елементи могат да се представят така:

$$U_{Lp} = \omega_p L I_p = \frac{L}{\sqrt{LC}} \frac{U}{R} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{U}{R} = \rho \frac{U}{R} = QU \quad (3.8)$$

$$U_{Cp} = \frac{1}{\omega_p C} I_p = \frac{\sqrt{LC}}{C} \frac{U}{R} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{U}{R} = \rho \frac{U}{R} = QU \quad (3.9)$$

Величината

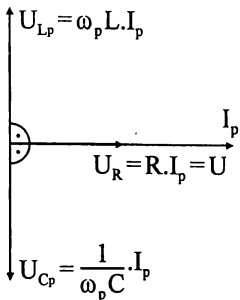
$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \omega_p L = \frac{1}{\omega_p C} \quad (3.10)$$

се нарича *вънново съпротивление* на последователния RLC двуполусник и се измерва в Ω .

Векторната диаграма на напреженията в случай на резонанс е показана на фиг. 3.2.

Поради изравняването на амплитудите на реактивните напрежения се казва, че в последователния RLC контур се осъществява напрежителен резонанс. Отношението

$$Q = \frac{\rho}{R} \quad (3.11)$$



Фиг. 3.2

се нарича *качествен фактор* (*Q-фактор*) на последователния двуполусник. Използвайки понятието *Q-фактор*, напреженията върху реактивните елементи могат да се представят така:

$$U_{Lp} = U_{Cp} = QU \quad (3.12)$$

Вижда се, че качественият фактор показва колко пъти ефективните стойности на напреженията върху реактивните елементи при резонанс са по-големи от ефективната стойност на входното напрежение. Величината *Q-фактор* определя резонансните свойства на веригата. В съвременната радиотехническа апаратура качественият фактор на използваните резонансни контури се движи между 10 и 500, затова в режим на резонанс напрежението върху реактивните елементи на контура може значително да превишава приложеното на входа напрежение.

Q-факторът на последователния резонансен контур може да бъде изразен чрез *Q-факторите* на неговите елементи:

$$Q_L = \frac{X_L}{R_{LP}} = \frac{\omega L_P}{R_{LP}} ; \quad Q_C = \frac{X_C}{R_{CP}} = \frac{1}{\omega C_P R_{CP}} \quad (3.13)$$

където L_P, R_{LP}, C_P, R_{CP} са елементите на последователните заместващи схеми на бобината и кондензатора. В радиотехниката е желателно да се използват качествени елементи с висок *Q-фактор*, за да се намали влиянието на паразитните параметри на реактивните елементи върху функционирането на веригите. Обикновено качественият фактор на бобините се движи между няколко десетки и няколко стотин, а качественият фактор на кондензаторите се движи от няколко стотин до няколко хиляди.

Ако се отчете, че съпротивлението на загубите в контура може да се представи като сума от съпротивленията на загубите в бобината и в кондензатора $R = R_{LP} + R_{CP}$ и се раздели този израз на $\rho = \omega_p L = 1/(\omega_p C)$, се получава:

$$R / \rho = 1/Q = R_{LP} / (\omega_p L) + \omega_p C R_{CP} , \quad (3.14)$$

което може да се запише като

$$1/Q = 1/Q_{Lp} + 1/Q_{Cp} \quad (3.15)$$

Този израз показва, че качественият фактор на контура не може да превишава качественият фактор на елементите му при резонансната честота. Обикновено $Q_{Cp} \gg Q_{Lp}$, затова качественият фактор на контура основно се определя от качествения фактор на бобината при резонансната честота.

3.2.1. Енергийни процеси в последователен резонансен контур

При синусоидален ток $i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i)$ за напрежението на кондензатора u_C се намира:

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{C} \int i_m \sin(\omega t + \psi_i) dt = -\frac{i_m}{\omega C} \cos(\omega t + \psi_i).$$

Запасените енергии в реактивните елементи се намират, като:

$$W_L = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{Li_m^2}{2} \sin^2(\omega t + \psi_i) = \frac{Li_m^2}{2} [1 - \cos 2(\omega t + \psi_i)]/2 \quad (3.16)$$

$$W_C = \frac{1}{2} Cu_C^2 = \frac{Ci_m^2}{2\omega^2 C^2} \cos^2(\omega t + \psi_i) = \frac{i_m^2}{2\omega^2 C} [1 + \cos 2(\omega t + \psi_i)]/2 \quad (3.17)$$

Както се вижда от тези формули, енергиите, запасени в индуктивността и в кондензатора, имат по две съставки – постоянна съставка и съставка, изменяща се във времето по косинусоидален закон с удвоена честота 2ω . Променливите съставки се намират в противофаза, така че при максимална стойност на енергията в кондензатора енергията в обината ще има нулева стойност и обратно. Тъй като при резонанс е в сила $L = 1/(\omega_p^2 C)$, то сумарната запазена енергия в реактивните елементи ще бъде постоянна величина, равна на максималната стойност на запасената енергия в кой да е от двата елемента.

$$W_p = W_{Lp} + W_{Cp} = \frac{1}{4} Li_m^2 + \frac{1}{4} \frac{i_m^2}{\omega_p^2 C} = \frac{1}{2} Li_m^2 = \text{const.} \quad (3.18)$$

Извод: При резонанс сумарната електромагнитна енергия в дуполусника е постоянна величина.

Кондензаторът и обината на контура при резонанс непрекъснато обменят енергия. Обменът на енергия се извършва без участието на източника на енергия – фазовата разлика между тока и напрежението в този режим е равна на нула, затова реактивната мощност, отдавана от източника също е равна на нула, и обмен на енергия между източника и контура не се извършва. Първоначалното натрупване на енергия се извършва при включване на контура към източника. Източникът на енергия само покрива загубите на енергия в съпротивлението R , което може да се покаже, като се изчисли енергията, консумирана от контура за един период, и енергията, необратимо превърнала се в топлина в съпротивлението на контура.

Отношението на енергията, запасена в реактивните елементи на контура, към енергията, консумирана от източника за един период T , се записва така:

$$\frac{W_{зан}}{W_{конс}} = \frac{Li_m^2 / 2}{RI^2T} = \frac{L}{RT}$$

Като се има предвид, че при резонанс $T = 1 / f_p = 2\pi / \omega_p$, се получава

$$\frac{W_{зан}}{W_{конс}} = \frac{\omega_p L}{2\pi R} = \frac{Q}{2\pi},$$

откъдето

$$Q = 2\pi \frac{W_{зан}}{W_{конс}} \quad (3.19)$$

Това е нов дефиниционен израз за качествения фактор, който е по-общ и може да се прилага за различни видове резонансни системи, в това число и механични.

Честотни зависимости

Зависимостите на пълното съпротивление, реактивните съпротивления и фазовата разлика между тока и напрежението от честотата са дадени по-долу:

$$X_L(\omega) = \omega L; \quad X_C(\omega) = \frac{1}{\omega C}; \quad X(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad (3.20)$$

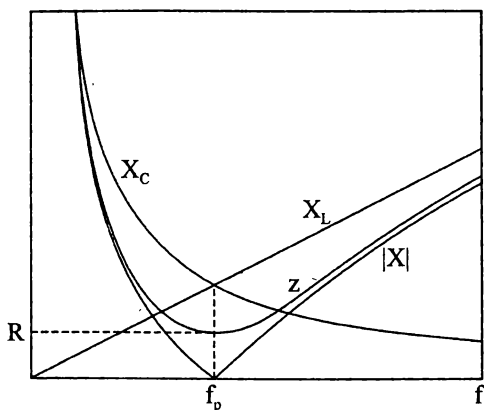
$$z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}; \quad \varphi(\omega) = \arctg \left[\frac{1}{R} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right] \quad (3.21)$$

Тези зависимости са показани на фиг. 3.3-3.4. Зависимостите на ефективните стойности на тока и напреженията върху отделните елементи от честотата се дават с формулите:

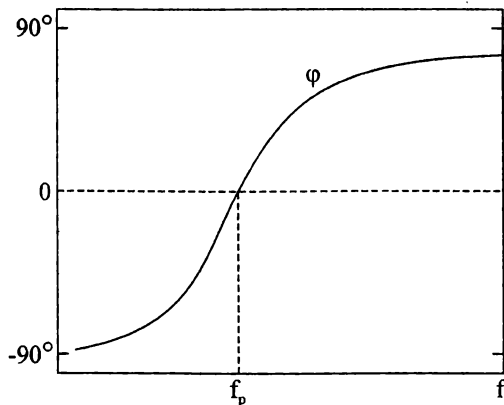
$$I(\omega) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \quad (3.22)$$

$$U_C(\omega) = \frac{1}{\omega C} I(\omega); \quad U_L(\omega) = \omega L I(\omega); \quad U_R(\omega) = R I(\omega) \quad (3.23)$$

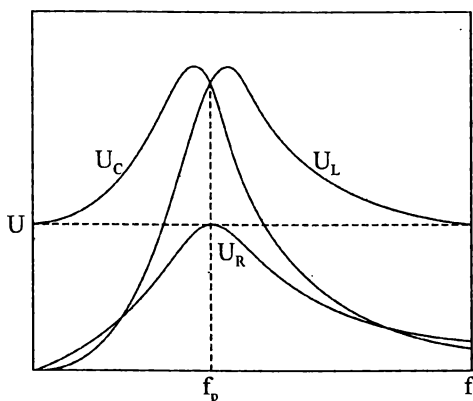
Те са показани на фиг. 3.5.



Фиг. 3.3



Фиг. 3.4



Фиг. 3.5

Ходът на графиките от фиг. 3.5 може да се обясни по следния начин. При $\omega=0$ токът във веригата е нула ($I=0$), защото има включен последователно кондензатор, който не пропуска постоянния ток и съответно цялото входно напрежение ще бъде приложено на изводите на кондензатора ($U_C=U$). При $\omega=\infty$ токът ще бъде отново нула ($I=0$), тъй като съпротивлението на бобината е безкрайно. Съответно цялото входно напрежение ще бъде приложено на изводите на бобината ($U_L=U$). При резонансна честота $\omega=\omega_p$ напреженията върху реактивните елементи се изравняват по модул $U_L=U_C$, но тъй като са в противофаза те взаимно се компенсират и тогава цялото входно напрежение се оказва приложено върху активното съпротивление R ($U=U_R=RI$). Графиката на фиг. 3.5 е начертана за случая $Q>1$, поради което $U_C=U_L>U$. Максимумът на U_C се получава при честота, по-малка от резонансната, т.е., преди максимума на тока, тъй като за получаването на U_C е необходимо да се умножи тока по намаляващата величина $1/(\omega C)$. Максимумът на U_L се достига при честота, по-голяма от резонансната, тъй като за получаването на U_L е необходимо да се умножи тока по нарастващата величина ωL . Разликите в честотите, при които се достига максимум на U_L и U_C по отношение на резонансната честота са много малки и често могат да се пренебрегнат. Наистина, ако се изследват функциите на $U_C(\omega)$ и $U_L(\omega)$ за максимум, се намира, че функцията $U_C(\omega)$ има

максимум на честота $\omega_C = \omega_p \sqrt{1 - 1/(2Q^2)}$, а функцията $U_L(\omega)$ – на честота $\omega_L = \omega_p / \sqrt{1 - 1/(2Q^2)}$. Може да се провери, че ако $Q \geq 5$, разликата на ω_L и ω_C от резонансната честота ω_p не превишава $0,01\omega_p$, затова за повечето практически важни случаи може да се счита, че функциите $U_C(\omega)$ и $U_L(\omega)$ имат максимум при резонансната честота. Ясно е, че в случаите на вериги с висок качествен фактор, резонансните честоти на амплитудния и фазовия критерий за резонанс съвпадат.

Най-важната особеност на последователния резонансен контур е, че при резонансна честота и в тесен диапазон около нея амплитудата на тока достига максимална стойност. На честоти, значително отличаващи се от резонансната, амплитудата на тока е с много пъти по-малка стойност. Ако на входа на такъв контур се подаде сума от хармонични колебания, то на изхода му (върху C или L) ще се забележи, че амплитудата на колебанията с честота, близка до резонансната, значително превишава амплитудата на колебания с честота, силно отличаваща се от резонансната. Преносно казано контурът „пропуска“ колебания с едни честоти и „не пропуска“ колебания с други честоти. Способността на електрическата верига да отделя колебанията на някои честоти от сумата от колебания с различни честоти се нарича „избирателност“.

Избирателността се свързва тясно с т.н. *широчина на честотната лента на пропускане* $\Delta\omega_n$, която се определя с формулата

$$\Delta\omega_n = \omega_2 - \omega_1 \quad (3.24)$$

Честотите ω_1 и ω_2 се определят обикновено на ниво $0,707 (1/\sqrt{2})$ от максимума на тока в двуполусника. Прието е условно да се казва, че веригата пропуска честотите, за които $I > I_p / \sqrt{2}$, т.е. честотите, за които мощността RI^2 , поглъщана от веригата, е по-голяма от половината от максималната мощност RI_p^2 при резонанс – $P(\omega_2) = P(\omega_1) = 0,5P(\omega_p)$. В този смисъл честотната лента на пропускане може да се дефинира като диапазона честоти, за които е изпълнено условието $I > I_p / \sqrt{2}$.

Важно практическо значение има формулата за качествения фактор Q , изразен чрез широчината на лентата на пропускане. Изводът на тази формула се извършва така:

$$\frac{I}{I_p} = \frac{U/z}{U/R} = \frac{R}{z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{\omega_p L}{R} \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega}\right)\right]^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right)^2}} \quad (3.25)$$

Означава се $\eta = \frac{\omega}{\omega_p}$, с наименование *относителна честота*.

Полага се $\frac{I}{I_p} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. С това се получава уравнението:

$$1 + Q^2 \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right)^2 = 2$$

Положителните корени на това уравнение са

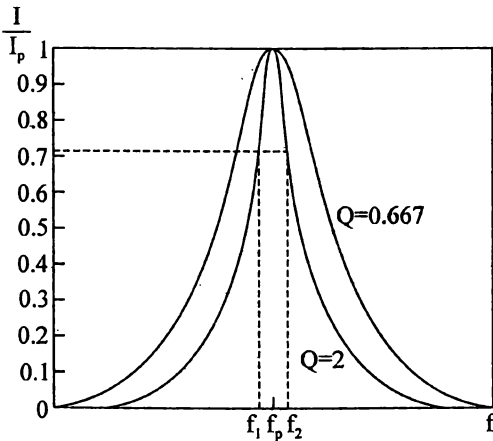
$$\eta_{1,2} = \pm 1/(2Q) + \sqrt{1/(2Q)^2 + 1},$$

откъдето се получава

$$\eta_2 - \eta_1 = \frac{1}{Q} \quad (3.26)$$

или още

$$Q = \frac{1}{\Delta\eta} = \frac{\omega_p}{\omega_2 - \omega_1} \quad (3.27)$$



Фиг. 3.6

Оттук се вижда, както и от фиг. 3.6, че колкото е по-голям качественият фактор Q , толкова по-тясна е резонансната крива $\frac{I}{I_p}(\eta)$ и толкова по-селективна ще бъде веригата.

3.3. ТОКОВ РЕЗОНАНС В ПАРАЛЕЛНА GLC ВЕРИГА

Условието за резонанс при паралелно съединение на активно съпротивление, бобина и кондензатор (фиг. 3.7) е отново нулева дефазация между тока и напрежението в двуполусника: $\varphi_e = 0$. Тъй като комплексната проводимост на паралелната верига се дава с израза

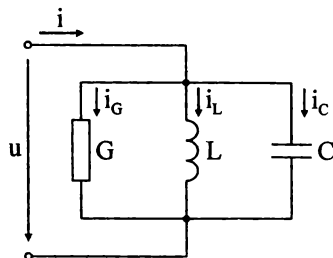
$$Y = G + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = G - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) = G - jB_e, \quad (3.28)$$

то условието за резонанс се свежда до $B_e = 0$, или

$$B_e(\omega_p) = \frac{1}{\omega_p L} - \omega_p C = 0 \quad (3.29)$$

От полученото уравнение следва, че резонансната честота е равна на:

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3.30)$$



Фиг. 3.7

Комплексната проводимост на веригата при резонанс е чисто активна и равна на $Y_p = y_p = G$. Следователно ефективната стойност на общия ток при резонанс има минимална стойност:

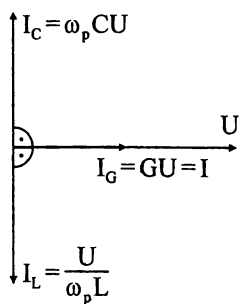
$$I_p = y_p U = GU = I_{\min} \quad (3.31)$$

За ефективните стойности на токовете в реактивните елементи се получава:

$$I_{Lp} = \frac{1}{\omega_p L} U = \frac{\sqrt{LC}}{L} U = \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{I_p}{G}; \quad I_{Cp} = \omega_p C U = \frac{C}{\sqrt{LC}} U = \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{I_p}{G} \quad (3.32)$$

Въвежда се величината $\gamma = \sqrt{\frac{C}{L}} = \omega_p C = \frac{1}{\omega_p L}$, наречена *въннова проводимост*. Тя има размерност *сименс* ($[\gamma] = S$). Като се въведе *качественият фактор* Q , въз основа на отношението $Q = \frac{\gamma}{G}$, се намира:

$$I_{Lp} = I_{Cp} = Q I_p \quad (3.33)$$



Фиг. 3.8

От този израз се вижда, че качественият фактор Q показва колко пъти ефективната стойност на тока в който и да е от реактивните елементи при резонанс е по-голяма от ефективната стойност на общия ток.

Поради изравняването на амплитудите на реактивните токове се казва, че в паралелната GLC верига се осъществява токов резонанс. Това е показано на векторната диаграма на фиг. 3.8.

3.3.1. Енергийни процеси в паралелна резонансна верига

Енергийните процеси при резонанс в паралелно свързани резистор, бобина и кондензатор са аналогични на тези в последователно свързани елементи R, L, C . Тук също е в сила, че $p_L = -p_C$. И в този случай се получава колебание на енергия във веригата. Енергията се предава от кондензатора в бобината и обратно, без да се прави обмен с източника, захранващ веригата. Източникът само компенсира загубите на енергия в клон с проводимост G .

Честотни зависимости

Честотните зависимости на проводимостите се дават с изразите:

$$B_C(\omega) = \omega C; \quad B_L(\omega) = \frac{1}{\omega L}; \quad B(\omega) = \frac{1}{\omega L} - \omega C; \quad y(\omega) = \sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2};$$

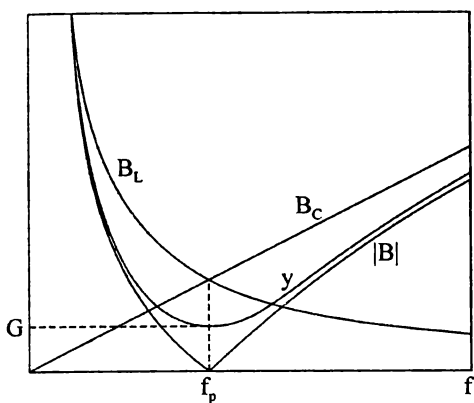
$$\varphi(\omega) = \arctg \left[\frac{1}{G} \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \right] \quad (3.34)$$

Те са показани на фиг. 3.9 и 3.10.

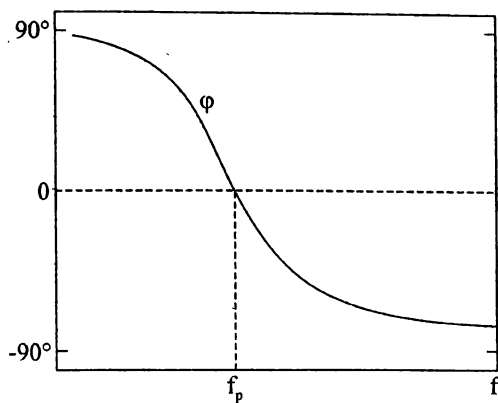
Честотните зависимости на общото напрежение $U(\omega)$ и на токовете I_L, I_C, I_G са дадени в (3.35) и (3.36), а графичното им изображение е на фиг. 3.11. Тези зависимости са записани при предположение, че общият ток I е даден ($I = \text{const}$):

$$U(\omega) = \frac{I}{y} = \frac{I}{\sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}} \quad (3.35)$$

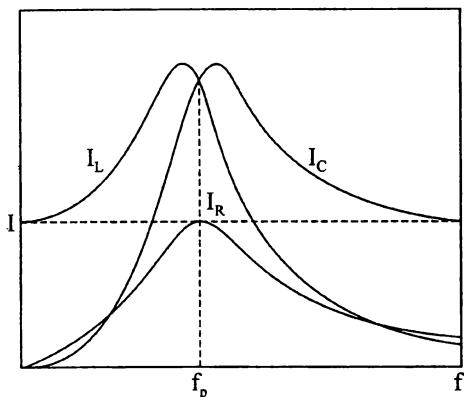
$$I_L(\omega) = U(\omega)/(\omega L); \quad I_C(\omega) = \omega C U(\omega); \quad I_G(\omega) = G U \quad (3.36)$$



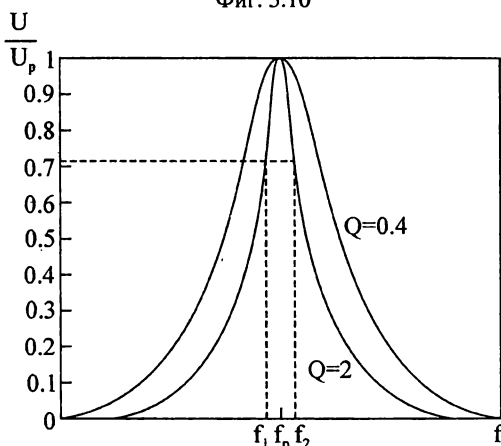
Фиг. 3.9



Фиг. 3.10



Фиг. 3.11



Фиг. 3.12

На фиг. 3.12 са показани нормираните характеристики на напрежението върху паралелните елементи за два различни Q -фактора. Ако се изследва зависимостта $U/U_p(\omega)$, може да установи и в този случай, че е в сила равенството $\eta_2 - \eta_1 = 1/Q$, където η_2 и η_1 са стойностите на относителната честота η , при които $U/U_p = 1/\sqrt{2}$.

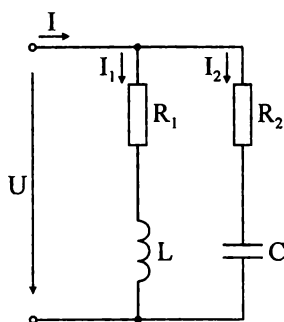
3.4. РЕЗОНАНС В СЛОЖНИ ВЕРИГИ

Показаните в предните два параграфа свойства и честотни характеристики са за най-прости резонансни вериги – последователна RLC и паралелна GLC вериги с идеални елементи, характеризиращи се с по един параметър. В реална ситуация елементите имат загуби и паразитни параметри, което услож-

нява веригите и простите формули от предните параграфи не дават добра точност. Освен това в практиката се използват и значително по-сложни резонансни вериги с по няколко реактивни елементи. В тези случаи е необходимо да се използват общите условия за резонанс, за да се определят резонансната честота и честотните характеристики – а именно, да се запишат изразите за комплексното съпротивление или комплексната проводимост на веригата и да се отдели и се приравни на нула имагинерната им част. С решаването на получените уравнения се определят резонансните честоти на веригата.

Като пример ще бъде анализирана веригата от фиг. 3.13, за която се търсят резонансните честоти.

Пример 3.1.



Фиг. 3.13

Комплексната проводимост на тази верига има вида:

$$\begin{aligned}
 Y_e &= Y_1 + Y_2 = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R_1 + j\omega L} + \frac{1}{R_2 - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{R_1 - j\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} + \frac{R_2 + \frac{j}{\omega C}}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \\
 &= \frac{R_1}{R_1^2 + \omega^2 L^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + 1/(\omega^2 C^2)} - j \left(\frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} - \frac{1/(\omega C)}{R_2^2 + 1/(\omega^2 C^2)} \right) = G_e - jB_e
 \end{aligned}$$

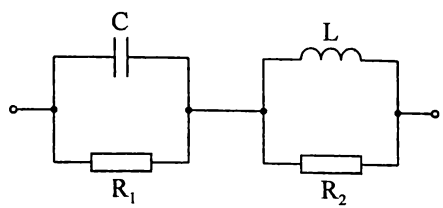
Прилага се условието за паралелен резонанс $B_e = 0$, откъдето за резонансната честота се намира:

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{L/C - R_1^2}{L/C - R_2^2}} \quad (3.37)$$

Представява интерес частният случай, когато

$$R_1 = R_2 = R = \sqrt{L/C} . \quad (3.38)$$

Тогава може да се установи, че реактивната проводимост ще бъде равна на нула за всяка стойност на честотата, т.е. в тази верига ще има резонанс при всяка честота. Може да се провери, че при това съпротивлението на веригата ще остане неизменно и равно на R при всички честоти. Тази верига намира приложение, когато е необходимо да се осигури активен товар в широк честотен обхват на усилвателни схеми. Със същите свойства е и веригата от фиг. 3.14, която е дуална на тази от фиг. 3.13.



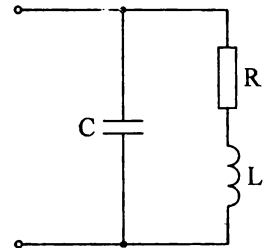
Фиг. 3.14

Трябва да се отбележи, че тъй като реалните параметри на една верига зависят от честотата, условието (3.38) не може да се изпълни в много широк честотен обхват.

Пример 3.2. Вариант на паралелен резонансен двуполусник $R-L||C$ (фиг. 3.15)

Търсят се резонансната честота и пълното съпротивление при резонанс.

Тъй като веригата е паралелна, ще се използва условието за паралелен резонанс $B_e = 0$. За да се намери B_e и положи равно на нула, се записва комплексната проводимост:



Фиг. 3.15

$$\begin{aligned}
 Y &= j\omega L + \frac{1}{R + j\omega L} = j\omega L + \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = \\
 &= \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} - j \left(\frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} - \omega C \right) = G_e - jB_e
 \end{aligned}
 \tag{3.39}$$

При резонанс Y е чисто реално, т.е. $B_e(\omega_p) = \frac{\omega_p L}{R^2 + (\omega_p L)^2} - \omega_p C = 0$

Решава се това уравнение относно ω_p :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{L - CR^2}{L^2 C}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{CR^2}{L}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{R^2}{\rho^2}}
 \tag{3.40}$$

където $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, а $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

За да се определи комплексната проводимост при резонанс, се замества изразът за ω_p в (3.39):

$$Y_p = \frac{R}{R^2 + (\omega_p L)^2} = \frac{R}{R^2 + (L - CR^2)/C} = \frac{RC}{L} \quad (3.41)$$

Съответно комплексното съпротивление при резонанс ще бъде равно на:

$$Z_p = \frac{1}{Y_p} = \frac{L}{RC} = \frac{\rho^2}{R} \quad (3.42)$$

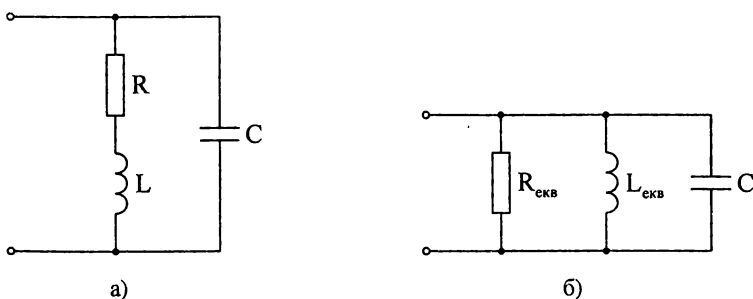
Изводи:

- 1) Ако $CR^2/L > 1$, тогава няма реално решение за ω_p . Физическият смисъл е, че токът и напрежението на изводите на веригата не могат да бъдат във фаза при каквато и да е честота.
- 2) Ако $CR^2/L < 1$ (или още $\rho^2 = \frac{L}{C} > R^2$), ще има една единствена резонансна честота ω_p , която е по-малка от ω_0 .
- 3) При $\omega = \omega_p$ еквивалентното съпротивление е чисто активно, равно на $\frac{L}{RC}$, което е по-голямо от R .

Пример 3.3. Алтернативно разглеждане на паралелна $R-L||C$ верига:

Ако се отчита съпротивлението на проводника на бобината, за една паралелна LC верига се стига до следната заместваща схема:

- а) неидеална паралелна LC верига б) еквивалентната \acute{u} RLC верига



Фиг. 3.16

Тази схема може да се замени с еквивалентна паралелна RLC верига. Стойностите за еквивалентните $R_{екв}$ и $L_{екв}$ и резонансната честота могат да се определят така:

$$Y = \frac{1}{-jX_C} + \frac{1}{R + jX_L} = j\frac{1}{X_C} + \frac{R - jX_L}{R^2 + jX_L^2} = \frac{R}{R^2 + X_L^2} - j\left(\frac{X_L}{R^2 + X_L^2} - \frac{1}{X_C}\right)$$

При резонанс Y е чисто активно, така че имагинерната част на горния израз се анулира. Тогава еквивалентното комплексно съпротивление ще бъде също чисто реално и равно на

$$Z_p = \frac{1}{Y_p} = \frac{R^2 + X_{Lp}^2}{R} = R + \frac{X_{Lp}^2}{R}$$

След изваждане пред скоби на R се получава

$$Z_p = R\left(1 + \frac{X_{Lp}^2}{R^2}\right) = R(1 + Q^2) = R_{екв},$$

тъй като Q -факторът на веригата е просто Q -факторът на бобината

$$Q = \frac{X_{Lp}}{R} = \frac{\omega_p L}{R}$$

$$\therefore R_{екв} = R(1 + Q^2)$$

Тъй като при паралелен резонанс $B_e = 0$, то

$$\frac{X_{Lp}}{R^2 + X_{Lp}^2} - \frac{1}{X_{Cp}} = 0$$

След привеждане под общ знаменател:

$$X_{Cp} = \frac{R^2 + X_{Lp}^2}{X_{Lp}} = X_{Lp}\left(1 + \frac{R^2}{X_{Lp}^2}\right) = X_{Lp}\left(1 + \frac{1}{Q^2}\right) = X_{Lp(екв)}$$

Оттук, като се раздели на ω_p , за еквивалентната индуктивност се получава:

$$L_{екв} = L\left(\frac{Q^2 + 1}{Q^2}\right)$$

Ако $Q \geq 10$, то $L_{екв} \cong L$.

От условието за резонанс $\frac{\omega_p L}{R^2 + (\omega_p L)^2} - \omega_p C = 0$ може да се намери

формулата за резонансната честота, като тя ще бъде изразена чрез ω_0 и Q . Умножава се от двете страни по $\omega_p L$:

$$\frac{(\omega_p L)^2}{R^2 \left(1 + \frac{(\omega_p L)^2}{R^2} \right)} = \omega_p^2 LC; \quad \frac{Q^2}{1 + Q^2} = \omega_p^2 LC$$

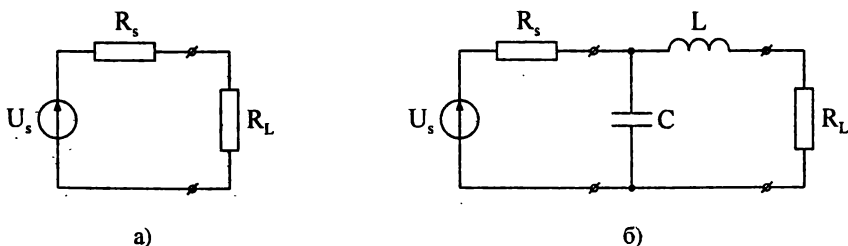
$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{Q}{\sqrt{Q^2 + 1}} = \omega_0 \frac{Q}{\sqrt{Q^2 + 1}}.$$

Когато $Q \geq 10$, вторият член в израза е приблизително равен на 1. Наистина $\frac{Q}{\sqrt{Q^2 + 1}} = \frac{10}{\sqrt{101}} = 0.995 \cong 1$.

Следователно, честотата на паралелния резонанс в реалната паралелна верига със загуби е приблизително същата като тази на идеалния паралелен двуполусник, ако Q -факторът на бобината е по-голям от 10.

Пример 3.4. Предаване на максимална мощност в товар.

Исходното стъпало на радиопредавател е представено със синусоиден източник на напрежение с честота $f = 1 \text{ MHz}$, ефективна стойност $U_s = 50 \text{ V}$ и вътрешно съпротивление $R_s = 100 \Omega$. Товарното съпротивление представлява модел на антена, свързана към източника. Целта на този пример е да покаже как може да бъде проектирана съгласуваща верига, основаваща се на резонансен принцип, за да максимизира доставяната мощност в товара (т.е., антената).



Фиг. 3.17

а) Използвайки изходната верига от фиг. 3.17а, да се намери стойността на R_L , при която се отдава максимална активна мощност в товара P_L . Каква е стойността на $P_{L\max}$?

б) Ако стойността на товара на фиг. 3.17а е $R_L = 20 \Omega$, да се намери P_L .

в) Нека отново $R_L = 20 \Omega$, но сега е включена съгласуваща LC верига (фиг. 3.17б) между източника и товара, за да се увеличи стойността на P_L . Да се изчислят стойностите на елементите на съгласуващата верига L и C така, че да се получи $P_{L\max}$ от т. а).

Решение:

а) От теоремата за предаване на максимална мощност, условието за предаване на максимална мощност в товара е

$$R_L = R_S = 100 \Omega,$$

при което

$$P_{L\max} = \frac{U_s^2}{4R_S} = \frac{50^2}{400} = 6.25 \text{ W}$$

б) При товар $R_L = 20 \Omega$:

$$U_L = \frac{U_s}{R_S + R_L} R_L = \frac{50 \cdot 20}{100 + 20} = 8,33 \text{ V}$$

$$P_L = \frac{U_L^2}{R_L} = \frac{8,33^2}{20} = 3,472 \text{ W}$$

в) Ако импедансът на входните изводи на LC -съгласуващата верига може да бъде направен равен на $(100 + j0) \Omega$, тогава от източника ще бъде консумирана максимална мощност. Тъй като LC елементите не консумират активна мощност, същата максимална мощност ще бъде доставяна към товарното съпротивление. Резонансната верига от фиг. 3.17б е едно възможно решение. За да се изчислят стойностите на елементите L и C се използват формули (3.40) и (3.42):

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} \Rightarrow (2\pi \cdot 1 \cdot 10^6)^2 = \frac{1}{LC} - \frac{20^2}{L^2}$$
$$Z_p = \frac{L}{RC} \Rightarrow 100 = \frac{L}{20C}$$

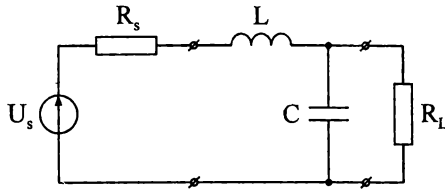
Решавайки тези уравнения относно L и C се получава

$$L = 6,37 \mu\text{H} \text{ и } C = 3,18 \text{ nF}$$

Забележка:

Ако съпротивлението на източника е по-малко от фиксираното съпротивление на товара, C се свързва в паралел на R_L (фиг. 3.18). В този случай Z_p остава същото, а за ω_p трябва да се използва следната формула:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{R^2 C^2}}.$$



Фиг. 3.18

4

СИНУСОИДАЛЕН РЕЖИМ В ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ С ИНДУКТИВНИ ВРЪЗКИ

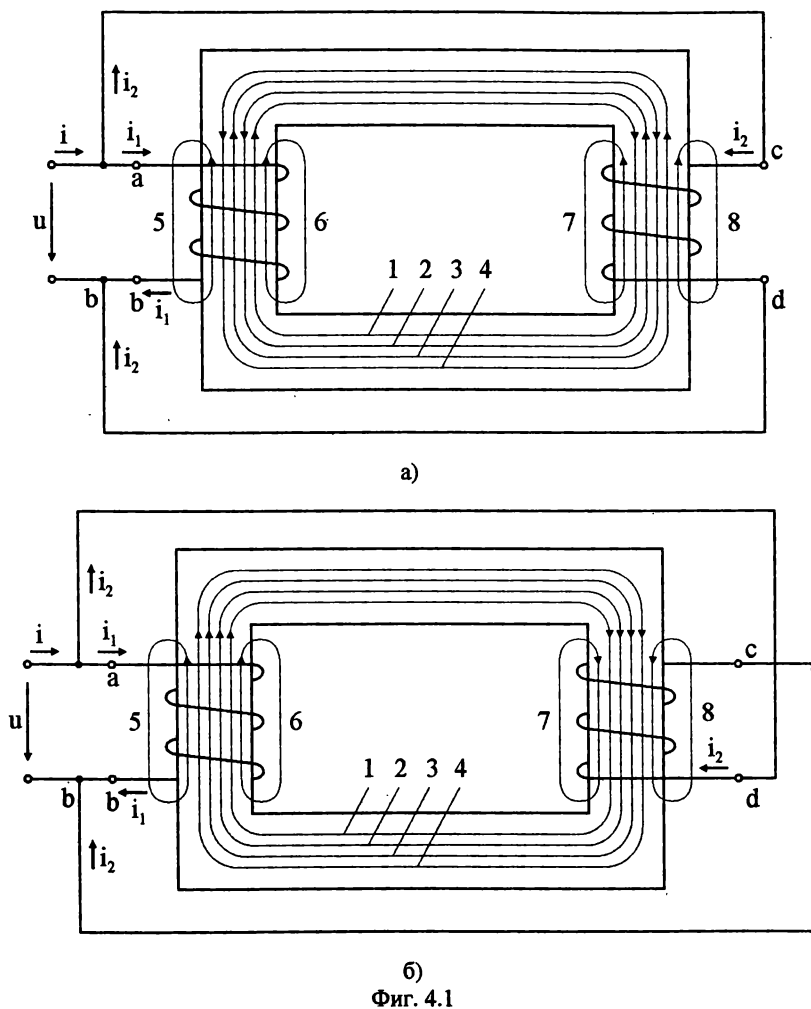
4.1. ВЪВЕДЕНИЕ

Две намотки са индуктивно свързани или се намират в магнитна връзка, когато всяка от тях обхваща магнитен поток, създаден от тока на другата намотка. Изучаването на физическите процеси на магнитно взаимодействие е най-лесно, когато намотките са навити върху общ магнитопровод. Както при електрическия проводник, който поради своята електропроводност съсредоточава токовите линии, така и магнитопроводът съсредоточава линиите на магнитната индукция вследствие на магнитната проводимост на материала. Този ефект предопределя разпределението на магнитните потоци и позволява ясно да се разграничи общият за намотките магнитен поток от наличните разсеяни (паразитни) потоци. Проводимостта на проводниците е толкова по-голяма, колкото по-голяма е тяхната специфична електропроводимост γ , докато магнитната проводимост нараства с увеличаване стойността на относителната магнитна проницаемост μ_r на средата. Докато дори при резисторите с много голямо съпротивление γ има относително големи стойности (например за сплавта константан $\gamma = 2 \times 10^6 \text{ Sm}^{-1}$), стойността на относителната магнитна проницаемост за най-добрите в практиката ферромагнетици е с няколко порядъка по-малка (например за стомана с 4% съдържание на силиций $\mu_r = 7 \times 10^3$). Това сравнение обяснява защо съществуват разсеяни магнитни потоци в магнитните вериги, даже и при ферромагнетици със специални качества (например за пермалой $\mu_r \approx 1 \times 10^6$). Тези потоци нарастват още повече при наличието на въздушна междина в магнитопровода.

На фиг.4.1а е показан магнитопровод с намотки 1 и 2, през които протичат съответно токовете i_1 и i_2 . Тези токове създават магнитни потоци. Посоката на магнитните линии се определя по правилото на десния винт. Ако посоката на въртене на винта съвпада с посоката на тока, напредването на винта определя посоката на създадените от тока магнитни линии. За простота са означени само по две индукционни (магнитни) линии за всеки от потоците. Линиите 1 и 3 символизират магнитния поток Φ_{21} , създаден от тока i_1 . Неговите магнитни линии се обхващат от всяка една навивка на намотката 2. Те са част от общия за двете намотки поток. Токът i_1 обуславя още потока $\Phi_{\sigma 1}$. На фигурата той е представен с линиите 5 и 6. Магнитните линии на $\Phi_{\sigma 1}$ не достигат

намотката 2, а се затварят през въздуха около намотката 1. Затова той се нарича *разсеян* поток. Или токът i_1 създава потока $\Phi_{11} = \Phi_{\sigma 1} + \Phi_{21}$, чийто магнитни линии се обхващат от всяка една навивка на намотката 1. Потокът, който се обхваща едновременно от всички w_1 на брой навивки на намотката 1 и е създаден от тока i_1 , се нарича *пълен собствен магнитен поток на намотката 1*. Той се определя с израза

$$\Psi_{11} = w_1 \Phi_{11} = w_1 (\Phi_{\sigma 1} + \Phi_{21}). \quad (4.1)$$



От своя страна токът i_2 е източник на следните магнитни потоци. Линиите 2 и 4 символизират потока Φ_{12} , който достига намотката 1 и е обхванат от

всяка нейна навивка. Това е другата част от общия за двете намотки поток. Токът i_2 създава също разсеян поток $\Phi_{\sigma 2}$, чийто магнитни линии 7 и 8 се затвартят през въздушната среда около намотката 2. Двата магнитни потока образуват потока $\Phi_{22} = \Phi_{\sigma 2} + \Phi_{12}$, който се обхваща от всяка навивка на намотката 2. Обхванатият от всичките w_2 на брой навивки *пълнен собствен магнитен поток* се създава от тока i_2 и се определя с израза

$$\Psi_{22} = w_2 \Phi_{22} = w_2 (\Phi_{\sigma 2} + \Phi_{12}). \quad (4.2)$$

Следователно намотките от фиг. 4.1а обхващат пълните магнитни потоци

$$\text{за намотка 1:} \quad \Psi_1 = w_1 (\Phi_{11} - \Phi_{12}) = w_1 \Phi_{11} - w_1 \Phi_{12} = \Psi_{11} - \Psi_{12}; \quad (4.3)$$

$$\text{за намотка 2:} \quad \Psi_2 = w_2 (\Phi_{22} - \Phi_{21}) = w_2 \Phi_{22} - w_2 \Phi_{21} = \Psi_{22} - \Psi_{21}. \quad (4.4)$$

Потоците $\Psi_{12} = w_1 \Phi_{12}$ *и* $\Psi_{21} = w_2 \Phi_{21}$ *се наричат пълни взаимни магнитни потоци*. Те са обхванати от всички навивки на едната намотка, но са създадени от тока на другата. Знакът в (4.3) и (4.4) е отрицателен, тъй като магнитните линии на собствения поток Ψ_{11} и тези на взаимния поток Ψ_{12} в обема на намотката 1, която ги обхваща, са противоположни (фиг. 4.1а). Аналогична е и взаимната ориентация на потоците Ψ_{22} и Ψ_{21} в обема на намотката 2. Когато *собственият и взаимният пълнен магнитен поток в намотката, която ги обхваща, са противоположни, намотките са свързани противоположно (на срещано)*.

На фиг. 4.1б е показан магнитопроводът със същите намотки с разлика, че токът i_2 е в обратна на предишната посока. Това води до промяна в посоката на всички магнитни линии, създадени от този ток: обръщат се посоките на Φ_{22} и на Φ_{12} , а следователно и на съответните пълни магнитни потоци Ψ_{22} и Ψ_{12} . В този случай *пълният собствен и пълният взаимен поток, обхванати от една и съща намотка, са съпосочни*. Когато това условие е изпълнено *двете намотки са съпосочно магнитно свързани*, поради което алгебричните знаци в резултантните пълни потоци са положителни:

$$\Psi_1 = w_1 (\Phi_{11} + \Phi_{12}) = w_1 \Phi_{11} + w_1 \Phi_{12} = \Psi_{11} + \Psi_{12}, \quad (4.5)$$

$$\Psi_2 = w_2 (\Phi_{22} + \Phi_{21}) = w_2 \Phi_{22} + w_2 \Phi_{21} = \Psi_{22} + \Psi_{21}. \quad (4.6)$$

Следователно пълният магнитен поток, който се обхваща от всяка намотка, се определя най-общо с изразите:

$$\text{за намотка 1: } \Psi_1 = \Psi_{11} \pm \Psi_{12}; \quad \text{за намотка 2: } \Psi_2 = \Psi_{22} \pm \Psi_{21}. \quad (4.7)$$

В тези зависимости горният знак се отнася за съгласувано, а долният – за несъгласувано магнитно свързване.

Когато намотките са разположени в магнитно линейна среда, всеки пълен магнитен поток е пропорционален на съответния възбудителен ток. Коефициентите на пропорционалност за собствените потоци са коефициентите на самоиндуктивност (1.4), а за взаимните потоци – коефициентите на взаимна индуктивност между намотките (1.11). С отчитане на тези връзки уравненията (4.7) се видоизменят до

$$\Psi_1 = L_1 i_1 \pm M_{12} i_2 \quad \text{и} \quad \Psi_2 = L_2 i_2 \pm M_{21} i_1. \quad (4.8)$$

Степента на магнитна връзка между два индуктивно свързани елемента с параметри L_1 , L_2 и с взаимна индуктивност $M_{12} = M_{21} = M$ между тях, се характеризира с *коефициент на магнитната връзка* k . Той се дефинира с отношението

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}. \quad (4.9)$$

Последният израз може да се преобразува във вида:

$$k = \sqrt{\frac{M_{21} M_{12}}{L_1 L_2}} = \sqrt{\frac{\Psi_{21} \Psi_{12}}{i_1 i_2}} = \sqrt{\frac{w_2 \Phi_{21} w_1 \Phi_{12}}{w_1 \Phi_{11} w_2 \Phi_{22}}} = \sqrt{\frac{\Phi_{21} \Phi_{12}}{\Phi_{11} \Phi_{22}}}. \quad (4.10)$$

От зависимостите (4.1) и (4.2) личи, че винаги $\Phi_{21} \leq \Phi_{11}$ и $\Phi_{12} \leq \Phi_{22}$, откъдето следва, че $0 \leq k \leq 1$. Когато $\Phi_{21} = \Phi_{12} = 0$, т.е. няма взаимни потоци, $k = 0$ и между намотките няма индуктивна връзка, а при $\Phi_{21} = \Phi_{11}$ и $\Phi_{12} = \Phi_{22}$, няма потоци на разсейване, индуктивната връзка е максимална и $k = 1$.

4.2. ЕДНОИМЕННИ ИЗВОДИ

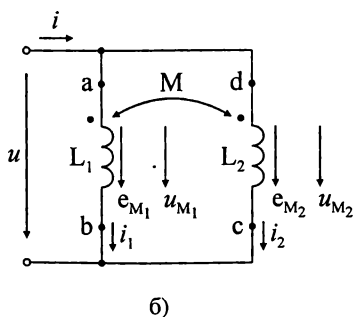
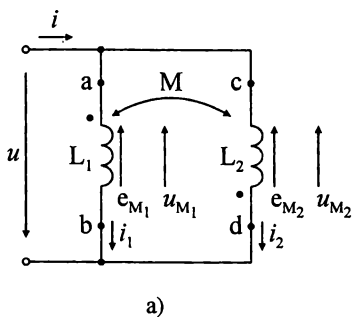
Два тока са еднакво ориентирани спрямо двойка изводи на индуктивно свързани намотки, ако токовете едновременно влизат или и двата едновременно излизат през тези изводи от намотките. На фиг. 4.1а токовете i_1 и i_2 са еднакво ориентирани спрямо изводите a и c , тъй като и двата тока влизат през тях към намотките 1 и 2. Те са еднакво ориентирани и спрямо изводите b и d , защото тези токове излизат през тях от намотките. Същевременно спрямо a и d (респ. b и c) токовете са различно ориентирани.

За анализа на вериги с индуктивна връзка е много важно понятието *едноименни изводи* (ЕИ). Два извода на индуктивно свързани намотки са едно-

менни, ако при еднаква ориентация на токовете спрямо тази двойка изводи, намотките са съпосочно свързани. Обратно, ако две намотки са съпосочно магнитно свързани, следва, че токовете в тях са еднакво ориентирани спрямо двойката едноименни изводи. За пояснение към казаното, ако токовете са различно ориентирани спрямо двойката едноименни изводи, намотките са противоположно магнитно свързани. И още, ако намотките са противоположно магнитно свързани, токовете в тях са различно ориентирани спрямо едноименните им изводи. Двата ЕИ винаги се означават с два еднакви символа, например: *, • или Δ . Кои два извода са едноименни, зависи от начина на навиване на намотките и от взаимното им разположение. Илюстрация за определяне на ЕИ е фиг. 4.1а,б. При означената посока на токовете на фиг. 4.1а намотките са противоположно свързани. В съответствие с казаното по-горе, това е възможно, ако токовете са различно ориентирани спрямо ЕИ на двете намотки. Следователно едноименни са двойките a (i_1 влиза към намотката 1) и d (i_2 излиза от намотката 2). Същото се отнася и за изводите b и c . Едната от двойките се маркира, например a и d .

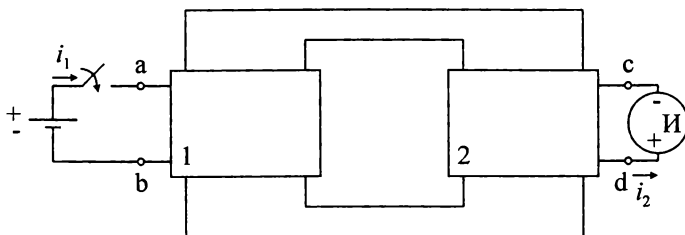
Може да се докаже, че посоките на токовете са без значение за ЕИ на намотките. На фиг. 4.1б са показани същите намотки, но при променена индуктивна връзка: токът i_2 във втората намотка е с посока, обратна на предишната посока. В този случай магнитната връзка е съпосочна. Съгласно правилото, токовете следва да са еднакво ориентирани спрямо едноименната двойка изводи на двете намотки. Следователно възможните комбинации за ЕИ са a и d (i_1 и i_2 влизат през тях към намотките) или b и c (i_1 и i_2 излизат през тях от намотките). Тъй като е запазена посоката на навиване и взаимното разположение между намотките, едноименни остават същата двойка изводи, независимо, че посоката на един от токовете е променена.

В електрическите схеми намотките се представят условно с идеални индуктивности, като ЕИ са винаги означени. За намотките 1 и 2 от фиг. 4.1а,б, това е показано съответно на фиг. 4.2а,б. Едноименните изводи са означени с точки (•); с двупосочна стрелка между взаимодействащите намотки е посочена индуктивната връзка, а над стрелката с $M_{12} = M_{21} = M$ е означен коефициентът на взаимна индукция. В заключение при известна посока на навиване и взаимно разположение на намотките едноименните изводи се определят, като се изхожда от характера на индуктивната връзка (фиг. 4.1а,б). Условното изображение от фиг. 4.2а,б дава пълна информация за физическите процеси в намотките. Тук видът на магнитната връзка се определя само от посоките на токовете спрямо едноименните изводи: на фиг. 4.2а токовете са различно ориентирани спрямо ЕИ, докато на фиг. 4.2б те са еднакво ориентирани. В първия случай елементите са свързани противоположно, а във втория – съпосочно.



Фиг. 4.2

Когато посоката на навиване на намотките не е известна, ЕИ може да се определят експериментално по схемата от фиг. 4.3. За целта във веригата на първата от индуктивно свързаните намотки за момент се включва източник на постоянно е.д.н. Стрелката на индикатора за постоянен ток, включен към втората намотка, се отклонява нормално, само ако посоката на тока е от извода + към извода -. Това съответства на правилното включване на уреда (в противен случай неговите изводи се разменят). Може да се проследи, че поради противоположната магнитна връзка едноименни се оказват изводите, които са директно свързани с положителния полюс на източника в първия контур и с извода + на индикатора към втората намотка. Това са изводите a и d , респективно b и c .



Фиг. 4.3

4.3. НАПРЕЖИТЕЛНИ ПАДОВЕ ОТ ЕЛЕКТРОМАГНИТНА ИНДУКЦИЯ

4.3.1. Определяне на напрежителните падове

Ако токовете в намотките са променливи, създадените от тях магнитни потоци са също зависими от времето. Тогава разглежданите намотки 1 и 2 (фиг. 4.1) обхващат променливите пълни магнитни потоци $\Psi_1(t)$ и съответно $\Psi_2(t)$. По закона за електромагнитната индукция във всяка от тях се индуцират електродвижещите напрежения:

$$e_{i1}(t) = -\frac{d\Psi_1(t)}{dt} = -\frac{d\Psi_{11}(t)}{dt} \mp \frac{d\Psi_{12}(t)}{dt}$$

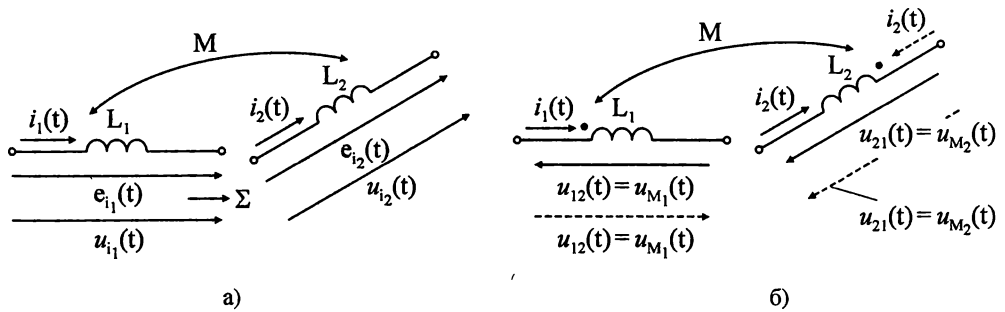
и $e_{i2}(t) = -\frac{d\Psi_2(t)}{dt} = -\frac{d\Psi_{22}(t)}{dt} \mp \frac{d\Psi_{21}(t)}{dt}.$

Като се имат пред вид зависимостите (4.8), за магнитно линейна среда горните изрази се преобразуват във вида

$$\left\{ \begin{aligned} e_{i1}(t) &= -L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \mp M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} = e_{L1}(t) \pm e_{M1}(t), \\ e_{i2}(t) &= -L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \mp M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} = e_{L2}(t) \pm e_{M2}(t). \end{aligned} \right. \quad (4.11)$$

Съставките на индуктираните е.д.н. $e_{i2}(t) = e_{M1}(t)$ и $e_{21}(t) = e_{M2}(t)$ се наричат *електродвижещи напрежения от взаимна индукция*. Явлението електромагнитна индукция е свързано с възникването и на напрежителните падове $u_{i1}(t)$ и $u_{i2}(t)$ в намотките. Прието е индуктираните е.д.н. $e_{i1}(t)$ и $e_{i2}(t)$, както и напрежителните падове $u_{i1}(t)$ и $u_{i2}(t)$, да се означават винаги съпосочно в съответния индуктивен елемент. Ако се разглеждат индуктивните елементи като самостоятелни вериги, напрежителният пад във всеки от тях съвпада с напрежението между полюсите му и напълно го дефинира. При означените на фиг. 4.4a посоки на алгебрично сумиране по обобщения закон на Ом за индуктивните елементи се записва

$$\left\{ \begin{aligned} u_{i1}(t) + e_{i1}(t) &= 0, \\ u_{i2}(t) + e_{i2}(t) &= 0, \end{aligned} \right. \quad \text{или съответно} \quad \begin{aligned} u_{i1}(t) &= -e_{i1}(t), \\ u_{i2}(t) &= -e_{i2}(t). \end{aligned} \quad (4.12)$$



Фиг. 4.4

Последните зависимости водят до симетричните равенства

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{L1}(t) = -e_{L1}(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt}, \quad u_{M1}(t) = -e_{M1}(t) = \pm M_{12} \frac{di_2(t)}{dt}, \\ u_{L2}(t) = -e_{L2}(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt}, \quad u_{M2}(t) = -e_{M2}(t) = \pm M_{21} \frac{di_1(t)}{dt}. \end{array} \right. \quad \text{и} \quad (4.13)$$

Както самоиндукционните $u_{L1}(t)$ и $u_{L2}(t)$, така и напрежителните падове $u_{M1}(t)$ и $u_{M2}(t)$ са съставки на падовете от електромагнитна индукция u_{i1} , u_{i2} . Алгебричните знаци в (4.13) показват, че при съпосочно свързване $u_{M1}(t)$ и $u_{M2}(t)$ съвпадат по посока с $u_{L1}(t)$ и съответно с $u_{L2}(t)$ (респ. с токовете в намотките) и са в обратна на тяхната посока при противопосочно магнитно свързване. Така на фиг. 4.2б, където свързването е съпосочно, $u_{M1}(t)$ е съпосочно с i_1 в намотката 1, а $u_{M2}(t)$ – с i_2 в намотката 2. При противопосочното свързване от фиг. 4.2а $u_{M1}(t)$ е противопосочно с i_1 в намотката 1, а $u_{M2}(t)$ – с i_2 в намотката 2. Двата случая са обединени на фиг. 4.4б. Показано е, че при промяна на посоката на тока $i_2(t)$ се променя и посоката на индуктираното от негоvia магнитен поток е.д.н. $e_{M1}(t)$ (респ. напрежителен пад $u_{M1}(t)$). Вижда се, че *напреженията от взаимна индукция и техните възбудителни токове са винаги еднакво ориентирани спрямо ЕИ на двете магнитно свързани намотки. Тази особеност позволява да се приложи правилно вторият закон на Кирхоф за контур, който включва индуктивно свързана намотка.*

Напрежителните падове от самоиндукция и от взаимна индукция имат едни и същи математически форми на запис, в които производната във времето на съответния възбудителен ток се умножава с определен коефициент на пропорционалност. Допълнителният алгебричен знак на падовете от взаимна индукция (4.13) зависи от вида на индуктивната връзка. Горният знак важи при съпосочно, а долният при противопосочно магнитно свързване. Когато веригата работи при синусоидален режим, математическата аналогия между моментните стойности на падовете от самоиндукция и от взаимна индукция се разпростира и върху съответните изрази с комплекси

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{U}_{L1} = j\omega L_1 \dot{I}_1, \quad \dot{U}_{12} = \dot{U}_{M1} = \pm j\omega M_{12} \dot{I}_2, \\ \dot{U}_{L2} = j\omega L_2 \dot{I}_2, \quad \text{и съответно} \quad \dot{U}_{21} = \dot{U}_{M2} = \pm j\omega M_{21} \dot{I}_1. \end{array} \right. \quad (4.14)$$

По аналогия с комплексните съпротивления от самоиндукция, съпротивленията $Z_{M1} = Z_{12} = j\omega M_{12}$ и $Z_{M2} = Z_{21} = j\omega M_{21}$ се наричат комплексни съпротивления от взаимна индукция. Техните големини са съответно

$X_{M1} = X_{12} = \omega M_{12}$ и $X_{M2} = X_{21} = \omega M_{21}$. Поради магнитната взаимност се изпълнява $M_{12} = M_{21} = M$, откъдето следва, че двойките съпротивления от взаимна индукция са еднакви $Z_{12} = Z_{21} = Z_M = j\omega M$. Така че в общия случай е валидно равенството $Z_{ks} = Z_{sk} = j\omega M_{sk}$.

4.3.2. Знак на напрехителния пад от взаимна индукция

Когато се прилага вторият закон на Кирхоф, знакът на напрехителния пад от взаимна индукция следва да се съобрази както с посоката на алгебрично сумиране в контура, така и с вида на магнитната връзка. Едновременното отчитане и на двете ограничения води до затруднения. Препоръчва се да се използва едно от следните две практически правила:

1. *Посоката на напрехителния пад от взаимна индукция в първата намотка и $i_{M1}(t)$ и посоката на възбудителния ток $i_2(t)$ във втората намотка (фиг. 4.4б) са еднакво ориентирани спрямо едноименните изводи на двете индуктивно свързани намотки. Същото се отнася за посоките на пада $u_{M2}(t)$ и на възбудителния ток $i_1(t)$. Посоките на тези падове се означават върху индуктивните елементи L_1 и L_2 и се отчитат в съответните уравнения по втори закон на Кирхоф. Техният алгебричен знак се определя в зависимост от ориентацията им спрямо посоката на алгебрично сумиране в разглеждания контур.*

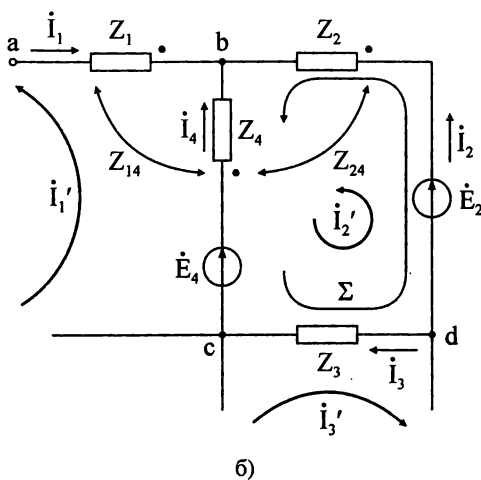
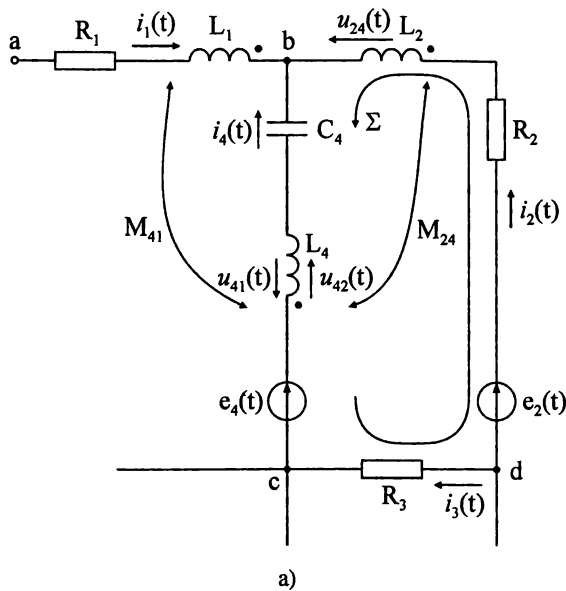
2. *Напрехителният пад $\dot{U}_{12} = \dot{U}_{M1} = j\omega M_{12}\dot{I}_2$ се записва със знак (+), когато по втория закон на Кирхоф посоката на алгебрично сумиране в контура през намотката 1 и посоката на възбудителния ток \dot{I}_2 в индуктивно свързаната намотка 2 са еднакво ориентирани спрямо едноименните изводи на двете намотки. В противен случай напрехителният пад се записва със знак (-).*

Пример 4.1. По втория закон на Кирхоф за контура от фиг. 4.5а,б да се запишат уравненията: а) с моментни стойности (фиг. 4.5а), като се ползва първото практическо правило; б) с комплекси (фиг. 4.5б), по второто практическо правило.

Решение: а) Индуктивността L_4 (фиг. 4.5а) е магнитно свързана с L_1 и L_2 . От магнитните потоци на токовете $i_1(t)$ и $i_2(t)$ в нея се индуцират напрехителните падове $u_{41}(t)$ и $u_{42}(t)$. Първият пад в L_4 е с посоката „край“ – „начало“, каквато е посоката на неговия възбудителен ток $i_1(t)$ през L_1 . Вторият пад в L_4 е с посоката „начало“ – „край“, каквато е посоката на възбудителния ток $i_2(t)$ в L_2 . Индуктивността L_2 е в магнитна връзка само с L_4 . Възникналият пад от взаимна индукция $u_{24}(t)$ в L_2 е с посоката „начало“ – „край“, как-

вато е и посоката на тока $i_4(t)$ в L_4 . Отчита се също, че падовете от самоиндукция са винаги в посоката на собствения ток на намотката. Така в означената посока на алгебрично сумиране по втория закон на Кирхоф се записва

$$\begin{aligned}
 & R_2 i_2(t) + L_2 \frac{d i_2(t)}{d t} + M_{24} \frac{d i_4}{d t} - \frac{1}{C_4} \int i_4(t) d t - \\
 & - L_4 \frac{d i_4(t)}{d t} + M_{41} \frac{d i_1}{d t} - M_{42} \frac{d i_2}{d t} - R_3 i_3(t) = e_2(t) - e_4(t).
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$



Фиг. 4.5

б) Разглежданият участък от веригата се замества от схема, в която участват комплекси (фиг. 4.5б). Означават се собствените комплексни съпротивления на клоновете от контура $Z_2 = R_2 + j\omega L_2$, $Z_3 = R_3$ и $Z_4 = j\omega L_4 - j\frac{1}{\omega C_4}$, както и комплексните съпротивления от взаимна индукция $Z_{41} = Z_{14} = j\omega M_{41} = j\omega M_{14}$ и $Z_{24} = Z_{42} = j\omega M_{24} = j\omega M_{42}$. Над всяко комплексно съпротивление, което включва индуктивен елемент в магнитна връзка, се маркира съответният едноимен извод на индуктивния елемент. Индуктивните връзки се означават с двупосочна стрелка. Означават се и комплексното съпротивление от взаимна индукция. В избраната посока на сумиране по втория закон на Кирхоф се записва уравнението

$$Z_2 \dot{I}_2 + Z_{24} \dot{I}_4 - Z_4 \dot{I}_4 + Z_{41} \dot{I}_1 - Z_{42} \dot{I}_2 - Z_3 \dot{I}_3 = \dot{E}_2 - \dot{E}_4. \quad (4.16)$$

Напрежителният пад $Z_{24} \dot{I}_4$ в Z_2 от тока \dot{I}_4 е със знак “+”, понеже посоката на сумиране в Z_2 и посоката на тока \dot{I}_4 в Z_4 съвпадат с „начало–край“ на елементите Z_2 и Z_4 . Напрежителният пад $Z_{42} \dot{I}_2$ в Z_4 от тока \dot{I}_2 , има знак “-”, тъй като посоката на сумиране в елемента Z_4 е „край–начало“, а посоката на възбудителния ток \dot{I}_2 в Z_2 е „начало–край“ и т.н.

Пример 4.2. По метода с контурните токове да се запише уравнението за контура от фиг. 4.5б.

Решение:

$$(Z_2 + Z_3 + Z_4) \dot{I}_2 - Z_4 \dot{I}_1 + Z_3 \dot{I}_3 + Z_{24} (\dot{I}_1 - \dot{I}_2) - Z_{42} \dot{I}_2 = \dot{E}_2 - \dot{E}_4. \quad (4.17)$$

Най-напред се записва лявата част на уравнението, без да се отчитат индуктивните връзки. След това алгебричното сумиране в контура се повтаря, но вече като се отчитат напрежителните падове от взаимна индукция. Трябва да се подчертае, че падът от взаимна индукция в един елемент се обуславя от алгебричната сума на всички контурни токове през индуктивно свързания елемент. Например падът $+Z_{24} (\dot{I}_1 - \dot{I}_2)$ в Z_2 се дължи на резултантния контурен ток $(\dot{I}_1 - \dot{I}_2)$ през Z_4 . Той се записва със знак “+”, понеже посоката на алгебрично сумиране в Z_2 (определена от посоката на собствения контурен ток \dot{I}_2) и посоката на резултантния контурен ток $(\dot{I}_1 - \dot{I}_2)$ през Z_4 , са еднакво ориентирани спрямо едноименните изводи на Z_2 и Z_4 . Напрежителният пад $Z_{42} \dot{I}_2$ в Z_4 се индутира от контурния ток \dot{I}_2 през Z_2 . Той има знак “-”, тъй като посоката на сумиране в Z_4 (определена от посоката на собствения контурен ток \dot{I}_2 през Z_4) съвпада с „край–начало“, докато тази на контурния ток \dot{I}_2 през Z_2 съвпада с „начало–край“.

4.4. ПРИЛОЖЕНИЕ НА МЕТОДИТЕ И НА ТЕОРЕМИТЕ ЗА АНАЛИЗ ВЪВ ВЕРИГИ С ИНДУКТИВНИ ВРЪЗКИ

Сложните електрически вериги се анализират и изчисляват предимно с компютър. Веригата се описва от следните видове матрици: структурни (възлова, на главните сечения, на главните контури); матриците-вектори на клоновете е.д.н. и на източниците на е.д.т.; квадратните матрици на клоновете комплексни съпротивления \mathbf{Z} или на клоновете комплексни проводимости \mathbf{Y} . Техните елементи се въвеждат като входни данни. Изчисленията се свеждат до операции с матрици.

Матрицата на комплексните съпротивления \mathbf{Z} във веригите с взаимна индуктивност включва следните елементи:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & \cdots & Z_{1m} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & \cdots & Z_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{m1} & Z_{m2} & Z_{m3} & \cdots & Z_{mm} \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Тук елементите на главния диагонал съответстват на комплексното съпротивление на клон с пореден номер $i: Z_{11}, Z_{22}, \dots, Z_{mm}$, докато тези от вида $Z_{il} = Z_{li} = \pm jX_{il} = \pm j\omega M_{il}$, за $i \neq l$, са равни на комплексните съпротивления на индуктивна връзка между клоновете с номера i и l . Горният знак пред $Z_{il} = Z_{li}$ е валиден при еднаква ориентация на токовете \dot{I}_i и \dot{I}_l спрямо едноименните изводи на намотките i и l . При различна ориентация се записва долният знак. Матрицата \mathbf{Y} на комплексните клонови проводимости е обратна на \mathbf{Z}

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}. \quad (4.19)$$

От \mathbf{Y} и \mathbf{Z} се изчисляват матриците на комплексните възлови проводимости \mathbf{Y}' и на комплексните контурни съпротивления \mathbf{Z}' . Матриците \mathbf{Y}' и \mathbf{Z}' се използват при решаване в матрична форма на системите уравнения по метода с възловите потенциали и съответно по метода с контурните токове.

Ако при изчисленията не се използват компютри, анализът на веригите се извършва по метода с клоновите токове (със законите на Кирхоф) или по метода с контурните токове. Методът с възловите потенциали не се препоръчва, тъй като изисква специален подход и води до обременителни изчисления. Теоремата с еквивалентния генератор (на Тевенен, Нортън) е неприменима, когато пасивният участък на клон, в който се изчислява токът, е в магнитна връзка с индуктивен елемент от активния двуполусник. Неприменима са и формулите (1.72) и (1.73) за преобразуване на триъгълник в звезда

и обратно, ако индуктивен елемент от съединението е в магнитна връзка с елемент от веригата. Горните ограничения отпадат при схемите с отстранени индуктивни връзки.

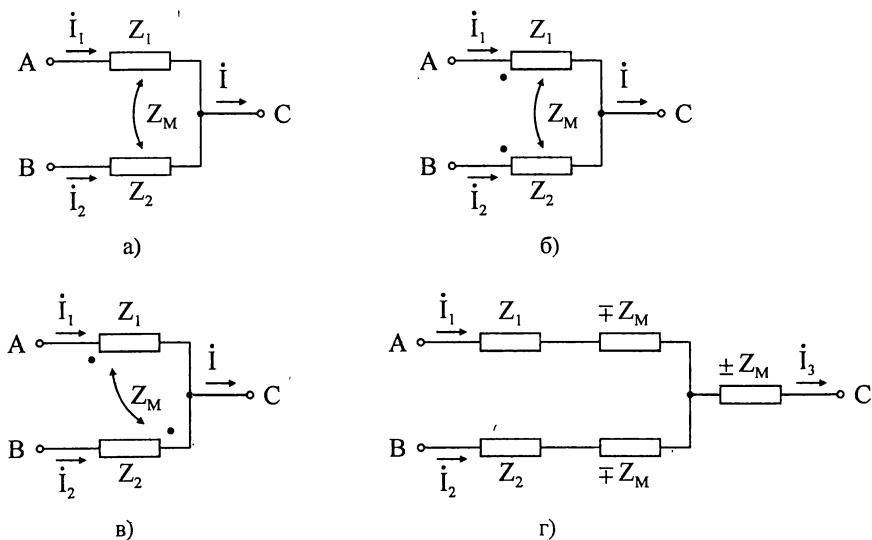
4.5. ОТСТРАНЯВАНЕ НА ИНДУКТИВНАТА ВРЪЗКА

Изчисленията в много случаи се опростяват, ако се решава еквивалентната схема на веригата с отстранени индуктивни връзки. Типовите структури, на базата на които се извършват тези преобразувания, са триполюсното съединение и последователното съединение на елементи с индуктивна връзка.

4.5.1. Преобразуване на триполюсно съединение

Триполюсно съединение с индуктивна връзка е съединението на три клона в общ възел, два от които включват индуктивни елементи в магнитна връзка.

Постановка на задачата. В триполюсното съединение с изводи A, B, C (фиг. 4.6а) индуктивните елементи на клоновете с комплексни съпротивления $Z_1 = R_1 + j\omega L_1$ и $Z_2 = R_2 + j\omega L_2$ се намират в магнитна връзка. Комплексното съпротивление от взаимна индукция е $Z_M = j\omega M$. За простота е показана само част от третия клон. Едноименните изводи не са маркирани, при което се получава обобщен резултат. Означени са посоките на токовете \dot{I}_1, \dot{I}_2 и \dot{I} . Търсят се параметрите на еквивалентното триполюсно съединение без индуктивна връзка.



Фиг. 4.6

Анализ. При запазени посоки на токовете в триполюсното съединение се разглеждат два случая. Те се различават по това, кои изводи на индуктивно свързаните елементи са разположени по-близо до общата възлова точка: 1) в близост са едноименните изводи на свързаните елементи (фиг. 4.6б); 2) в близост са разноименните изводи (фиг. 4.6в). Напрежителните падове \dot{U}_{AC} и \dot{U}_{BC} са напрежения към непреобразуваната част от веригата, за които се записва

$$\text{случай 1: } \dot{U}_{AC} = Z_1 \dot{I}_1 + Z_M \dot{I}_2 \quad \text{и} \quad \dot{U}_{BC} = Z_2 \dot{I}_2 + Z_M \dot{I}_1,$$

$$\text{случай 2: } \dot{U}_{AC} = Z_1 \dot{I}_1 - Z_M \dot{I}_2 \quad \text{и} \quad \dot{U}_{BC} = Z_2 \dot{I}_2 - Z_M \dot{I}_1.$$

Зависимостите се обобщават така:

$$\dot{U}_{AC} = Z_1 \dot{I}_1 \pm Z_M \dot{I}_2 \quad \text{и} \quad \dot{U}_{BC} = Z_2 \dot{I}_2 \pm Z_M \dot{I}_1.$$

Тук горният знак се отнася за случая, когато в общия възел се събират едноименните изводи, а долният знак, когато в общия възел се събират разноименните изводи.

Отстраняването на индуктивната връзка е възможно само ако всеки напрежителен пад се определя единствено от токовете по пътя на алгебричното сумиране. Следователно в уравненията на напрежителните падове токът на външния индуктивно свързан елемент трябва да бъде отстранен. За целта се записва първия закон на Кирхоф за общия възел $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I} = 0$. Чрез тази връзка във всеки от падовете се елиминира чуждият ток. Така в \dot{U}_{AC} и \dot{U}_{BC} се заместват съответно $\dot{I}_2 = \dot{I} - \dot{I}_1$ и $\dot{I}_1 = \dot{I} - \dot{I}_2$. Получават се обобщените зависимости:

$$\left| \begin{array}{l} \dot{U}_{AC} = (Z_1 \mp Z_M) \dot{I}_1 \pm Z_M \dot{I} = [R_1 + j\omega(L_1 \mp M)] \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}, \\ \dot{U}_{BC} = (Z_2 \mp Z_M) \dot{I}_2 \pm Z_M \dot{I} = [R_2 + j\omega(L_2 \mp M)] \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}. \end{array} \right. \quad (4.20)$$

По горните уравнения се съставя еквивалентната схема на триполюсното съединение с отстранена индуктивна връзка. Съгласно принципа за еквивалентно преобразуване напреженията \dot{U}_{AC} , \dot{U}_{BC} и токовете \dot{I}_1 , \dot{I}_2 и \dot{I} се запазват без изменение. На тези изисквания и уравненията (4.20) съответства схемата от фиг. 4.6г. Разликата с изходната схема се състои в това, че във взаимодействащите клонове се включват допълнителните комплексни съпротивления $\mp Z_M$, а в общия клон $\pm Z_M$.

Изводи:

» Параметрите на еквивалентната схема с отстранена индуктивна връзка не зависят от това, дали индуктивностите в изходната схема са съпосочно или противопосочно магнитно свързани.

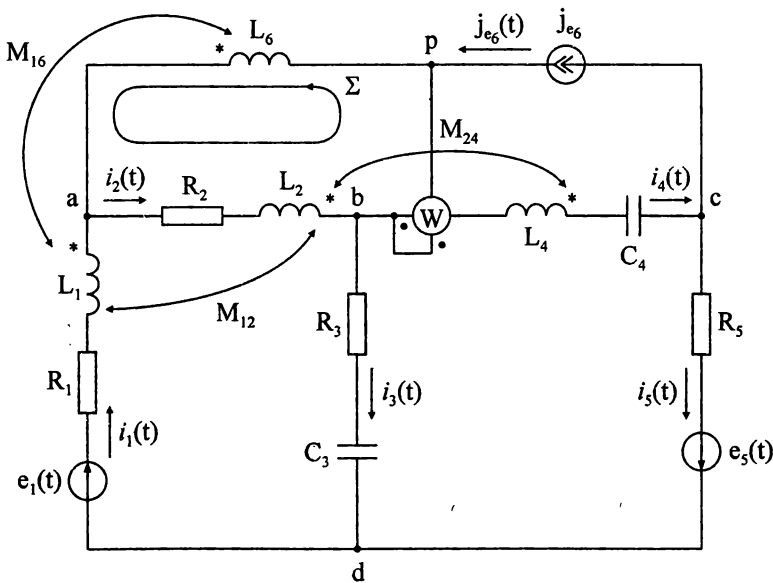
» Във всеки от трите клона се включва допълнителното комплексно съпротивление Z_M . Горният знак пред Z_M в еквивалентната схема от фиг. 4.6е важи, когато в общата възлова точка на изходната схема се събират едноименните изводи, а долният-когато там се събират разноименните изводи на индуктивно свързаните елементи.

» Когато в изходната схема са означени параметрите на идеалните елементи, отстраняването на индуктивната връзка води до появата на еквивалентни самоиндуктивности (вж.(4.20)): в двата клона, между които е имало магнитна връзка, те са $L_1 \mp M$ и $L_2 \mp M$. В третия клон се включва допълнителната самоиндуктивност $\pm M$.

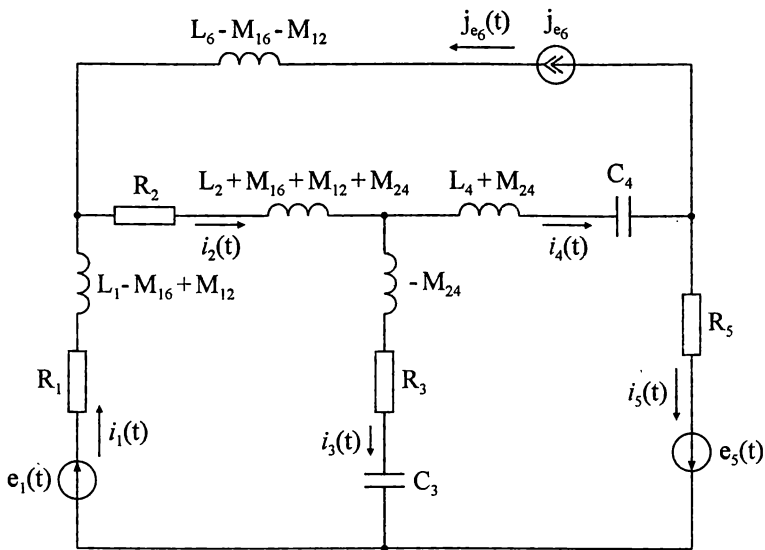
» Отстраняването на индуктивната връзка се извършва отделно за всяка двойка взаимодействащи елементи на едно триполусно съединение.

» Напрежителен пад или мощност в клон с индуктивна връзка се изчисляват винаги от изходната схема.

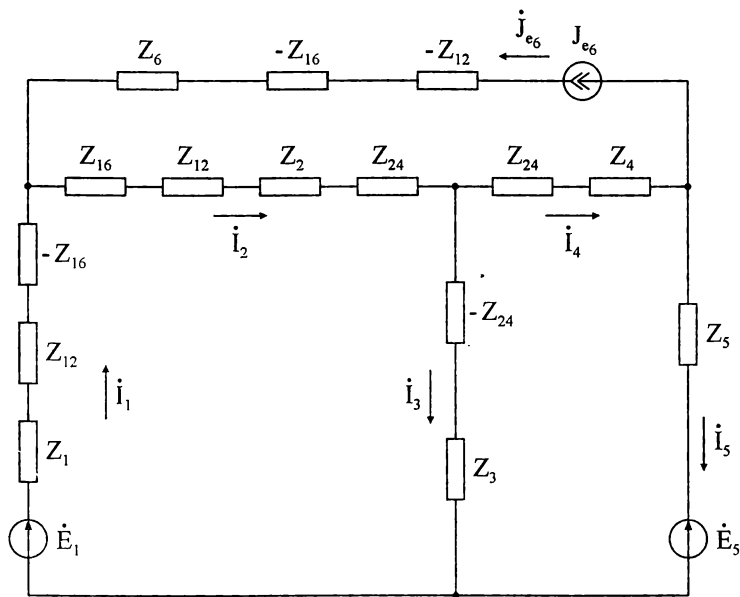
Пример 4.3. За веригата от фиг. 4.7а да се определи еквивалентната заместваща схема с отстранена индуктивна връзка в два варианта: а) с идеалните елементи и техните параметри; б) с комплекси, като се запише изразът за показанието на ватметъра.



Фиг. 4.7а



б)



в)

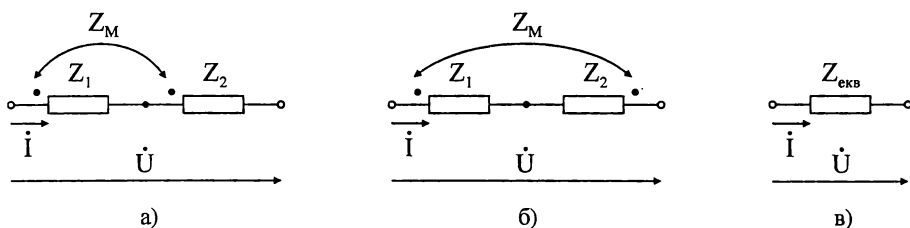
Фиг. 4.7

а) Эквивалентната схема е показана на фиг. 4.7б и е получена въз основа на теоретичните изводи, посочени по-горе;

б) Схемата с комплекси е представена на фиг. 4.7в. Собствените комплексни съпротивления на клоновете са: $Z_1 = R_1 + j\omega L_1$, $Z_2 = R_2 + j\omega L_2$, $Z_3 = R_3 - j\frac{1}{\omega C_3}$, $Z_4 = j\omega L_4 - j\frac{1}{\omega C_4}$, $Z_5 = R_5$ и $Z_6 = j\omega L_6$, а взаимните комплексни съпротивления $Z_{12} = Z_{21} = j\omega M_{12}$, $Z_{24} = Z_{42} = j\omega M_{24}$ и $Z_{16} = Z_{61} = j\omega M_{16}$. Комплексите на токовете се получават по преобразуваната схема (фиг. 4.7в). Показанието на ватметъра се определя с израза $P_w = \text{Re}(\dot{U}_{bp} \dot{I}_4)$. За означения на схемата от фиг. 4.7а контур напрежението \dot{U}_{bp} се намира по втория закон на Кирхоф: $\dot{U}_{bp} + Z_6 \dot{I}_{e6} + Z_2 \dot{I}_2 + Z_{61} \dot{I}_1 + Z_{21} \dot{I}_1 + Z_{24} \dot{I}_4 = 0$.

4.5.2. Преобразуване на последователно съединение от двуполусници

Постановка на задачата. На фиг. 4.8а е дадено последователно съединение на два съпосочно индуктивно свързани пасивни двуполусника. Собствените им комплексни съпротивления са $Z_1 = R_1 + j\omega L_1$ и $Z_2 = R_2 + j\omega L_2$, а комплексното съпротивление от взаимна индукция е $Z_{12} = Z_{21} = Z_M = j\omega M$. Двата двуполусника са противопосочно индуктивно свързани на фиг. 4.8б. Да се определи еквивалентното комплексно съпротивление на съединението $Z_{\text{екв}}$ (фиг. 4.8в) и да се анализира съотношението между реактивните съставки в двата случая. Да се начертае векторната диаграма при насрещно индуктивно свързване, ако $L_2 < M$.



Фиг. 4.8

Анализ: За схемите от фиг. 4.6а и 4.6б знакът на напрежителния пад от взаимна индукция се определя в съответствие с второто практическо правило, т.е.

$$\dot{U} = Z_1 \dot{I} + Z_2 \dot{I} + Z_{12} \dot{I} + Z_{21} \dot{I} \quad \text{и} \quad Z'_{\text{екв}} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z_1 + Z_2 + 2Z_M;$$

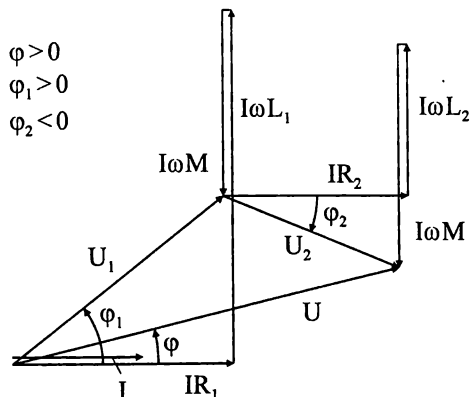
$$\dot{U} = Z_1 \dot{I} + Z_2 \dot{I} - Z_{12} \dot{I} - Z_{21} \dot{I} \quad \text{и} \quad Z''_{\text{екв}} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z_1 + Z_2 - 2Z_M.$$

Формулите за еквивалентните комплексни съпротивления при съпосочно и противоположно индуктивно свързване съответно $Z'_{\text{екв}}$ и $Z''_{\text{екв}}$ са еднотипни и се обединяват

$$Z_{\text{екв}} = Z_1 + Z_2 \pm 2Z_M = (R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 \pm 2M) = R_{\text{екв}} + j\omega L_{\text{екв}}. \quad (4.21)$$

Горният знак е за случая на съгласувано, а долният – за несъгласувано магнитно свързване. От (4.21) се намира $L'_{\text{екв}} = L_1 + L_2 + 2M > L''_{\text{екв}} = L_1 + L_2 - 2M$. Следователно пълното съпротивление при съгласувано свързване $Z'_{\text{екв}}$ е по-голямо от това при насрецно свързване $Z''_{\text{екв}}$. Този факт се използва при опитното определяне на едноименните изводи на два индуктивно свързани елемента по показанията на волтметър и амперметър на входа на съединението.

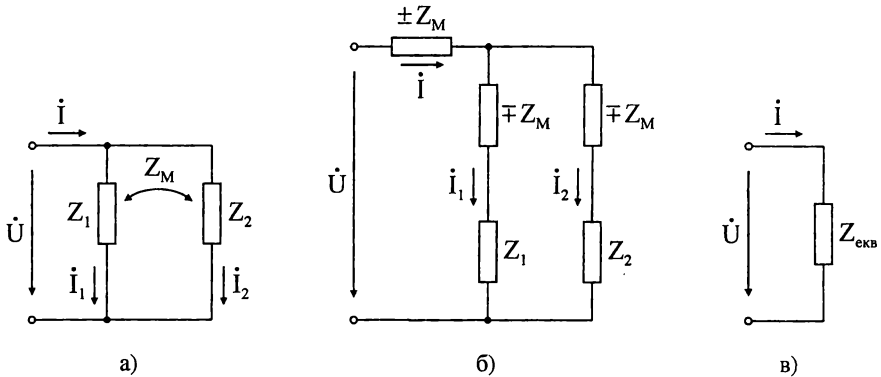
Векторната диаграма е показана на фиг. 4.8г. Индуктивностите са свързани със съответните пълни магнитни потоци $L_2 = \Psi_{22}/i_2 = w_2\Phi_{22}/i_2$ и $M_{12} = \Psi_{12}/i_2 = w_1\Phi_{12}/i_2$. При наличие на разсейване $\Phi_{12} < \Phi_{22}$, но от изразите за L_2 и M_{12} следва, че съотношението $L_2 < M$ е възможно при $w_1 > w_2$. Тъй като $\omega(L_2 - M) < 0$, $\varphi_2 < 0$ и напрежителният пад $u_2(t)$ върху намотката 2 изостава по фаза от $i(t)$, както при капацитивен двуполюсник. Но еквивалентното реактивно съпротивление е винаги индуктивно по следните причини. Тъй като коефициентът на магнитната връзка е $k \leq 1$, следва че $L_{\text{екв}} = L_1 + L_2 - 2M > L_1 + L_2 - 2\sqrt{L_1 L_2} = (\sqrt{L_1} - \sqrt{L_2})^2 > 0$ или винаги $L_{\text{екв}} > 0$, т.е. съединението като цяло има индуктивен характер.



Фиг. 4.8г

4.5.3. Преобразуване на паралелно съединение от два двуполюсника

Постановка на задачата. На фиг. 4.9а е показано паралелно съединение на два пасивни двуполюсника със собствени комплексни съпротивления $Z_1 = R_1 + j\omega L_1$, $Z_2 = R_2 + j\omega L_2$. Техните индуктивни елементи са в магнитна връзка с комплексно съпротивление от взаимна индукция $Z_{12} = Z_{21} = Z_M = j\omega M$. Поради общността на разглеждането едноименните изводи не са означени. Да се определи еквивалентното комплексно съпротивление на съединението $Z_{\text{екв}}$.



Фиг. 4.9

Анализ. Еквивалентната схема с отстранена индуктивна връзка (фиг. 4.9б) е получена след преобразуване на съединението като триполусно. Еквивалентното комплексно съпротивление на полученото смесено съединение без индуктивна връзка $Z_{\text{екв}}$ (фиг. 4.9в) се определя с израза

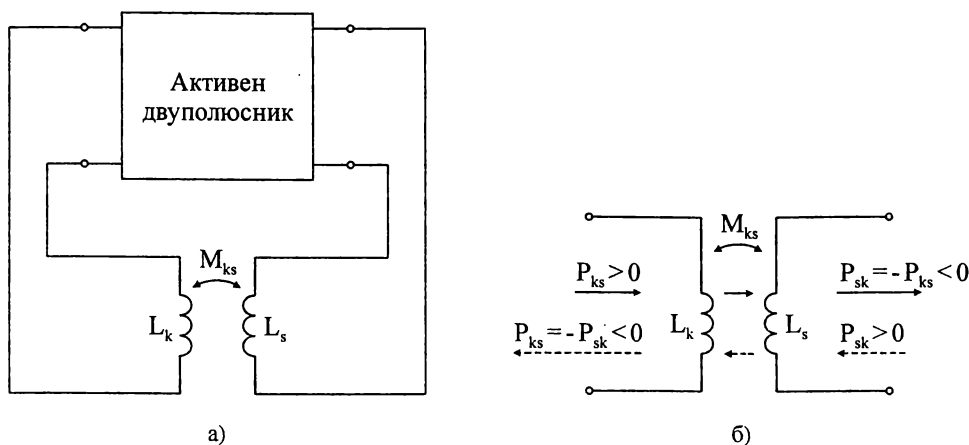
$$Z_{\text{екв}} = \pm Z_M + \frac{(Z_1 \mp Z_M)(Z_2 \mp Z_M)}{Z_1 + Z_2 \mp 2Z_M} = \frac{Z_1 Z_2 - Z_M^2}{Z_1 + Z_2 \mp 2Z_M}. \quad (4.22)$$

Горният знак в знаменателя на (4.22) е валиден, ако в един от общите възли на съединението се събират едноименните изводи, а долният знак – разноименните изводи на индуктивно свързаните елементи.

4.6. ПРЕДАВАНЕ НА АКТИВНА МОЩНОСТ ПО ИНДУКТИВЕН ПЪТ

Постановка на задачата. Разглеждат се два индуктивно свързани елемента със самоиндуктивности L_k , L_s и взаимна индуктивност $M_{ks} = M_{sk}$.

Моментните стойности на токовете в елементите са $i_k(t)$ и $i_s(t)$. Останалата част от веригата не е обект на анализ и се означава като активен двуполосник (фиг. 4.10а). Изследва се енергийното състояние на елементите, свързано с явлението взаимна индукция.



Фиг. 4.10

Анализ. Поради магнитната връзка потокът $\Psi_{sk}(t)$ на тока $i_s(t)$ обуславя в елемента L_k напрежителен пад от взаимна индукция. Той се представя в комплекси (фиг. 4.10б) с израза $\dot{U}_{ks} = \pm j\omega M_{ks} \dot{I}_s$, където горният знак се отнася за съпосочно, а долният – за противоположно индуктивно свързване. Всяко напрежение и ток в един елемент обуславят електрическа мощност. Дефинираната в L_k комплексна мощност $\dot{S}_{ks} = \dot{U}_{ks}^* \dot{I}_k = \pm j\omega M_{ks} \dot{I}_s^* \dot{I}_k$ е свързана с явлението взаимна индукция, поради характера на \dot{U}_{ks} . В елемента L_s комплексната мощност $\dot{S}_{sk} = \dot{U}_{sk}^* \dot{I}_s = \pm j\omega M_{sk} \dot{I}_k^* \dot{I}_s$ се дължи на напрежителния пад $\dot{U}_{sk} = \pm j\omega M_{sk} \dot{I}_k$ и тока \dot{I}_s . За спрегнатата стойност на \dot{S}_{sk} се установява $\dot{S}_{sk}^* = (\pm j\omega M_{sk})^* (\dot{I}_k)^* (\dot{I}_s)^* = \mp j\omega M_{sk} \dot{I}_k^* \dot{I}_s = -\dot{S}_{ks}$. Последното равенство показва, че съществува връзка между комплексните мощности от взаимна индукция на двойката индуктивно свързани елементи

$$\dot{S}_{sk}^* = -\dot{S}_{ks} \quad (4.23)$$

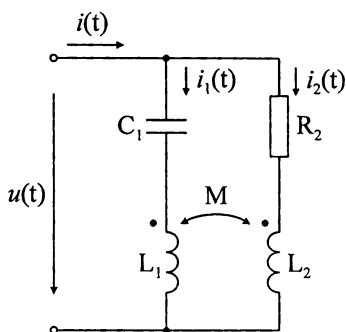
Всяка комплексна мощност е от вида $\dot{S} = P + jQ$, а нейният спрегнат комплекс е $\dot{S}^* = P - jQ$. Следователно в развита форма равенството (4.23) изглежда по следния начин:

$$P_{sk} - jQ_{sk} = -P_{ks} - jQ_{ks}. \quad (4.24)$$

От приравняването на реалните части и на имагинерните части се получава:

$$\begin{cases} P_{sk} = -P_{ks}; \\ Q_{sk} = Q_{ks}. \end{cases} \quad (4.25)$$

Пример 4.4. Синусоидално напрежение с ефективна стойност $U = 100 \text{ V}$ е приложено на входа на веригата от фиг. 4.11. Съпротивленията на включените елементи са $X_{L1} = X_{C1} = 8 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $X_{L2} = 6 \Omega$ и $X_M = 5 \Omega$. Да се изчислят: а) комплексите на токовете във веригата; б) комплексните мощности на входа и в клоновете на веригата, като се направи баланс на активната мощност и се установи посоката на пренасянето ѝ по индуктивен път.



Фиг. 4.11

в) Да се направи проверка на получените резултати, като се изчисли директно предаваната по индуктивен път активна мощност и посоката на нейното предаване.

Решение: а) По законите на Кирхоф за веригата се записва системата уравнения:

$$\begin{cases} \dot{I} - \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 0 \\ \dot{I}_1(jX_{L1} - jX_{C1}) + \dot{I}_2 jX_M = \dot{U} \\ \dot{I}_1 jX_M + \dot{I}_2(R_2 + jX_{L2}) = 0. \end{cases}$$

След решаването ѝ за токовете се получават стойностите: $\dot{I}_1 = 16 + j24$, А, $\dot{I}_2 = -j20$, А и $\dot{I} = 16 + j4$, А.

б) За комплексната мощност, която постъпва на входа на веригата, се получава $\dot{S} = \dot{U} \dot{I}^* = 100 \cdot (16 + j4) = 1600 + j400$, VA. Комплексните мощности в клоновете са: $\dot{S}_1 = \dot{U} \dot{I}_1^* = 100 \cdot (16 - j24) = 1600 - j2400$, VA и $\dot{S}_2 = \dot{U} \dot{I}_2^* = 100 \cdot (j20) = j2000$, VA. От резултатите личи, че общата консумирана мощност от веригата е $P = \text{Re}(\dot{S}) = 1600 \text{ W}$ и че тя постъпва от входа на веригата към клон 1, тъй като $P_1 = \text{Re}(\dot{S}_1) = 1600 \text{ W}$. Но клон 1 се състои само от реактивни съпротивления и не би трябвало да консумира активна мощност. От своя страна резисторът в клон 2 консумира мощност $P_{R_2} = R_2 I_2^2 = 4 \cdot 20^2 =$

$=1600, \text{ W}$, което е в противоречие с резултата $P_2 = \text{Re}(S_2) = 0, \text{ W}$. Тези разсъждения водят до констатацията, че консумацията в R_2 се покрива от активната мощност, прехвърлена от елемента L_1 към елемента L_2 .

в) Съгласно казаното в 1.5.4, условно консумираната активна мощност от елемента L_1 е $P_{M1} = \text{Re}[\dot{U}_{12}^* I_1] = \text{Re}[j\omega M I_2^* I_1] = \text{Re}[j5(-j20)(16 - j24)] = 1600, \text{ W}$. Тъй като $P_{M1} > 0$, тя се консумира от L_1 . Но консумирана активна мощност не е присъща за реактивен елемент, от което следва, че L_1 предава тази мощност към L_2 чрез взаимното магнитно поле.

Изводи:

» В магнитно свързаните индуктивни елементи се отделя активна мощност, поради явлението взаимна индукция.

» Връзката между активните мощности $P_{sk} = -P_{ks}$ показва, че ако единият от индуктивно свързаните елементи консумира, другият генерира същото количество активна електрическа мощност.

» Комплексната мощност, свързана с явлението взаимна индукция, се изчислява чрез напрежението и тока в елемента. Така априори се приема, че елементът е условен консуматор (вж. т. 1.5.4).

» Ако след изчисления се установи $P_{sk} > 0$, елементът L_s , за който са направени изчисленията, действително консумира електрическата мощност P_{sk} (фиг. 4.10б). Като реактивен елемент L_s физикално не може да преобразува съответната електрическа енергия в топлина. Заключение е, че L_s прехвърля активната мощност P_{sk} посредством взаимното магнитно поле към индуктивно свързания елемент L_k .

» Същевременно при $P_{sk} > 0$ следва, че $P_{ks} = -P_{sk} < 0$ и индуктивно свързаният елемент L_k се явява източник на същото количество активна мощност. Като пасивен елементът не генерира енергия. Физическият смисъл на тези разсъждения води отново до заключението, че първият елемент черпи мощността от източника, като я прехвърля чрез взаимното магнитно поле към втория елемент.

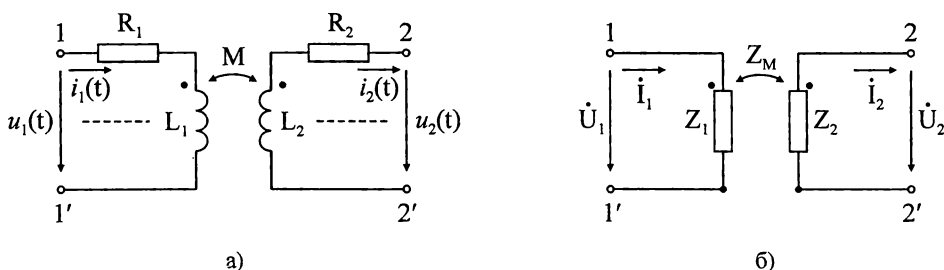
4.7. ТРАНСФОРМАТОРНО СЪЕДИНЕНИЕ

В практиката често се налага да се прехвърля електрическа енергия от един токов контур към друг посредством взаимното магнитно поле на намотки с индуктивна връзка. Процесът е свързан с промяната на параметрите на напрежението и тока. Използват се устройства, наречени трансформатори. Те най-често преобразуват електрическото напрежение (например, когато напрежени-

ето на източника на енергия е различно от това, при което се налага да работи консуматорът). Тук се разглежда най-простият *двунмотъчен трансформатор*. Когато е разположен във въздушна среда, той се нарича *линеен трансформатор*. Тези трансформатори се използват предимно във високочестотната техника, но намират известно приложение и при ниски честоти (в някои измервателни устройства). Входното напрежение се подава към *първичната намотка*, която дефинира *първичната верига* на трансформатора. Към *вторичната намотка* е свързан консуматорът (товарът) и тя определя т.нар. *вторична верига*. Първични и вторични се наричат напреженията и токовете, присъщи за съответните намотки (вериги).

4.7.1. Уравнения на линеен трансформатор

Електрическата схема на *линеен трансформатор* е дадена на фиг. 4.12а. Показани са елементите с техните параметри. На фиг. 4.12б същата схема е представена с комплекси. На изхода 2–2' е означен напрежителният пад върху товара, който не е показан на фигурата.



Фиг. 4.12

По втория закон на Кирхоф се записват само две уравнения, тъй като между токовете контури, в които са включени намотките, няма електрическа връзка. Приема се, че посоката на алгебрично сумиране съпада с посоката на тока в контура. За схемата от фиг. 4.12а в моментни стойности се записва системата уравнения

$$\begin{cases} R_1 i_1(t) + L_1 \frac{d i_1(t)}{d t} - M_{12} \frac{d i_2(t)}{d t} - u_1(t) = 0, \\ R_2 i_2(t) + L_2 \frac{d i_2(t)}{d t} - M_{21} \frac{d i_1(t)}{d t} + u_2(t) = 0; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} R_1 i_1(t) + L_1 \frac{d i_1(t)}{d t} - M \frac{d i_2(t)}{d t} = u_1(t), \\ R_2 i_2(t) + L_2 \frac{d i_2(t)}{d t} - M \frac{d i_1(t)}{d t} = -u_2(t). \end{cases}$$

Като се има предвид, че собствените комплексни съпротивления на първичната и на вторичната страна са съответно $Z_1 = R_1 + j\omega L_1$ и $Z_2 = R_2 + j\omega L_2$, а комплексното съпротивление от взаимна индукция е $Z_M = j\omega M$, за схемата с комплекси (фиг. 4.12б) системата уравнения се видоизменя на

$$\begin{cases} Z_1 \dot{I}_1 - Z_M \dot{I}_2 = (R_1 + j\omega L_1) \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 = \dot{U}_1, \\ Z_2 \dot{I}_2 - Z_M \dot{I}_1 = (R_2 + j\omega L_2) \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1 = -\dot{U}_2. \end{cases} \quad (4.26)$$

4.7.2. Векторна диаграма

Постановка на задачата. Известни са моментната стойност на входното напрежение $u_1(t) = u_{1m} \sin(\omega t + \psi_{u_1})$, както и параметрите R_1, L_1 и R_2, L_2 съответно на първичната и вторичната намотки. Приема се, че включеният към вторичната страна товар е индуктивен с параметри R_T, L_T . При избран мащаб на тока и на напрежението да се построи статичната векторна диаграма, като се определят токовете и напрежителните падове в трансформатора.

Анализ. Тъй като веригата е линейна, използва се принципът на пропорционалността. Задава се предварителна условна стойност на тока \dot{I}_2 , например $\dot{I}_2 = 1A$, с векторен образ по реалната ос. Като следствие всички останали величини приемат съответстващи условни стойности. Избира се мащаб на напрежението m_u и мащаб на тока m_i . Ползва се системата уравнения на трансформатора, като условната стойност на напрежителния пад върху товара е $\dot{U}'_2 = Z_T \dot{I}'_2 = (R_T + j\omega L_T) \dot{I}'_2$. Построяването на векторната диаграма (фиг. 4.13) започва от уравнението на вторичната страна

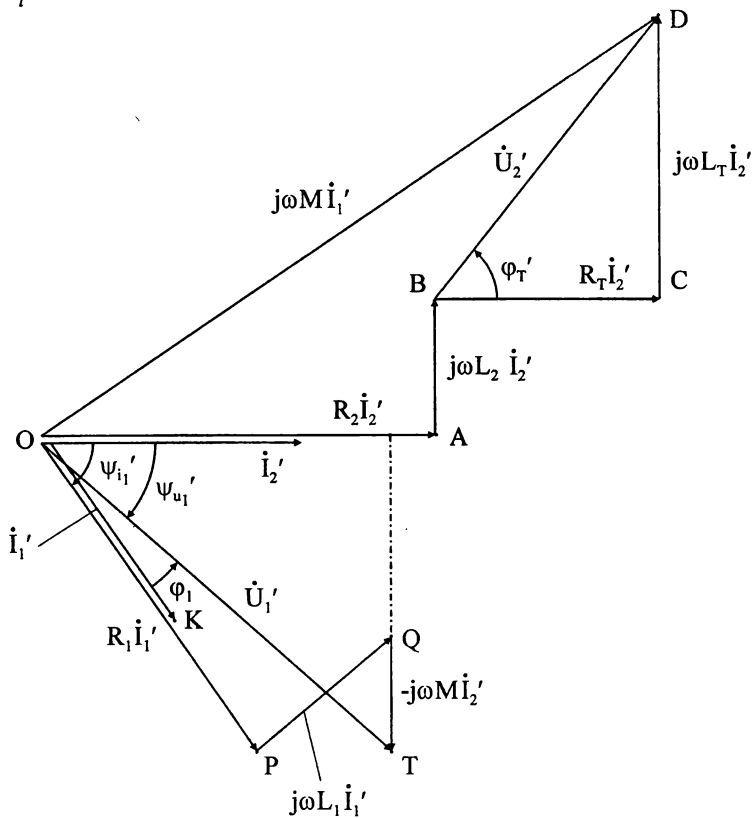
$$R_2 \dot{I}'_2 + j\omega L_2 \dot{I}'_2 - j\omega M \dot{I}'_1 + R_T \dot{I}'_2 + j\omega L_T \dot{I}'_2 = 0.$$

При зададена стойност на \dot{I}'_2 от горния израз се определя неизвестният напрежителен пад:

$$j\omega M \dot{I}'_1 = R_2 \dot{I}'_2 + j\omega L_2 \dot{I}'_2 + R_T \dot{I}'_2 + j\omega L_T \dot{I}'_2.$$

Векторният образ на $j\omega M \dot{I}'_1$ представлява резултат от геометричното сумиране на векторните образи от дясната страна на уравнението. Взема се пред вид, че трансформацията $\pm j = 1e^{\pm j\frac{\pi}{2}}$ позволява да се запише $j\omega M \dot{I}'_1 = \omega M \dot{I}'_1 e^{j\frac{\pi}{2}}$. Изразът показва, че векторният образ на напрежителния

пад е завъртян на ъгъл $+\frac{\pi}{2}$ спрямо този на \dot{I}_1' , т.е. векторният образ на \dot{I}_1' изостава с ъгъл $\frac{\pi}{2}$ от образа на пада $j\omega M\dot{I}_1'$. Големината на тока се определя с отчитане на мащаба $I_1' = \frac{m_u \overline{OD}}{\omega M}$, а големината на векторния му образ е $\overline{OK} = I_1'/m_i$.



Фиг. 4.13

След определянето на \dot{I}_1' се строят векторните образи на напрежителните падове в първичната страна по уравнението $R_1 \dot{I}_1' + j\omega L_1 \dot{I}_1' - j\omega M \dot{I}_2' = \dot{U}_1'$. Във векторната сума на лявата страна участва образът на пада $-j\omega M \dot{I}_2' = \omega M \dot{I}_2' \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$, който е ориентиран на ъгъл $-\pi/2$ спрямо векторния образ на тока \dot{I}_2' . Резултатът от тази геометрична сума е векторният образ на първично-

до напрежение $\dot{U}_1 = m_u \overline{OT} e^{j\psi_{u1}}$. Коефициентът на пропорционалност \dot{K}_u между истинските и отчетените от векторната диаграма условни стойности се определя с отношението от комплекса на зададеното входно напрежение

$$\dot{U}_1 = \frac{u_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_{u1}} \text{ и този на отчетената условна стойност } \dot{U}_1'$$

$$\dot{K}_u = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_1'} = \frac{\frac{u_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_{u1}}}{m_u \overline{OT} e^{j\psi_{u1}}} = \frac{u_m e^{j(\psi_{u1} - \psi_{u1}')}}{\sqrt{2} m_u \overline{OT}}. \quad (4.27)$$

Реалната стойност на всеки комплекс се получава от произведението на \dot{K}_u със съответната условна стойност, отчетена от диаграмата. Така например следват съотношенията $\dot{U}_2 = \dot{K}_u m_u \overline{BD} e^{j\varphi_T}$, $\dot{I}_2 = \dot{K}_u \dot{I}_2' = \dot{K}_u m_i$, $\dot{I}_1 = \dot{K}_u m_i \overline{OK} e^{j\psi_{i1}}$ и т.н.

4.7.3. Еквивалентни схеми на линеен трансформатор

Индуктивната връзка на трансформаторното съединение може да бъде отстранена. Получава се еквивалентна електрическа схема без магнитна връзка. Ако товарът на изхода $2-2'$ не е конкретно дефиниран, въвежда се четириполюсна заместваща схема, а при товар с известни параметри $Z_T = R_T + jX_T$ – двуполусна схема.

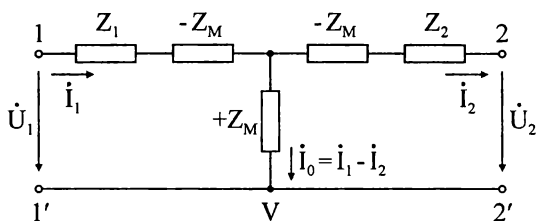
А. Четириполюсна еквивалентна схема. Тя се използва при анализа на режима на работа на устройството при променлив товар. Уравненията на схемата се извеждат чрез математическо преобразуване на системата уравнения (4.26). За целта към всяко от двете уравнения се добавя нулева алгебрична сума, членовете на която са произведение от собствения ток на контура и комплексното съпротивление от взаимна индукция

$$\begin{cases} Z_1 \dot{I}_1 - Z_M \dot{I}_2 \pm I_1 Z_M = \dot{U}_1, \\ Z_2 \dot{I}_2 - Z_M \dot{I}_1 \pm I_2 Z_M = -\dot{U}_2. \end{cases}$$

Преобразуването на всяко уравнение се състои в такова групиране на членовете с общи множители, че и в двете уравнения да участва един и същ напрежителен пад. Това означава, че двата контура минават през общ клон, което води до обща електрическа схема. В резултат на преобразуването се получава системата

$$\begin{cases} (Z_1 - Z_M) I_1 + (I_1 - \dot{I}_2) Z_M = \dot{U}_1, \\ (Z_2 - Z_M) I_2 - (I_1 - \dot{I}_2) Z_M = -\dot{U}_2. \end{cases} \quad (4.28)$$

В общия напрежителен пад участва разликата $\dot{i}_0 = \dot{i}_1 - \dot{i}_2$. Такава сума от токове се записва само по първия закон на Кирхоф и съответства на възел от веригата. Системата уравнения (4.28) е валидна за електрическата схема от фиг. 4.14, в която V може да се нарече *фиктивен (виртуален) възел* за \dot{i}_1 и \dot{i}_2 .

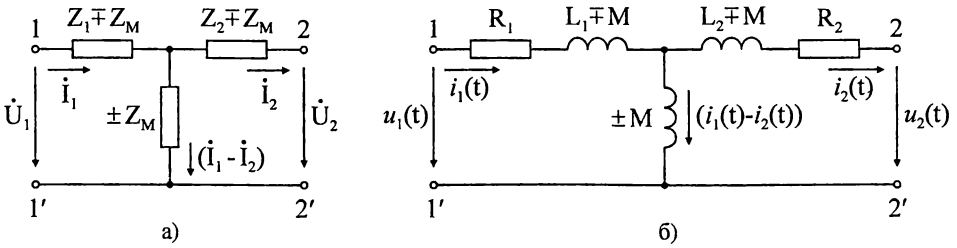


Фиг. 4.14

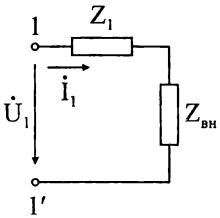
До същата еквивалентна схема може да се достигне, ако се приеме, че двата долни извода 1' и 2' на линейния трансформатор са свързани в общия възел V . Физикалната обосновка на свързването почива на факта, че при това преобразуване *не настъпва преразпределение на токовете и напреженията в контурите 1 и 2. Енергийното състояние се запазва, тъй като предаването на мощностите в този участък се извършва само по електромагнитен (трансформаторен) път.* След сливане на долните възли участъците от контурите с параметри Z_1 и Z_2 се разглеждат като съединение от два индуктивно свързани клона с общ възел V . Общият възел фактически представлява свързан накъсо трети клон, което оформя триполюсно съединение с индуктивна връзка. В случая структурата и параметрите на еквивалентната схема (фиг. 4.15) се намират чрез отстраняване на индуктивната връзка в полученото триполюсно съединение. Лесно се установява, че по този начин се получава еквивалентната схема, показана с комплекси на фиг. 4.15а. На фиг. 4.15б са означени параметрите на същата схема. При този начин на разглеждане алгебричните знаци в еквивалентната схема се възпроизвеждат непосредствено. Знаците в еквивалентната схема може да се определят и по следното формално правило: когато едноименните изводи на намотките са разположени от една и съща страна на хоризонталната ос на симетрия на индуктивно свързаните намотки (фиг. 4.12а) важат горните знаци, а в противен случай се използват долните знаци.

Б. Двуполусна еквивалентна схема. Схемата се извежда, при условие, че към изхода 2 – 2' на трансформатора е включен индуктивен товар от вида $Z_T = R_T + jX_T$. В този случай вторичната верига се привежда изцяло към първичната страна. Параметрите на двуполусната схема се определят най-лесно след включването на Z_T между 2 и 2' на четириполюсната заместваща схема (фиг. 4.15а). Определя се входното комплексно съпротивление $Z_{\text{екв}} = Z_1 + Z_{\text{ВН}}$

на трансформатора спрямо изводите 1-1' (фиг. 4.16), където Z_{BH} се нарича *внесено комплексно съпротивление от вторичната в първичната страна*. То представлява добавка към собственото комплексно съпротивление Z_1 на първичния контур на трансформатора.



Фиг. 4.15



Фиг. 4.16

За еквивалентното входно комплексно съпротивление се получава изразът

$$\begin{aligned}
 Z_{екв} &= Z_1 \mp Z_M + \frac{\pm Z_M (Z_2 \mp Z_M + Z_T)}{\pm Z_M + Z_2 \mp Z_M + Z_T} = \\
 &= Z_1 - \frac{Z_M^2}{Z_2 + Z_T} = Z_1 + Z_{BH}
 \end{aligned}
 \tag{4.29a}$$

Внесеното комплексно съпротивление се определя с равенството

$$Z_{BH} = -\frac{Z_M^2}{Z_2 + Z_T} = \frac{x_M^2}{z_2} (R_2 + R_T) - j \frac{x_M^2}{z_2} (x_2 + x_T) = R_{BH} + jX_{BH}, \tag{4.29б}$$

където $x_M = \omega M$, а z_2 е пълното съпротивление на вторичния контур $z_2^2 = (R_2 + R_T)^2 + (x_2 + x_T)^2$. Очевидно Z_{BH} отчита влиянието на параметрите на вторичната страна и на индуктивната връзка върху еквивалентното входно съпротивление на трансформатора. *Знаците в израза на Z_{BH} не зависят от разположението на еднoимените изводи в индуктивно свързаните намотки на линейния трансформатор.* От страната на първичния контур цялата схема може да се разглежда като двуполусник със съпротивления $R_1 + R_{BH}$ и $X_1 + X_{BH}$. Оказва се, че съществува връзка между параметрите на двата контура, при която отдаваната към вторичния контур (към R_{BH}) активна мощност е максимална. В съответствие с теоремата за предаване на максимална активна мощност към консуматор тази връзка е $R_{BH} = R_1$ и $X_{BH} = -X_1$, откъдето

$$R_1 = \frac{x_M^2}{z_2} (R_2 + R_T) \quad \text{и} \quad X_1 = \frac{x_M^2}{z_2} (x_2 + x_T). \quad (4.30)$$

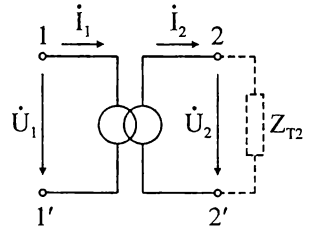
Тези съотношения може да се удовлетворят след подходяща настройка на параметрите на всеки от контурите. За целта в първичния и във вторичния контур може да се включат кондензатори с променлив капацитет или да се използва трансформатор с подвижни намотки (вариометър). Съгласно горната теорема отдаваната максимална мощност се определя с израза

$$P_{2\max} = \frac{U_1^2}{4R_1}. \quad (4.31)$$

4.7.4. Идеален трансформатор

При изчисленията, както и в задачите за синтез на електрически вериги, като елемент на еквивалентните схеми на трансформатори и автотрансформатори със стоманено ядро често се използва идеалният трансформатор (фиг. 4.17).

Идеален се нарича трансформаторът без собствени загуби ($R_1 = R_2 = 0$). Неговите първични и вторични токове и напрежения са свързани със съотношенията



Фиг. 4.17

$$i_2 = n i_1 \quad \text{и} \quad \dot{U}_1 = n \dot{U}_2. \quad (4.32)$$

Величината $n = w_1/w_2$ се нарича *коэффициент на трансформация (преводно отношение)*. Той се определя от броя на навивките w_1 и w_2 на намотките съответно на първичната и на вторичната страна. Непосредствено се доказва, че ако на изхода $2-2'$ се включи товар $Z_{T2} = \dot{U}_2/\dot{I}_2$, входното комплексно съпротивление $Z_{ex1} = \dot{U}_1/\dot{I}_1$ и товарът са свързани с равенството

$$Z_{ex1} = n^2 Z_{T2}. \quad (4.33)$$

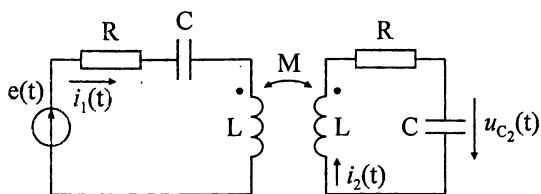
От (4.32) следва също, че комплексните мощности на входа и на изхода на идеалния трансформатор са еднакви $\dot{S}_1 = \dot{S}_2$. Един реален трансформатор се доближава толкова повече към идеалния, колкото в по-голяма степен са изпълнени съотношенията

$$k \rightarrow 1, \quad P_{заг} \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad I_{10} \rightarrow 0, \quad (4.34)$$

където $P_{заг}$ са загубите в трансформатора, а I_{10} е токът на празен ход (при идеалния трансформатор $I_{10} = 0$ се получава при прекъснатата верига между 2-2').

4.8. РЕЗОНАНС В ИНДУКТИВНО СВЪРЗАНИ КОЛЕБАТЕЛНИ КОНТУРИ

В този раздел са представени някои теоретични изводи и е направен кратък анализ на явлението резонанс в магнитно свързани колебателни контури. Има се предвид, че подробното им изучаване е предмет на специализирани курсове. На фиг. 4.18 е показана една разпространена схема. За простота на анализа се приема, че двата колебателни контура (резонансни, трептящи кръгове) имат еднакви параметри. Наличието на кондензаторите C във всеки от тях показва, че са налице условия за възникване на последователен резонанс, тъй като $e_1(t)$ и индуктираното във втория контур е.д.н. са последователно свързани на съответните реактивни елементи.



Фиг. 4.18

При еднакви параметри уравненията по втория закон на Кирхоф за двата колебателни контура добиват вида:

$$\begin{cases} \dot{I}_1(R + j\omega L - j1/\omega C) - \dot{I}_2 j\omega M = \dot{E}, \\ -\dot{I}_1 j\omega M + \dot{I}_2(R + j\omega L - j1/\omega C) = 0. \end{cases}$$

След елиминирание на \dot{I}_1 от системата се получава изразът за тока \dot{I}_2 :

$$\dot{I}_2 = \dot{E} \frac{j\omega M}{[R + j(\omega L - 1/\omega C)]^2 + \omega^2 M^2} \quad (4.35)$$

и се определя изходният сигнал, т.е. напрежителният пад $\dot{U}_{C2} = \dot{I}_2 \cdot 1/j\omega C$ върху кондензатора C . За високите честоти, при които най-често възникват резонансните явления, резонансът се установява по-лесно и по-точно с електрон-

ни волтметри, отколкото с не дотам качествените електронни амперметри. По тези практически съображения се предпочита да се работи с *комплексния коефициент на предаване по напрежение* $\dot{K}_u = \dot{U}_{C2} / \dot{E}$, чийто модул и аргумент дефинират уравнението на резонансната крива и съответната *фазова характеристика*. След преработка за \dot{K}_u се получава

$$\dot{K}_u = \frac{M}{C} \frac{1}{[R + j(\omega L - 1/\omega C)]^2 + \omega^2 M^2}. \quad (4.36)$$

Всеки от контурите е настроен в резонанс (т. нар. „пълнен резонанс“), ако е изпълнено условието $\omega L - 1/\omega C = 0$, т.е. при резонансната честота $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ и съответно $f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC}$. За удобство в (4.36) се въвеждат известните означения: *характеристично съпротивление* $\omega_0 L = 1/\omega_0 C = \rho = \sqrt{L/C}$, *качествен фактор* $Q = \rho/R$, *затихване на контура* $d = 1/Q$ и *коефициент на магнитната връзка* $k = M/\sqrt{L_1 L_2} = M/L$. Тъй като съпротивлението R на намотките има малка стойност, при високи честоти се получава $Q \gg 1$. Резонансната крива е относително тясна и за малки отклонения от резонансната честота са валидни приближенията $\omega \approx \omega_0$ и $\varepsilon = 1 - (\omega/\omega_0)^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)/\omega_0^2 \approx 2\Delta\omega/\omega_0$. Тук $\Delta\omega = \omega_0 - \omega = 2\pi(f_0 - f) = 2\pi\Delta f$ е разстройка на кръговата честотата. Общият множител $\omega^2 L^2 \approx \omega_0^2 L^2$ в знаменателя на (4.36) се изважда пред скоби. След преработка зависимостта за \dot{K}_u добива вида

$$\begin{aligned} \dot{K}_u &= \frac{M}{C\omega^2 L^2} \frac{1}{\{R/\omega L + j(1 - 1/\omega^2 LC)\}^2 + \omega^2 M^2/\omega^2 L^2} = \\ &= \frac{k}{\{d + j[1 - (\omega_0/\omega)^2]\}^2 + k^2}, \end{aligned}$$

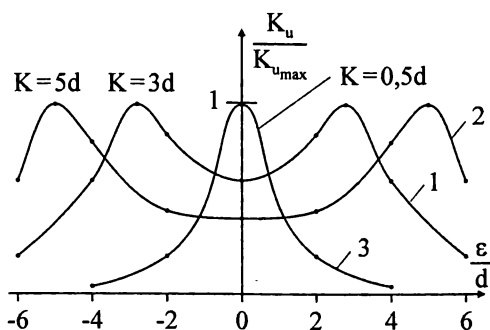
откъдето се намира изразът за *амплитудно-честотната характеристика (АЧХ)*

$$|\dot{K}_u| = K_u = \frac{k}{\sqrt{(d^2 - \varepsilon^2 + k^2)^2 + 4\varepsilon^2 d^2}}. \quad (4.37)$$

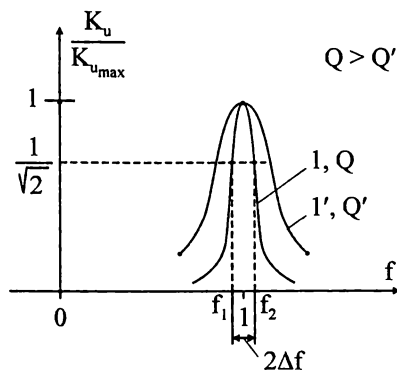
От (4.37) може да се определят честотите, за които АЧХ достига екстремум. Разглеждат се възможностите за резонанс в три случая: при *силна връзка между контурите*, т.е. за $k > d$ (т.е. $kQ > 1$), при *критична връзка* $k = d$ (т.е. $kQ = 1$) и при *слаба връзка*, която съответства на $k < d$ (т.е. $kQ < 1$). Изследва-

нията на функцията показват, че при $k > d$ съществуват *три екстремума*: минимум – при $\varepsilon=0$, т.е. при $\omega=\omega_0$ и два максимума („гърбици“) – при $\varepsilon_{1,2}=\pm\sqrt{k^2-d^2}$. С увеличаване на k „гърбиците“ се раздалечатат. При $k \leq d$ функцията има само един екстремум (максимум) при $\varepsilon=0$ или за $\omega=\omega_0$. АЧХ за двата случая са начертани на фиг. 4.19, където за удобство по хоризонталната ос е въведена *обобщената разстройка* ε/d . По ординатната ос е нанесена относителната стойност $K_u/K_{u\max}$. Доказва се, че $K_{u\max}=1/2d$ и се получава

$$\frac{K_u}{K_{u\max}} = \frac{2dk}{\sqrt{(d^2 - \varepsilon^2 + k^2)^2 + 4\varepsilon^2 d^2}}. \quad (4.38)$$



Фиг. 4.19



Фиг. 4.20

Кривите 1 и 2 са валидни *при силна връзка* за часните случаи съответно $k=3d$ и $k=5d$, а кривата 3 – *при слаба връзка* и $k=0.5d$. Двата максимума $K_u/K_{u\max}=1$ на кривата 1 съответстват на $\varepsilon/d=\pm 2.82$, а минимумът $K_u/K_{u\max}=0.6$ – на $\varepsilon/d=0$. С увеличаване на магнитната връзка (крива 2) се вижда, че максимумите се раздалечатат, а стойността на минимума намалява. Единственият максимум $K_u/K_{u\max}=1$ на кривата 3 съответства на $\varepsilon/d=0$.

На фиг. 4.20 отделно са показани резонансните криви 1 и 1' в зависимост от честотата f , построени при критична връзка (случаят $k=d$ се среща най-често на практика), но при различно затихване $d < d'$, т.е. $Q > Q'$. Известно е, че за *широчина на честотната лента на пропускане* се дефинира интервалът от честоти между f_2 и f_1 , за които $K_u/K_{u\max}=1/\sqrt{2}=0.707$. Тъй като при критична връзка ($k=d$) $K_{u\max}=1/2d$, от (4.38) за АЧХ в относителни единици се получава

$$\frac{K_u}{K_{u \max}} = \frac{2d^2}{\sqrt{(2d^2 - \varepsilon^2)^2 + 4\varepsilon^2 d^2}} = \frac{2d^2}{\sqrt{4d^4 + \varepsilon^4}}. \quad (4.39)$$

Широчината на честотната лента на пропускане се определя, като се положи зависимостта (4.39) равна на $1/\sqrt{2}$. След прости преобразувания се определя честотната разстройка

$$\varepsilon = d\sqrt{2} \approx \frac{2\Delta f}{f_0}, \quad (4.40)$$

откъдето се намира и изразът за широчината на честотната лента на пропускане

$$2\Delta f = f_2 - f_1 \approx f_0 d\sqrt{2} = \frac{f_0}{Q}\sqrt{2}. \quad (4.41)$$

Изводи:

» При критична връзка индуктивно свързаните резонанси контури имат $\sqrt{2}$ пъти по-широка честотна лента на пропускане спрямо единичния резонансен контур.

» И тук, както при обикновените резонансни контури, намалението на качествения фактор води до пропорционално увеличение на честотната лента на пропускане, т.е. намалението на Q води до по-лоша избирателност (селективност) на резонансния контур.

» При индуктивно свързаните контури със силна връзка се получава „двугърба“ резонансна крива. С увеличаване на тази връзка максимумите се раздалечават, а минимумът още повече намалява. Този факт се използва за съществено разширяване на честотната лента на пропускане.

» Въз основа на (4.38) може да се определи честотната лента на пропускане и при силна магнитна връзка. Нещо повече. Съществува възможност да се определи оптималната магнитна връзка, при която минимумът на АЧХ е равен на $1/\sqrt{2}$.

5.1. УВОД

Понятието магнитна верига е една абстракция, въведена за опростяване изчислението на магнитни полета, която се основава на формалната аналогия между уравненията на електрическо поле в проводяща среда и уравненията на магнитостатично поле, при което се пренебрегват магнитните потоци на разсейване. Получава се възможност за анализа на магнитните вериги да се използват всички методи за анализ на електрически вериги, което за ранните години на електротехниката е било много важно. Магнитните вериги са въведени в електротехниката в началото на миналия век за *приблизително* изчисление на магнитното поле в редица електротехнически устройства – трансформатори, електрически машини, електромагнити и др. В последните 20 години бяха разработени редица модерни числени методи за анализ на магнитни полета (метод на крайните разлики, метод на крайните елементи), позволяващи изчисления с много висока точност, при отчитане на нелинейните характеристики на феромагнитните материали и сложната геометрия на магнитопроводите. Поради това ролята на магнитните вериги в електротехниката значително намалява, но поради тяхната простота и възможност за бързи приблизителни изчисления те все още намират приложение.

Едно малко по-точно определение на магнитна верига е: *устройство, съдържащо феромагнитни магнитопроводи, образуващи затворена система, в която съществува магнитен поток и по която се затварят линиите на магнитната индукция.*

Най-общо, една магнитна верига се състои от феромагнитни магнитопроводи с висока магнитна проницаемост μ , които служат за канализиране на магнитния поток, и намотки или постоянни магнити, които създават този поток. Тя е линейна, когато веществените среди, от които е направен магнитопроводът имат неизменни абсолютни магнитни проницаемости ($\mu = \text{const}$). Това условие в практиката рядко се изпълнява, защото феромагнитните материали по своята природа са нелинейни. Те обаче допускат линеаризация при малки стойности на работните индукции, т.е., при малки стойности на възбуждащите полето токове.

Основните скаларни величини, използвани при анализа на една магнитна верига, са магнитният поток Φ и магнитодвижещото напрежение F . Знаците на тези скаларни величини се определят чрез въвеждане на условни положителни посоки.

1) Магнитен поток Φ

Дефинира се като потока на вектора на магнитната индукция през напречното сечение на магнитопровода:

$$\Phi = \iint_s \mathbf{B} \, ds \quad (5.1)$$

Потокът има положителен знак, когато линиите на вектора на магнитната индукция \mathbf{B} сключват остър ъгъл с положителната нормала към повърхнината, спрямо която той се дефинира. За скаларната величина магнитен поток се избира условна положителна посока, съвпадаща с посоката на вектора \mathbf{B} , т.е. с посоката на магнитните линии. По принцип скаларните величини нямат посоки (а само знак), но за определяне на знаците им в уравненията на Кирхоф е удобно да им се избере посока.

В система СИ магнитният поток се измерва във *вебери* (Wb).

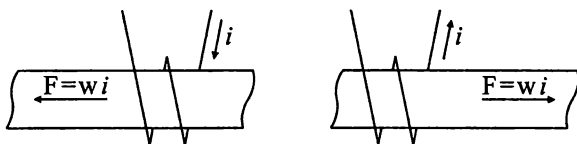
2) Магнитодвижещо напрежение F

Дефинира се като произведението от тока i в проводниците на една бобина, създаващ магнитното поле, и броя на навивките w на тази бобина:

$$F = w i \quad (5.2)$$

Положителната посока на F се определя по правилото на десния винт: ако десен винт се върти по посока на тока в намотката, напредването на винта определя условната положителна посока на магнитодвижещото напрежение.

В система СИ магнитодвижещото напрежение се измерва в *ампери* (A).



Фиг. 5.1

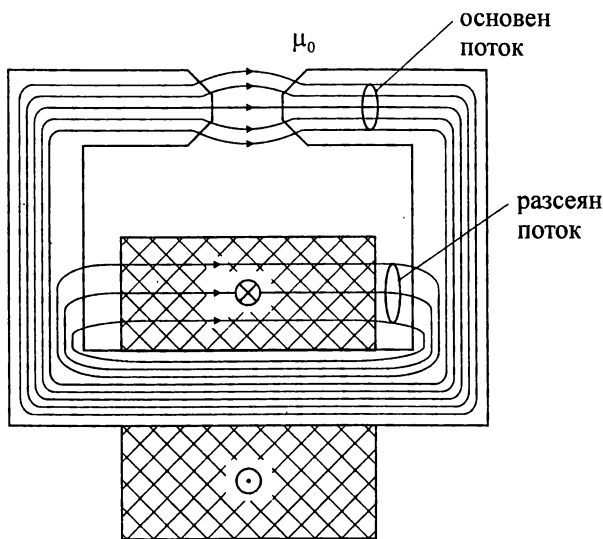
Основни понятия за магнитни вериги:

1) *Участък от магнитна верига* – неразклонена част от магнитна верига с неизменно сечение, направена от еднороден материал.

2) *Клон* – неразклонена част от магнитната верига, в която във всеки момент, през което и да е нейно напречно сечение, магнитният поток има една и съща стойност. Клонът може да бъде съставен от няколко последователно свързани участъка.

3) *Възел* – точка (област), където се свързват три или повече на брой клонове.

При анализа на електрическите вериги със съсредоточени параметри се приема, че околната среда е идеален диелектрик, т.е. пренебрегват се токовете на утечката. При магнитните вериги обаче, т.е. в устройствата с феромагнитни магнитопроводи, не всички магнитни линии са съсредоточени в магнитопровода. Една част от тях, наречена *магнитни линии на разсейването*, преминава в околната среда, т.е., във въздуха (фиг. 5.2). Колкото магнитната проницаемост на феромагнетика е по-голяма от тази на въздуха, толкова по-голяма част от магнитните линии ще преминават през него и линиите на разсейването ще бъдат по-малко. Обратно, при ниска магнитна проницаемост на магнитопровода, което обикновено се получава при силни токове в намотките и насищане на магнитопровода, броят на линиите на разсейване ще бъде значителен и голяма част от създадения поток ще се отклонява през въздуха, т.е. няма да бъде полезен. Обикновено при анализа на магнитните вериги не се държи сметка за магнитното разсейване. Когато това разсейване трябва да се отчете, се налага да се използват числени методи за анализ на разпределението на магнитното поле в пространството.



Фиг. 5.2

Наистина, при електрическите вериги токовете на утечката са малки поради много голямата разлика на специфичната проводимост на проводниците $\gamma_{пр}$ и специфичната проводимост на околната изолационна среда $\gamma_{из}$. Така за медта $\gamma_{пр} = 5,8 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$, а за изолационна хартия $\gamma_{из} = 10^{-13} \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$, като отношението им ще бъде $\gamma_{пр} / \gamma_{из} = 5,8 \cdot 10^{20}$. За магнитните вериги няма толкова голяма разлика между абсолютната магнитна проницаемост на феромагнит-

ните материали на магнитната верига $\mu_{\text{фер}}$ и абсолютната магнитна проницаемост $\mu_0 = \mu_0$ на околната среда, обикновено въздух. Тяхното отношение е от порядъка на $\mu_{\text{фер}} / \mu_0 \approx 10^3 + 10^4$, а при насищане на феромагнитните материали става още по-малка. Затова значителна част от потока се отклонява от основната магнитна верига и преминава през въздуха във вид на т.нар. *поток на разсейване*. Следователно, даже при къси магнитни вериги би трябвало те да се разглеждат като вериги с разпределени параметри. Освен това, по пътя на основния магнитен поток често се намират въздушни участъци. Магнитната проницаемост в тези междини е равна на магнитната проницаемост на околната среда, въздух, поради което там трудно може да се съди за пътя, по който минават магнитните линии (освен ако те не са много малки – тогава магнитните линии не могат да се отклонят съществено в тях).

Класификация на магнитните вериги:

- *Линейни и нелинейни магнитни вериги*

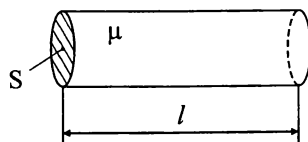
При линейните магнитни вериги се използва линейна връзка между магнитна индукция и магнитен интензитет $B = \mu H$, т.е. приема се, че магнитната проницаемост на средата е константна величина ($\mu = \text{const}$). Това допускане е възможно при ниски стойности на възбуждащите токове, когато стойностите на индукцията и интензитета на полето са в началния линеен участък на началната крива на намагнитването $B = B(H)$.

Когато една магнитна верига се разглежда като нелинейна, се използва цялата нелинейна характеристика $B = B(H)$. Тогава анализът е значително по-сложен, като се основава на итерационна процедура за уточняване на решението.

- *Неразклонени и разклонени (многоконтурни) магнитни вериги* – дефинират се аналогично на електрическите вериги.
- *Симетрични и несиметрични магнитни вериги* – наличието на симетрия (геометрична и по отношение на възбуждането) опростява анализа на магнитните вериги, тъй като може да се разглежда $\frac{1}{2}$ или $\frac{1}{4}$ от цялата верига.

5.2. МАГНИТНО СЪПРОТИВЛЕНИЕ. ЗАКОН НА ОМ ЗА МАГНИТЕН УЧАСТЪК

За да се изведе формулата за магнитно съпротивление се разглежда участък от магнитен клон с дължина l и сечение s , направен от материал с постоянна абсолютна магнитна проницаемост μ .



Фиг. 5.3

Въвежда се величината *магнитно напрежение* u_μ , която се определя чрез циркуляцията на вектора интензитет на магнитното поле \mathbf{H} по протежение на участъка

$$u_\mu = \int_{(l)} \mathbf{H} d\mathbf{l} \quad (5.3)$$

u_μ се измерва в (А) и е аналог на електрическото напрежение в електрическите вериги ($u = \int_{(l)} \mathbf{E} d\mathbf{l}$). Приема се, че условната положителна посока на магнитното напрежение съвпада с посоката на магнитните линии (линиите на вектора \mathbf{H}).

Формулата за магнитното съпротивление се извежда по следния начин:

1. Интегрира се в (5.3) по магнитна линия l :

$$u_\mu = \int_{(l)} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{(l)} H dl$$

2. Допуска се, че средата е линейна, хомогенна и изотропна ($\mu = \text{const}$). Тогава от равенството $H = B / \mu$ се получава

$$u_\mu = \int_{(l)} H dl = \int_{(l)} \frac{B}{\mu} dl = \frac{1}{\mu} \int_{(l)} B dl$$

3. Приема се, че магнитното поле е равномерно ($B = \text{const}$), а магнитните линии са перпендикулярни на сечението. Това позволява да се опрости изразът за магнитен поток $\Phi = \iint_S \mathbf{B} ds$ до $\Phi = Bs$ и да се изрази магнитната индукция B чрез магнитния поток Φ : $B = \Phi/s$, при което се записва

$$u_\mu = \frac{1}{\mu} \int_{(l)} \frac{\Phi}{s} dl$$

Тъй като участъкът се характеризира с един и същ магнитен поток Φ и неизменно сечение s , то Φ и s не зависят от дължината на участъка l и могат да се изведат пред интеграла: $u_\mu = \frac{l}{\mu s} \Phi$. Тук се въвежда величината

$$R_\mu = \frac{l}{\mu s} \quad (5.4)$$

наречена *магнитно съпротивление*, която се измерва в *хенри*⁻¹ (H^{-1}). Магнитното съпротивление е аналог на електрическото съпротивление при електри-

ческите вериги ($R = l/(\gamma s)$). След нейното въвеждане се достига до зависимостта:

$$u_{\mu} = R_{\mu} \Phi \quad (5.5)$$

Тази зависимост се нарича *Закон на Ом за пасивен участък от магнитна верига* и е аналог на закона на Ом за пасивен участък от електрическа верига $u = Ri$.

Често се използва и реципрочната величина на магнитното съпротивление, наречена *магнитна проводимост* G_{μ} :

$$G_{\mu} = R_{\mu}^{-1} \quad (5.6)$$

Магнитната проводимост се измерва в *хенри* (H).

В общия случай, когато се използва действителната нелинейна характеристика на ферромагнитния материал $B = B(H)$, характеристиката $\Phi = \Phi(u_{\mu})$ на магнитния участък (наречена *вебер-амперна характеристика* и съответстваща на волт-амперната характеристика на един нелинеен елемент $i = i(u)$) ще бъде също нелинейна. Следователно в общия случай R_{μ} и G_{μ} ще бъдат нелинейни величини, зависещи от стойността на магнитния поток (и съответно от магнитната индукция) в клон. Затова в практиката R_{μ} и G_{μ} се използват, когато магнитната верига не е наситена. Това най-често е налице, когато в магнитната верига има достатъчно голяма въздушна междина, която има голямо магнитно съпротивление. В този случай магнитният поток ще бъде малък, съответно магнитната индукция ще е малка, което означава, че се работи в началния, линейния участък на характеристиката $B = B(H)$, в който може да се приеме, че $\mu = \text{const}$.

5.3. ОБОБЩЕН ЗАКОН НА ОМ ЗА МАГНИТЕН КЛОН

Обобщеният закон на Ом за магнитните вериги се отнася за един активен магнитен клон, т.е. клон, върху който има намотка с w навивки с ток i , която създава магнитодвижещо напрежение $F = wi$:

$$u_{\mu} + F = R_{\mu} \Phi \quad (5.7)$$

Формула (5.7) се нарича *Обобщен закон на Ом за магнитен клон*. Знаците на алгебричните величини u_{μ} , F , Φ се определят чрез съпоставяне на условията им положителни посоки с общата посока на интегриране за клоната.

Съотношението (5.7) е напълно аналогично на обобщения закон на Ом за електрически вериги ($u + e = Ri$).

5.4. ЗАКОНИ НА КИРХОФ ЗА МАГНИТНА ВЕРИГА

Първият закон на Кирхоф за магнитни вериги гласи: *алгебричната сума от магнитните потоци за един възел от магнитна верига (или за една затворена повърхнина) е равна на нула:*

$$\sum \Phi_k = 0. \quad (5.8)$$

Този резултат следва от принципа за непрекъснатост на магнитните линии

$$\oiint_{(s)} \mathbf{B} ds = 0,$$

известен от теорията на електромагнитното поле.

Съотношението (5.8) е аналогично на първи закон на Кирхоф за електрически вериги ($\sum i_k = 0$).

Вторият закон на Кирхоф за магнитни вериги гласи: *алгебричната сума от магнитните напрежителни падове в произволен затворен контур от една магнитна верига е равна на алгебричната сума от магнитодвижещите напрежения в контура:*

$$\sum R_{\mu k} \Phi_k = \sum F_k. \quad (5.9)$$

Този резултат следва непосредствено от закона за пълния ток:

$$\oint_{(\Gamma)} \mathbf{H} dl = \sum F_k,$$

известен от теорията на електромагнитното поле.

Знаците на алгебричните величини в уравненията по първи и втори закон на Кирхоф се определят по известните правила, които се използват при електрическите вериги. Първоначално е необходимо да се изберат произволни положителни посоки на потоците в клоновете на магнитната верига и положителни посоки на обхождане в контурите.

Съотношението (5.9) е аналогично на втори закон на Кирхоф за електрически вериги ($\sum R_k i_k = \sum e_k$).

5.5. ЕКВИВАЛЕНТНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ СХЕМИ НА МАГНИТНИТЕ ВЕРИГИ

Направеното досега разглеждане показва, че законите за електрическите и магнитните вериги са аналогични, като са в сила следните съответствия на величините и законите:

Табл. 5.1

Електрически вериги	Магнитни вериги
i	Φ
u	u_μ
e	F
R	R_μ
G	G_μ
V	V_μ
$u = Ri$	$u_\mu = R_\mu \Phi$
$R = \frac{l}{\gamma S}$	$R_\mu = \frac{l}{\mu S}$
$u_{12} = \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l}$	$u_{\mu 12} = \int_1^2 \mathbf{H} d\mathbf{l}$
$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$	$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$
$i = \iint_S \mathbf{J} d\mathbf{s}$	$\Phi = \iint_S \mathbf{B} d\mathbf{s}$
$\mathbf{E} = -\text{grad } V$	$\mathbf{H} = -\text{grad } V_\mu$
$\oint_{(r)} \mathbf{E}_e d\mathbf{l} = e$	$\oint_{(c)} \mathbf{H} d\mathbf{l} = F = wi$

Поради тази аналогия и поради това, че и електрическите, и магнитните вериги се подчиняват на законите на Кирхоф, всички методи за анализ на сложни електрически вериги са напълно приложими и за анализ на линейни магнитни вериги. Основното допускане тук е, че се пренебрегват потоците на разсейване, при което магнитните потоци ще бъдат неизменни по дължината на клоновете на магнитната верига.

Практически, за анализа се съставя еквивалентна електрическа схема на разглежданата магнитна верига. Тя се съставя, като една намотка w_k , в която има ток i_k , се замества с източник на магнитодвижещо напрежение $F_k = w_k i_k$, а един магнитен участък – с резистор с магнитно съпротивление $R_{\mu k} = l_k / \mu_k s_k$. При наличие на въздушна междина в даден клон, тя се замества с последова-

телно съединено магнитно съпротивление $R_{\mu\sigma} = l_{\sigma} / \mu_0 s_{\sigma}$. Изследването на еквивалентната схема с познатите методи от електрически вериги (метод с клоновите токове, метод с контурните токове, метод с възловите потенциали) дава стойностите на магнитните потоци Φ_k . Ако е необходимо, след това се изчисляват магнитните индукции B_k :

$$B_k = \frac{\Phi_k}{s_k}$$

Във формулата за магнитно съпротивление

$$R_{\mu k} = \frac{l_k}{\mu_k s_k},$$

се приема, че l_k съвпада с дължината на *средната геометрична линия* на участъка.

Това е източник на грешка, защото при изчисляването на $R_{\mu k}$ би трябвало да се използва средна магнитна линия, а тя не съвпада напълно със средната геометрична линия, особено в близост до прави ъгли в магнитопроводите. Тъй като пътят на средната магнитна линия не може да се изчисли предварително (поне със средствата на магнитните вериги), то се използва лесната за определяне средна геометрична линия. Практиката е показала, че допусканата грешка е приемлива за инженерни приложения.

При пресмятане на магнитното съпротивление на въздушната междина $R_{\mu\sigma}$ се използва зависимостта

$$R_{\mu\sigma} = \frac{l_{\sigma}}{\mu_0 s_{\sigma}}$$

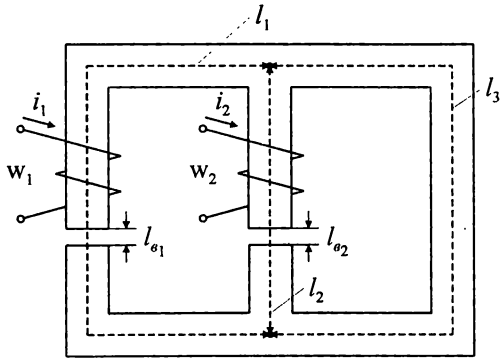
Сечението на въздушната междина s_{σ} се приема да е равно на сечението на магнитопровода, когато минималният напречен размер a_{min} на сечението е поне пет пъти по-голям от дължината на въздушната междина l_{σ} ($a_{min} > 5l_{\sigma}$).

При използването на средни геометрични дължини се получава известно припокриване на отделните магнитни участъци. Допусканата при това грешка не е значителна и е приемлива за практически приложения.

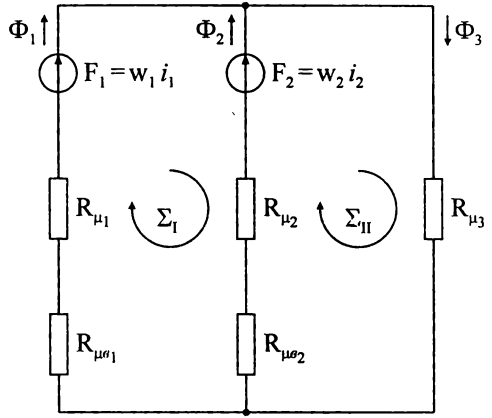
Този опростен анализ е възможен за сравнително прости магнитни вериги, тъй като при по-сложни магнитни вериги вече не могат да се пренебрегват потоците на разсейване. Наличието на потоци на разсейване усложнява много анализа. В тези случаи трябва да се използват числени методи за анализ на магнитостатични полета или някаква тяхна комбинация с магнитни вериги, за уточняване на пътищата и големините на потоците на разсейване.

Описаната аналогия между електрически и магнитни вериги е формална. По своето физическо съдържание законът на Ом за електрически вериги и законът на Ом за магнитни вериги съществено се различават. Съществуването на постоянно електродвижещо напрежение е възможно без възникването под негово действие на електрически ток в електрическата верига, ако тя е отворена и съпротивлението ѝ е безкрайно. Напротив, съществуването на магнитодвижещо напрежение винаги е свързано с едновременното съществуване на магнитен поток.

Пример 5.1. На фиг. 5.4 е дадена магнитна верига, чиято еквивалентна електрическа схема е показана на фиг. 5.5.



Фиг. 5.4



Фиг. 5.5

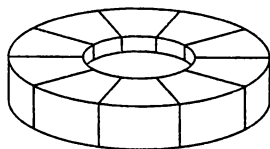
За еквивалентната схема на фиг. 5.5 се записва следната система уравнения по законите на Кирхоф:

$$\begin{cases} -\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3 = 0 \\ (R_{\mu 1} + R_{\mu \sigma 1})\Phi_1 - (R_{\mu 2} + R_{\mu \sigma 2})\Phi_2 = F_1 - F_2 \\ (R_{\mu 2} + R_{\mu \sigma 2})\Phi_2 + R_{\mu 3}\Phi_3 = F_2 \end{cases}$$

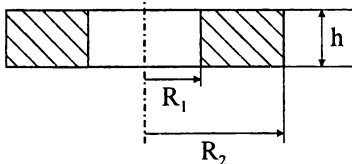
Решава се системата и се определят магнитните потоци в клоновете Φ_k . Ако е необходимо, от тях се определят магнитните индукции $B_k = \Phi_k / S_k$.

Пример 5.2. Върху тороидален магнитопровод с $\mu_r = 1000$ е намотана бобина с брой на навивките $w = 75$. Размерите на магнитопровода са: $R_1 = 4$ cm; $R_2 = 6$ cm; $h = 2$ cm. Токът в намотката е 2 А. Да се определи магнитният поток и индуктивността на бобината.

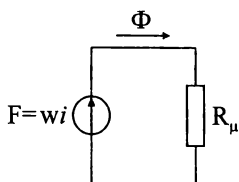
Решение: Ще бъде направено приблизително решение с използване на магнитна верига.



Фиг. 5.6



Фиг. 5.7



Фиг. 5.8

Магнитният поток, създаден от намотката, преминава по протежението на тороида и може да се определи по закона на Ом за магнитни вериги, въз основа на еквивалентната схема от фиг. 5.8.

Най-напред ще бъде определено магнитното съпротивление на магнитопровода, по който преминава потока.

$$R_{\mu} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r s} = \frac{2\pi \frac{R_1 + R_2}{2}}{\mu_0 \mu_r (R_2 - R_1) h} = 6,25 \cdot 10^5 \text{ Н}^{-1}$$

По закона на Ом се определя потокът:

$$\Phi = \frac{F}{R_{\mu}} = \frac{iw}{R_{\mu}} = 0,24 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

Накрая индуктивността се определя чрез дефиниционната ѝ формула:

$$L = \frac{\Psi}{i} = \frac{w\Phi}{i} = \frac{w^2 i}{i R_{\mu}} = \frac{w^2}{R_{\mu}} = \frac{75^2}{6,25 \cdot 10^5} = 0,009 \text{ H} = 9 \text{ mH}$$

Получената формула за индуктивността

$$L = \frac{w^2}{R_{\mu}}$$

се използва широко за приблизително изчисляване индуктивността на бобини с едноконтурен феромагнитен магнитопровод. Тя дава много добра за практиката точност при тороидални магнитопроводи, защото при тях разсейването е малко и средната геометрична линия е близка до средната индукционна линия.

Матричният подход в теорията на веригите е свързан с матрични описания на основните зависимости и методи за изследване. Използването на матрици позволява компактни записи на зависимостите и дава възможност за по-широко приложение на компютрите при анализа и проектирането на сложни електрически вериги и електронни схеми. Материалът в тази глава е представен по следния начин. В параграф 6.1 са въведени основните матрици, посредством които се описва структурата на дадена верига. В параграфи 6.2, 6.3, 6.4 и 6.5 е представена матричната обосновка съответно на методите с клоновите токове, с контурниет токове, с възловите потенциали и на модифицирания метод с възлови потенциали.

6.1. СТРУКТУРНИ МАТРИЦИ

В параграф 2.1 беше обосновано използването на графите за отразяване на структурните свойства на веригите. Използването на структурните матрици дава възможност да бъдат трансформирани топологичните структури, представени с графите, в системи уравнения. С други думи, посредством матриците лесно и компактно се записват основните закони за електрическите вериги. В теорията на веригите се използват три типа структурни матрици: *възлова матрица*, *матрица на сеченията* и *контурна матрица*.

6.1.1. Възлова матрица

Първоначално ще въведем неопределената възлова матрица, която е свързана с уравненията, съставени по първия закон на Кирхоф за всичките възли в изследваната верига.

Неопределената възлова матрица B_n е правоъгълна матрица, редовете на която съответстват на възлите в изследваната верига, а колоните ѝ съответстват на клоновете във веригата. p -тият ред на тази матрица $p = 1, 2, \dots, n$ се състои от елементите b_{pq} , $q = 1, 2, \dots, m$, които могат да бъдат 1, -1 или 0.

Ако клонът q не се опира на възела p , то $b_{pq} = 0$. Ако клонът q се опира на възела p и посоката му е на излизане от възела, то $b_{pq} = 1$, а ако посоката му е на влизане към възела, то $b_{pq} = -1$.

Ако въведем вектор-стълба на клоновите токове

$$\mathbf{i} = [i_1 \quad i_2 \quad \dots \quad i_m]^T, \dots$$

то скаларното произведение на p -тия ред на B_n и вектора i е:

$$b_{p1}i_1 + b_{p2}i_2 + \dots + b_{pm}i_m,$$

което е нула, защото съответства на първия закон на Кирхоф за възела p . Тогава, ако въведем нулев вектор-стълб 0 с размерност n , то системата от n уравнения, съставени по първия закон на Кирхоф, има следната матрична форма:

$$B_n i = 0. \quad (6.1)$$

От начина на получаване на елементите на B_n се вижда, че в случая не е необходимо познаването на стойностите на елементите и на източниците във веригата. Това е така, защото B_n е свързана единствено със структурата на веригата и затова при съставянето ѝ е достатъчно да се ползва само графът на веригата.

Редът за работа при съставянето на неопределената възлова матрица B_n е, както следва:

- а) построява се графът на веригата;
- б) номерират се възлите и клоновете;
- в) ориентира се графът (обикновено с посоките на токовете в клоновете);
- г) определят се стойностите на елементите b_{pq} , $p = 1, 2, \dots, n$, $q = 1, 2, \dots, m$.

Трябва да се отчете, че във всяка колона на B_n има само два ненулеви елемента, единият е $+1$, а другият е -1 , които съответстват на възлите, на които се опира клонът, свързан с разглежданата колона. Поради това, при сумирането на всички редове на B_n се получава ред с m нули, т.е. матрицата е B_n особена и оттам детерминантата ѝ е 0 . Физическият смисъл на това свойство на B_n е, че системата уравнения (6.1), съставена по първия закон на Кирхоф за всички възли във веригата, е особена.

За веригата от фиг. 2.1а, чийто граф е даден на фиг. 2.1в, неопределената възлова матрица е:

$$B_n = \begin{array}{cccccc} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \text{възел 1} \\ \text{възел 2} \\ \text{възел 3} \\ \text{възел 0} \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} & \end{array}$$

При отстраняването на произволен ред на B_n се получава възловата матрица за веригата. Обикновено се отстранява редът, който съответства на възела с нулев потенциал. Възловата матрица B е с размерност $(n - 1) \times m$ и при получаването ѝ се използва същата последователност, както и при неопределената

възлова матрица, с тази разлика, че при номерацията се номерират всички възли от 1 до $n - 1$, с изключение на възела с нулев потенциал, който се номерира с 0.

Важна особеност на възловата матрица е, че тя е неособена.

Ако за примера от фиг. 2.1а, разгледан по-горе, отстраним последния ред на \mathbf{B}_n , който съответства на възела 0, то се получава възловата матрица на веригата:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{възел 1} \\ \text{възел 2} \\ \text{възел 3} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix}$$

По този начин матричната форма на системата уравнения, съставена по първия закон на Кирхоф за възлите 1, 2 и 3 добива вида:

$$\mathbf{B}\mathbf{i} = \mathbf{0}, \quad (6.2)$$

където в случая $\mathbf{0}$ е нулев вектор-стълб с $n - 1 = 3$ елемента.

При стационарен синусоиден режим се използва векторът от комплексите на клоновите токове

$$\mathbf{i} = [i_1 \quad i_2 \quad i_3 \quad i_4 \quad i_5 \quad i_6]^T$$

и матричната форма на уравненията, съставени по първия закон на Кирхоф за възли 1, 2 и 3 е

$$\mathbf{B}\mathbf{i} = \mathbf{0}.$$

6.1.2. Матрица на сеченията

Матрицата на сеченията \mathbf{C} е правоъгълна $(n - 1) \times m$ матрица, редовете на която съответстват на сеченията в изследваната верига, а колоните ѝ съответстват на клоновете във веригата. p -тият ред на тази матрица се състои от елементите c_{pq} , $q = 1, 2, \dots, m$, които могат да бъдат 1, -1 или 0.

Ако клонът q не се опира на сечението p , то $c_{pq} = 0$. Ако клонът q е от сечение p и посоката му е на излизане от сечението, то $c_{pq} = 1$, а ако посоката му е на влизане в сечението, то $c_{pq} = -1$.

Тогава скаларното произведение на p -тия ред на \mathbf{C} и вектора-стълб на клоновите токове \mathbf{i} е:

$$c_{p1}i_1 + c_{p2}i_2 + \dots + c_{pm}i_m,$$

което е нула, защото съответства на първия закон на Кирхоф за сечението p .

Следователно първият закон на Кирхоф за системата от $n - 1$ сечения има следната матрична форма:

$$C_i = 0, \quad (6.3)$$

където $\mathbf{0}$ е нулев $(n - 1)$ - мерен вектор-стълб.

Както \mathbf{B}_n и \mathbf{B} , \mathbf{C} също е свързана със структурата на веригата и не зависи от параметрите на елементите. Затова при съставянето ѝ е достатъчно да се ползва само графът на веригата.

Редът на работа при съставянето на \mathbf{C} е както следва:

- построява се графът на веригата;
- ориентира се графът (обикновено с посоките на токовете);
- избират се сеченията;
- номерирант се клоновете и сеченията;
- определят се стойностите на елементите c_{pq} , $p = 1, 2, \dots, n-1$, $q = 1, 2, \dots, m$.

Ако сеченията за веригата от фиг. 2.1а са избрани така, че да съвпадат с възлите 1, 2 и 3, както е показано на фиг. 2.1в, то матрицата на сеченията \mathbf{C} съвпада с възловата матрица \mathbf{B} . Ако сеченията са избрани, както е показано на фиг. 2.1г, то матрицата на сеченията е:

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{сечение } c_1 \\ \text{сечение } c_2 \\ \text{сечение } c_3 \end{matrix}$$

1 2 3 4 5 6

6.1.3. Контурна матрица

Контурната матрица \mathbf{K} е правоъгълна $(k \times m)$ матрица, редовете на която съответстват на независимите контури $k = m - n + 1$ в изследваната верига, а колоните съответстват на клоновете във веригата. p -тият ред на тази матрица се състои от елементите k_{pq} , $q = 1, 2, \dots, m$, които могат да имат стойности 1, -1 или 0.

Ако клонът q не влиза в контура p , то $k_{pq} = 0$. Ако клонът q е от контура p и посоката му съвпада с посоката на обхождане на контура, то $k_{pq} = 1$, а ако посоката му е обратна на посоката на обхождане на контура, то $k_{pq} = -1$.

Ако формираме вектор-стълба \mathbf{u} от напреженията върху клоновете на разглежданата верига

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_m]^T,$$

то скаларното произведение на p -тия ред на \mathbf{K} и вектор-стълба \mathbf{u} е:

$$k_{p1}u_1 + k_{p2}u_2 + \dots + k_{pm}u_m,$$

което е нула, защото съответства на втория закон на Кирхоф за контура p .

Следователно вторият закон на Кирхоф за системата от k контура може да се запише във вида

$$Ku = 0, \quad (6.4)$$

където 0 е нулев k -мерен вектор стълб.

Както и разгледаните досега матрици, K е свързана единствено със структурата на веригата и не зависи от елементите в отделните клонове и източниците. Тогава при съставянето ѝ е достатъчно да се ползва само графът на веригата.

Редът на работа при съставянето на контурната матрица K е както следва:

- а) построява се графът на веригата;
- б) ориентира се графът (обикновено с посоките на токовете в клоновете);
- в) избират се независимите контури $k = m - n + 1$;
- г) номерират се клоновете и контурите;
- д) избират се посоки на обхождане на контурите;
- е) определят се стойностите на елементите k_{pq} , $p = 1, 2, \dots, k$, $q = 1, 2, \dots, m$.

Ако за веригата от фиг. 2.1а е избрана системата от контури k_4 , k_5 и k_6 , както е показано на фиг. 2.1в, то контурната матрица K е:

$$K = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{контур } k_4 \\ \text{контур } k_5 \\ \text{контур } k_6 \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \end{array}$$

В случая k_4 е избран за първи контур, k_5 за втори и k_6 за трети.

За контурите от фиг. 2.1г контурната матрица K е от вида:

$$K = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{контур } k_3 \\ \text{контур } k_4 \\ \text{контур } k_5 \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \end{array}$$

където k_3 е избран за първи контур, k_4 за втори и k_5 за трети контур.

6.1.4. Връзки между структурните матрици

Между структурните матрици, свързани с една и съща верига, съществуват следните зависимости:

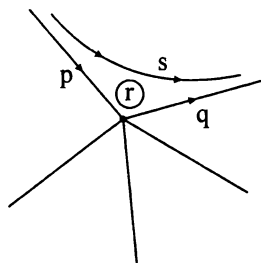
$$KB^T = 0, \quad (6.5)$$

$$VK^T = 0, \quad (6.6)$$

$$CK^T = 0, \quad (6.7)$$

$$CK^T = 0. \quad (6.8)$$

Нулевите матрици от (6.5) и (6.7) са с размерност $k \times (n - 1)$, а тези от (6.6) и (6.8) с $(n - 1) \times k$. Тук ще покажем само валидността на (6.6). Ако равенство (6.6) се транспонира, се получава (6.5).



Фиг. 6.1

Нека разгледаме възела r (фиг. 6.1), на който се опират клоновете p и q , като p е с посока на влизане, а q на излизане от r . Същевременно клоновете p и q са от контура s , посоката на обхождане на който е показана на фиг. 6.1.

Нека означим BK^T с A , т.е.,

$$A = BK^T.$$

Тогава елементът a_{rs} на A е

$$a_{rs} = b_{rp}k_{sp} + b_{rq}k_{sq}.$$

Ако p -тият клон се опира на r -тия възел и е от s -тия контур, то за да съществува s -тият контур съществува клонът q от него, който се опира на възела r , т.е. $b_{rp} \neq 0, k_{sp} \neq 0, b_{rq} \neq 0, k_{sq} \neq 0$.

Нека посоките на клоновете p и q са, както е показано на фиг. 6.1. Тогава $b_{rp} = -1, k_{sp} = 1, b_{rq} = 1, k_{sq} = 1$ и следователно $a_{rs} = 0$.

Ако посоката на p е като на фиг. 6.1, а на q е обратна, тогава $b_{rp} = -1, k_{sp} = 1, b_{rq} = -1, k_{sq} = -1$ и отново $a_{rs} = 0$.

До същото се стига, ако посоката на обхождане на контура s е обратна на тази от фигурата. По този начин се показва, че елементите a_{rs} на A са нули, т.е. $BK^T = 0$.

Аналогично могат да бъдат доказани (6.7) и (6.8).

6.1.5. Специална форма на структурните матрици

Ако за дадена верига разгледаме система от главни сечения и главни контури, то при определен избор на положителните посоки за сеченията, посоки на обхождане на контурите и определена номерация, структурните матрици на сеченията и контурите имат специална форма.

Нека:

а) от 1 до $n - 1$ се номерират клоновете на дървото на графа на веригата, а от n до m се номерират клоновете-хорди;

б) номерата на главните сечения съответстват на клоновете на дървото, а номерът на главния контур, който съответства на клон-хорда n е 1, номерът

на главния контур, който съответства на клона-хорда $n + 1$ е 2 и т.н., номерът на главния контур, който съответства на клона-хорда m е k ($k = m - n + 1$);

в) положителните посоки за сеченията съвпадат с посоките на съответните клонове на дървото, а положителните посоки на обхождане на контурите съвпадат с посоките на съответните клонове-хорди.

Тези условия са спазени при построяването на графа на веригата от фиг. 2.16. В този случай клоновете на дървото са 1, 2 и 3, а клоновете-хорди – 4, 5 и 6. Главните сечения c_1 , c_2 и c_3 съответстват на клоновете на дървото 1, 2 и 3, и номерацията им е по същия начин. Тъй като клоновете на дървото са с посоки на излизане от съответните сечения, положителните посоки за сеченията са излизащите. Главните контури k_4 , k_5 и k_6 съответстват на клоновете-хорди, като k_4 е първият, k_5 е вторият и k_6 е третият. Посоките на обхождане за главните контури са съгласувани с посоките на съответните клонове-хорди.

Тогава лесно се установява, че матрицата на сеченията и контурната матрица могат да бъдат представени като клетъчни матрици във вида:

$$C = [E_{(n-1) \times (n-1)} : a], \quad (6.9)$$

$$K = [b : E_{k \times k}], \quad (6.10)$$

където $E_{n-1, n-1}$ и $E_{k, k}$ са $(n - 1) \times (n - 1)$ и $k \times k$ единични матрици, a е $(n - 1) \times k$ матрица, а b е $k \times (n - 1)$ матрица.

За примера от фиг. 2.12 $m = 6$, $n = 4$, $n - 1 = 3$, $k = 3$

$$C = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right], \quad (6.11)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{E_{(n-1) \times (n-1)}} \quad \underbrace{\hspace{3em}}_a$$

$$K = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \quad (6.12)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_b \quad \underbrace{\hspace{3em}}_{E_{k \times k}}$$

Връзката между структурните матрици

$$KC^T = 0$$

$$KC^T = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{(n-1) \times (n-1)} \\ \mathbf{b}_{k \times (n-1)} : \mathbf{E}_{k \times k} \\ \dots\dots\dots \\ \mathbf{a}_{k \times (n-1)} \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{k \times (n-1)}.$$

Оттук може да се определи и връзката между подматриците \mathbf{a} и \mathbf{b} :

$$\mathbf{b}_{k \times (n-1)} \mathbf{E}_{(n-1) \times (n-1)} + \mathbf{E}_{k \times k} \mathbf{a}_{k \times (n-1)}^T = \mathbf{0}_{k \times (n-1)},$$

$$\mathbf{b}_{k \times (n-1)} + \mathbf{a}_{k \times (n-1)}^T = \mathbf{0}_{k \times (n-1)},$$

$$\mathbf{b}_{k \times (n-1)} = -\mathbf{a}_{k \times (n-1)}^T.$$

С цел по-голяма прегледност, в някои от горните равенства размерностите на подматриците са дадени като индекси. Следователно специалната форма на \mathbf{C} и \mathbf{K} е от вида

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{(n-1) \times (n-1)} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix}, \quad (6.13)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -\mathbf{a}^T \\ \mathbf{E}_{k \times k} \end{bmatrix}. \quad (6.14)$$

В разгледания пример

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = -\mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Специалната форма на матрицата на сеченията и на контурната матрица много често се използва в теорията на веригите. Тъй като тази форма зависи само от номерацията и избора на положителни посоки, а не зависи от структурата на веригата, тя винаги може да бъде получена.

Специалната форма на \mathbf{C} и \mathbf{K} може да бъде получена и на база на възловата матрица. Това е особено полезно при сложни електронни схеми, защото за тях най-лесно се получава възловата матрица \mathbf{B} .

Нека при даден избор на дърво на графа на веригата, клоновете на дървото да бъдат номерирани с номера от 1 до $n-1$, а с номера от n до m – клоновете-хорди. Тогава възловата матрица може да бъде разделена на две подматрици във вида

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_g \\ \mathbf{b}_x \end{bmatrix},$$

където \mathbf{b}_g е $(n-1) \times (n-1)$ подматрица, а \mathbf{b}_x е $(n-1) \times k$ подматрица.

Търси се \mathbf{K} -матрицата във вида:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -\mathbf{a}^T \\ \mathbf{E}_{k \times k} \end{bmatrix}.$$

Като се изходи от зависимостта:

$$BK^T = \mathbf{0},$$

се получава

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_g : \mathbf{b}_x \\ \dots \\ \mathbf{E}_{k \times k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a \\ \dots \\ \mathbf{E}_{k \times k} \end{bmatrix} = -\mathbf{b}_g a + \mathbf{b}_x \mathbf{E}_{k \times k} = -\mathbf{b}_g a + \mathbf{b}_x = \mathbf{0}_{(n-1) \times k}.$$

Следователно

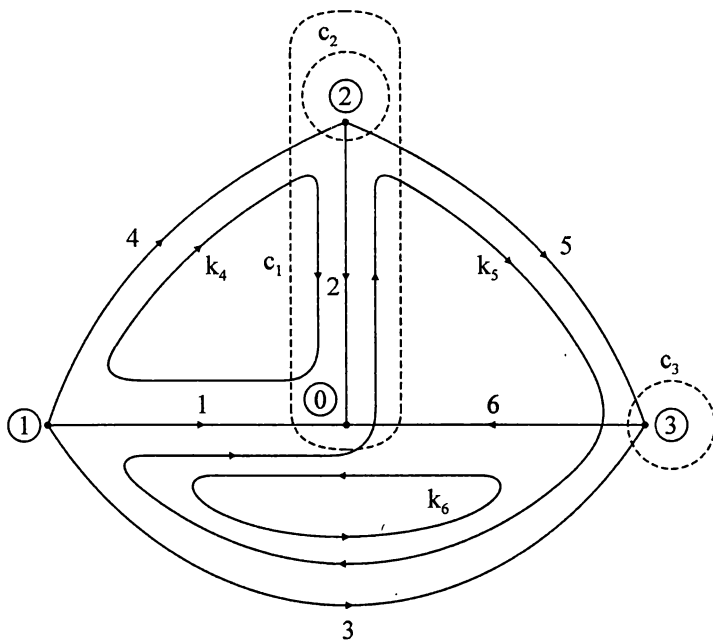
$$a = \mathbf{b}_g^{-1} \mathbf{b}_x.$$

Ако се отчетат (6.14) и (6.13), за контурната матрица и матрицата на сеченията се получава съответно

$$K = [-a^T : \mathbf{E}_{k \times k}] = [-\mathbf{b}_x^T (\mathbf{b}_g^{-1}) : \mathbf{E}_{k \times k}], \quad (6.15)$$

$$C = [\mathbf{E}_{(n-1) \times (n-1)} : a] = [\mathbf{b}_g^{-1} \mathbf{b}_g : \mathbf{b}_g^{-1} \mathbf{b}_x] = \mathbf{b}_g^{-1} [\mathbf{b}_g : \mathbf{b}_x] = \mathbf{b}_g^{-1} \mathbf{B}. \quad (6.16)$$

За примера от фиг. 2.12, при дърво на графа на веригата, състоящо се от клоновете 1, 2 и 6, и хорди 3, 4 и 5, номерацията на клоновете трябва да се промени, както е показано на фиг. 6.2.



Фиг. 6.2

В този случай сечението c_1 е първото, c_2 е второто и c_3 е третото. Контурът k_4 е първият, k_5 е вторият и k_6 е третият.

Възловата матрица е от вида

$$B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right],$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{b_g} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{b_x}$

Като изходим от (6.15) и (6.16), за специалната форма на матрицата на сеченията и контурната матрица се получава:

$$C = b_g^{-1} B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right],$$

$$K = [-b_x^T (b_g^{-1})^T : E_{k \times k}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

За случая от фиг. 6.2 тези матрици могат да бъдат получени и непосредствено, като се приложат правилата за формиране на матрицата на сеченията и контурната матрица.

Пример 6.1. За веригата, графът на която е показан на фиг. 6.3, да се определят структурните матрици в специалната им форма въз основа на възловата матрица.

Решение: Веригата от фигурата има $m = 6$ клона и $n = 4$ възела. Нека клоновете са номерирани така, че дърво на графа са клоновете 1, 2 и 3, а хорди са клоновете с номера 4, 5 и 6. Възловата матрицата на верига е:

$$B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{b_g} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{b_x}$

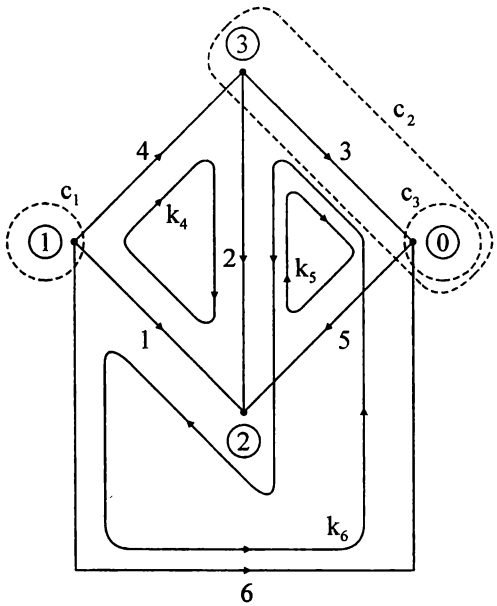
и тогава подматриците b_g и b_x са

$$\mathbf{b}_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Като се използват формулите (6.15) и (6.16), за специалната форма на контурната матрица и матрицата на сеченията се получава:

$$\mathbf{K} = [-\mathbf{b}_x^T (\mathbf{b}_g^{-1})^T : \mathbf{E}_{3 \times 3}] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & : & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.17)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{b}_g^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$



Фиг. 6.3

На избора на дърво, състоящо се от клоновете 1, 2 и 3, съответства

системата от главни сечения и главни контури, показана на фиг. 6.3, като първото сечение е c_1 , второто е c_2 и третото е c_3 . За първи контур е избран k_4 , за втори – k_5 и за трети – k_6 . Тогава матриците \mathbf{K} и \mathbf{C} са същите като (6.17) и (6.18) и могат да се получат по правилата за конструирането им, дадени в този параграф.

6.2. МАТРИЧНА ФОРМА НА МЕТОДА С КЛОНОВИТЕ ТОКОВЕ ЗА ИЗСЛЕДВАНЕ НА ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ

В този и следващите параграфи ще бъде разгледано матричното представяне на основните методи за изследване на електрически вериги. Представянето ще бъде направено за вериги с комплексни величини при стационарен синусоиден режим. Първоначално ще бъдат разгледани вериги, съдържащи само източници на напрежение, а след това ще бъде направено обобщение за вериги, съдържащи и източници на ток. Допълнително ще бъдат дадени основни идеи за матричен анализ и при наличие на идеални източници.

Разглежда се стационарен синусоиден режим в линейна верига с m клона и n възела. Възловата матрица \mathbf{B} може да бъде съставена по правилата, дадени в предишния параграф. Нека са избрани система независими сечения и система независими контури, на които съответстват матриците \mathbf{C} и \mathbf{K} .

Матричната форма на първия закон на Кирхоф за $n - 1$ възела, на които съответства възловата матрица \mathbf{B} е

$$\mathbf{B}\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{0}, \quad (6.19)$$

а матричната форма на втория закон на Кирхоф за системата независими сечения е

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{0}, \quad (6.20)$$

където $\dot{\mathbf{I}} = [\dot{i}_1 \ \dot{i}_2 \ \dots \ \dot{i}_m]^T$ е векторът-стълб на комплексите на клоновите токове, а $\mathbf{0}$ е $n - 1$ мерен нулев вектор-стълб.

Матричната форма на втория закон на Кирхоф е:

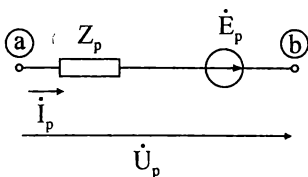
$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{0}, \quad (6.21)$$

където $\dot{\mathbf{U}} = [\dot{U}_1 \ \dot{U}_2 \ \dots \ \dot{U}_m]^T$ е векторът-стълб на комплексите на напреженията върху клоновете на веригата, а $\mathbf{0}$ в случая е k -мерен нулев вектор-стълб.

С цел опростяване на означенията, нулевите вектор-стълбове с различни размерности ще бъдат означавани по един и същи начин, както десните части на (6.19), (6.20) и (6.21). Размерността на съответните вектори лесно може да се определи от контекста на зависимостите.

Нека разглежданата верига съдържа само източници на е.д.н. Даден клон с номер p , $p = 1, \dots, m$, може да се представи, както е показано на фиг. 6.4a. Обобщеният закон на Ом за този клон е от вида:

$$Z_p \dot{I}_p = \dot{U}_p + \dot{E}_p. \quad (6.22)$$



Фиг. 6.4a

Знаците в (6.22) са съобразени с посоките на величините, показани на фиг. 6.4a. Както беше споменавано многократно, за посока на клона p се избира посоката на тока \dot{I}_p . В общия случай положителната посока за клона p , с която се ориентира и реброто p в графа на веригата, може да бъде произволна. Тогава компонентите \dot{I}_p и \dot{U}_p във векторите $\dot{\mathbf{I}}$ и $\dot{\mathbf{U}}$ участват със съответен знак в зависимост от това дали посоките на \dot{I}_p и \dot{U}_p съвпадат или не съвпадат с положителната посока за клона p .

Нека $\dot{E} = [\dot{E}_1 \ \dot{E}_2 \ \dots \ \dot{E}_m]^T$ е векторът-стълб на комплексите на е.д.н. в клоновете на веригата. Ако в някои от клоновете няма източници, то съответните елементи във вектора \dot{E} са нула. Компонентите $\dot{E}_1, \dot{E}_2, \dots, \dot{E}_m$ на вектора \dot{E} участват със съответен знак, в зависимост от посоките им по отношение на положителните посоки за клоновете (посоките, с които са ориентирани ребрата на графа на веригата).

Ако въведем диагоналната матрица Z на клоновете комплексни съпротивления

$$Z = \text{diag}(Z_1, Z_2, \dots, Z_m) = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_m \end{bmatrix}, \quad (6.23)$$

елементите на главния диагонал на която са комплексните съпротивления в клоновете на веригата, то матричната форма на обобщения закон на Ом добива вида:

$$ZI = \dot{U} + \dot{E}. \quad (6.24)$$

Ако от (6.24) изразим вектора \dot{U} и заместим в (6.21), се получава:

$$K\dot{U} = K(ZI - \dot{E}) = 0,$$

откъдето

$$KZI = K\dot{E}. \quad (6.25)$$

Матричното уравнение (6.25) представлява по същество системата уравнения, съставена по втория закон на Кирхоф за предварително избраните независими контури.

Следователно уравненията (6.19) и (6.25) или (6.20) и (6.25) са матричната форма на системата уравнения за режима във веригата, съставена по метода с клоновите токове.

Пример 6.2. За веригата от фиг. 2.1а да се състави матричната форма на системата уравнения по метода с клоновите токове.

Решение: Графът на веригата от фиг. 2.1а е даден на фиг. 2.1б. Ако за дърво на графа са избрани клоновете 1, 2 и 3, то главните сечения c_1, c_2 и c_3 съвпадат с възлите 1, 2 и 3, а главните контури k_4, k_5 и k_6 съвпадат с елементарните клетки. В този случай възловата и контурната матрица са:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ и } K = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Векторите \dot{I} , \dot{U} , \dot{E} и матрицата Z за веригата от фиг. 2.1а са съответно:

$$\dot{I} = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \\ \dot{I}_5 \\ \dot{I}_6 \end{bmatrix}; \dot{U} = \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \\ \dot{U}_5 \\ \dot{U}_6 \end{bmatrix}; \dot{E} = \begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ \dot{E}_3 \\ \dot{E}_4 \\ \dot{E}_5 \\ \dot{E}_6 \end{bmatrix}; Z = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_6 \end{bmatrix}.$$

Уравнението (6.19) е от вида:

$$B\dot{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \\ \dot{I}_5 \\ \dot{I}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 + \dot{I}_4 + \dot{I}_6 \\ \dot{I}_2 - \dot{I}_4 + \dot{I}_5 \\ \dot{I}_3 - \dot{I}_5 - \dot{I}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.26)$$

Уравнението (6.25) в този случай е

$$KZI = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \\ \dot{I}_5 \\ \dot{I}_6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -Z_1 & Z_2 & 0 & Z_4 & 0 & 0 \\ 0 & -Z_2 & Z_3 & 0 & Z_5 & 0 \\ -Z_1 & 0 & Z_3 & 0 & 0 & Z_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \\ \dot{I}_5 \\ \dot{I}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Z_1\dot{I}_1 + Z_2\dot{I}_2 + Z_4\dot{I}_4 \\ -Z_2\dot{I}_2 + Z_3\dot{I}_3 + Z_5\dot{I}_5 \\ -Z_1\dot{I}_1 + Z_3\dot{I}_3 + Z_6\dot{I}_6 \end{bmatrix} =$$

$$= K\dot{E} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{E}_4 \\ 0 \\ \dot{E}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{E}_1 + \dot{E}_4 \\ 0 \\ -\dot{E}_1 + \dot{E}_6 \end{bmatrix}. \quad (6.27)$$

Матричните уравнения (6.26) и (6.27) съответстват на системата уравнения, съставена по метода с клоновите токове за веригата от фиг. 2.1а.

При наличие на индуктивни връзки между клоновете p и q обобщеният закон на Ом за клонa p е $Z_p \dot{I}_p \pm Z_{Mpq} \dot{I}_q = \dot{U}_p + \dot{E}_p$, а за клонa q е $Z_q \dot{I}_q \pm Z_{Mqp} \dot{I}_p = \dot{U}_q + \dot{E}_q$, което е еквивалентно на въвеждане на диагонални елементи $\pm Z_{Mpq}$ и $\pm Z_{Mqp}$ в матрицата Z . В случая $Z_{Mpq} = Z_{Mqp}$ са комплексните съпротивления на индуктивната връзка между клоновете p и q и те участват със знак плюс, ако посоките на клоновете p и q са еднакво ориентирани спрямо едноименните изводи.

6.3. МАТРИЧНА ОБОСНОВКА НА МЕТОДА С КОНТУРНИТЕ ТОКОВЕ

Разглежда се стационарен синусоиден режим във верига с m клонa и n възела, като веригата съдържа само източници на е.д.н.

Ако за система независими контури и сечения се използват главните контури и се използва специалната форма на матрицата на сеченията, то първият закон на Кирхоф в матрична форма има вида:

$$C\dot{I} = [E : a] \begin{bmatrix} \dot{I}_g \\ \dots \\ \dot{I}_x \end{bmatrix} = 0, \quad (6.28)$$

където

$$C = [E : a]$$

е специалната форма на матрицата на сеченията, а комплексът на клоновите токове

$$\dot{I} = \begin{bmatrix} \dot{I}_g \\ \dots \\ \dot{I}_x \end{bmatrix}$$

е представен като два вектора, $\dot{\mathbf{I}}_g$ – вектор-стълб с размерност $n - 1$ от комплексите на токовете в клоновете на дървото на графа и $\dot{\mathbf{I}}_x$ – вектор-стълб с размерност $k = m - n + 1$ от комплексите на токовете в клоновете-хорди.

Тогава от (6.28) се получава

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{I}}_g + \mathbf{a}\dot{\mathbf{I}}_g &= \mathbf{0}, \\ \dot{\mathbf{I}}_g &= -\mathbf{a}\dot{\mathbf{I}}_g.\end{aligned}\tag{6.29}$$

Следователно

$$\dot{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_g \\ \dots \\ \dot{\mathbf{I}}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{a}\dot{\mathbf{I}}_x \\ \dots \\ \mathbf{E}\dot{\mathbf{I}}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{a} \\ \dots \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_x = \mathbf{K}^T \dot{\mathbf{I}}_x,\tag{6.30}$$

където $\mathbf{K} = [-\mathbf{a}^T : \mathbf{E}]$ е контурната матрица в специалната форма, разгледана в параграф 6.1.

Матричното равенство (6.30) показва, че клоновите токове могат да бъдат изразявани като линейна комбинация само с част от клоновите токове, а именно токовете в клоновете-хорди от вектора $\dot{\mathbf{I}}_x$. При този избор на контури токовете в клоновете-хорди съвпадат с контурните токове, т.е.:

$$\dot{\mathbf{I}}_x = \dot{\mathbf{I}}' = [\dot{I}'_1 \quad \dot{I}'_2 \quad \dots \quad \dot{I}'_k]^T,$$

където $\dot{\mathbf{I}}'$ е k -мерен вектор-стълб на контурните токове.

Физическата интерпретация на (6.30) е, че клоновите токове могат да бъдат получени посредством контурните, като всеки клонов ток е алгебрична сума от контурните токове, „преминаващи“ през дадения клон.

Ако се изходи от системата уравнения, съставена по втория закон на Кирхоф за независимите контури (6.25), и в нея се замести векторът $\dot{\mathbf{I}}$, от (6.30) се получава:

$$\mathbf{KZK}^T \dot{\mathbf{I}}' = \mathbf{K}\dot{\mathbf{E}},\tag{6.31}$$

Нека

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{KZK}^T \quad \text{и} \quad \dot{\mathbf{E}}' = \mathbf{K}\dot{\mathbf{E}}.$$

Тогава (6.31) добива вида

$$\mathbf{Z}' \dot{\mathbf{I}}' = \dot{\mathbf{E}}',\tag{6.32}$$

което по същество представлява матричната форма на системата уравнения, съставена по метода с контурните токове.

В случая Z' е $k \times k$ матрица, която е съставена от собствените и взаимните комплексни съпротивления и се нарича матрица на собствените и взаимните комплексни съпротивления, а \dot{E}' е k -мерен вектор-стълб, съставен от комплексните контурни електродвижещи напрежения и се нарича вектор-стълб на комплексните контурни електродвижещи напрежения.

Ако Z' е неособена матрица, то решението на (6.32) може да се запише във вида

$$\dot{I}' = (Z')^{-1} \dot{E}' = (KZ'K^T)^{-1} K\dot{E}'.$$

Като се използва (6.30) за вектор-стълба на комплексите на клоновите токове, се получава

$$\dot{I} = K^T \dot{I}' = K^T (KZ'K^T)^{-1} K\dot{E}'. \quad (6.33)$$

Формула (6.33) дава аналитичен израз за определяне на клоновите токове на базата на метода с контурните токове. На практика тя не се използва, защото се налага обръщане на матрица, което е свързано с повече компютърно време. Поради това първо се решава (6.32) на базата на някой числен метод (като Гаусова елиминация например) и след това клоновите токове се определят, като се използва формула (6.30).

При наличие на индуктивни връзки в матрицата Z се добавят компонентите $\pm Z_{Mpq}$ и $\pm Z_{Mqp}$ за всяка двойка индуктивно свързани клонове p и q .

Ако във веригата има източници на ток, то се разглежда обобщеният клон от фиг. 6.4б.

Всеки от двуполусниците от вида, показан на фиг. 6.4б се представя с едно ребро в графа на веригата. За двуполусника от фиг. 6.4б обобщеният закон на Ом и първият закон на Кирхоф са:

$$Z_p \dot{I}_{pZ} = \dot{U}_p + \dot{E}_p,$$

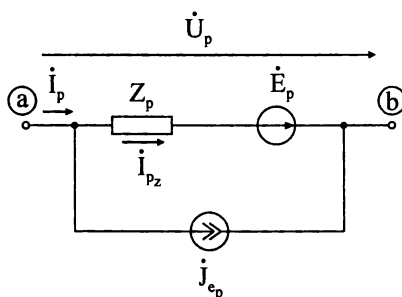
$$\dot{I}_{pZ} = \dot{I}_p - \dot{J}_{ep}.$$

Следователно

$$Z_p (\dot{I}_p - \dot{J}_{ep}) = \dot{U}_p + \dot{E}_p, \quad (6.34)$$

$$Y_p (\dot{U}_p + \dot{E}_p) = \dot{I}_p - \dot{J}_{ep}, \quad (6.35)$$

където $Z_p = \frac{1}{Y_p}$ е комплексната проводимост на контура p .



Фиг. 6.4б

Знаците в горните уравнения са съобразени с посоките на величините от фиг. 6.4б.

Матричната форма на (6.34) и (6.35) е:

$$Z(\dot{I} - \dot{J}_e) = \dot{U} + \dot{E}, \quad (6.36)$$

$$Y(\dot{U} + \dot{E}) = \dot{I} - \dot{J}_e, \quad (6.37)$$

където

$$Y = Z^{-1}.$$

При вериги без индуктивни връзки

$$Y = Z^{-1} = \text{diag}(Y_1, Y_2, \dots, Y_m) = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_m \end{bmatrix}, \quad (6.38)$$

а \dot{J}_e е вектор-стълб на комплексите на източниците на ток:

$$\dot{J}_e = [\dot{j}_{e1} \quad \dot{j}_{e2} \dots \dot{j}_{em}]^T.$$

Елементите на вектора \dot{J}_e участват със съответен знак в зависимост от посоките на източниците на ток по отношение на положителните посоки за ребрата на графа на веригата. Ако в някои от клоновете няма източник на ток или е.д.н., съответните елементи във векторите \dot{J}_e и \dot{E} са нули.

Ако от (6.36) се изрази векторът \dot{U} и се замести в (6.21) се получава:

$$\begin{aligned} K[Z(\dot{I} - \dot{J}_e) - \dot{E}] &= 0, \\ KZ\dot{I} - KZ\dot{J}_e - K\dot{E} &= 0, \\ KZ\dot{I} &= K\dot{E} + KZ\dot{J}_e. \end{aligned}$$

Като се отчете (6.30) се достига до израза:

$$KZK^T \dot{I}' = K\dot{E}' + KZ\dot{J}_e'. \quad (6.39)$$

В случая на разнородни източници зависимостите са:

$$Z' = KZK^T, \quad \dot{E}' = K\dot{E} + KZ\dot{J}_e'$$

и тогава (6.39) добива вида (6.32), което е матричната форма на системата уравнения, съставена по метода с контурните токове.

$$Z' = KZK^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (Z_1 + Z_2 + Z_4) & -Z_2 & Z_1 \\ -Z_2 & (Z_2 + Z_3 + Z_5) & Z_3 \\ Z_1 & Z_3 & (Z_1 + Z_3 + Z_6) \end{bmatrix},$$

и

$$\dot{E}' = K\dot{E} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{E}_4 \\ 0 \\ \dot{E}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\dot{E}_1 + \dot{E}_4) \\ 0 \\ (-\dot{E}_1 + \dot{E}_6) \end{bmatrix}.$$

6.4. МАТРИЧНА ОБОСНОВКА НА МЕТОДА С ВЪЗЛОВИТЕ ПОТЕНЦИАЛИ

Разглежда се стационарен синусоиден режим във верига с m клона и n възела, като първоначално се разглежда случаят, когато веригата съдържа само източници на е.д.н.

Ако n -тият възел е с нулев потенциал, то векторът-стълб с комплексите на напреженията може да бъде изразен посредством вектора-стълб

$$\dot{V} = [\dot{V}_1 \quad \dot{V}_2 \quad \dots \quad \dot{V}_{n-1}]^T$$

на комплексите на възловите потенциали, чрез транспонираната възлова матрица

$$\dot{U} = B^T \dot{V}. \tag{6.40}$$

И наистина, всеки ред на B^T съответства на клон от веригата и съдържа нули, един елемент „+1“ и един елемент „-1“, които съответстват на възлите, на които се опира клонът. При умножението на даден ред на B^T с \dot{V} се полу-

чава точно потенциалната разлика от възлите, на които се опира клонът, съответстващ на дадения ред.

Ако от (6.24) изразим вектора \dot{I}

$$\dot{I} = Z^{-1}(\dot{U} + \dot{E})$$

и го заместим в (6.19) се получава:

$$B\dot{I} = BZ^{-1}(\dot{U} + \dot{E}) = 0. \quad (6.41)$$

Ако във веригата няма индуктивни връзки

$$Y = Z^{-1} = \text{diag}(Y_1, Y_2, \dots, Y_m) = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_m \end{bmatrix}.$$

Като заместим (6.40) в (6.41) се получава

$$BYB^T \dot{V} = -BY\dot{E}.$$

Нека

$$Y' = BYB^T \quad \text{и} \quad \dot{J}'_e = -BY\dot{E}.$$

Тогав окончателно (6.41) може да се запише като

$$Y'\dot{V} = \dot{J}'_e, \quad (6.42)$$

което е матрична форма на системата уравнения, съставена по метода с възловите потенциали.

В този случай Y' е $(n-1) \times (n-1)$ матрица и се нарича матрица на комплексните собствени и взаимни възлови проводимости. \dot{J}'_e е $(n-1)$ -мерен вектор-стълб и се нарича вектор на комплексните възлови електродвижещи токове, защото неговите елементи са комплексите на възловите електродвижещи токове.

Ако Y' е неособена матрица, то решението на (6.42) може да бъде записано във вида:

$$\dot{V} = (Y')^{-1}(\dot{J}'_e) = -(BYB^T)^{-1}(BY\dot{E}).$$

Тогав

$$\dot{U} = B^T \dot{V} = -B^T (BYB^T)^{-1} (BY\dot{E})$$

$$\text{и} \quad \dot{I} = Y(\dot{U} + \dot{E}) = -YB^T (BYB^T)^{-1} (BY\dot{E}) + Y\dot{E}. \quad (6.43)$$

Формула (6.43) дава аналитичния израз за определяне на клоновите токове на базата на метода с възловите потенциали. На практика тя не се използва, защото се налага обръщане на матрицата BYB^T . Поради това първо се решава (6.42) по отношение на \dot{V} и после се намира \dot{I} .

При наличие на индуктивни връзки между клоновете от веригата се работи с матрицата Z^{-1} вместо с Y . В случая Z не е диагонална, защото в нея се появяват компоненти, отчитащи индуктивната връзка между клоновете, както беше споменато преди.

За Пример 6.2

$$Y' = BYB^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{Z_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{Z_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Z_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Z_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Z_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_4} + \frac{1}{Z_6} \right) & -\frac{1}{Z_4} & -\frac{1}{Z_6} \\ -\frac{1}{Z_4} & \left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_4} + \frac{1}{Z_5} \right) & -\frac{1}{Z_5} \\ -\frac{1}{Z_6} & -\frac{1}{Z_5} & \left(\frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_5} + \frac{1}{Z_6} \right) \end{bmatrix},$$

$$J_e' = -BY\dot{E} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{Z_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{Z_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Z_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Z_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Z_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{E}_4 \\ 0 \\ \dot{E}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\dot{E}_1}{Z_1} - \frac{\dot{E}_4}{Z_4} \\ \frac{\dot{E}_4}{Z_4} \\ \frac{\dot{E}_6}{Z_6} \end{bmatrix}.$$

При наличие на източници на ток се разглежда обобщеният клон от фиг. 6.4б и всеки двуполусник от този вид се представя като едно ребро от графа на веригата. В този случай матричните зависимости, свързани с обобщените клонове, се дават с (6.36) и (6.37). Ако заместим (6.40) в (6.37) се получава:

$$\begin{aligned} Y(B^T \dot{V} + \dot{E}) &= \dot{I} - \dot{J}_e \\ \dot{I} &= YB^T \dot{V} + Y\dot{E} + \dot{J}_e. \end{aligned}$$

Ако заместим вектора на комплексите на клоновите токове \dot{I} в (6.19), се получава:

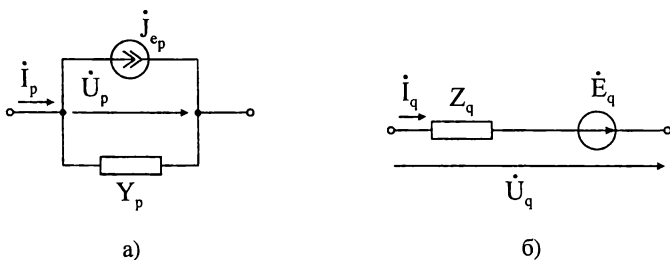
$$\begin{aligned} B\dot{I} &= BYB^T \dot{V} + BY\dot{E} + B\dot{J}_e = 0, \\ BYB^T \dot{V} &= -BY\dot{E} - B\dot{J}_e. \end{aligned}$$

Горното матрично равенство е от вида (6.42), като в случая

$$\begin{aligned} Y' &= BYB^T, \\ \dot{J}'_e &= -BY\dot{E} - B\dot{J}_e, \end{aligned}$$

т.е. компонентата $-B\dot{J}_e$ от \dot{J}'_e отчита наличието на източници на ток във веригата.

При наличие на идеални източници от различен тип клоновете на схема на веригата се разделят на два типа: Y -клонове и Z -клонове, дадени съответно на фиг. 6.5а и б.



Фиг. 6.5

За Y -клоновете се записва:

$$\dot{I}_p = Y_p \dot{U}_p + \dot{J}_{ep}, \quad p = 1, \dots, m_Y.$$

Ако източникът на ток е идеален, то съответната комплексна проводимост $Y_p = 0$.

За Z -клоновете важат уравненията

$$\dot{U}_q = Z_q \dot{I}_q - \dot{E}_q, \quad q = 1, \dots, m_Z; (m_Y + m_Z = m).$$

При положение, че източникът на е.д.н. е идеален, съответното $Z_q = 0$.
Горните зависимости могат да бъдат записани в следната матрична форма:

$$\begin{aligned} \dot{I}_Y &= Y\dot{U}_Y + \dot{J}_e, \\ \dot{U}_Z &= Z\dot{I}_Z - \dot{E}, \end{aligned}$$

където \dot{I}_Y , \dot{U}_Y са векторите на токовете и напреженията от Y -клоновете, \dot{I}_Z и \dot{U}_Z са векторите на токовете и напреженията от Z -клоновете, Y е диагонална матрица от комплексните проводимости на Y -клоновете и Z е диагонална матрица от комплексните съпротивления на Z -клоновете. \dot{J}_e и \dot{E} са вектори с размерност m_Y и m_Z , съдържащи източниците на напрежение и ток във веригата. Ако в някой клон липсва източник, съответният елемент е нула.

В случая матричната форма на първия закон на Кирхоф е от вида:

$$B\dot{I} = [B_Y : B_Z] \begin{bmatrix} \dot{I}_Y \\ \dots \\ \dot{I}_Z \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

където матрицата B е представена като клетъчна матрица, състояща се от две подматрици B_Y и B_Z съответно с размерности $(n-1) \times m_Y$ и $(n-1) \times m_Z$, а векторът \dot{I} – като комбинация от векторите \dot{I}_Y и \dot{I}_Z . Тогава

$$B_Y \dot{I}_Y + B_Z \dot{I}_Z = \mathbf{0}.$$

Връзката между комплексите на напреженията и комплексите на възловите потенциали (6. 40) може да бъде записана във вида:

$$\dot{U} = \begin{bmatrix} \dot{U}_Y \\ \dots \\ \dot{U}_Z \end{bmatrix} = B^T \dot{V} = [B_Y : B_Z]^T \dot{V} = \begin{bmatrix} B_Y^T \\ \dots \\ B_Z^T \end{bmatrix} \dot{V},$$

откъдето

$$\begin{aligned} \dot{U}_Y &= B_Y^T \dot{V}, \\ \dot{U}_Z &= B_Z^T \dot{V}. \end{aligned}$$

След заместване на $\dot{U}_Y = B_Y^T \dot{V}$ в $\dot{I}_Y = Y\dot{U}_Y + \dot{J}_e$, се получава $\dot{I}_Y = YB_Y^T \dot{V} + \dot{J}_e$. Като се замести последното равенство в $B_Y \dot{I}_Y + B_Z \dot{I}_Z = \mathbf{0}$, окончателно се достига до

$$B_Y Y B_Y^T \dot{V} + B_Z \dot{I}_Z = -B_Y \dot{J}_e. \quad (6.44)$$

Като заместим $\dot{U}_Z = B_Z^T \dot{V}$ в $\dot{U}_Z = Z \dot{I}_Z - \dot{E}$ се получава

$$-B_Y^T \dot{V} + Z \dot{I}_Z = \dot{E}. \quad (6.45)$$

Уравненията (6.44) и (6.45), разгледани съвместно, дават възможност да бъдат определени токовете в Z -клоновете и потенциалите на възлите, като $B_Y Y B_Y^T$ е матрицата на собствените и взаимните възлови проводимости, но само за Y -клоновете, а $-B_Y \dot{J}_e$ е възловият електродвижещ ток, свързан с източниците в тези клонове.

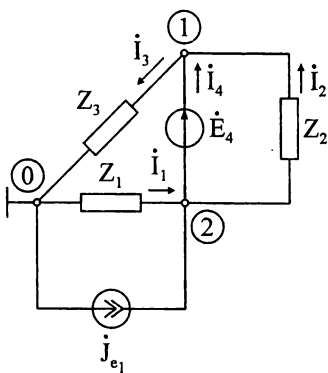
Уравненията (6.44) и (6.45) могат да бъдат обединени в разширеното матрично уравнение:

$$\begin{bmatrix} B_Y Y B_Y^T & : & B_Z \\ \dots & \dots & \dots \\ -B_Z^T & : & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dots \\ \dot{I}_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B_Y \dot{J}_e \\ \dots \\ \dot{E} \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

от $(n - 1 + m_Z)$ уравнения с $(n - 1 + m_Z)$ неизвестни.

Пример 6.3. Да се състави разширено матрично уравнение (6.46) за анализа на режима във веригата от фиг. 6.6.

Решение: Схемата от фигурата се състои от $m_Y = 3$ Y -клона (паралелният двуполусник Z_1 , \dot{J}_{e1} ; Z_2 и Z_3) и $m_Z = 1$ Z -клон (клонът с идеален източник на е.д.н \dot{E}_4). Векторите \dot{I}_Y , \dot{I}_Z , \dot{J}_e и \dot{E} са:



$$\dot{I}_Y = \begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \\ \dot{i}_3 \end{bmatrix}, \quad \dot{I}_Z = [\dot{i}_4], \quad \dot{J}_e = \begin{bmatrix} \dot{J}_{e1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{E} = [\dot{E}_4],$$

а матриците Y и Z са от вида:

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{Z_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{Z_3} \end{bmatrix}, \quad Z = [0].$$

Фиг. 6.6

Възловата матрица на веригата е:

$$B = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & \vdots & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}}_{B_Y} \underbrace{\quad}_{B_Z},$$

като трябва да се подчертае, че двуполусникът от паралелен тип Z_1 , J_{e1} се разглежда като един клон с положителна посока от възела 0 към възела 2.

Тогава подматриците в уравнение (6.46) са:

$$B_Y Y B_Y^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{Z_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{Z_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}) & -\frac{1}{Z_2} \\ -\frac{1}{Z_2} & (\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}) \end{bmatrix},$$

$$B_Z = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad -B_Z^T = [1 \quad -1], \quad Z = [0], \quad -B_Y J_e = -\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{e1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ J_{e1} \end{bmatrix},$$

$$\dot{E} = [\dot{E}_4].$$

Следователно разширеното матрично уравнение (6.46) добива вида:

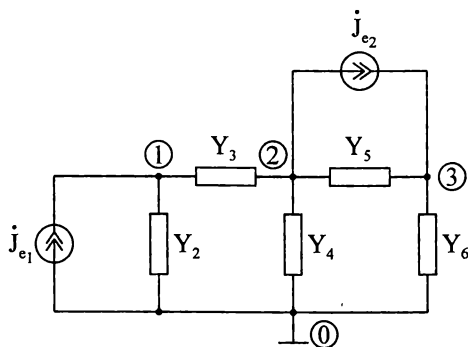
$$\begin{bmatrix} (\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}) & -\frac{1}{Z_2} & \vdots & -1 \\ -\frac{1}{Z_2} & (\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}) & \vdots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dots \\ \dot{I}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ J_{e1} \\ \dots \\ \dot{E}_4 \end{bmatrix}.$$

6.5. МАТРИЧНА ФОРМА НА МОДИФИЦИРАНИЯ МЕТОД С ВЪЗЛОВИТЕ ПОТЕНЦИАЛИ (ММВП)

Модифицираният метод с възловите потенциали е изложен в гл. 2. Този метод е основен при изследване на сложни електронни схеми и затова в този параграф накратко се разглежда матричната форма на метода при формиране на уравненията за анализ на режимите в линейни вериги.

Нека първоначално разглежданата верига съдържа само комплексни съпротивления и идеални източници на ток. Ако клонът p с комплексното съпротивление Z_p (комплексна проводимост Y_p) се опира на възлите i и j , тогава независимите уравнения по първия закон на Кирхоф за възлите i и j ще бъдат във вида:

$$\begin{aligned} i & \dots + Y_p (\dot{V}_i - \dot{V}_j) + \dots = \dots \\ j & \dots + Y_p (\dot{V}_j - \dot{V}_i) + \dots = \dots \end{aligned}$$



Фиг. 6.7

Коефициентът Y_p има положителни стойности в i -тата и в j -тата позиции от главния диагонал на матрицата на системата уравнения, съставена по метода с възловите потенциали, и отрицателни стойности в j -тия ред и i -тия стълб и в i -тия ред и j -тия стълб на матрицата. Ако клонът p е свързан между възела i и възела с нулев потенциал, то тогава Y_p има положителна стойност само в i -тата позиция от главния диагонал.

Например, за веригата от фиг. 6.7 може да бъде записана следната система уравнения по метода с възловите потенциали:

$$\begin{bmatrix} Y_2 + Y_3 & -Y_3 & 0 \\ -Y_3 & Y_3 + Y_4 + Y_5 & -Y_5 \\ 0 & -Y_5 & Y_5 + Y_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{e1} \\ -j_{e2} \\ j_{e2} \end{bmatrix}.$$

С цел да се покаже влиянието на всеки от елементите от схемата от фиг. 6.7, върху матрицата на собствените и взаимните комплексни възлови проводимости и вектора на комплексите на възловите електродвижещи токове горната система се представя във вида:

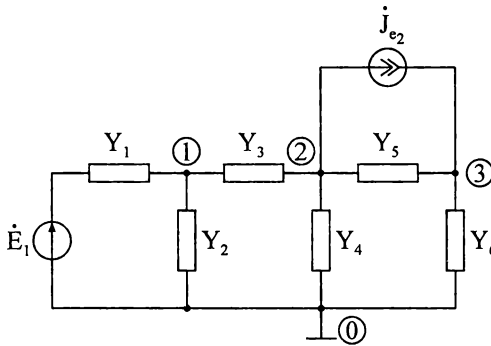
$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{bmatrix} Y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_3 & -Y_3 & 0 \\ -Y_3 & Y_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_5 & -Y_5 \\ 0 & -Y_5 & Y_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_6 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{V}_3 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} j_{e1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -j_{e2} \\ j_{e2} \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Лесно се забелязва, че комплексната проводимост на клон, опиращ се на възела i и възела с нулев потенциал, се появява само в i -тата позиция на главния диагонал на съответната за този елемент матрица. Комплексната проводимост в клон, опиращ се на възлите i и j , нито единият, нито другият от които е с нулев потенциал, се появява на четири позиции в съответстващата на елемента матрица. Стойностите \dot{u} в i -тата и j -тата позиции от главния диагонал са положителни, а останалите две, симетрични на главния диагонал стойности, са отрицателни.

Влиянието на източниците на ток се отразява с вектор-стълбове, сумата от които дава вектора на възловите електродвижещи токове. Ако даден източник на ток се опира на възлите i и j (насочен от i към j), то стойността му се появява със знак плюс в j -та позиция и със знак минус в i -та позиция на съответния вектор-стълб. Ако един от възлите, на които се опира източникът на ток е нулевият, то стойността му се появява само в позиция, съответстваща на другия възел със знак плюс, ако е насочен към възела, и минус, ако излиза от възела.

Както беше споменато в гл. 2, наличието на източници на напрежение усложнява метода, при положение, че те са идеални. Ако във веригата съществува клон с източник на напрежение и комплексно съпротивление, свързани последователно, то след използване на заместваща схема от паралелен тип с източник на ток и същото комплексно съпротивление, се стига до верига, съдържаща само източници на ток.

Например, след еквивалентното преобразуване на източника на напрежение за веригата от фиг. 6.8 се стига до следната система уравнения в матрична форма:



Фиг. 6.8

$$\begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 + Y_3 & -Y_3 & 0 \\ -Y_3 & Y_3 + Y_4 + Y_5 & -Y_5 \\ 0 & -Y_5 & Y_5 + Y_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \dot{E}_1 \\ -j_{e2} \\ j_{e2} \end{bmatrix}. \quad (6.48)$$

Влиянието на различните елементи по-добре личи след представянето на (6.48) във вида:

$$\left\{ \begin{bmatrix} Y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_3 & -Y_3 & 0 \\ -Y_3 & Y_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_5 & -Y_5 \\ 0 & -Y_5 & Y_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_6 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{V}_3 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} Y_1 \dot{E}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{J}_{e2} \\ \dot{J}_{e2} \end{bmatrix} \right\}. \quad (6.49)$$

От (6.49) също се вижда, че начинът на отразяване на източниците на напрежение с последователно свързани комплексни съпротивления става по подобен начин, както и при източниците на ток. Във вектор-стълба на комплексите на възловите електродвижещи токове се отчитат стойностите на еквивалентните източници на ток, а в матрицата на собствените и взаимните комплексни възлови проводимости се отчитат проводимостите от паралелната заместваща схема.

Съществено е да се отбележи, че при конструирането на матрицата на собствените и взаимните комплексни възлови проводимости първоначално се започва с нулева матрица с подходяща размерност и последователно към нея се добавят компонентите, отчитащи влиянието на всеки от елементите. Също така при конструиране на вектора-стълб на комплексите на възловите електродвижещи токове се започва с нулев вектор с подходяща размерност и към него се добавят компонентите, отчитащи влиянието на всеки от източниците.

Както беше подчертано в гл. 2, отчитането на източниците на ток, управлявани с напрежение (ИТУН) в матрицата на собствените и взаимни комплексни възлови проводимости става непосредствено. Например, ако даден източник на ток, управляван с напрежение с коефициент на управление G се опира на възлите i и j с посока от i към j , а управляващото напрежение е между възлите p и q с посока от p към q , то в i -тия и j -тия ред на уравненията по метода с възловите потенциали се появяват съответно компонентите:

$$\begin{aligned} i & \quad \dots + G(\dot{V}_p - \dot{V}_q) + \dots = \dots, \\ j & \quad \dots - G(\dot{V}_p - \dot{V}_q) + \dots = \dots. \end{aligned}$$

Следователно горните компоненти въвеждат допълнителни коефициенти $+G$ на позициите (i,p) и (j,q) и $-G$ на позициите (i,q) и (j,p) в матрицата на собствените и взаимни комплексни възлови проводимости. Вижда се, че източниците на ток, управлявани с напрежение, се отразяват като проводимости в случай, когато възлите, на които се опира източникът, съвпадат с възлите на уп-

равляващото напрежение. В общия случай при наличие на източници на ток, управлявани с напрежение, се нарушава симетрията на матрицата на възловите проводимости.

Пълната система уравнения за режима във веригата, съставена по ММВП, е от вида:

$$\begin{array}{l}
 \text{Уравнения по първия} \\
 \text{закон на Кирхоф} \\
 \\
 \text{Допълнителни} \\
 \text{уравнения (ДУ)}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 Y_{11}' & \cdots & Y_{1s}' & A_{11} & \cdots & A_{1m} \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 Y_{s1}' & \cdots & Y_{ss}' & A_{s1} & \cdots & A_{sm}
 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \vdots \\ \dot{V}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{e1} \\ \vdots \\ j_{es} \end{bmatrix} \\
 \hline
 \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 X_{11} & \cdots & X_{1s} & B_{11} & \cdots & B_{1m} \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 X_{m1} & \cdots & X_{ms} & B_{m1} & \cdots & B_{mm}
 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \dot{i}_{x1} \\ \vdots \\ \dot{i}_{xm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_m \end{bmatrix}
 \end{array} \right. \quad (6.50)$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_T \quad \underbrace{\hspace{3em}}_X \quad \underbrace{\hspace{3em}}_W$

По-долу ще разгледаме влиянието от въвеждането на допълнителните неизвестни и допълнителните уравнения за идеални източници на е.д.н., ИНУН, ИТУТ, ИНУТ, идеални операционни усилватели и индуктивно свързани бобини, което помага за изясняване на смисъла на подматриците от (6.43).

Като пример за приложение на ММВП при наличие на идеални източници на напрежение се разглежда веригата от фиг. 2.13. Наличието на идеален източник на напрежение въвежда тока \dot{i} през него като допълнително неизвестно, а допълнителното уравнение, което отчита наличието на източника, в случая е:

$$\dot{V}_1 = \dot{E}.$$

Матричната форма на системата уравнения за режима във веригата от фиг. 2.13 има вида:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cc|c}
 G_1 \omega C_1 & -G_2 & 1 \\
 -G_2 & G_1 + G_2 + j\omega C_1 & 0 \\
 \hline
 1 & 0 & 0
 \end{array} \right]}_T \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{i} \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{E} \end{bmatrix}}_W. \quad (6.51)$$

Елементите от третия ред на матрицата T отчитат допълнителното уравнение, докато първите два елемента от третия стълб на T въвеждат комплекса на тока през идеалния източник на напрежение в двете уравнения, записани по първия закон на Кирхоф.

Източникът на напрежение, управляван с напрежение (ИНУН) от фиг. 2.14 се характеризира с допълнителното уравнение

$$\dot{V}_k - \dot{V}_{k'} - K_e(\dot{V}_j - \dot{V}_{j'}) = 0. \quad (6.52)$$

В този случай векторът на неизвестните се разширява с тока през източника (за положителна посока на тока се приема посоката от k към k' , следваща посоката на електрическото напрежение). На фиг. 6.9а е показано въвеждането на допълнителното уравнение (6.52) и допълнителната променлива към матрицата T от (6.50).

$\begin{array}{c} \text{j} \quad \text{j}' \quad \text{k} \quad \text{k}' \quad \dot{I}_e \\ \begin{array}{ c} \hline \text{j} \\ \text{j}' \\ \text{k} \\ \text{k}' \\ \hline \text{ДУ} \end{array} \left[\begin{array}{cccc c} & & & & \\ & & & & \\ & & & & 1 \\ & & & & -1 \\ \hline -K_e & K_e & 1 & -1 & \end{array} \right] \end{array}$ <p style="text-align: center;">а)</p>	$\begin{array}{c} \text{j} \quad \text{j}' \quad \text{k} \quad \text{k}' \quad \dot{I}_1 \\ \begin{array}{ c} \hline \text{j} \\ \text{j}' \\ \text{k} \\ \text{k}' \\ \hline \text{ДУ} \end{array} \left[\begin{array}{cccc c} & & & & 1 \\ & & & & -1 \\ & & & & K_i \\ & & & & -K_i \\ \hline 1 & -1 & & & \end{array} \right] \end{array}$ <p style="text-align: center;">б)</p>
--	--

Фиг. 6.9

Източникът на ток, управляван с ток от фиг. 2.15, се характеризира с две допълнителни уравнения:

$$\dot{V}_j - \dot{V}_{j'} = 0, \quad (6.53)$$

$$\dot{I}_2 - K_i \dot{I}_1 = 0. \quad (6.54)$$

В този случай векторът на неизвестните се разширява само с управляващия ток, тъй като токът \dot{I}_2 се получава от \dot{I}_1 след отчитане на (6.54). На фиг. 6.9б е показано въвеждането на информацията от (6.53) и (6.54) като едно допълнително уравнение към матрицата T от (6.50).

Източникът на напрежение, управляван с ток от фиг. 2.16, се характеризира с две допълнителни уравнения:

$$\dot{V}_j - \dot{V}_{j'} = 0, \quad (6.55)$$

$$\dot{V}_k - \dot{V}_{k'} - H \dot{I}_1 = 0. \quad (6.56)$$

В този случай векторът на неизвестните се разширява с управляващия ток \dot{I}_1 и тока през източника на напрежение \dot{I}_2 (за положителна посока на тока се приема посоката от k към k' , следваща посоката на електрическото напрежение). На фиг. 6.9в е показано въвеждането на двете допълнителни уравнения (6.55) и (6.56) и допълнителните променливи \dot{I}_1 и \dot{I}_2 към матрицата T от (6.50):

$$\begin{array}{c} j \quad j' \quad k \quad k' \quad \dot{I}_1 \quad \dot{I}_2 \\ \begin{array}{c} j \\ j' \\ k \\ k' \\ \text{ДУ}_1 \\ \text{ДУ}_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cc} & & & & 1 & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & -1 \\ \hline 1 & -1 & & & & \\ & & 1 & -1 & -N & \end{array} \right] \end{array}$$

в)

$$\begin{array}{c} j \quad j' \quad k \quad k' \quad \dot{I}_2 \\ \begin{array}{c} j \\ j' \\ k \\ k' \\ \text{ДУ} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} & & & & \\ & & & & \\ & & & & 1 \\ & & & & -1 \\ \hline -1 & -1 & & & \end{array} \right] \end{array}$$

г)

Фиг. 6.9

Операционният усилвател (ОУ) от фиг. 2.17 се характеризира с допълнително уравнение:

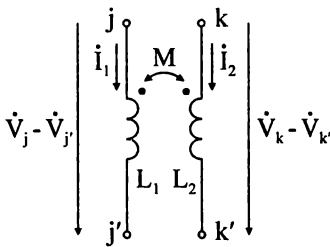
$$\dot{V}_j - \dot{V}_{j'} = 0. \quad (6.57)$$

В този случай векторът на неизвестните се разширява с изходния ток \dot{I}_2 (за положителна посока на тока \dot{I}_2 се приема посоката на влизане към ОУ). На фиг. 6.9г е показано въвеждането на допълнителното уравнение (6.57) и допълнителната променлива към матрицата T от (6.50).

Индуктивно свързаните бобини от фиг. 6.10а въвеждат две допълнителни уравнения

$$\dot{V}_j - \dot{V}_{j'} - j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 = 0, \quad (6.58)$$

$$\dot{V}_k - \dot{V}_{k'} - j\omega M \dot{I}_1 - j\omega L_2 \dot{I}_2 = 0. \quad (6.59)$$



а)

$$\begin{array}{c} j \quad j' \quad k \quad k' \quad \dot{I}_1 \quad \dot{I}_2 \\ \begin{array}{c} j \\ j' \\ k \\ k' \\ \text{ДУ}_1 \\ \text{ДУ}_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cc} & & & & 1 & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & -1 \\ \hline 1 & -1 & & & -j\omega L_1 & -j\omega M \\ & & 1 & -1 & -j\omega M & -j\omega L_2 \end{array} \right] \end{array}$$

б)

Фиг. 6.10

В случая векторът на неизвестните се разширява с токовете през двете бобини. На фиг. 6.10б е показано въвеждането на двете допълнителни уравнения (6.51) и (6.52) и допълнителните променливи \dot{I}_1 и \dot{I}_2 към матрицата T от (6.50).

Като пример за приложение на ММВП се разглежда отново веригата с един ОУ от фиг. 2.18. В случая допълнителното неизвестно е токът \dot{I}_2 , а матричната форма на системата уравнения по ММВП е от вида:

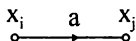
$$\underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} (Y_1+Y_2+Y_3) & -Y_2 & 0 & 0 & 0 \\ -Y_2 & (Y_2+Y_3+Y_6) & -Y_3 & -Y_6 & 0 \\ 0 & -Y_3 & (Y_3+Y_5) & 0 & 0 \\ 0 & -Y_6 & 0 & Y_6 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right]}_T \underbrace{\left[\begin{array}{c} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{V}_3 \\ \dot{V}_4 \\ \dot{I}_2 \end{array} \right]}_X = \underbrace{\left[\begin{array}{c} Y_1 \dot{E}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]}_W.$$

Както беше подчертано преди, при конструирането на матрицата T първоначално се започва с нулева матрица с подходяща размерност и последователно към нея се добавят компонентите, отчитащи влиянието на всеки един от елементите. Също така при конструиране на вектора-стълб W се започва с нулев вектор с подходяща размерност и към него се добавят компонентите, отчитащи влиянието на всеки един от източниците.

7.1. УВОД

Една линейна електрическа верига може да бъде описана с различни системи уравнения. Тези уравнения могат да бъдат изобразени нагледно с геометрични изображения, наречени *сигнални графи*. Сигналните графи могат да се използват за анализ на една верига, без да се записват уравненията ѝ. Използването на сигналните графи за анализа на сложни електрически вериги позволява съществено да се намали обемът на изчисленията, особено за вериги с обратна връзка (схеми с операционни усилватели, филтри и др.). Особено ефективни са сигналните графи в случаите, когато се търси ток или напрежение само на един клон, или се търси предавателна характеристика. Тогава търсените величини могат да се намерят, без да се решава системата уравнения, само с помощта на графични построения в плоскостта. Освен това сигналният граф дава нагледна картина на причинно-следствените връзки между параметрите на веригата и нейните напрежения и токове. Друго важно предимство е, че с тях може сравнително просто да се намери аналитично решение на системата уравнения (в символна форма), което дава възможност да се определи влиянието на различните параметри на схемата върху предавателните функции.

Сигналният граф (наречен още *насочен граф*) представлява съвкупност от *възли* и *съединяващи ги линии*, наречени *ребра*, като стрелките върху ребрата показват посоката на предаване на сигналите. Възлите в графа съответстват на токовете и напреженията във веригата. В метода на сигналните графи величините, съответстващи на възлите, се наричат най-общо *сигнали*. Сигналите във възлите в общия случай се означават с x_j , където j е номерът на възела в графа. Всяко ребро на графа се характеризира с *коэффициент на предаване*. Под *коэффициент на предаване* на реброто се разбира отношението на изходната величина на реброто към входната му величина (фиг. 7.1). Този коэффициент може да бъде с размерност на съпротивление, проводимост, или да е безразмерен.



Фиг. 7.1

За реброто с коэффициент на предаване a_{ji} от фиг. 7.1, насочено от възел x_i към x_j може да се запише:

$$x_j = a_{ji} x_i \quad (7.1)$$

Следователно, при преминаването на сигнала през реброто той се умножава по коефициента му на предаване.

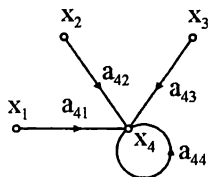
Ако във възел x_k се свързват няколко ребра, то стойността на сигнала в този възел е равна на сумата от сигналите на всички *влизащи* в него ребра.

$$x_k = \sum_{i=1}^N a_{ki} x_i, \quad (7.2)$$

където N е броят на ребрата, насочени към възел k ; a_{ki} – коефициентът на предаване на реброто, насочено от възел x_i към x_k . Ребра, излизаци от възел x_k не влияят на неговия сигнал и не се включват в сумата. В броя на ребрата, насочени към изследвания възел, влизат и ребра започващи от същия възел. Такива ребра се наричат *примки* (фиг. 7.2).

За сигнала x_4 от фиг. 7.2 може да се запише:

$$x_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \quad (7.3)$$



Фиг. 7.2

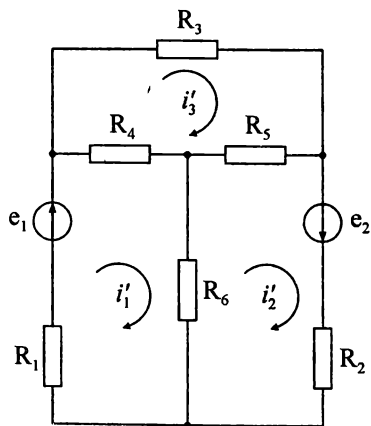
Към входния и изходния възел на графа трябва да се включва само по едно ребро.

Ще бъдат дефинирани още някои специфични понятия за сигналните графи:

- възел-източник – възел, в който всички ребра са насочени на излизане;
- възел-приемник – възел, в който всички ребра са насочени на влизане;
- междинен възел – възел, към който се съединяват както влизащи, така и излизащи ребра;
- независим възел – възел, чийто сигнал не се изразява чрез сигналите на други възли. Такива са възлите-източници;

- зависим възел – възел, чийто сигнал се изразява чрез сигналите на други възли. Такива са възлите-приемници и смесените възли.

Алгоритъмът за съставяне на сигнален граф ще бъде разгледан за схемата от фиг. 7.3, като за основа ще бъде избрана системата уравнения, записана по метода с контурните токове. Трите контурни тока са избрани с посоки по часовниковата стрелка.



Фиг. 7.3

$$\begin{cases} R_{11}i_1' + R_{12}i_2' + R_{13}i_3' = e_1 \\ R_{21}i_1' + R_{22}i_2' + R_{23}i_3' = e_2 \\ R_{31}i_1' + R_{32}i_2' + R_{33}i_3' = 0 \end{cases} \quad (7.4)$$

Тук са използвани означенията: $R_{11} = R_1 + R_4 + R_6$; $R_{22} = R_2 + R_5 + R_6$; $R_{33} = R_3 + R_4 + R_5$; $R_{12} = R_{21} = -R_6$; $R_{13} = R_{31} = -R_4$; $R_{23} = R_{32} = -R_5$; $e'_1 = e_1$; $e'_2 = e_2$.

Тази система уравнения се привежда в причинно-следствена форма (названа още *нормална форма*), за което първото уравнение се решава относно i'_1 , второто – относно i'_2 и третото – относно i'_3 . Получава се:

$$\begin{cases} i'_1 = a_{1e1}e'_1 + a_{12}i'_2 + a_{13}i'_3 \\ i'_2 = a_{2e2}e'_2 + a_{21}i'_1 + a_{23}i'_3 \\ i'_3 = a_{31}i'_1 + a_{32}i'_2 \end{cases} \quad (7.5)$$

Тук са въведени означенията: $a_{1e1} = 1/R_{11}$; $a_{2e2} = 1/R_{22}$; $a_{12} = -R_{12}/R_{11}$; $a_{13} = -R_{13}/R_{11}$; $a_{21} = -R_{12}/R_{22}$; $a_{23} = -R_{23}/R_{22}$; $a_{31} = -R_{31}/R_{33}$; $a_{32} = -R_{32}/R_{33}$. В общия случай $a_{ki} = -R_{ki}/R_{kk}$; $a_{ik} = -R_{ik}/R_{ii}$.

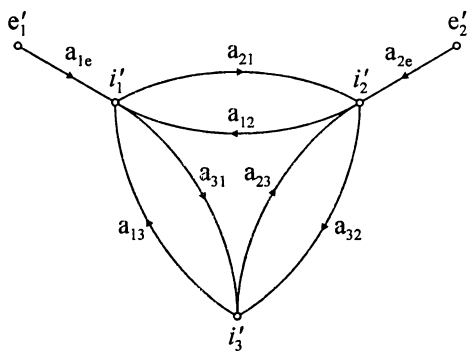
В тази система има пет сигнала: два независими – контурните е.д.н. e'_1 и e'_2 , и три зависими – неизвестните контурни токове i'_1, i'_2, i'_3 . Чертае се граф, като всеки сигнал се представя с възел: два възела-източници, съответстващи на независимите сигнали e'_1 и e'_2 и три междинни възли, съответстващи на зависимите сигнали i'_1, i'_2, i'_3 . Два възела се съединяват с ребро, ако коефициентът, който свързва съответните сигнали е различен от нула. Посоката на реброто е от възела, съответстващ на втория индекс, към възела, съответстващ на първия индекс на коефициента. Така на системата (7.5) ще съответства графът от фиг. 7.4.

В общия случай, при записана нормална система уравнения, сигналният граф се съставя така:

1. За всеки сигнал се въвежда възел в графа. Върхът се означава със символа на сигнала.

2. Ако даден коефициент на предаване a_{ij} е различен от нула, възлите i и j се свързват в графа с ребро с посока от j към i . До реброто се записва съответният коефициент на предаване.

3. Ако даден коефициент на предаване a_{ii} е различен от нула, в сигналния граф се въвежда ребро, което започва от върха i и завършва в същия възел, т.е. въвежда се *примка*.



Фиг. 7.4

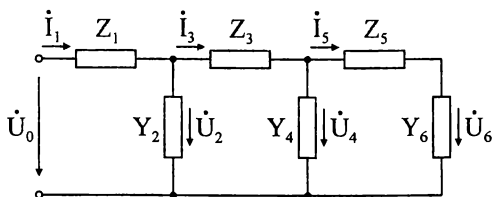
За преминаване от сигналния граф към изходната система уравнения се спазват следните две правила:

1. На всеки възел, с изключение на възлите-източници, отговаря едно уравнение от системата.

2. Уравнението, което съответства на i -тия връх, се съставя, като се разглеждат само влизащите ребра. Прилага се формула (7.2).

Ще бъде показано как се построява сигналният граф в някои типични случаи:

Пример 7.1. Сигнален граф на верижната схема (фиг. 7.5):

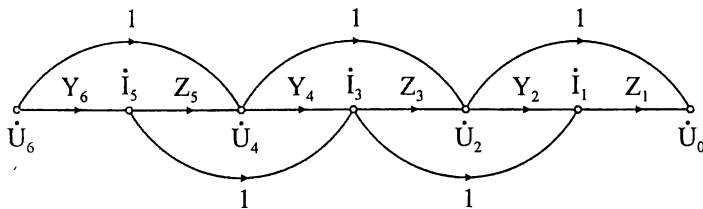


Фиг. 7.5

За означените посоки на комплексите на токовете и напреженията в отделните клонове се съставя следната система уравнения по законите на Кирхоф:

$$\begin{cases} \dot{i}_5 = Y_6 \dot{U}_6 \\ \dot{U}_4 = \dot{U}_6 + Z_5 \dot{i}_5 \\ \dot{i}_3 = \dot{i}_5 + Y_4 \dot{U}_4 \\ \dot{U}_2 = \dot{U}_4 + Z_3 \dot{i}_3 \\ \dot{i}_1 = \dot{i}_3 + Y_2 \dot{U}_2 \\ \dot{U}_0 = \dot{U}_2 + Z_1 \dot{i}_1 \end{cases} \quad (7.6)$$

На тази система отговаря сигналният граф, показан на фиг. 7.6. Той може да се начертае и директно, без да се запише предварително съответната система уравнения.



Фиг. 7.6

Пример 7.2. Съставяне на сигналния граф на резисторна верига с 4 възли въз основа на системата възлови уравнения.

За удобство в означенията се приема, че 4-ят възел е нулев. Тогава по метода с възловите потенциали се написва:

$$\begin{cases} G'_{11}V_1 - G'_{12}V_2 - G'_{13}V_3 = j'_{e1} \\ -G'_{21}V_1 + G'_{22}V_2 - G'_{23}V_3 = j'_{e2} \\ -G'_{31}V_1 - G'_{32}V_2 + G'_{33}V_3 = j'_{e3} \end{cases} \quad (7.7)$$

Всяко уравнение се решава по отношение на съответния възлов потенциал V_1, V_2, V_3 . В резултат се получава

$$\begin{cases} V_1 = a_1 j'_{e1} + a_{12}V_2 + a_{13}V_3 \\ V_2 = a_2 j'_{e2} + a_{21}V_1 + a_{23}V_3 \\ V_3 = a_3 j'_{e3} + a_{31}V_1 + a_{32}V_2 \end{cases} \quad (7.8)$$

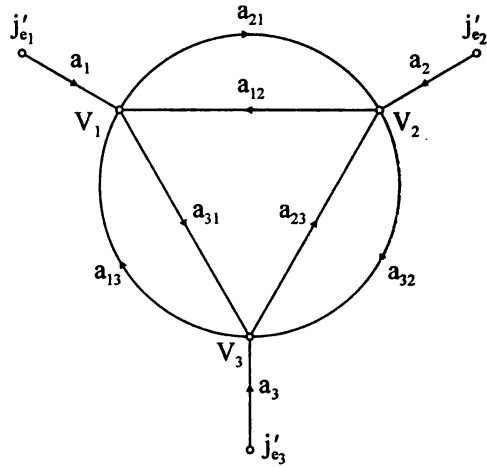
Коефициентите на предаване имат израз:

$$a_i = (G'_{ii})^{-1} ; \quad a_{ij} = (G'_{ii})^{-1} G'_{ij} ; \quad a_{ji} = (G'_{jj})^{-1} G'_{ji}$$

Сигналният граф, съставен въз основа на системата (7.8), е показан на фиг. 7.7.

Сигналният граф може да се построи директно, без да се записва системата възлови уравнения, в следната последователност от стъпки:

1. Приема се един от възлите за нулев.
2. Определят се възловите електродвижещи токове j'_{ep}
3. Изчисляват се собствените възлови проводимости G'_{pp}
4. За всеки възел p от веригата с изключение на нулевия, се въвежда възел в сигналния граф, чийто сигнал съвпада с потенциала на възела. На всеки ненулев възлов електродвижещ



Фиг. 7.7

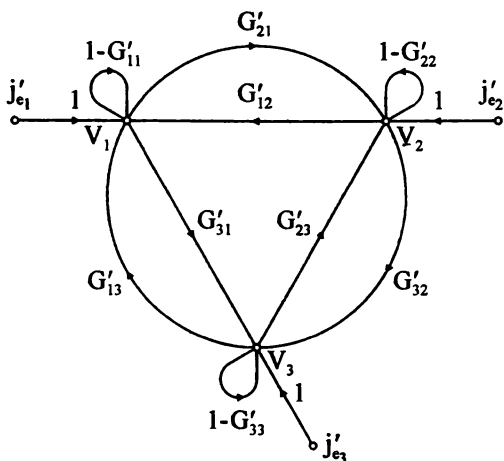
ток отговаря възел-източник на независим сигнал j'_{ep} , свързан с възела V_p с ребро с коефициент на предаване $(G'_{pp})^{-1}$.

5. На всеки клон от веригата, който се опира на възлите p и s , в сигналния граф отговарят две противопосочно ориентирани ребра, чиито коефициенти на предаване са $k_{ps} = (G'_{pp})^{-1} G'_{ps}$ и $k_{sp} = (G'_{ss})^{-1} G'_{sp}$

Системата (7.7) може да се представи в нормален вид и по друг начин:

$$\begin{cases} V_1 = (1 - G'_{11})V_1 + G'_{12}V_2 + G'_{13}V_3 + j'_{e1} \\ V_2 = G'_{21}V_1 + (1 - G'_{22})V_2 + G'_{23}V_3 + j'_{e2} \\ V_3 = G'_{31}V_1 + G'_{32}V_2 + (1 - G'_{33})V_3 + j'_{e3} \end{cases} \quad (7.9)$$

На тази система уравнения съответства графът от фиг. 7.8:



Фиг. 7.8

Вижда се, че графът онагледява причинно-следствените връзки между независимите и зависимите сигнали, които описват състоянието на една електрическа верига. Обаче една и съща линейна система уравнения може да се представи в различен нормален вид. Това означава, че съответните причинно-следствени връзки могат да имат различна форма и следователно се достига до различни сигнални графи. Такива графи са еквивалентни помежду си.

След като е съставен сигналният граф, той се използва за определяне на коефициента на предаване от възела-източник към възела-приемник.

Това може да се осъществи по два начина:

1. С последователно опростяване на графа с използване на правилата от т. 7.2.
2. С използване на общия израз за определяне коефициент на предаване на насочен граф – формула на Мейсън, в т. 7.3.

Възможна е и комбинация от двата начина, като първо се прави частично опростяване на графа и след това се прилага формулата на Мейсън.

7.2. ПРЕОБРАЗУВАНЕ НА СИГНАЛНИ ГРАФИ

Сигналният граф е особено подходящ за използване, когато при анализа на една електрическа верига се търси само една величина. Тъй като се разглеждат линейни вериги (методът на сигналните графи е приложим за линейни вериги), може да се използва принципът на наслагването. Тогава търсената

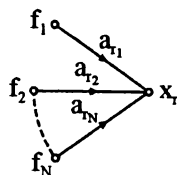
величина, например x_r , при наличие на f_s независими сигнали може да се представи като:

$$x_r = \sum_{s=1}^N a_{rs} f_s, \quad (7.10)$$

където N е броят на независимите сигнали, а a_{rs} – съответните коефициенти на предаване. На зависимостта (7.10) отговаря сигналният граф, показан на фиг. 7.9.

Вижда се, че определянето на един от зависимите сигнали се състои в преобразуването на изходния сигнален граф до елементарния граф от фиг. 7.9. Най-простият тип елементарен граф се получава за $N = 1$, т.е. когато във веригата има само един единствен източник.

Преобразуването на сигналните графи се осъществява с няколко основни приема, дадени в табл. 7.1.



Фиг. 7.9

Табл. 7.1

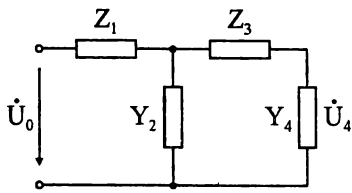
Вид на преобразуването	Изходен граф и уравненията у	Резултантен граф и уравненията му
Обединяване на последователни еднопосочни ребра	 $x_2 = ax_1; x_3 = bx_2$	 $x_3 = abx_1$
Обединяване на паралелни еднопосочни ребра	 $x_2 = ax_1 + bx_1$	 $x_2 = (a+b)x_1$
Отстраняване на примка в края на път	 $x_2 = ax_1 + bx_2$	 $x_2 = \frac{a}{1-b} x_1$
Отстраняване на контур в края на път	 $x_2 = ax_1 + cx_3; x_3 = bx_2$	 $x_3 = \frac{ab}{1-bc} x_1$
Отстраняване на междинен възел	 $x_3 = ax_1 + bx_2; x_4 = cx_3$	 $x_4 = acx_1 + bcx_2$

Определянето на една неизвестна величина чрез преобразуване на сигналния граф, когато действа един източник на сигнал, включва следните етапи за итерация с номер i :

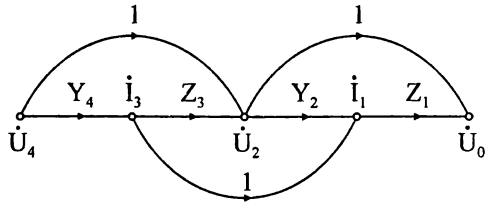
1. Обединяват се всички съпосочни ребра.
2. Премахва се примката към върха x_i
3. Премахва се междинният връх x_i

Тази процедура се повтаря многократно, докато се отстранят всички междинни върхове, чиито сигнали не се търсят.

Пример 7.4. Да се определи комплексът на изходното напрежение \dot{U}_4 на веригата от фиг. 7.10. Съответстващият сигнален граф е изобразен на фиг. 7.11.

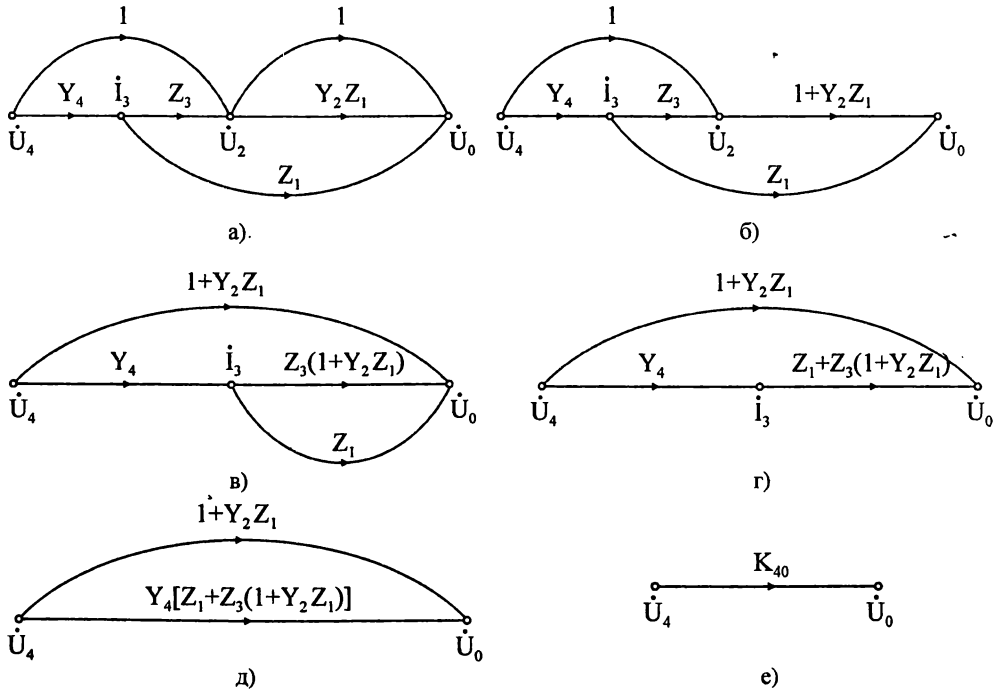


Фиг. 7.10



Фиг. 7.11

На фиг. 7.12 са дадени последователните преобразувания на графа от фиг. 7.11 чрез премахването на върховете \dot{I}_1 , \dot{U}_2 и \dot{I}_3 .



Фиг. 7.12

Чрез преобразуването, за коефициента на предаване на графа от фиг. 7.12 се получава:

$$k = k_{04} = 1 + Y_2 Z_1 + Y_4 [Z_1 + Z_3 (1 + Y_2 Z_1)]$$

Следователно отношението \dot{U}_4 / \dot{U}_0 ще бъде равно на

$$k_u = \frac{\dot{U}_4}{\dot{U}_0} = \frac{1}{k} = \frac{1}{(1 + Y_2 Z_1)(1 + Y_4 Z_3) + Y_4 Z_1} \quad (7.11)$$

Сигналните графи се използват често за анализ на вериги с електронни елементи – усилватели, интегратори, активни филтри и др., използващи транзистори и операционни усилватели. Сигналните графи на някои активни елементи, работещи в линеен режим, са показани в табл. 7.2.

Табл. 7.2

Тип на активния елемент	Схема на активния елемент	Уравнения на активния елемент	Сигнален граф
Биполярен транзистор		$u_B = 0$ $i_K = \beta i_B + g_i u_K$	
Полеви транзистор		$i_3 = 0$ $i_C = S u_3 + g_i u_C$	
Идеален операционен усилвател с един вход		$i_{ex} = 0$ $u_{изх} = \pm A u_{ex}$ $(A \rightarrow \infty)$	
Идеален операционен усилвател с диференциален вход		$i_{ex1} = i_{ex2} = 0$ $u_{изх} = A(u_{ex1} - u_{ex2})$ $(A \rightarrow \infty)$	

7.3. ФОРМУЛА НА МЕЙСЪН

Освен чрез преобразуване, определянето на даден сигнал може да се извърши аналитично с помощта на *формулата на Мейсън*. В 1956 г. Мейсън предложил обща формула за определяне коефициента на предаване на насочен граф, която по-късно става основна формула за разчет на графи.

Приема се, че в графа има един единствен източник на сигнали. При наличие на повече на брой източници търсеният резултат може да се намери, като се приложи принципът на наслагването.

Въвеждат се следните нови понятия:

1. **Път** – Съвкупността от еднопосочни ребра, които свързват даден възел-източник с възела на търсения сигнал се нарича път, при условие, че ребрата са свързани по посока на предаване на сигнала и всяко ребро се включва еднократно в пътя. Коефициентът на предаване на пътя P е равен на произведението от коефициентите на предаване на участващите в него ребра.

2. **Контур** – Контурът е път, който започва и завършва в един и същи възел. Коефициентът на предаване на пътя Γ е равен на произведението от коефициентите на предаване на участващите в него ребра.

3. Казва се, че два или повече контура или контур и път се допират, когато те имат поне един общ връх.

Формулата на Мейсън определя коефициента на предаване k между два възела, от които единият е възел-източник:

$$k = \frac{1}{\Delta} \sum_{s=1}^N P_s \Delta_s \quad (7.12)$$

Тук N е броят на всички възможни пътища с коефициенти на предаване P_s между двата възела. Величината Δ има вида:

$$\Delta = 1 - \sum \Gamma_p + \sum \Gamma_p \Gamma_q - \sum \Gamma_p \Gamma_q \Gamma_r + \dots \quad (7.13)$$

В първата сума участват коефициентите на предаване на всички контури в графа. Втората сума съдържа произведенията от коефициентите на предаване на онези двойки контури, които не се допират помежду си. В третата сума участват произведенията на коефициентите на предаване на тройките контури, които не се допират помежду си, и т.н.

Изразът за величината Δ_k е аналогичен на Δ :

$$\Delta_s = 1 - \sum_{(s)} \Gamma_p + \sum_{(s)} \Gamma_p \Gamma_q - \sum_{(s)} \Gamma_p \Gamma_q \Gamma_r + \dots \quad (7.14)$$

В първата сума участват коефициентите на предаване на всички контури в графа, които не се допират до s -тия път (но тези контури могат да се допират

един до друг). Втората сума съдържа произведенията от коефициентите на предаване на онези двойки контури, които не се допират помежду си и до s -тия път. В третата сума участват произведенията на коефициентите на предаване на тройките контури, които не се допират помежду си и до s -тия път, и т.н.

При наличие на повече на брой източници се прилага принципът на наслагването.

Необходимо е да се подчертае, че методът на сигналните графи и формулата на Мейсън са особено ефективни, когато се търси аналитичен израз на изходна величина (ток или напрежение) в зависимост от параметрите на веригата при наличие на единствен входен сигнал.

Приложението на теоремата на Мейсън е показано в 4 примера по-долу.

Пример 7.5. Да се определи коефициентът на предаване на верижната схема със сигнален граф, показан на фиг. 7.11.

За верижни схеми $\Delta = 1$, защото сигналният им граф не съдържа контури. Следователно за верижни схеми формула (7.12) се опростява до

$$k = \sum_{s=1}^N P_s \quad (7.14)$$

В посочения граф се съдържат следните пътища:

$$P_1 = 1; \quad P_2 = Y_2 Z_1; \quad P_3 = Y_4 Z_3; \quad P_4 = Y_4 Z_3 Y_2 Z_1; \quad P_5 = Y_4 Z_1$$

Тогава

$$\begin{aligned} k &= \sum_{s=1}^5 P_s = 1 + Y_2 Z_1 + Y_4 Z_3 + Y_4 Z_3 Y_2 Z_1 + Y_4 Z_1 = \\ &= (1 + Y_2 Z_1) + Y_4 Z_3 (1 + Y_2 Z_1) + Y_4 Z_1 = (1 + Y_2 Z_1)(1 + Y_4 Z_3) + Y_4 Z_1 \end{aligned}$$

Тъй като $\dot{U}_0 = k \dot{U}_4$, то коефициентът на предаване на верижната схема $k_u = \dot{U}_4 / \dot{U}_0$ е равен на:

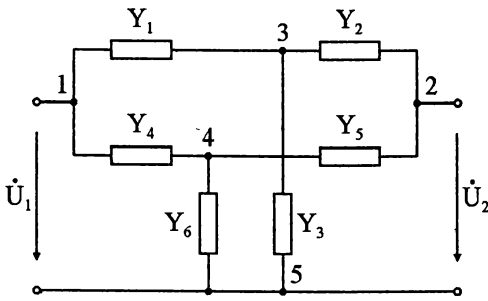
$$k_u = \frac{\dot{U}_4}{\dot{U}_0} = \frac{1}{k} = \frac{1}{(1 + Y_2 Z_1)(1 + Y_4 Z_3) + Y_4 Z_1}$$

Същият резултат бе получен преди и с преобразуване.

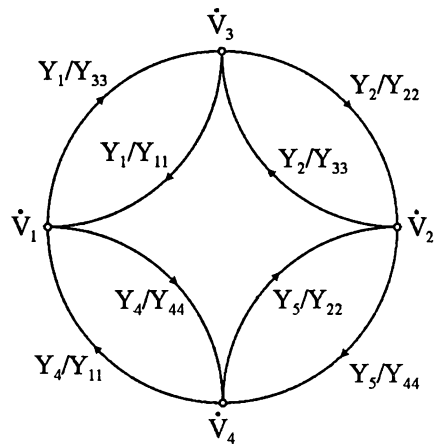
Пример 7.6. Да се определи коефициентът на предаване k_{21} за схемата от фиг. 7.13, като се използва сигналният граф на системата възлови уравнения и формулата на Мейсън.

Приема се $\dot{V}_5 = 0$. Построява се графът по процедурата, описана в т. 7.1, без да се записва системата възлови уравнения. Полученият граф е показан на фиг. 7.14. Възприети са следните означения:

$$Y_{11} = Y_1 + Y_4; \quad Y_{22} = Y_2 + Y_5; \quad Y_{33} = Y_1 + Y_2 + Y_3; \quad Y_{44} = Y_4 + Y_5 + Y_6$$



Фиг. 7.13



Фиг. 7.14

От този граф, с използване на формулата на Мейсън, се намира коефициентът на предаване между възли 2 и 1:

$$k_{21} = \frac{1}{\Delta} \sum_{s=1}^2 P_s \Delta_s$$

В графа има два пътя от възел V_1 до възел V_2 , с коефициенти:

$$P_1 = \frac{Y_1}{Y_{33}} \frac{Y_2}{Y_{22}} \text{ и } P_2 = \frac{Y_4}{Y_{44}} \frac{Y_5}{Y_{22}}, \text{ а } \Delta_1 \text{ и } \Delta_2 \text{ ще бъдат равни на } 1, \text{ защото в}$$

графът няма контури, които да не се допират до двата пътя.

Следователно числителят ще бъде равен на

$$\sum_{s=1}^2 P_s \Delta_s = \frac{Y_1}{Y_{33}} \frac{Y_2}{Y_{22}} + \frac{Y_4}{Y_{44}} \frac{Y_5}{Y_{22}}$$

За да се изчисли знаменателят, се определят първо коефициентите на всичките 6 контура:

$$\Gamma_1 = \frac{Y_1}{Y_{33}} \frac{Y_1}{Y_{11}}; \quad \Gamma_2 = \frac{Y_2}{Y_{22}} \frac{Y_2}{Y_{33}}; \quad \Gamma_3 = \frac{Y_5}{Y_{44}} \frac{Y_5}{Y_{22}};$$

$$\Gamma_4 = \frac{Y_4}{Y_{44}} \frac{Y_4}{Y_{11}}; \quad \Gamma_5 = \frac{Y_1}{Y_{33}} \frac{Y_2}{Y_{22}} \frac{Y_5}{Y_{44}} \frac{Y_4}{Y_{11}}; \quad \Gamma_6 = \frac{Y_4}{Y_{44}} \frac{Y_5}{Y_{22}} \frac{Y_2}{Y_{33}} \frac{Y_1}{Y_{11}}, \text{ като се вижда, че}$$

$$\Gamma_5 = \Gamma_6.$$

Определят се също и произведенията от коефициентите на двойките контури, които не се допират – те са 2:

$$\Gamma_1\Gamma_3 = \frac{Y_1}{Y_{33}} \frac{Y_1}{Y_{11}} \frac{Y_5}{Y_{44}} \frac{Y_5}{Y_{22}} = \frac{Y_1^2 Y_5^2}{Y_{11} Y_{22} Y_{33} Y_{44}}; \quad \Gamma_2\Gamma_4 = \frac{Y_2}{Y_{22}} \frac{Y_2}{Y_{33}} \frac{Y_4}{Y_{44}} \frac{Y_4}{Y_{11}} = \frac{Y_2^2 Y_4^2}{Y_{11} Y_{22} Y_{33} Y_{44}}$$

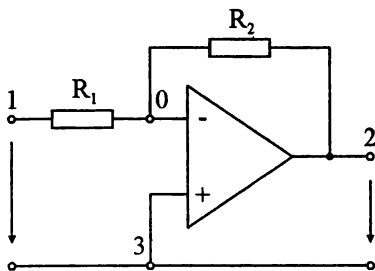
Следователно, знаменателят Δ ще бъде равен на

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - (\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_6) + (\Gamma_1\Gamma_3 + \Gamma_2\Gamma_4) = \\ &= 1 - \left(\frac{Y_1^2}{Y_{11}Y_{33}} + \frac{Y_2^2}{Y_{22}Y_{33}} + \frac{Y_5^2}{Y_{22}Y_{44}} + \frac{Y_4^2}{Y_{11}Y_{44}} + 2 \frac{Y_1Y_2Y_5Y_4}{Y_{11}Y_{22}Y_{33}Y_{44}} \right) + \frac{Y_1^2Y_5^2}{Y_{11}Y_{22}Y_{33}Y_{44}} + \frac{Y_2^2Y_4^2}{Y_{11}Y_{22}Y_{33}Y_{44}} \end{aligned}$$

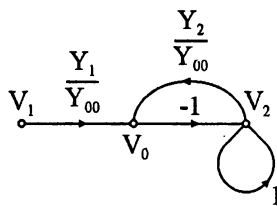
В крайна сметка k_{21} се намира, като се раздели числителят на знаменателят.

Тази схема се нарича двоен T -мост. Ако елементите имат следните стойности: $R_1 = R_2 = R$; $R_6 = R/2$; $C_4 = C_5 = C$; $C_3 = 2C$ и съответно комплексни проводимости: $Y_1 = Y_2 = 1/R$; $Y_6 = 2/R$; $Y_4 = Y_5 = j\omega C$; $Y_3 = j2\omega C$, то схемата ще представлява режекторен филтър с централна честота на режекцията $\omega_p = 1/(2\pi RC)$

Пример 7.7. Да се определи коефициентът на усилване на инвертиращия усилвател от фиг. 7.15



Фиг. 7.15



Фиг. 7.16

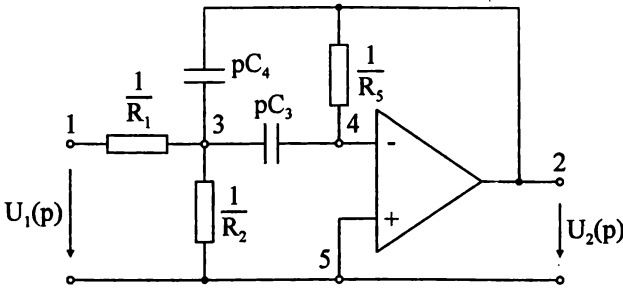
Сигналният граф на усилвателя от фиг. 7.15 е показан на фиг. 7.16. Той е съставен директно, на основата на системата възлови уравнения. Въведени са проводимостите: $Y_1 = 1/R_1$; $Y_2 = 1/R_2$; $Y_{00} = Y_1 + Y_2$. Използвана е заместваща схема на идеален операционен усилвател ($A \rightarrow \infty$, $R_{ex} \rightarrow \infty$, $R_{изх} = 0$) и съответстващият ѝ сигнален граф от табл. 7.2.

Ще бъде използвана формулата на Мейсън. В графа от фиг. 7.16 има един път и два контура: $P_1 = \frac{Y_1}{Y_{00}}(-1) = -\frac{Y_1}{Y_{00}}$; $\Delta_1 = 1$; $\Gamma_1 = 1$; $\Gamma_2 = \frac{Y_2}{Y_{00}}(-1) = -\frac{Y_2}{Y_{00}}$.

Получава се

$$k = \frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1 \Delta_1}{1 - (\Gamma_1 + \Gamma_2)} = \frac{-Y_1 / Y_{00}}{1 - (1 - Y_2 / Y_{00})} = -\frac{Y_1}{Y_2} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Пример 7.8. Да се определи предавателната функция $H(p) = U_2(p) / U_1(p)$ на активния филтър от фиг. 7.17.



Фиг. 7.17

На фиг. 7.17 до съответните елементи са показани операторните проводимости: $Y_1 = 1/R_1$; $Y_2 = 1/R_2$; $Y_3 = pC_3$; $Y_4 = pC_4$; $Y_5 = 1/R_5$.

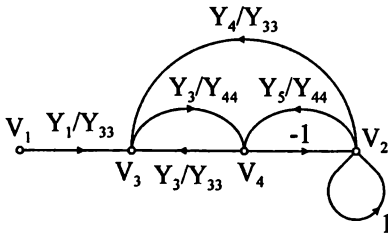
Въведени са собствените проводимости:

$$Y_{33} = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 1/R_1 + 1/R_2 + pC_3 + pC_4; \quad Y_{44} = Y_3 + Y_5 = pC_3 + 1/R_5$$

Сигналният граф на филтъра е съставен с използване на системата възлови уравнения и модел на идеален операционен усилвател (фиг. 7.18).

За намиране на коефициента на предаване между входа и изхода ще бъде използвана формулата на Мейсън.

В графа от фиг. 7.18 има един път и четири контура:



Фиг. 7.18

$$P_1 = \frac{Y_1}{Y_{33}} \frac{Y_3}{Y_{44}} (-1) = -\frac{Y_1}{Y_{33}} \frac{Y_3}{Y_{44}}; \quad \Delta_1 = 1;$$

$$\Gamma_1 = \frac{Y_3}{Y_{33}} \frac{Y_3}{Y_{44}}; \Gamma_2 = \frac{Y_5}{Y_{44}} (-1) = -\frac{Y_5}{Y_{44}}; \Gamma_3 = \frac{Y_4}{Y_{33}} \frac{Y_3}{Y_{44}} (-1) = -\frac{Y_4}{Y_{33}} \frac{Y_3}{Y_{44}}; \Gamma_4 = 1$$

Освен това има два контура, които не се допират: Γ_1 и Γ_4 . Произведението от двата им коефициента ще участва във втората сума на величината Δ .

Така, по формулата на Мейсън за коефициента на предаване между възел 1 и възел 2 се получава:

$$\begin{aligned}
 H(p) &= V_2(p)/V_1(p) = k = \frac{\sum P_s \Delta_s}{\Delta} = \frac{P_1 \Delta_1}{1 - (\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4) + \Gamma_1 \Gamma_4} = \\
 &= \frac{-\frac{Y_1 Y_3}{Y_{33} Y_{44}}}{1 - \left(\frac{Y_3^2}{Y_{33} Y_{44}} - \frac{Y_5}{Y_{44}} - \frac{Y_3 Y_4}{Y_{33} Y_{44}} + 1 \right) + \frac{Y_3^2}{Y_{33} Y_{44}} \frac{Y_5}{Y_{44}} + \frac{Y_3 Y_4}{Y_{33} Y_{44}}} = -\frac{Y_1 Y_3}{Y_5 Y_{33} + Y_3 Y_4} = \\
 &= -\frac{\frac{1}{R_1} p C_3}{\frac{1}{R_5} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + p C_3 + p C_4 \right) + p C_3 p C_4} = -\frac{p \frac{1}{R_1 C_4}}{p^2 + p \frac{(C_3 + C_4)}{R_5 C_3 C_4} + \frac{(R_1 + R_2)}{R_1 R_2 R_5 C_3 C_4}}
 \end{aligned}$$

Получената предавателна характеристика съответства на лентов филтър с централна честота $\omega_0 = \sqrt{\frac{(R_1 + R_2)}{R_1 R_2 R_5 C_3 C_4}}$.

8.1. УВОД

Периодични несинусоидални процеси се наричат процесите, при които токовете и напреженията се изменят във времето по периодичен несинусоидален закон.

Периодични несинусоидални процеси възникват в една електрическа верига в следните два основни случая (или при комбинация от тях):

1. Когато във веригата има източници на несинусоидални електродвижещи напрежения и токове, а всички елементи на веригата са линейни, т.е. не зависят от стойността на тока.
2. Когато във веригата има източници на синусоидални електродвижещи напрежения и токове, но един или няколко елемента са нелинейни или имат периодично изменящ се параметър.

Периодични несинусоидални процеси се срещат често в електротехниката и електрониката. Типични примери са промишлените генератори, в които по една или друга причина (геометрична несиметрия вследствие износване или повреда, насищане на част от магнитната верига, дадени накъсо навивки) разпределението на магнитната индукция във въздушната междина се различава от синусоидалното. Тогава електродвижещото напрежение, генерирано от генератора, ще се отличава по форма от синусоидалното напрежение. Друг пример са функционалните генератори, които широко се използват в електрониката и радиотехниката за настройка и тестване на различни електронни схеми, и които генерират синусоидално, правоъгълно и триъгълно напрежение. Трети пример са веригите, съдържащи нелинейни елементи – нелинейни съпротивления (термистори, варистори, диоди), полупроводникови елементи, работещи в нелинейната част на характеристиките си (транзистори, тиристоры, операционни усилватели), нелинейни бобини (бобини с феромагнитно ядро, трансформатори), при които даже при захранване със синусоидално напрежение възникват несинусоидални токове и напрежения. Несинусоидални токове се консумират и от широк клас захранващи устройства, изградени на тиристоры и други превключващи електронни елементи – захранвания за компютри, инверторни захранвания за климатици, двигатели с електронно регулируема скорост.

Във всички тези случаи е важно да се намерят средства за анализ на съществуващите несинусоидални режими, като в максимална степен се използват знанията и методите за анализ на линейни вериги при синусоидални режими.

В тази глава ще бъдат разгледани методите за анализ и особеностите на работа за първият от изброените основни случаи на несинусоидални режими – случая на линейни електрически вериги при въздействие на източници на несинусоидални напрежения и ток.

8.2. ХАРМОНИЧЕН АНАЛИЗ – ПРЕДСТАВЯНЕ НА НЕСИНУСОИДАЛНИТЕ ФУНКЦИИ В РЕД НА ФУРИЕ

Когато една линейна верига се намира под въздействието на несинусоидални източници, за анализа на несинусоидалния периодичен режим в нея може да се използват *методът на хармоничния анализ* и *принципът на наслагването*. Според метода на хармоничния анализ едно периодично несинусоидално въздействие се представя в ред на Фурие като сума от синусоидални съставки (хармоници). Използва се принципът за наслагването, като се изследва поотделното действие на всеки един от хармониците (членовете в реда на Фурие) върху процесите в електрическата верига. Резултантният ефект от действието на всички хармоници се определя чрез наслагване на моментните стойности на хармониците и чрез изчисляване на ефективните стойности на токовете и напреженията и мощностите по формули, които ще бъдат изведени по-нататък.

Нека е дадена периодична несинусоидална функция $u(t)$ с период T : $u(t) = u(t + kT)$, където k е цяло положително число. Представянето на тази функция в ред на Фурие е възможно, ако тя удовлетворява условията на Дирихле, т.е. има за един период краен брой точки на прекъсване от първи род и краен брой максимуми и минимуми, при което остава по части непрекъсната и ограничена в рамките на периода. Токовете и напреженията в реалните електрически вериги винаги удовлетворяват тези условия.

В такъв случай функцията $u(t)$ може да се представи в ред на Фурие във вида

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{km} \sin(k\omega t + \psi_{ku}) \quad (8.1)$$

където u_{km} е амплитудната стойност на k -тия хармоник, а ψ_{ku} – неговата начална фаза.

В тази сума участват следните компоненти:

- при $k = 0$ се получава $u_0 = \text{const}$ или нулевият хармоник (постоянната съставка);
- при $k = 1$ се получава $u_1(t)$ или първият (основен) хармоник;
- При $k \geq 2$ се получават висшите хармоници $u_k(t)$.

Тригонометричният ред (8.1) може да се представи още във вида:

$$u(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\omega t + C_k \sin k\omega t) \quad (8.2)$$

Лесно може да бъде показано, че съществуват следните връзки между коефициентите в (8.1) и (8.2):

$$u_{km} = \sqrt{A_k^2 + C_k^2}; \quad \psi_{ku} = \arctg \frac{A_k}{C_k} \quad (8.3)$$

При хармоничния анализ на електрическите вериги се използват и двете форми на развитие в ред на Фурие – (8.1) и (8.2). Представянето в ред във формата (8.1) е тясно свързано с физичната същност на метода на хармоничния анализ – представянето на несинусоидалния сигнал като сума от хармоници, а формата (8.2) се използва главно за определяне на хармоничния състав чрез намиране на коефициентите A_k и C_k .

В общия случай редът на Фурие съдържа безкраен брой членове, но в практиката обикновено е възможно да се използват ограничен брой членове (например $5 \div 7$). Това се дължи на факта, че редовете на Фурие са бързо сходящи и амплитудите на висшите хармоници намаляват бързо с увеличаване номера на хармоника.

8.3. ОПРЕДЕЛЯНЕ НА КОЕФИЦИЕНТИТЕ A_k И C_k В РЕДА НА ФУРИЕ

Възможни са няколко начина за определяне на коефициентите A_k и C_k :

1) Известен е аналитичният израз на периодичната несинусоидална функция: зададен аналитично или получен от апроксимация на опитно снетата крива с подходящ аналитичен израз.

Тогаво могат да се използват известните от курса по математика формули:

$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos k\omega t \, dt, \quad \text{за } k = 1, 2, \dots \quad (8.4)$$

$$C_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin k\omega t \, dt, \quad \text{за } k = 1, 2, \dots \quad (8.5)$$

$$A_0 = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \, dt \quad (8.6)$$

Тук A_0 е удвоената средна стойност на периодичната несинусоидална функция за един период. След като са определени A_k и C_k могат да се изчислят u_{km} и ψ_{ku} по формули (8.3). Аналитичното определяне на A_k и C_k с използването на (8.4) и (8.5) може да се извърши само за някои периодични несинусоидални функции с относително проста форма.

Развитие в ред на Фурие на някои често срещани несиноусоидални периодични сигнали

Наименование	Графика	Ред на Фурие	Средна по модул стойност	Ефективна стойност
1 Правоъгълни импулси		$u(t) = \frac{4u_m}{\pi} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k} \sin k\omega t$	u_m	u_m
2 Триъгълни импулси		$u(t) = \frac{8u_m}{\pi^2} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\frac{1}{k^2} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right] \sin k\omega t$	$u_m / 2$	$u_m / \sqrt{3}$
3 Триънообразни импулси		$u(t) = \frac{u_m}{2} - \frac{u_m}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin k\omega t$	$u_m / 2$	$u_m / \sqrt{3}$
4 Еднопътно изправена синусоида		$u(t) = \frac{u_m}{\pi} + \frac{u_m}{2} \sin \omega t - \frac{2u_m}{\pi} \sum_{k=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{\cos k\omega t}{(k^2 - 1)}$	u_m / π	$u_m / 2$
5 Двупътно изправена синусоида		$u(t) = \frac{2u_m}{\pi} - \frac{4u_m}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\omega t}{(4k^2 - 1)}$	$2u_m / \pi$	$u_m / \sqrt{2}$

2) Известна е графиката на несинусоидалната функция; или интегралите за A_k и C_k са нерешими, или липсват аналитични изрази за несинусоидалната функция.

В този случай периодът на функцията T се разделя на n равни части и графиката на несинусоидалната функция се замества със стъпаловидна крива.

Коефициентите A_k и C_k се определят по приблизителни формули, получени чрез числена апроксимация на (8.4) и (8.5) – числено интегриране по метода на правоъгълниците:

$$A_k \approx \frac{2}{n} \sum_{p=0}^{n-1} u_p \cos(k p \frac{2\pi}{n}) ; \quad C_k \approx \frac{2}{n} \sum_{p=0}^{n-1} u_p \sin(k p \frac{2\pi}{n}) \quad (8.7)$$

3) Съществуват специализирани измервателни уреди, наречени *хармонични анализатори*, които се използват за експериментално определяне и представяне в графичен вид на зависимостите на амплитудите и фазите на хармониците от честотата (т.н. амплитуден и фазов спектър), когато несинусоидалната функция $u(t)$ е във формата на електрически сигнал. В последните години те се реализират като допълнителна карта към персонален компютър и съдържат аналого-цифрови преобразуватели (АЦП) или цифрови сигнални процесори (DSP) и специализиран софтуер, обикновено реализиращ *бързо преобразование на Фурие (FFT)*. За нискочестотни приложения са популярни програмни продукти, които използват за АЦП звуковата карта на персонален компютър и представят в графичен вид спектрите на изследвания сигнал.

8.3.1. Комплексна форма на реда на Фурие

Използвайки тригонометричните тъждества $\cos(x) = (e^{jx} + e^{-jx})/2$ и $\sin(x) = (e^{jx} - e^{-jx})/2j$, формула (8.2) може да се запише като:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\omega t + C_k \sin k\omega t) = \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \frac{e^{jk\omega t} + e^{-jk\omega t}}{2} + C_k \frac{e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t}}{2j} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{B}_k e^{jk\omega t} \\ \therefore u(t) &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{B}_k e^{jk\omega t} \end{aligned} \quad (8.8)$$

където $\dot{B}_k = (A_k - jC_k)$ и $\dot{B}_{-k} = (A_k + jC_k) = \dot{B}_k^*$.

Безкрайният ред в (8.8) представлява комплексен експоненциален ред на Фурие за функцията $u(t)$. Коефициентите A_k, C_k, u_{km} и ψ_{ku} са свързани с \dot{B}_k чрез формулите:

$$A_k = \operatorname{Re}[\dot{B}_k]; C_k = -\operatorname{Im}[\dot{B}_k]; u_0 = \dot{B}_0; u_{km} = |\dot{B}_k|; \psi_{ku} = \arg(\dot{B}_k) \quad (8.9)$$

За да се намери коефициентът \dot{B}_k се използва формулата $\dot{B}_k = (A_k - jC_k)$, в която се заместват A_k и C_k от (8.4-8.5):

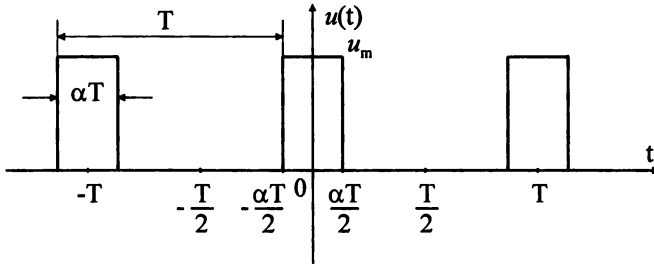
$$\dot{B}_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) (\cos k\alpha t - j \sin k\alpha t) dt$$

Получава се

$$\dot{B}_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) e^{-jk\alpha t} dt \quad (8.10)$$

Формула (8.10) е предпочитана за определяне коефициентите \dot{B}_k, A_k, C_k , защото интегрирането на експоненциални функции е по-лесно от интегриране на синусоидални функции.

Пример 8.1. Да се намерят коефициентите в реда на Фурие за правоъгълното напрежение, показано на фиг. 8.1.



Фиг. 8.1

Средната стойност на функцията е $u_{cp} = u_m \alpha T / T = \alpha u_m = A_0 / 2$.

За да се изчислят коефициентите A_k, C_k , се интегрира (8.10) за един период, от $-T/2$ до $T/2$. Получава се:

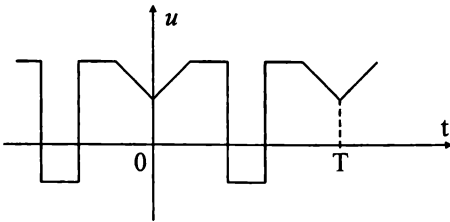
$$\begin{aligned} \dot{B}_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-jk\alpha t} dt = \frac{2}{T} \int_{-\alpha T/2}^{\alpha T/2} u_m e^{-jk\alpha t} dt = \frac{2u_m}{-jk\omega T} \left[e^{-jk\alpha t} \right]_{-\alpha T/2}^{\alpha T/2} = \\ &= \frac{2u_m}{k\pi} \sin(k\alpha\pi), \quad \text{за } k=1,2,\dots \end{aligned}$$

Коефициентите в тригонометричния ред на Фурие ще бъдат равни на:

$$\begin{aligned} A_k &= \operatorname{Re}[\dot{B}_k] = \frac{u_m}{k\pi} \sin(k\alpha\pi) \\ C_k &= -\operatorname{Im}[\dot{B}_k] = 0 \end{aligned}$$

8.4. ВЛИЯНИЕ НА СИМЕТРИЯТА НА СИГНАЛА ВЪРХУ ХАРМОНИЧНИЯ МУ СЪСТАВ

Намирането на коефициентите на хармониците в реда на Фурие е трудно. Затова всяко свойство, което опростява тази задача е благоприятно за анализа. Периодичните функции, имащи някаква форма на симетрия, се характеризират с отсъствие на някои от хармониците в реда на Фурие. Това значително намалява изчислителната работа за определяне на коефициентите, както и броя на последващите анализи, които се извършват за всеки хармоник поотделно.



Фиг. 8.2

Могат да бъдат използвани три основни случая на симетрия:

1) Функция $u(t)$ е четна, т.е. $u(t) = u(-t)$, при което съществува симетрия спрямо ординатната ос (фиг. 8.2).

Тогав в реда на Фурие отпадат нечетните (синусни) функции ($C_k = 0$). Тогав функцията ще съдържа само четни функции в развитието си в ред на Фурие, при което той се записва във вида

$$u(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\omega t.$$

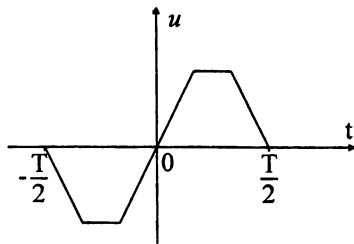
2) Функцията е нечетна, т.е. $u(t) = -u(-t)$, при което съществува симетрия спрямо началото на координатната система (фиг. 8.3).

Тогав $A_k = 0$ и $A_0 = 0$ и в реда на Фурие остават само синусните функции:

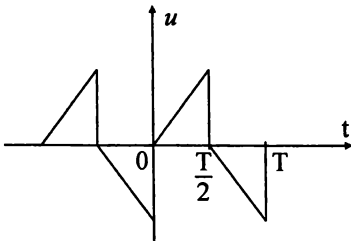
$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin k\omega t;$$

Трябва да се отбележи, че с рационален избор на началото на координатната система (точката $t = 0$) може да се зададе дали една периодична функция да бъде четна или нечетна.

3) Функцията е симетрично-спрегната, при което се удовлетворява условието $u(t) = -u(t + T/2)$ (фиг. 8.4).



Фиг. 8.3



Фиг. 8.4

Това условие определя симетрия по отношение на абсцисната ос при трансляция на $T/2$. В този случай редът на Фурие съдържа хармоници само с нечетен пореден номер:

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [A_{2k+1} \cos(2k+1)\omega t + C_{2k+1} \sin(2k+1)\omega t]$$

като има нулева средна стойност.

8.5. ЕФЕКТИВНИ СТОЙНОСТИ ПРИ НЕСИНУСОИДАЛНИ РЕЖИМИ

Ефективната стойност на произволен периодичен несинусоидален ток се определя както при синусоидални режими чрез израза

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} \quad (8.11)$$

Несинусоидалният ток се представя в ред на Фурие и се замества в (8.11)

$$\begin{aligned} i(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} i_{km} \sin(k\omega t + \psi_{ki}) \\ I^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\sum_{k=0}^{\infty} i_{km} \sin(k\omega t + \psi_{ki}) \right]^2 dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i_k^2 dt + \sum_{\substack{p=0 \\ q=0}}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i_p i_q dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i_k^2 dt = \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2 = I_0^2 + I_1^2 + \dots + I_k^2 + \dots \end{aligned}$$

Наистина, при $p \neq q$ се получават интеграли от синусоидални функции с номера на хармониците $(p - q)$ и $(p + q)$, чиито периоди се съдържат цяло число пъти в периода T на несинусоидалната функция $i(t)$ и затова са равни на нула:

$$\begin{aligned} \int_0^T i_p i_q dt &= \int_0^T i_{pm} i_{qm} \sin(p\omega t + \psi_{pi}) \sin(q\omega t + \psi_{qi}) dt = \\ &= \frac{1}{2} i_{pm} i_{qm} \left\{ \int_0^T \cos[(p - q)\omega t + \psi_{pi} - \psi_{qi}] dt - \int_0^T \cos[(p + q)\omega t + \psi_{pi} + \psi_{qi}] dt \right\} = 0 \end{aligned}$$

Следователно за ефективната стойност се получава

$$I = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2} \quad (8.12)$$

където I_k е ефективната стойност на k -тия хармоник.

Аналогично се определя ефективната стойност на несинусоидално напрежение $u(t)$:

$$U = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2} \quad (8.13)$$

8.6. МОЩНОСТИ ПРИ НЕСИНУСОИДАЛНИ РЕЖИМИ

За един двуполюсник, в който при несинусоидално напрежение $u(t)$ се установява несинусоидален ток $i(t)$, могат да се въведат следните видове мощности:

1) *Моментна мощност* $p(t)$.

Моментната мощност се определя както при синусоидални режими като произведение на моментните стойности на напреженията и тока:

$$p(t) = u(t) i(t)$$

Заместват се $u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} u_{km} \sin(k\omega t + \psi_{ku})$ и $i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} i_{km} \sin(k\omega t + \psi_{ki})$:

$$\begin{aligned} p(t) &= U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} u_{km} i_{km} \sin(k\omega t + \psi_{ku}) \sin(k\omega t + \psi_{ki}) + \\ &+ \sum_{p,q=0; p \neq q}^{\infty} u_{pm} i_{qm} \sin(p\omega t + \psi_{pu}) \sin(q\omega t + \psi_{qi}) \end{aligned} \quad (8.14)$$

Изразът (8.14) показва, че моментната мощност е сложна периодична функция на времето.

2) *Активна мощност* P

Активната мощност представлява средната стойност на моментната мощност за един период:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

След заместването на израза за моментната мощност се получава:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_k i_k dt + \sum_{\substack{p=0 \\ q=0}}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_p i_q dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_k i_k dt = \sum_{k=0}^{\infty} P_k$$

Тук е взето предвид, че

$$\int_0^T u_p i_q dt = 0 \quad \text{за } p \neq q.$$

Следователно активната мощност е равна на сумата от активните мощности на отделните хармоници:

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} P_k = P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_k + \dots = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k \quad (8.15)$$

3) Реактивна мощност Q

Реактивната мощност се дефинира по аналогия на реактивната мощност при синусоидален режим. За произволен k -ти хармоник се записва

$$Q_k = U_k I_k \sin \varphi_k, \quad \text{за } k \geq 1.$$

За общата реактивна мощност е в сила равенството

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k \quad (8.16)$$

4) Пълна мощност S

Както и при синусоидален режим, пълната мощност се определя чрез произведението от ефективните стойности на тока и напрежението:

$$S = U I = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2 \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2} \quad (8.17)$$

Трябва да се отбележи, че докато при синусоидален режим е в сила връзката $S^2 - (P^2 + Q^2) = 0$, то при несинусоидален режим тази връзка не е в сила. Вижда се, че

$$S > \sqrt{P^2 + Q^2}$$

или още може да се запише

$$S^2 - (P^2 + Q^2) = D^2 > 0 \quad (8.18)$$

Мощността D се нарича *мощност на деформирането*. Тя характеризира степента на различието на формите на кривите на тока и напрежението. При синусоидални режими $D = 0$.

8.7. АНАЛИЗ НА ПЕРИОДИЧНИ НЕСИНУСОИДАЛНИ РЕЖИМИ В ЛИНЕЙНИ ВЕРИГИ

Изследването на линейните електрически вериги със съсредоточени параметри при несинусоидални периодични въздействия се основава на принципа на наслагването. Съгласно принципа на наслагването, моментната стойност

на тока в произволен клон от електрическа верига е равна на сумата от моментните стойности на токовете на отделните хармоници. Изчислението се провежда за всеки хармоник поотделно с помощта на известните методи за анализ на линейни вериги. Работи се в следната последователност:

1) Несинусоидалните периодични въздействия се апроксимират с редове на Фурие. Коефициентите в редовете на Фурие могат да се определят аналитично, числено или с хармонични анализатори. При редица случаи хармоничният състав на източниците е предварително известен. Използват се ограничен брой хармоници, най-често $5 \div 7$.

2) Анализира се стационарният режим във веригата за всеки хармоник поотделно, включително за постоянната съставка.

При анализа на въздействието на нулевите хармоници участъците с кондензатори се разглеждат като прекъснати, а участъците с индуктивности – като участъци с нулево съпротивление.

За всеки един от хармониците на източниците на е.д.н. или е.д.т. се извършва анализ на веригата, като се определят токовете и напрежителните падове в отделните клонове. Използва се основно методът с комплексни образи, като се отчита зависимостта на комплексното съпротивление на клоновете от номера на хармоника k :

$$Z_{(k)} = R + j(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}).$$

3) Моментните стойности на токовете в отделните клонове на веригата съгласно принципа за наслагването се получават като сума от вида

$$i_s(t) = \sum_{k=0}^n i_{s(k)}(t)$$

където $i_{s(k)}(t)$ е възбуденият несинусоидален ток в клона s от k -тия хармоник на външния възбудител.

Когато се използва методът с комплексни числа, трябва да се премине от комплексни ефективни стойности към моментни стойности.

Ефективните стойности на токовете и напреженията в отделните клонове се определят съгласно изразите:

$$I = \sqrt{\sum_{k=0}^n I_{(k)}^2}; \quad U = \sqrt{\sum_{k=0}^n U_{(k)}^2}$$

Очевидно е, че анализът на електрическите вериги при несинусоидални въздействия е свързан с обемисти изчисления. При n на брой хармоника и верига с m клона е необходимо да се решат n на брой отделни системи с m урав-

нения във всяка от тях (всичко *пхт* – явления). Поради тази причина при анализ на ръка с лист, молив и калкулатор е желателно да се използва минимално възможният брой хармоници. При необходимост от по-висока точност и повече хармоници в реда на Фурие се препоръчва използването на изчислителна техника и подходящ пакет математически програми – например Matlab или PSpice.

Особености:

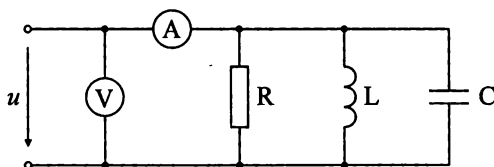
1) Изложеният начин на анализ може да се използва, когато всички външни въздействия имат един и същ период T .

2) Необходимо е също параметрите на веригата R , L , C и M да са неизменни, което е основното свойство на линейните вериги. В някои практически случаи при наличие на голям брой висши хармоници се получава *повърхностен ефект* ("скин"-ефект), при което токът тече по повърхностния слой на проводниците и параметрите им R и L зависят от честотата.

Пример 8.2. За веригата на фиг. 8.5 е известно, че кривата на напрежението е несинусоидална от вида:

$$u(t) = 40 \sin 2000t + 12 \sin(6000t - \pi/6) + 8 \sin(10000t + \pi/3), \text{ V}$$

Да се определят показанията на уредите и мощността, консумирана от веригата, ако $R = 40 \Omega$; $L = 0,02 \text{ H}$; $C = 1,39 \mu\text{F}$.



Фиг. 8.5

Решение: Тъй като веригата е линейна, тя може да се анализира последователно за всеки хармоник на напрежението.

1) за първия хармоник

$$\dot{U}_{(1)} = \frac{u_{(1)m}}{\sqrt{2}} e^{j0} = 40/\sqrt{2}$$

$$Z_{L(1)} = j\omega L = j2000 \cdot 0,02 = j40 \Omega;$$

$$Z_{C(1)} = -j \frac{1}{\omega C} = -j \frac{1}{2000 \cdot 1,39 \cdot 10^{-6}} = -j359,7 \approx -j360 \Omega$$

$$\dot{i}_{(1)} = \frac{\dot{U}_{(1)}}{R} + \frac{\dot{U}_{(1)}}{Z_{L(1)}} + \frac{\dot{U}_{(1)}}{Z_{C(1)}} = \frac{40}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{j40} + \frac{1}{-j360} \right) = 0,9461 e^{-j41,63^\circ} \text{ A}$$

2) за третия хармоник

$$\dot{U}_{(3)} = \frac{u_{(3)m}}{\sqrt{2}} e^{-j\pi/6} = \frac{12}{\sqrt{2}} e^{-j\pi/6}$$

$$Z_{L(3)} = j3\omega L = j6000 \cdot 0,02 = j120 \Omega$$

$$Z_{C(3)} = -j \frac{1}{3\omega C} = -j \frac{1}{6000 \cdot 1,39 \cdot 10^{-6}} \approx -j120 \Omega$$

За третия хармоник веригата се намира в токов резонанс. Общият ток няма да съдържа реактивна съставка, тъй като $\dot{I}_{L(3)} + \dot{I}_{C(3)} = 0$. Тогава

$$\dot{i}_{(3)} = \frac{\dot{U}_{(3)}}{R} = \frac{12}{\sqrt{240}} e^{-j\pi/6} = 0,2121 e^{-j30^\circ}$$

3) за петия хармоник

$$\dot{U}_{(5)} = \frac{u_{(5)m}}{\sqrt{2}} e^{j\pi/3} = \frac{8}{\sqrt{2}} e^{j\pi/3}$$

$$Z_{L(5)} = j5\omega L = j10000 \cdot 0,02 = j200 \Omega$$

$$Z_{C(5)} = -j \frac{1}{5\omega C} = -j \frac{1}{10000 \cdot 1,39 \cdot 10^{-6}} \approx -j72 \Omega$$

$$\dot{i}_{(5)} = \frac{\dot{U}_{(5)}}{R} + \frac{\dot{U}_{(5)}}{Z_{L(5)}} + \frac{\dot{U}_{(5)}}{Z_{C(5)}} = \frac{8e^{j\pi/3}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{j200} + \frac{1}{-j72} \right) = 0,1501 e^{j79,57^\circ} \text{ A}$$

Моментната стойност на общия ток се намира чрез наслагване на моментните стойности на токовете за всеки хармоник:

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot 0,9461 \sin(2000t - 41,63^\circ) + \sqrt{2} \cdot 0,2121 \sin(6000t - 30^\circ) + \sqrt{2} \cdot 0,1501 \sin(10000t + 79,57^\circ) \text{ A}$$

Показанието на амперметъра, т.е., ефективната стойност на тока, ще бъде равно на

$$I = \sqrt{I_{(1)}^2 + I_{(3)}^2 + I_{(5)}^2} = \sqrt{0,9461^2 + 0,2121^2 + 0,1501^2} = 0,981 \text{ A}$$

Показанието на волтметъра, т.е., ефективната стойност на напрежението, ще бъде равно на

$$U = \sqrt{U_{(1)}^2 + U_{(3)}^2 + U_{(5)}^2} = \sqrt{\left(\frac{40}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{12}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2} = 30,07 \text{ V}$$

Активната мощност, изразходвана във веригата, може да се намери по закона на Джаул:

$$P = U^2 / R = 30,07^2 / 40 = 22,6 \text{ W}.$$

Също така, активната мощност може да се намери като сума от активни-те мощности за отделните хармоници:

$$P = \sum_{k=1}^3 U_k I_k \cos \varphi_k = \\ = \frac{40}{\sqrt{2}} 0,9461 \cos 41,63^\circ + \frac{12}{\sqrt{2}} 0,2121 \cos 0^\circ + \frac{8}{\sqrt{2}} 0,1501 \cos(-19,57^\circ) = 22,6 \text{ W}$$

След като е намерена активната мощност, може да се намери фазовата разлика между еквивалентните синусоиди на тока и напрежението:

$$\cos \varphi_e = \frac{P}{UI} = \frac{22,6}{30,07 \cdot 0,981} = 0,766$$

Следователно $\varphi_e = 39,99^\circ \approx 40^\circ$

8.8. ХАРАКТЕРИСТИЧНИ КОЕФИЦИЕНТИ ПРИ НЕСИНУСОИДАЛНИ РЕЖИМИ

За оценка на несинусоидалните периодични величини в електроенергетиката и радиотехниката се използват следните характеристични коефициенти:

1) *Коефициент на формата*

$$k_\phi = \frac{I}{i_{av}} \quad (8.19)$$

Представява отношението на ефективната стойност I към средната стойност по модул i_{av} (изправената средна стойност) на несинусоидалната величина.

За синусоидални величини този коефициент е $k_\phi = \pi / (2\sqrt{2}) = 1,11$.

За несинусоидални величини този коефициент има различна стойност, която зависи от броя и амплитудите на съдържащите се хармоници.

2) *Коефициент на амплитудата*

$$k_a = \frac{i_m}{I} \quad (8.20)$$

Представява отношението на максималната към ефективната стойност.

За синусоидални величини $k_a = \sqrt{2} = 1,41$.

3) *Коефициент на деформиране*

$$k_D = \frac{I_1}{I} \quad (8.21)$$

Определя се като отношението на ефективната стойност на първия хармоник към общата ефективна стойност. За синусоидални величини $k_D = 1$.

4) *Коефициент на хармоника*

$$k_{xr} = \frac{I_r}{I_1} \quad (8.22)$$

Определя се като отношението на ефективната стойност на хармоника с пореден номер r към ефективната стойност на първия хармоник.

5) *Коефициент на нелинейните изкривявания (клирфактор, THD)*

$$k = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} I_k^2}}{I_1} \quad (8.23)$$

Определя се като отношение на ефективната стойност на висшите хармоници (с пореден номер $k \geq 2$) към ефективната стойност на първия хармоник.

В електроенергетиката има въведени стандартни стойности за коефициента на нелинейни изкривявания, които не трябва да се надвишават от производителите на енергия. Например американският стандарт IEEE Standard 519–1992 специфицира $THD < 5\%$, а за отделните хармоници коефициент на хармоника $< 3\%$ в кривата на напрежението.

В радиотехниката този коефициент се използва за характеризиране качествата на аудиоапаратура – усилватели, приемници, CD и касетни плейъри. Той трябва да има ниска стойност (0.01 – 1 %), което е показател за малки висши хармоници в изходното напрежение, когато на входа действа синусоидално напрежение – т.е. показател е за линейността на устройството.

6) *Коефициент на мощността*

$$k_p = \frac{P}{S} \quad (8.24)$$

Представлява отношение на активната към пълната мощност.

При синусоидален режим k_p е равен на $\cos \varphi$. При несинусоидален режим k_p се изчислява или по точната формула (8.24), или приблизително, като $k_p = \cos \varphi_e$ (където $\cos \varphi_e$ е косинусът от фазовата разлика между първия хармоник на тока и напрежението). Коефициентът k_p , изчислен по точната формула (8.24), е по-малък от приблизителната му стойност $k_p = \cos \varphi_e$.

Коефициентът k_p ще бъде равен на единица, само ако веригата е чисто активна. Ясно е, че наличието на висши хармоници в кривите на напрежението и тока води до намаляване на коефициента на мощността k_p , в сравнение със случая, когато при същите ефективни стойности тока и напрежението са синусоидални. Поради тази причина наличието на висши хармоници в енергийните системи е нежелателно и производителите се стремят да конструират генератори на променлив ток с максимално близка до синусоидалната крива на генерираното напрежение. Възможни са и други нежелателни явления, като възникване на резонанс за някой от висшите хармоници, при който се появяват пренапрежения в отделни участъци на веригите; влияние на хармониците със звукова честота върху радиокомуникационни системи и др.

8.9. ИЗМЕРВАНЕ НА НЕСИНУСОИДАЛНИ ТОКОВЕ И НАПРЕЖЕНИЯ

Ефективните стойности на несинусоидалните токове и напрежения могат да се измерват със стрелкови измервателни прибори от електромагнитната, електродинамичната и топлинната система.

Те не могат да се измерват точно със стрелкови прибори от най-разпространената магнетоелектрическата система с изправител, защото тези прибори измерват средната по модул стойност на величината и са градуирани да показват ефективна стойност, на базата на умножение на измерената средна стойност с константен коефициент на формата $k_\phi = 1,11$, валиден само за синусоидални величини.

При използване на цифрови мултимери трябва да се има предвид, че измерването на несинусоидални токове и напрежения може да се извършва с уреди, имащи означение „TRUE RMS“ („истинска ефективна стойност“). Тези уреди съдържат интегрална схема, която хардуерно реализира дефиниционната формула (8.11) за ефективна стойност и затова имат означението „истинска ефективна стойност“. Обикновените цифрови мултимери са калибрирани да измерват ефективна стойност само на синусоидални величини (защото реално измерват средната по модул стойност). Разликата в показанията на двата вида уреди може да достигне 40 – 50 %.

9.1. УВОД

Многофазен е източникът на синусоидални напрежения, които имат една и съща честота и определена фазова разлика помежду си. В зависимост от броя на фазите m (равен на броя на синусоидалните напрежения), многофазните източници се подразделят на *дву-*, *три-*, *четири-* и т.н. фазни източници на напрежение. Електрическата верига, в която действа многофазен източник на енергия, се нарича *многофазна верига*. Поради своята голяма икономичност и техническо съвършенство при генериране, разпространение и най-широка употреба, в електроенергетиката доминират *трифазните източници на електрическа енергия* и съответните *трифазни вериги*. С оглед на по-лесната филтрация в токозахранващите устройства за преобразуване на променлив в постоянен ток, в силовата радиоелектроника широко приложение намират *дву-*, *три-*, *шест-* и даже *дванадесет-фазните вериги*. Многофазните вериги се използват също в автоматиката, ел.транспорта и др.

9.1.1. Симетрична трифазна система

Симетричната трифазна система е съвкупност от три физически еднородни синусоидални величини с еднаква честота, които отговарят на следните условия:

- еднакви амплитуди (ефективни стойности);
- еднаква фазова разлика между величините със съседен пореден номер.

Ако едно от условията за симетрия не е изпълнено, системата е несиметрична.

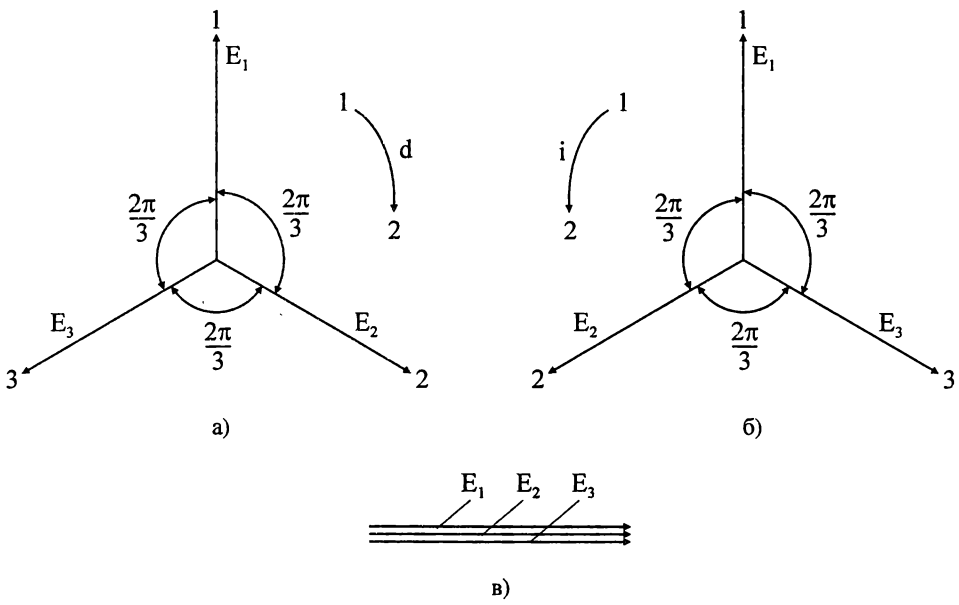
Симетрична система може да образуват например е.д.н. $e_1(t)$, $e_2(t)$ и $e_3(t)$; напрежения $u_1(t)$, $u_2(t)$ и $u_3(t)$; токове $i_1(t)$, $i_2(t)$ и $i_3(t)$; магнитни потоци $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$ и $\Phi_3(t)$ и т.н. Всяка величина от съвкупността се нарича *фаза на системата*. Векторните образи на трифазната система от е.д.н. $e_1(t)$, $e_2(t)$ и $e_3(t)$ са представени на фиг. 9.1 за трите възможни варианта на симетрична трифазна система: с *директна* (дясна) последователност (фиг. 9.1а), с *индиректна* последователност (фиг. 9.1б) и симетрична трифазна система с *нулева* последователност на фазите (фиг. 9.1в).

Моментните стойности на синусоидалните величини на всяка от симетричните трифазни системи от векторните диаграми на фиг. 9.1а, б, в съответно са:

$$\left\{ \begin{aligned} e_1(t) &= e_m \sin(\omega t + \psi_e), \\ e_2(t) &= e_m \sin(\omega t + \psi_e - 2\pi/3), \\ e_3(t) &= e_m \sin(\omega t + \psi_e + 2\pi/3); \end{aligned} \right. \quad (9.1a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} e_1(t) &= e_m \sin(\omega t + \psi_e), \\ e_2(t) &= e_m \sin(\omega t + \psi_e + 2\pi/3), \\ e_3(t) &= e_m \sin(\omega t + \psi_e - 2\pi/3); \end{aligned} \right. \quad (9.16)$$

$$\left\{ \begin{aligned} e_1(t) &= e_m \sin(\omega t + \psi_e), \\ e_2(t) &= e_m \sin(\omega t + \psi_e), \quad \text{или} \quad e_1(t) = e_2(t) = e_3(t), \\ e_3(t) &= e_m \sin(\omega t + \psi_e) \end{aligned} \right. \quad (9.1B)$$



Фиг. 9.1

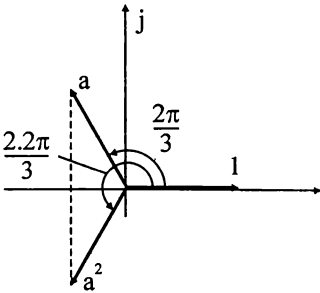
От фиг. 9.1а,б и свързаната с нея система (9.1а,б) се вижда, че в трифазните симетрични системи с директна и индиректна последователност дефазирването между фазните величини е $\varphi = 360^0/3 = 120^0$, т.е. $\varphi = 2\pi/3$ rad. Приложение в практиката намират трифазните симетрични системи с директна последователност на фазите. Записани с комплекси, величините от системата имат вида:

$$\dot{E}_1 = Ee^{j\psi_e}, \quad \dot{E}_2 = Ee^{j\psi_e} e^{j2.2\pi/3} = \dot{E}_1 e^{j2.2\pi/3} \quad \text{и} \quad \dot{E}_3 = Ee^{j\psi_e} e^{j2\pi/3} = \dot{E}_1 e^{j2\pi/3}. \quad (9.2)$$

Компактността на записа и изискванията за удобство на изчисленията са свързани с въвеждането на *оператора* $a = 1e^{j2\pi/3}$. Чрез него симетричната трифазна система от е.д.н. се представя с равенствата:

$$\dot{E}_1 = Ee^{j\psi_e}, \quad \dot{E}_2 = a^2 \dot{E}_1 \quad \text{и} \quad \dot{E}_3 = a \dot{E}_1.$$

Тук операторът a замества характерните множители от (9.2) $1e^{j2.2\pi/3} = a^2$ и $1e^{j2\pi/3} = a$. Трите комплекса $1 = 1e^{j0}$, a и a^2 са изобразени с вектори на фиг. 9.2.



Фиг. 9.2

В алгебричен вид 1 , a и a^2 имат съставките 1 , $a = 1e^{j2\pi/3} = -1/2 + j\sqrt{3}/2$ и $a^2 = 1e^{j2.2\pi/3} = -1/2 - j\sqrt{3}/2$. При анализа на трифазните вериги често се използват свойствата на групата от комплекси 1 , a^2 и a , а именно:

$$1 + a^2 + a = 0, \quad (9.3)$$

$$a^3 = (1e^{j2\pi/3})^3 = 1e^{j2\pi} = 1e^{j0} = 1, \quad a^4 = a^3 \cdot a = a,$$

$$a^5 = a^3 \cdot a^2 = a^2 \quad \text{и т.н.} \quad (9.4)$$

Пример 9.1. С помощта на оператора a да се запишат комплексите на симетричната трифазна система от е.д.н. с индиректна последователност на фазите (фиг. 9.1б, система (9.1б)).

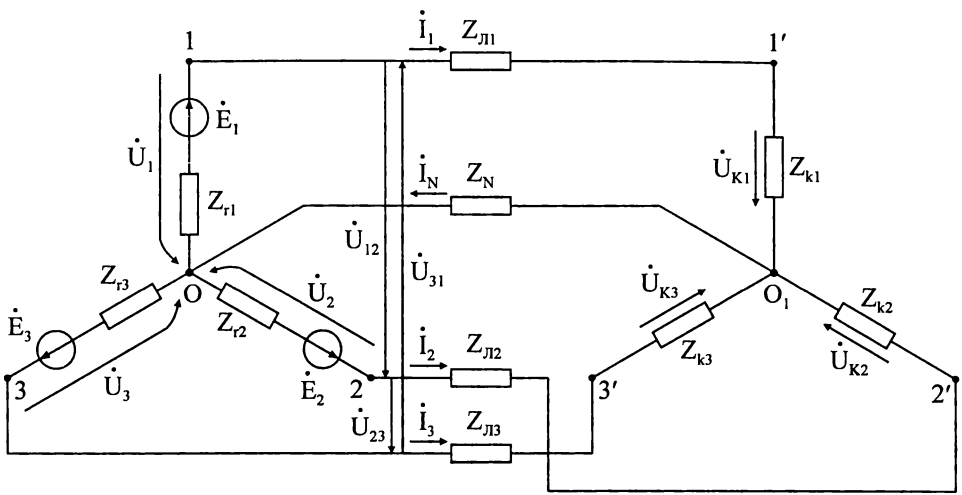
Решение. Съгласно (9.1б) и фиг. 9.1б непосредствено се записва:

$$\dot{E}_1 = Ee^{j\psi_e}, \quad \dot{E}_2 = Ee^{j\psi_e} e^{j2\pi/3} = \dot{E}_1 e^{j2\pi/3} = a \dot{E}_1$$

$$\text{и} \quad \dot{E}_3 = Ee^{j\psi_e} e^{j2.2\pi/3} = \dot{E}_1 e^{j2.2\pi/3} = a^2 \dot{E}_1.$$

9.1.2. Трифазни вериги

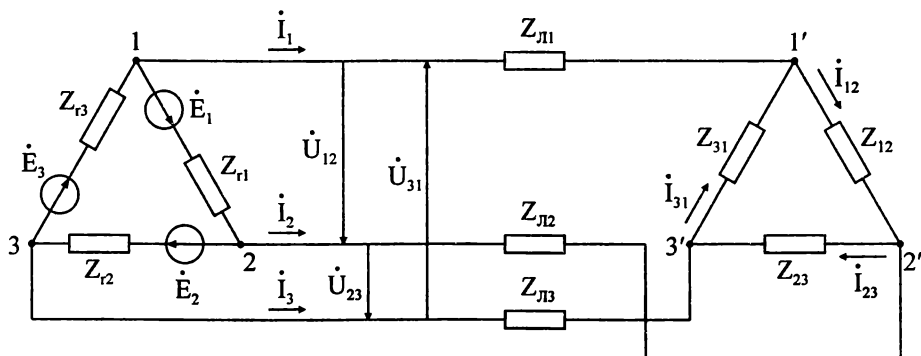
Намотките на трифазните генератори, трансформатори и консуматори се свързват в звезда или в триъгълник. Генераторът и консуматорът в една трифазна верига могат да бъдат съединени по различен начин: единият в звезда, а другият в триъгълник и обратно. На фиг. 9.3 трифазният генератор и трифазният консуматор са съединени в звезда. Възлите O и O_1 се наричат *неутрални точки (звездни центрове)*, а свързващият ги проводник – *неутрален проводник*. Участъците $\overline{O1}$, $\overline{O2}$ и $\overline{O3}$ са *фазни участъци на генератора*, а $\overline{O_11'}$, $\overline{O_12'}$ и $\overline{O_13'}$ са *фазните участъци на консуматора*.



Фиг. 9.3

Участъците $\overline{11'}$, $\overline{22'}$ и $\overline{33'}$ са *линейни*. Величините, присъщи на даден участък от веригата, носят съответното наименование. Например \dot{E}_1 , \dot{E}_2 и \dot{E}_3 са *фазни е.д.н.*, а \dot{U}_1 , \dot{U}_2 и \dot{U}_3 – *фазни напрежения на генератора*. Между линейните проводници действат *линейните напрежения* \dot{U}_{12} , \dot{U}_{23} и \dot{U}_{31} , а \dot{U}_{k1} , \dot{U}_{k2} и \dot{U}_{k3} са *фазни напрежения на консуматора*. Приема се, че токовете в линията са винаги с посока към консуматора, а в неутралния проводник – към генератора. При съединение звезда-звезда \dot{I}_1 , \dot{I}_2 и \dot{I}_3 са едновременно линейни и фазни токове. При това съединение веригата може да бъде както *четирипроводна* (фиг. 9.3), така и *трипроводна*. В последния случай липсва неутралният проводник. Във веригата от фиг. 9.4 трифазният генератор и трифазният консуматор са съединени в триъгълник. *Фазни участъци на генератора* са $\overline{12}$, $\overline{23}$ и $\overline{31}$, *фазни на консуматора* са $\overline{1'2'}$, $\overline{2'3'}$ и $\overline{3'1'}$, а $\overline{11'}$, $\overline{22'}$ и $\overline{33'}$ са *линейни участъци*. Фазните е.д.н. на генератора са означени с \dot{E}_1 , \dot{E}_2 и \dot{E}_3 . Напреженията \dot{U}_{12} , \dot{U}_{23} и \dot{U}_{31} са едновременно *линейни и фазни напрежения на генератора*. Токовете \dot{I}_1 , \dot{I}_2 и \dot{I}_3 са *линейни*, а \dot{I}_{12} , \dot{I}_{23} и \dot{I}_{31} са *фазните токове на консуматора*.

Трифазната верига е симетрична, когато са еднакви комплексните съпротивления на трите линейни проводника $Z_{л1} = Z_{л2} = Z_{л3} = Z_{л}$, както и тези на трите фази на консуматора $Z_{k1} = Z_{k2} = Z_{k3} = Z_k$ (респ. $Z_{12} = Z_{23} = Z_{31} = Z_{\Delta}$ при свързване триъгълник).



Фиг. 9.4

9.2. РАБОТНИ РЕЖИМИ НА ТРИФАЗНИ ВЕРИГИ

Трифазната верига може да работи при *симетричен* или при *несиметричен* режим. *Когато на входа на симетрична трифазна верига действа симетрична трифазна система от напрежения, веригата работи при симетричен режим.* Ако едно от условията за симетрия не е изпълнено, веригата работи при *несиметричен режим*.

9.2.1. Изследване на симетричен режим при статичен товар

При симетричен режим всяка от токовите системи на веригата е симетрична.

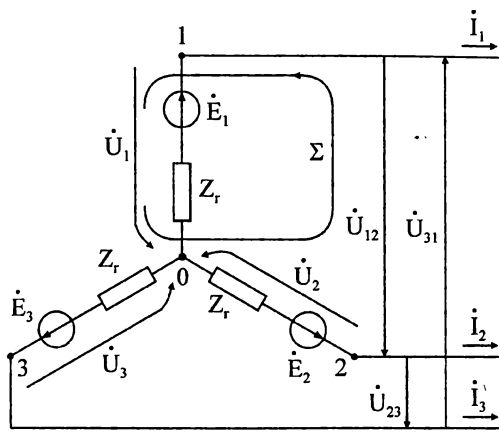
А. Съотношения между линейни и фазни величини

а) Свързване в звезда

Постановка на задачата. На фиг. 9.5 е показан симетричен трифазен генератор, съединен в звезда. Захранваната от генератора трифазна верига работи при симетричен режим. Да се определят съотношенията между ефективните стойности на линейните и фазни напрежения, както и между линейните и фазни токове.

Анализ. Токът в линейния и във фазния участък на генератора е един и същ. Поради симетричността на режима токовата система е симетрична и се характеризира със зависимостта $I_n = I_\phi$. Съотношението между фазните и линейните напрежения се установява, като за затворен контур от две фазни и съответното линейно напрежение се приложи втория закон на Кирхоф. Например $\dot{U}_1 - \dot{U}_2 - \dot{U}_{12} = 0$ (фиг. 9.5), откъдето се получава $\dot{U}_{12} = \dot{U}_1 - \dot{U}_2$. По този начин се достига до системата уравнения

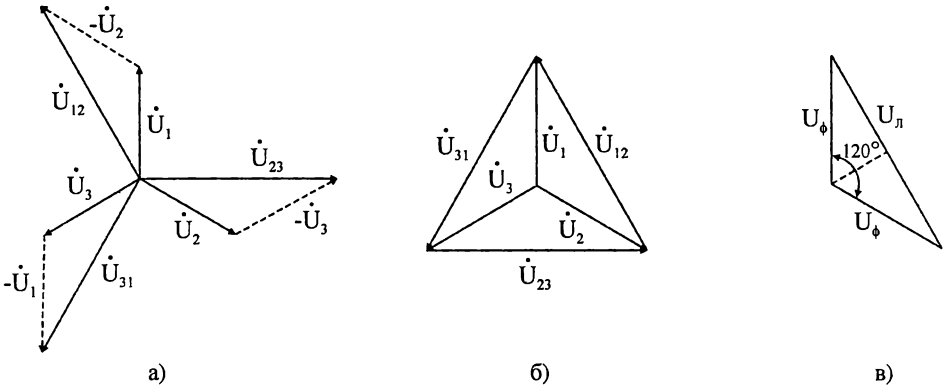
$$\dot{U}_{12} = \dot{U}_1 - \dot{U}_2; \quad \dot{U}_{23} = \dot{U}_2 - \dot{U}_3 \quad \text{и} \quad \dot{U}_{31} = \dot{U}_3 - \dot{U}_1. \quad (9.5)$$



Фиг. 9.5

На фиг. 9.6а в обща векторна диаграма са начертани звездите на фазните и на линейните напрежения. Всяко *линейно напрежение* се получава, като към *първото фазно напрежение* се прибави векторно *второто фазно напрежение*, но с *обратна посока*. Например линейното напрежение \dot{U}_{12} , се представя така:

$$\dot{U}_{12} = \dot{U}_1 - \dot{U}_2 = \dot{U}_1 + (-\dot{U}_2).$$



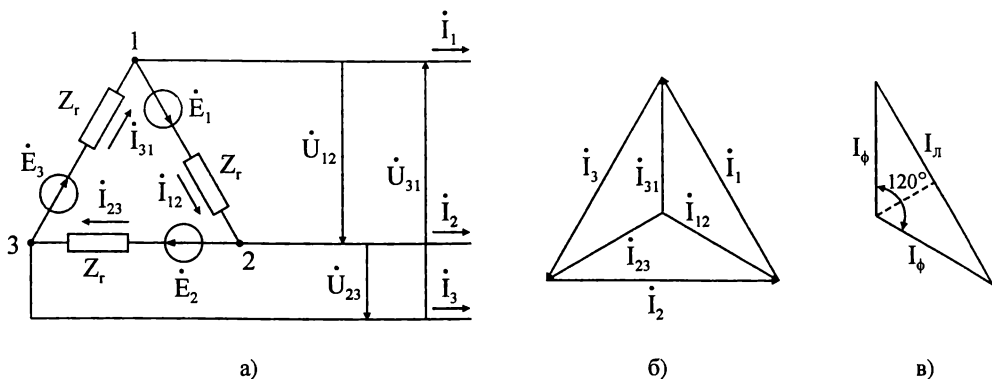
Фиг. 9.6

Взаимното разположение на същите векторни образи е представено и на диаграмата от фиг. 9.6б. Тук векторните образи на фазните напрежения образуват симетрична звезда с големина на лъча U_ϕ , а на линейните напрежения – равностранен триъгълник със страна U_n . Връзката между ефективните стойности на линейни и фазни напрежения се намира от съотношенията в равнобедрения триъгълник от фиг. 9.6в

$$U_n = \sqrt{3}U_\phi. \quad (9.6)$$

б) Свързване в триъгълник

Постановка на задачата. На фиг. 9.7а е показан симетричен трифазен генератор, съединен в триъгълник. Веригата работи при симетричен режим. Да се определи връзката между линейните и фазните величини.



Фиг. 9.7

Анализ. Напрежителният пад в линейния и във фазния участък на генератора е един и същ (фиг. 9.6а), откъдето личи, че ефективните стойности на линейните и на фазните напрежения съвпадат, т.е.

$$U_L = U_\phi. \tag{9.7}$$

Връзката между фазните и линейните токове се установява, като за всеки от възлите на триъгълника се приложи първият закон на Кирхоф, например $I_1 - I_{31} + I_{12} = 0$ за възел 1. Достига се до системата

$$I_1 = I_{31} - I_{12}; \quad I_2 = I_{12} - I_{23} \quad \text{и} \quad I_3 = I_{23} - I_{31}. \tag{9.8}$$

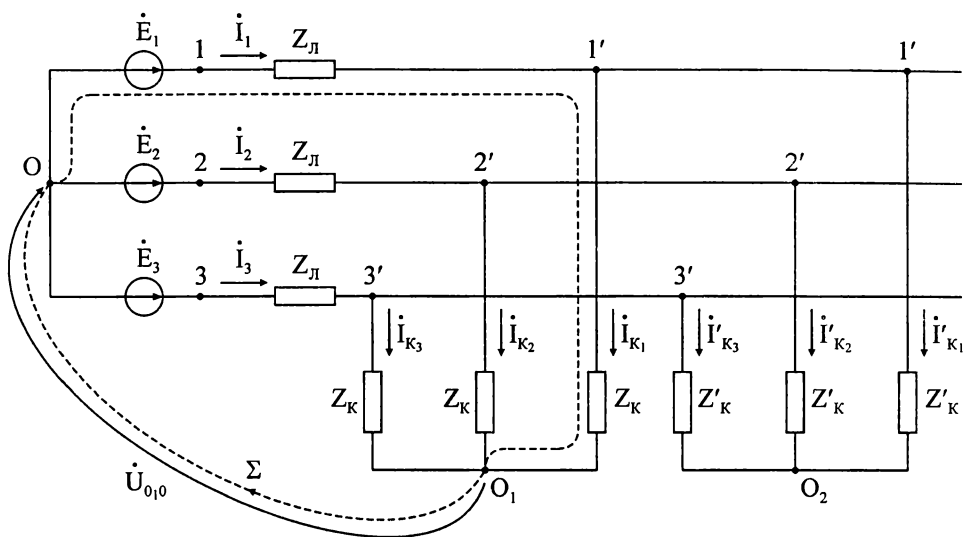
Векторната диаграма на фазните и на линейните токове е показана на фиг. 9.7б. Векторните образи на фазните токове образуват симетрична звезда с големина на лъча I_ϕ , а системата от линейни токове – равностранен триъгълник със страна I_L . От равнобедрения триъгълник (фиг. 9.7в), образуван от два фазни и съответния линеен ток, се намира

$$I_L = \sqrt{3}I_\phi. \tag{9.9}$$

Б. Напрежение между неутралните точки на консуматора и генератора

Постановка на задачата. На фиг. 9.8 е показана трифазна верига при симетричен режим. Трифазният генератор, както и двата трифазни консуматора, са съединени в звезда. Системата от е.д.н. на източника е симетрична с

ефективна стойност на фазното е.д.н. E_{ϕ} . Известни са комплексните съпротивления на линейните проводници $Z_{\text{л}}$, както и фазните съпротивления Z_k и Z'_k на всеки от двата симетрични консуматора. Да се определят напреженията: а) между неутралните точки на първия консуматор и генератора \dot{U}_{O_1O} ; б) между неутралните точки на двата консуматора $\dot{U}_{O_2O_1}$.



Фиг. 9.8

Анализ. а) По втория закон на Кирхоф се съставят уравнения за контури-те, които включват фаза на генератора, линейен проводник, съответната фаза на консуматора и участъка между двете неутрални точки. Един такъв контур през първа фаза е показан на фиг. 9.8. За него се записва системата уравнения:

$$\begin{aligned} Z_{\text{л}} \dot{I}_1 + Z_k \dot{I}_{k1} + \dot{U}_{O_1O} &= \dot{E}_1, \\ Z_{\text{л}} \dot{I}_2 + Z_k \dot{I}_{k2} + \dot{U}_{O_1O} &= \dot{E}_2, \\ Z_{\text{л}} \dot{I}_3 + Z_k \dot{I}_{k3} + \dot{U}_{O_1O} &= \dot{E}_3. \end{aligned} \quad (9.10)$$

След почленно сумиране на уравненията се получава изразът:

$$Z_{\text{л}} (\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3) + Z_k (\dot{I}_{k1} + \dot{I}_{k2} + \dot{I}_{k3}) + 3\dot{U}_{O_1O} = \dot{E}_1 + \dot{E}_2 + \dot{E}_3. \quad (9.11)$$

Отчита се, че токовете, както и е.д.н. в (9.11), образуват симетрични системи, в които се въвежда операторът a

$$Z_{\text{л}} \dot{I}_1 (1 + a^2 + a) + Z_k \dot{I}_{k1} (1 + a^2 + a) + 3\dot{U}_{O_1O} = \dot{E}_1 (1 + a^2 + a).$$

Като се приложи свойството на оператора a (9.3), се достига до основната зависимост при симетричен работен режим:

$$3\dot{U}_{O_1O} = 0 \quad \text{и съответно} \quad \dot{V}_{O_1} = \dot{V}_O. \quad (9.12)$$

Следователно напрежението между неутралните точки на консуматора и генератора е нула, т.е. потенциалите на двете неутрални точки са еднакви.

б) Ако се съставят същите уравнения по втория закон на Кирхоф, но през съответните фази на втория консуматор, аналогично се доказва, че $\dot{U}_{O_2O} = 0$ и $\dot{V}_{O_2} = \dot{V}_O$. Отгук следва, че $\dot{V}_{O_2} = \dot{V}_{O_1}$, т.е. при симетричен работен режим всяка неутрална точка на консуматора има потенциала на неутралната точка на генератора.

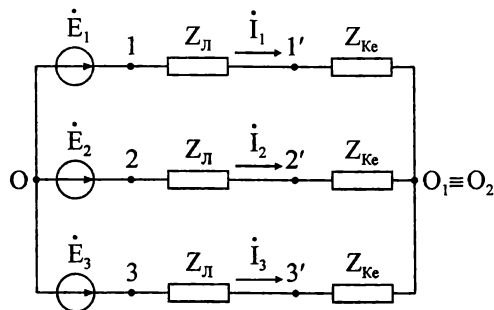
Изводи:

» При симетричен режим напрежението между неутралните точки на генератора и на консуматорите е нула, т.е. те са с еднакъв потенциал.

» Системите на линейните токове \dot{I}_1, \dot{I}_2 и \dot{I}_3 , на токовете на първия $\dot{I}_{k1}, \dot{I}_{k2}$ и \dot{I}_{k3} , както и тези на втория консуматор $\dot{I}'_{k1}, \dot{I}'_{k2}$ и \dot{I}'_{k3} и пр. са симетрични.

В. Анализ на веригата

Изчисляването на токовете във веригата се извършва при предположението, че трифазният консуматор е предварително преобразуван в съединение звезда.



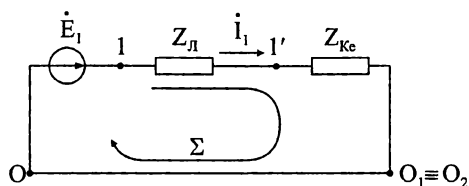
Фиг. 9.9

Постановка на задачата. За веригата от фиг. 9.8 да се определят фазните токове $\dot{I}_{k1}, \dot{I}_{k2}, \dot{I}_{k3}$ и $\dot{I}'_{k1}, \dot{I}'_{k2}, \dot{I}'_{k3}$ в двата консуматора.

Анализ. Фазните съпротивления на двата консуматора от веригата са съединени успоредно. След преобразуването им в еквивалентни комплексни съпротивления $Z_{ке}$ се получава веригата от фиг. 9.9, която също работи в симетричен режим.

Разглежда се контурът през първата фаза на генератора и консуматора (фиг. 9.10). Тъй като $\dot{V}_{O_1} = \dot{V}_O$ и $\dot{V}_{O_2} = \dot{V}_O$, възлите O_1, O_2 и O се сливат.

В получения затворен контур протича токът $\dot{I}_1 = \dot{E}_1 / (Z_{л} + Z_{ке})$. Останалите два линейни тока се определят от условието за симетрия на системата: $\dot{I}_2 = a^2 \dot{I}_1$ и $\dot{I}_3 = a \dot{I}_1$. Токът в първа фаза на един от двата консуматора се намира като ток в паралелен клон, а този в първа фаза на другия консуматор – по първия закон на Кирхоф. Например $\dot{I}_{k1} = \dot{I}_1 Z'_{k1} / (Z_{k1} + Z'_{k1})$, а $\dot{I}'_{k1} = \dot{I}_1 - \dot{I}_{k1}$. Токовете в другите две фази на консуматорите се определят от условието за симетрия на съответната токова система: $\dot{I}_{k2} = a^2 \dot{I}_{k1}$ и $\dot{I}_{k3} = a \dot{I}_{k1}$, и съответно $\dot{I}'_{k2} = a^2 \dot{I}'_{k1}$ и $\dot{I}'_{k3} = a \dot{I}'_{k1}$.



Фиг. 9.10

Изводи:

» Изчисляването на токовете във веригата се извършва, след като трифазният консуматор предварително се преобразува в звезда.

» Един от линейните (фазните) токове се изчислява от схемата за една от фазите на веригата. Останалите токове се записват от условието за симетрия на съответната токова система.

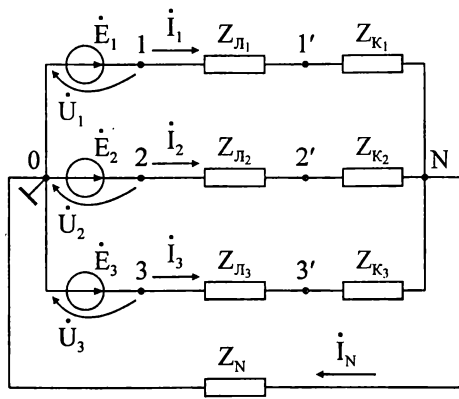
9.2.2. Изследване на несиметричен режим в трифазни вериги

А: Трифазна четирипроводна верига

Постановка на задачата. Четирипроводната верига от фиг. 9.11 работи при несиметричен режим: в общия случай трифазната система от е.д.н. \dot{E}_1, \dot{E}_2 и \dot{E}_3 на източника е несиметрична; комплексните съпротивления на линията $Z_{л1}, Z_{л2}, Z_{л3}$ са различни; различни са и фазните комплексни съпротивления на консуматора Z_{k1}, Z_{k2}, Z_{k3} . Комплексното съпротивление на неутралния проводник е Z_N . Да се определят токовете $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$ и \dot{I}_N .

Анализ. Предварително се определят напрежителните падове $\dot{U}_{1N}, \dot{U}_{2N}, \dot{U}_{3N}$ и \dot{U}_{NO} . За целта за потенциала на възела O се приема $\dot{V}_O = 0$. Тогава $\dot{U}_{NO} = \dot{V}_N$ и се намира по метода с възловите потенциали

$$\begin{aligned} \dot{V}_N \left(\frac{1}{Z_{л1} + Z_{k1}} + \frac{1}{Z_{л2} + Z_{k2}} + \frac{1}{Z_{л3} + Z_{k3}} + \frac{1}{Z_N} \right) = \\ = \dot{E}_1 \frac{1}{Z_{л1} + Z_{k1}} + \dot{E}_2 \frac{1}{Z_{л2} + Z_{k2}} + \dot{E}_3 \frac{1}{Z_{л3} + Z_{k3}}. \end{aligned}$$



Фиг. 9.11

Полага се $Y_i = 1/(Z_{Li} + Z_{Ki})$ за $i = 1, 2, 3$ и $Y_N = 1/Z_N$, след което за търсеното напрежение се записва:

$$\dot{U}_{NO} = \dot{V}_N = \frac{\dot{E}_1 Y_1 + \dot{E}_2 Y_2 + \dot{E}_3 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_N}. \quad (9.13)$$

По втория закон на Кирхоф от уравненията за всеки от контурите, които включват фаза на източника, съответната фаза на консуматора и неутралния проводник се определят еднотипно трите тока. Намира се и токът \dot{I}_N

$$\dot{I}_1 = (\dot{E}_1 - \dot{U}_{NO})Y_1; \quad \dot{I}_2 = (\dot{E}_2 - \dot{U}_{NO})Y_2; \quad \dot{I}_3 = (\dot{E}_3 - \dot{U}_{NO})Y_3 \quad \text{и} \quad \dot{I}_N = \dot{U}_{NO}Y_N. \quad (9.14)$$

Съгласно теоремата за компенсацията, при означените посоки са валидни равенствата $\dot{U}_1 = \dot{E}_1$, $\dot{U}_2 = \dot{E}_2$ и $\dot{U}_3 = \dot{E}_3$. Ако в (9.14) вместо фазните е.д.н. \dot{E}_1 , \dot{E}_2 и \dot{E}_3 се въведат фазните напрежения \dot{U}_1 , \dot{U}_2 и \dot{U}_3 , се получава

$$\dot{I}_1 = (\dot{U}_1 - \dot{U}_{NO})Y_1; \quad \dot{I}_2 = (\dot{U}_2 - \dot{U}_{NO})Y_2; \quad \dot{I}_3 = (\dot{U}_3 - \dot{U}_{NO})Y_3 \quad \text{и} \quad \dot{I}_N = \dot{U}_{NO}Y_N. \quad (9.15)$$

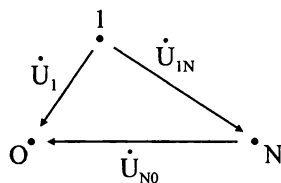
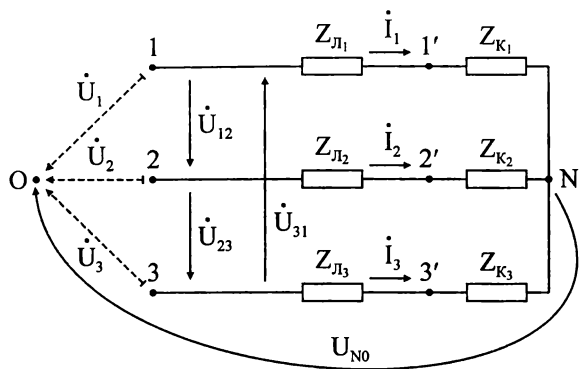
До равностоеен израз за \dot{U}_{NO} се достига и ако в (9.13) \dot{E}_1 , \dot{E}_2 и \dot{E}_3 аналогично се заместят с фазните напрежения \dot{U}_1 , \dot{U}_2 и \dot{U}_3 .

Б. Трифазна трипроводна верига

Освен по описания по-горе начин изчисляването на трифазната трипроводна верига може да се извърши и с помощта на линейните напрежения.

Постановка на задачата. Трифазната трипроводна верига от фиг. 9.12а работи при несиметричен режим. Известни са: несиметричната трифазна сис-

тема от линейни напрежения \dot{U}_{12} , \dot{U}_{23} и \dot{U}_{31} ; комплексните съпротивления на линията $Z_{л1}$, $Z_{л2}$, $Z_{л3}$ и комплексните съпротивления на консуматора $Z_{к1}$, $Z_{к2}$, $Z_{к3}$. Да се определят токовете \dot{I}_1 , \dot{I}_2 и \dot{I}_3 .



а)

б)

Фиг. 9.12

Анализ. Фазните токове се определят от изразите (9.15), в които участват фазните напрежения на консуматора $\dot{U}_{1N} = \dot{U}_1 - \dot{U}_{NO}$, $\dot{U}_{2N} = \dot{U}_2 - \dot{U}_{NO}$ и $\dot{U}_{3N} = \dot{U}_3 - \dot{U}_{NO}$. За първа фаза тази връзка е показана на фиг. 9.12б. Фазните напрежения на консуматора \dot{U}_{1N} , \dot{U}_{2N} и \dot{U}_{3N} могат да се представят с еднотипни формули, в които участват линейните напрежения. До този резултат се достига по следния начин. Напрежението \dot{U}_{NO} се определя от (9.13), където \dot{E}_1 , \dot{E}_2 и \dot{E}_3 са заменени по теорема на компенсацията с напреженията \dot{U}_1 , \dot{U}_2 и \dot{U}_3 . Отчита се и обстоятелството, че в трипроводната верига $Y_N = 0$. Така се достига до

$$\dot{U}_{NO} = \frac{\dot{U}_1 Y_1 + \dot{U}_2 Y_2 + \dot{U}_3 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}.$$

След тези пояснения се извеждат и изразите за фазните напрежения на консуматора. Например за \dot{U}_{1N} се намира

$$\dot{U}_{1N} = \dot{U}_1 - \dot{U}_{NO} = \dot{U}_1 - \frac{\dot{U}_1 Y_1 + \dot{U}_2 Y_2 + \dot{U}_3 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = \frac{(\dot{U}_1 - \dot{U}_2) Y_2 + (\dot{U}_1 - \dot{U}_3) Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = \frac{\dot{U}_{12} Y_2 + \dot{U}_{13} Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}.$$

Аналогично се определят и останалите фазни напрежения на консуматора:

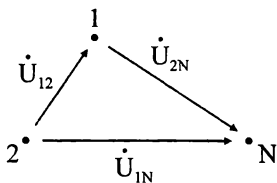
$$\dot{U}_{1N} = \frac{\dot{U}_{12} Y_2 + \dot{U}_{13} Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}, \quad \dot{U}_{2N} = \frac{\dot{U}_{23} Y_3 + \dot{U}_{21} Y_1}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \quad \text{и} \quad \dot{U}_{3N} = \frac{\dot{U}_{31} Y_1 + \dot{U}_{32} Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3}. \quad (9.16)$$

При изчисленията в (9.16) се отчита връзката между кинейните напрежения $\dot{U}_{ji} = -\dot{U}_{ij}$. Изчисляването на токовете става в следната последователност:

– Едното от фазните напрежения на консуматора, например \dot{U}_{1N} , се получава съгласно (9.16), а фазният ток – от израза $\dot{I}_1 = Y_1 \dot{U}_{1N}$.

– Освен от (9.16), следващото фазно напрежение може да се определи и от контур, в който другите напрежения са известни. Например по втория закон на Кирхоф за контура от фиг. 9.13, респ. фиг. 9.12а, напрежението за втора фаза на консуматора е $\dot{U}_{2N} = \dot{U}_{1N} - \dot{U}_{12}$, а токът – $\dot{I}_2 = Y_2 \dot{U}_{2N}$.

– Накрая за неутралната точка по първия закон на Кирхоф непосредствено се записва $\dot{I}_3 = -\dot{I}_2 - \dot{I}_1$.



Фиг. 9.13

Изводи:

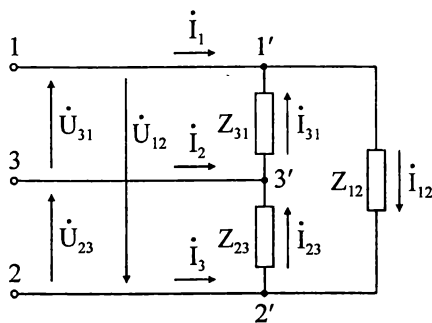
» Само в частния случай, когато линейните напрежения на входа на веригата са приложени непосредствено към фазите на консуматора, съединен в триъгълник (фиг. 9.14), неговите токове се изчисляват директно, без преобразуване на триъгълника в звезда $\dot{I}_{12} = \dot{U}_{12}/Z_{12}$; $\dot{I}_{23} = \dot{U}_{23}/Z_{23}$ и $\dot{I}_{31} = \dot{U}_{31}/Z_{31}$. След това по първия закон на Кирхоф се изчисляват линейните токове.

» Във всички други случаи аналитичните изрази от теорията на трифазните вериги се отнасят за трифазни консуматори, съединени в звезда.

» При симетричен работен режим се решава еквивалентна схема и се изчислява токът само в една от фазите. Останалите токове се определят от условието за симетрия на токовата система.

» В трифазна четирипроводна верига основна е формулата (9.13).

» За изчисляване на трипроводната верига най-често се използва (9.16) и описаният след това алгоритъм.



Фиг. 9.14

9.3. ДВИЖЕЩИ СЕ МАГНИТНИ ПОЛЕТА

Едно от най-важните качества на многофазните токови системи (двуфазни, трифазни и т.н) е, че при определени условия могат да създадат *движещи се* в пространството магнитни полета. Според характера на закона на движението те биват *въртящи се* или *линейно преместващи се* (*бягащи*) магнитни полета.

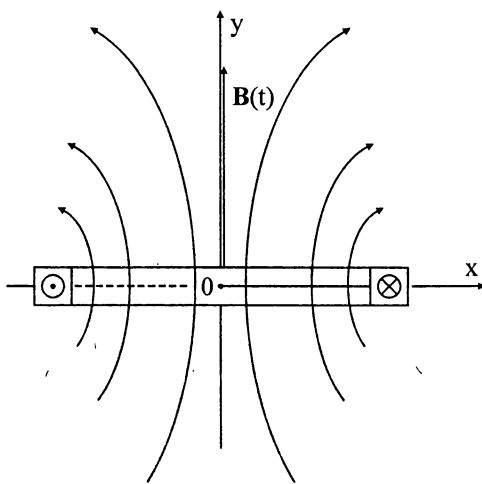
При въртящото се магнитно поле направлението на магнитните линии се върти в пространството около фиксиран център с ъглова скорост $\omega(t)$. Типичен пример е *елиптичното поле*. В частния случай при $\omega = \text{const}$ се получава въртящо се *кръгово поле*. Благодарение на него функционират болшинството електрически машини, трифазните електромери, индукционни фазорегулатори и др. При бягащото магнитно поле преместването в пространството е с линейна скорост $v(t)$, която е перпендикулярна на направлението на магнитните линии. В практиката се предпочитат бягащи магнитни полета с $v = \text{const}$.

В основата на на въртящите се и бягащи магнитни полета стои *пулсиращото магнитно поле*. То се характеризира с неизменно направление в пространството и хармоничен (синусоидален) закон на изменение във времето.

9.3.1. Пулсиращо магнитно поле

Пулсиращо магнитно поле се създава от всяка намотка, през която протича синусоидален ток $i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi)$. Ако намотката е разположена в линейна магнитна среда, например въздух, съществува пропорционалност между магнитната индукция $B(t)$ и възбудителния ток $i(t)$. По тези причини създаденото магнитно поле има същия закон на изменение във времето $B(t) = B_m \sin(\omega t + \psi)$, както тока. Посоката на магнитните линии се определя по правилото на дясната ръка, в зависимост от посоката на тока в намотката. И тъй като за един период T токът се изменя между $(-i_m)$ и i_m , магнитната индукция също променя посоката си, но направлението на магнитните линии в пространството е винаги перпендикулярно на равнината на намотката (фиг. 9.15).

Може да се докаже, че всяко *пулсиращо магнитно поле* от вида $B(t) = B_m \sin(\omega t + \psi)$ е *геометрична сума* от дясно въртящо се $\dot{B}_d(t)$ и



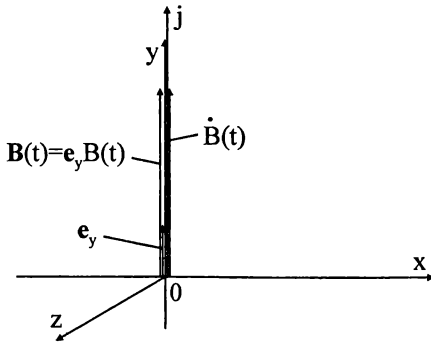
Фиг. 9.15

ляво въртящо се $B_i(t)$ магнитни полета. Съставните полета отговарят на следните условия:

- Амплитудата на всяко от тях е $1/2$ от амплитудата на пулсиращото поле;
- Въртят се в противоположни посоки с ъглова скорост ω , равна на кръговата честота на възбудителния ток.

Предполага се, че равнината xOz на правоъгълна координатна система съвпада с равнината на намотката, а оста Oy – с нейната ос. Така за магнитната индукция се записва $\mathbf{B}(t) = \mathbf{e}_y B(t)$, където \mathbf{e}_y е единичен вектор по оста Oy . По-нататък е удобно да се приеме, че равнината xOy и комплексната равнина се припокриват (фиг. 9.16), така че реалната ос и оста Ox , както и имагинерната ос и оста Oy съвпадат. Като се има предвид, че всеки комплекс се изобразява с вектор в комплексната равнина, при формулираните условия векторът магнитна индукция може да се представи и като комплекс:

$$\dot{B}(t) = jB(t) = jB_m \sin(\omega t + \psi). \quad (9.17)$$



Фиг. 9.16

С въвеждането на комплекси дясната страна на (9.17) може да се замени с алгебрична сума от експоненциални членове, съгласно формулата на Ойлер:

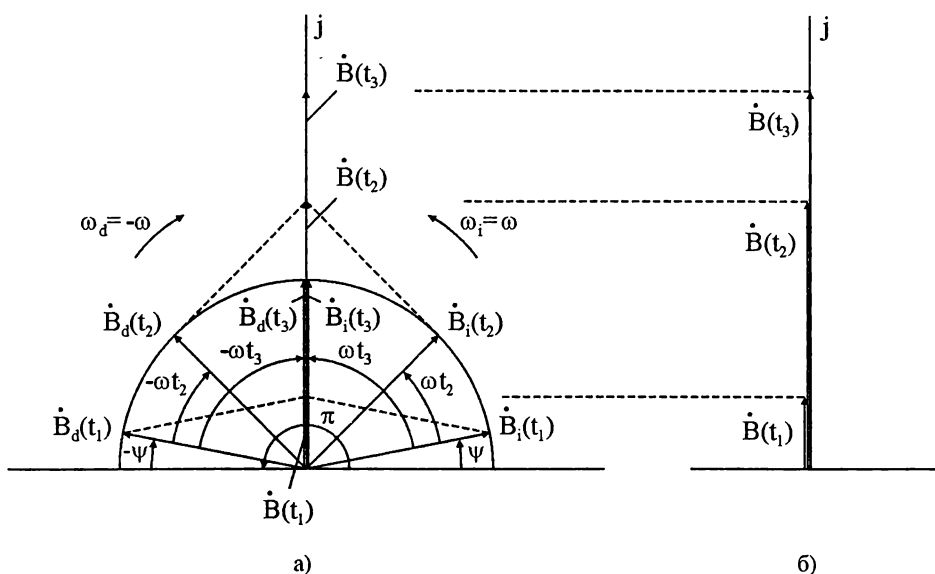
$$\begin{aligned} jB_m \sin(\omega t + \psi) &= \\ &= \frac{B_m}{2} e^{j(\omega t + \psi)} - \frac{B_m}{2} e^{-j(\omega t + \psi)} = \\ &= \frac{B_m}{2} e^{j(\omega t + \psi)} + \frac{B_m}{2} e^{j[\pi - (\omega t + \psi)]} \end{aligned} \quad (9.18)$$

В (9.18) се отчита зависимостта $e^{j\pi} = -1$ и ако се положи $\frac{B_m}{2} e^{j(\omega t + \psi)} = \dot{B}_i(t)$, а $\frac{B_m}{2} e^{j[\pi - (\omega t + \psi)]} = \dot{B}_d(t)$, същият израз се трансформира в сумата

$$\dot{B}(t) = jB(t) = jB_m \sin(\omega t + \psi) = \dot{B}_i(t) + \dot{B}_d(t). \quad (9.19)$$

На фиг. 9.17а са показани съставките и резултантното пулсиращо поле в три различни момента: 1) $t_1 = 0$; 2) $\omega t_2 + \psi = \pi/4$ и 3) $\omega t_3 + \psi = \pi/2$. С нарастване на времето ($t_3 > t_2 > t_1$) полето $\dot{B}_i(t)$ се върти с ъглова скорост $\omega_i = \omega$, а $\dot{B}_d(t)$ – с ъглова скорост $\omega_d = -\omega$. Поради симетрията им спрямо имагинерна-

та ос, резултантното пулсиращо поле е ориентирано винаги по нея. За тези три момента пулсиращото поле е показано на фиг. 9.17б. То има екстремуми $\dot{B}(t) = \pm jB_m$ при $\omega t + \psi = k\pi/2$, за $k=1,3,\dots$, когато и двете съставни полета са разположени по имагинерната ос. Резултантното пулсиращо поле става нула при $\omega t + \psi = k\pi$, за $k=1,2,\dots$. Тогава съставните полета взаимно се компенсират.



Фиг. 9.17

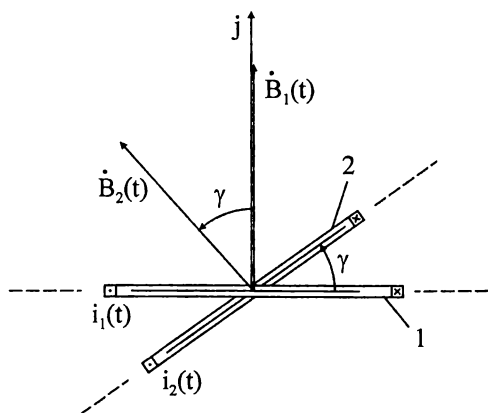
Когато проводящо тяло е разположено симетрично спрямо направлението на полето, пулсиращото магнитно поле не поражда двигателен момент. При въртенето на съставните магнитни полета, които имат еднакви амплитуди, еднаква ъглова скорост на въртене и противоположни посоки, те взаимодействат с индукираното в тялото електрическо поле. Пораждат се два двигателни момента с еднаква големина и противоположни посоки, които взаимно се компенсират. Двигателен момент може да упражни само система от две или повече пулсиращи полета.

9.3.2. Въртящо се кръгово магнитно поле на двуфазна токова система

Електротехническите устройства с въртящо магнитно поле работят ефективно, когато полето е кръгово. Тук се изследват условията, при които се получава такова поле с двуфазна токова система.

Постановка на задачата. Предполага се, че намотките 1 и 2 имат напречно сечение, еквивалентно на сечението на единичен контур (фиг. 9.18). През тях протичат токовете $i_1(t) = i_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$ и $i_2(t) = i_{2m} \sin(\omega t + \psi_2)$.

Намотките, чиито равнини сключват ъгъл γ , са разположени във въздух и възбуждат магнитните полета $B_1(t) = B_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$ и $B_2(t) = B_{2m} \sin(\omega t + \psi_2)$. Да се определят условията за получаване на въртящо се кръгово магнитно поле, като се установят: а) връзката между амплитудите на двете магнитни полета B_{1m} и B_{2m} (респ. на двата тока i_{1m} и i_{2m}); б) връзката между началните им фази ψ_2 и ψ_1 ; в) стойността на пространствения ъгъл γ . г) Да се определят амплитудата и ъгловата скорост на полученото дясно въртящо се кръгово магнитно поле.



Фиг. 9.18

векторен образ на пулсиращо по имагинерната ос магнитно поле и неговото разлагане е вече известно. След умножение с $e^{j\gamma}$ този образ се завърта на ъгъл γ до достигане на реалното си положение в пространството. Резултантната магнитна индукция $\dot{B}_p(t)$ е векторна сума от магнитните полета на двете намотки

$$\dot{B}_p(t) = \dot{B}_1(t) + \dot{B}_2(t), \quad (9.20)$$

$$B_p(t) = \frac{B_{1m}}{2} e^{j(\omega t + \psi_1)} + \frac{B_{1m}}{2} e^{j[\pi - (\omega t + \psi_1)]} + \left[\frac{B_{2m}}{2} e^{j(\omega t + \psi_2)} + \frac{B_{2m}}{2} e^{j[\pi - (\omega t + \psi_2)]} \right] e^{j\gamma}. \quad (9.21)$$

Като се знае посоката на въртене на съставните полета за $\dot{B}_p(t)$, се получава:

$$\dot{B}_p(t) = \dot{B}_{pi}(t) + \dot{B}_{pd}(t). \quad (9.22)$$

Анализ. Счита се, че векторите на възбудените магнитни полета лежат в комплексната равнина. Намотката 1 е разположена така, че нейното магнитно поле е ориентирано по имагинерната ос, т.е.

$$\dot{B}_1(t) = j B_{1m} \sin(\omega t + \psi_1).$$

Равнините, респ. осите на двете намотки сключват ъгъл γ . Използват се изводите от т. 9.3.1. За целта векторният образ на второто магнитно поле се записва във вида:

$$\dot{B}_2(t) = [j B_{2m} \sin(\omega t + \psi_2)] e^{j\gamma}.$$

Така комплексът в средните скоби е с

Елементите на резултантното ляво въртящо се поле $\dot{B}_{pi}(t)$ имат ъглова скорост ω , а тези на резултантното дясно въртящо се поле $\dot{B}_{pd}(t)$ – ъглова скорост $(-\omega)$. Общото условие за получаване на дясно въртящо се кръгово магнитно поле е:

$$\dot{B}_{pi}(t) = \frac{B_{1m}}{2} e^{j(\omega t + \psi_1)} + \frac{B_{2m}}{2} e^{j(\omega t + \psi_2)} \cdot e^{j\gamma} = 0. \quad (9.23)$$

а) За да се удовлетвори (9.23), първото най-просто изискване е съставните магнитни полета да имат равни амплитуди: $B_{1m} = B_{2m} = B_m$. Това условие се замества в (9.23) и полученият израз се разделя с $e^{j(\omega t + \psi_1)}$. Получава се $1 + e^{j(\psi_2 - \psi_1)} \cdot e^{j\gamma} = 0$ или $e^{j[(\psi_2 - \psi_1) + \gamma]} = -1 = 1 \cdot e^{j\pi}$, откъдето следва ограничението $(\psi_2 - \psi_1) + \gamma = \pi$.

б), в) Това ограничение се реализира и се контролира лесно във варианта

$$(\psi_2 - \psi_1) = \gamma = \pi/2. \quad (9.24)$$

г) След като се анулира ляво въртящото се, в пространството на намотките остава да действа дясно въртящото се кръгово магнитно поле. Амплитудата и ъгловата му скорост се получават, като в (9.21) се заместят изведените по-горе условия. Или

$$\dot{B}_{pd}(t) = \frac{B_m}{2} e^{j[\pi - (\omega t + \psi_1)]} [1 + e^{-j[(\psi_2 - \psi_1) - \gamma]}] = B_m e^{j[\pi - (\omega t + \psi_1)]}. \quad (9.25)$$

Изводи:

Условията за получаване на дясно въртящо се кръгово магнитно поле при действието на двуфазна токова система са:

- Еднакви амплитудни стойности на токовете в двете намотки, които пораждат еднакви амплитудни стойности на съответните пулсиращи магнитни полета;

- Положителната нормала на едната намотка сключва с тази на другата намотка пространствен ъгъл $+\pi/2$;

- Токът в първата намотка изпреварва във времето тока на другата намотка с $+\pi/2$;

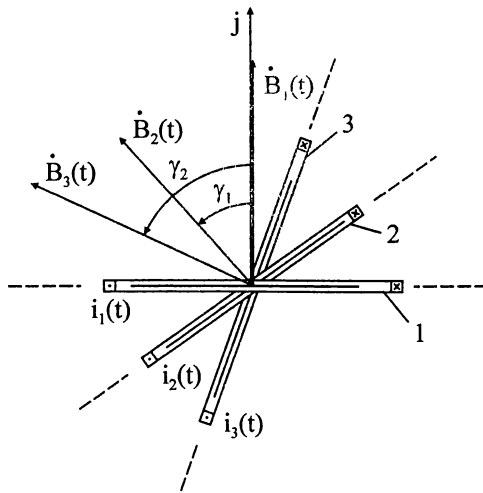
Ако едно от горните три условия не се изпълнява, резултантното поле е елиптично $\omega = \omega(t)$.

9.3.3. Въртящо се кръгово магнитно поле на трифазна токова система

На този вид магнитно поле се основава действието на асинхронните и синхронните електрически машини с общо предназначение. Тук се изследват

условията за получаването на кръгово магнитно поле при трифазна токова система.

Постановка на задачата. Всяка от намотките 1, 2 и 3 има напречно сечение, еквивалентно на сечението на единичен контур (фиг. 9.19). През намотките, разположени във въздух, протичат токовете $i_1(t) = i_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$, $i_2(t) = i_{2m} \sin(\omega t + \psi_2)$ и $i_3(t) = i_{3m} \sin(\omega t + \psi_3)$. Възбудените магнитни полета са $B_1(t) = B_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$, $B_2(t) = B_{2m} \sin(\omega t + \psi_2)$ и $B_3(t) = B_{3m} \sin(\omega t + \psi_3)$. Равнината на втората намотка сключва ъгъл γ_1 , а равнината на третата – ъгъл γ_2 с равнината на първата намотка. Да се определят условията, при които се получава кръгово дясно въртящо се магнитно поле. Изследването налага да се установят: а) връзката между амплитудите на трите съставни полета B_{1m} , B_{2m} и B_{3m} (респ. на трите тока i_{1m} , i_{2m} и i_{3m}); б) дефазиранието между тях $\psi_2 - \psi_1$ и $\psi_3 - \psi_1$; в) пространствените ъгли γ_1 и γ_2 ; г) амплитудата и ъгловата скорост на полученото дясно въртящо се кръгово магнитно поле.



Фиг. 9.19

Анализ. а) Векторите на възбудените магнитни полета се разглеждат в комплексната равнина. Намотката 1 е разположена така, че нейното магнитно поле е ориентирано по имажинерната ос

$$\dot{B}_1(t) = j B_{1m} \sin(\omega t + \psi_1).$$

Посоката на всеки ток и посоката на положителната нормала към равнината на намотката са свързани по правилото на десния винт. Използват се резултатите от разлагането на пулсиращо магнитно поле, ориентирано по имажинерната ос (т. 9.3.1). За целта векторният образ на второто магнитно поле се представя във вида

$$\dot{B}_2(t) = [j B_{2m} \sin(\omega t + \psi_2)] e^{j\gamma_1}.$$

Изразът в средните скоби има векторен образ на пулсиращо по имажинерната ос магнитно поле. След умножение с $e^{j\gamma_1}$ векторният образ се завърта допълнително на ъгъл γ_1 спрямо оста j и достига реалното си положение $\dot{B}_2(t)$ в пространството. Аналогично се процедура и с комплекса на третото векторно поле, т.е. за него също се записва $\dot{B}_3(t) = [j B_{3m} \sin(\omega t + \psi_3)] e^{j\gamma_2}$. Резултантното магнитно поле $\dot{B}_p(t)$ е векторна сума от въртящите се съставки на трите пулсиращи полета

$$\dot{B}_p(t) = \dot{B}_1(t) + \dot{B}_2(t) + \dot{B}_3(t), \quad (9.26)$$

$$\begin{aligned} \dot{B}_p(t) = & \frac{B_{1m}}{2} e^{j(\omega t + \psi_1)} + \frac{B_{1m}}{2} e^{j[\pi - (\omega t + \psi_1)]} + \left[\frac{B_{2m}}{2} e^{j(\omega t + \psi_2)} + \frac{B_{2m}}{2} e^{j[\pi - (\omega t + \psi_2)]} \right] e^{j\gamma_1} + \\ & + \left[\frac{B_{3m}}{2} e^{j(\omega t + \psi_3)} + \frac{B_{3m}}{2} e^{j[\pi - (\omega t + \psi_3)]} \right] e^{j\gamma_2}. \end{aligned} \quad (9.27)$$

И тук $\dot{B}_p(t)$ е векторна сума от резултатни ляво и дясно въртящи се полета

$$\dot{B}_p(t) = \dot{B}_{pi}(t) + \dot{B}_{pd}(t). \quad (9.28)$$

Елементите на резултатното ляво въртящо се поле $\dot{B}_{pi}(t)$ са с ъглова скорост ω , а тези на дясно въртящото се поле $\dot{B}_{pd}(t)$ – с ъглова скорост $(-\omega)$. Условието за получаване на резултатно дясно въртящо се поле налага резултатното ляво въртящо се поле да се анулира. Или

$$\dot{B}_{pi}(t) = \frac{B_{1m}}{2} e^{j(\omega t + \psi_1)} + \frac{B_{2m}}{2} e^{j(\omega t + \psi_2)} \cdot e^{j\gamma_1} + \frac{B_{3m}}{2} e^{j(\omega t + \psi_3)} \cdot e^{j\gamma_2} = 0. \quad (9.29)$$

Първото най-просто изискване към (9.29) е равенство на амплитудите:

$$B_{1m} = B_{2m} = B_{3m} = B_m. \quad (9.30)$$

б), в) Зависимостите от (9.30) се отразяват в (9.29) и изразът се разделя с $e^{j(\omega t + \psi_1)}$. Получава се:

$$1 + e^{j(\psi_2 - \psi_1)} \cdot e^{j\gamma_1} + e^{j(\psi_3 - \psi_1)} \cdot e^{j\gamma_2} = 1 + e^{j[(\psi_2 - \psi_1) + \gamma_1]} + e^{j[(\psi_3 - \psi_1) + \gamma_2]} = 0. \quad (9.31)$$

Последното равенство е аналог на уравнението $1 + a + a^2 = 0$, ползвано за анализ в трифазните вериги. След приравняване на съответните членове се получава:

$$e^{j[(\psi_2 - \psi_1) + \gamma_1]} = a = 1e^{j2\pi/3} = 1e^{-j2.2\pi/3}, \quad (9.32)$$

$$e^{j[(\psi_3 - \psi_1) + \gamma_2]} = a^2 = 1e^{j2.2\pi/3}. \quad (9.33)$$

Най-просто условията (9.32) и (9.33) се удовлетворяват и контролират, ако за дефазирането и за съответните пространствени ъгли се изберат стойности, предполагащи пълна симетрия:

$$\psi_2 - \psi_1 = -2\pi/3 \quad \text{и} \quad \gamma_1 = -2\pi/3, \quad (9.34)$$

$$\psi_3 - \psi_1 = 2\pi/3 \quad \text{и} \quad \gamma_2 = 2\pi/3. \quad (9.35)$$

г) Така в пространството на намотките остава да действа резултантното дясно въртящо се поле. Амплитудата и ъгловата му скорост се определят от (9.27) след анулирането на $\dot{B}_{pi}(t)$

$$\dot{B}_p(t) = \dot{B}_{pd}(t) = \frac{B_m}{2} e^{j[\pi - (\omega t + \psi_1)]} [1 + e^{-j[(\psi_2 - \psi_1) - \gamma_1]} + e^{-j[(\psi_3 - \psi_1) - \gamma_2]}]$$

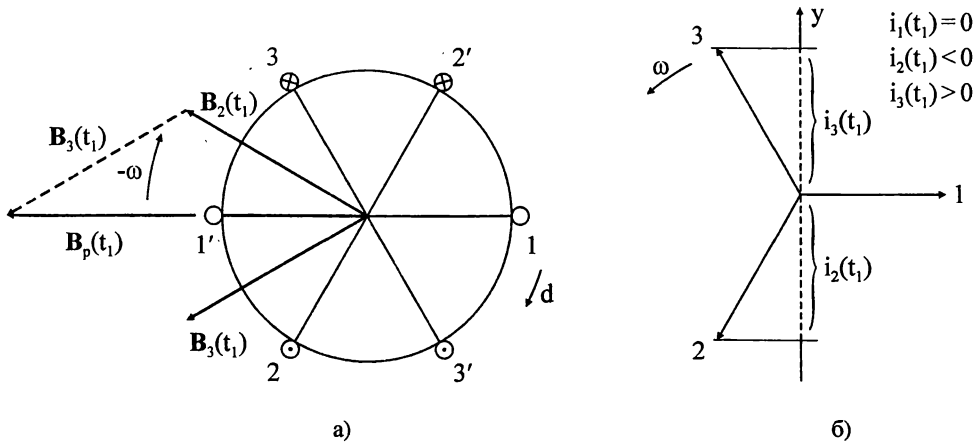
и като се имат пред вид (9.34) и (9.35), окончателно се получава

$$\dot{B}_p(t) = \dot{B}_{pd}(t) = \frac{B_m}{2} e^{j[\pi - (\omega t + \psi_1)]} (1 + 1 + 1) = \frac{3}{2} B_m e^{j[\pi - (\omega t + \psi_1)]}. \quad (9.36)$$

Резултатът показва, че въртящото се магнитно поле е кръгово с амплитуда $3B_m/2$ и ъглова скорост $(-\omega)$. Илюстрацията за създаването на такова магнитно поле от три концентрирани фазни намотки 11', 22' и 33' е дадена на фиг. 9.20а. В момента $t_1 = 0$ съответните токове в намотките са:

$$i_1(t) = i_m \sin \omega t_1 = 0, \quad i_2(t) = i_m \sin(\omega t_1 - 2\pi/3) = -i_m \sin(2\pi/3) \text{ и} \\ i_3(t) = i_m \sin(\omega t_1 + 2\pi/3) = i_m \sin(2\pi/3).$$

Техните векторни образи са начертани в динамичната векторна диаграма на фиг. 9.20б. В диаграмата с прекъснати линии са изобразени големините на моментните стойности на синусоидалните величини като проекции на съответните векторни образи върху ординатната ос (т. 1.5.2). Моментното състояние на токовете, магнитните полета на намотките, както и резултантното магнитно поле, са показани на фиг. 9.20а. Може да се проследи, че с нарастване на времето t звездата на токовете се завърта обратно, а резултантното магнитно поле – съпосочно с посоката на въртене на часовниковата стрелка.



Фиг. 9.20

Изводи:

Условията за получаване на дясно въртящо се кръгово магнитно поле при трифазна токова система са следните:

– Еднакви амплитудни стойности B_m на създадените от възбудителните намотки пулсиращи магнитни полета, т.е. еднакви амплитудни стойности на токовете в трите намотки;

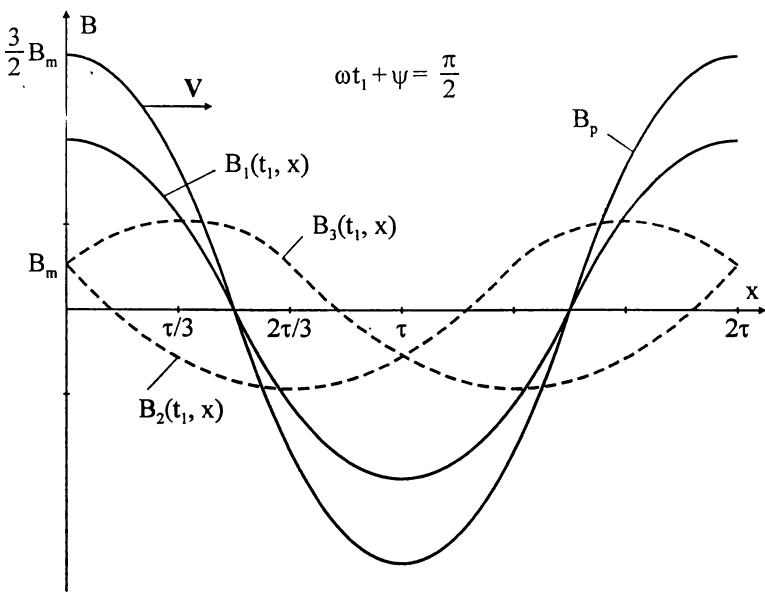
– Нека първата намотка с ток $i_1(t)$ се счита за основна. Спрямо нея положителната нормала на втората намотка е на пространствен ъгъл $(-2\pi/3)$, а положителната нормала на третата намотка – на ъгъл $2\pi/3$;

– Нека токът $i_1(t)$ в първата намотка е с нулева начална фаза. Спрямо него токът $i_2(t)$ във втората намотка е дефазизиран във времето на ъгъл $(-2\pi/3)$, а токът в третата намотка $i_3(t)$ – на ъгъл $2\pi/3$.

Ако едно от горните условия не се изпълнява, резултантното магнитно поле е елиптично. То е съставено както от дясно, така и от ляво кръгово въртящи се полета. Голямата полуос на елипсата се получава, когато посоките на двете въртящи се полета съвпадат, а малката – когато те са противоположни. Векторният образ на резултантното елиптично поле се върти с променлива ъглова скорост $\omega = \omega(t)$. Съществуването на ляво въртящо се кръгово магнитно поле води до възникването на паразитни моменти и до увеличаване на загубите в електрическите машини.

9.3.4. Бягащо магнитно поле на линейно разпределена намотка

Постановка на задачата. Предполага се, че трите фазни намотки са разположени в една равнина, така че токовете в тях $i_1(t) = i_m \sin(\omega t + \psi)$, $i_2(t) = i_m \sin(\omega t + \psi - 2\pi/3)$ и $i_3(t) = i_m \sin(\omega t + \psi + 2\pi/3)$ са ориентирани перпендикулярно на линейна координата x от равнината. Разглежда се двуполусна електромагнитна система с междуполусно разстояние τ по координатата x . Освен това, възбудителните токове и генерираните от тях магнитни полета имат по x синусоидално разпределение. Изпълнени са условията за получаване на въртящо се кръгово поле от трифазна токова система, но пространствените ъгли между положителните нормали на намотките са заменени от пространствено изместване по x на осите на намотките на разстояние $x = -2\tau/3$ и $x = 2\tau/3$, съответно за втора и трета фаза. Едно моментно състояние ($t = t_1$ при $\omega t_1 + \psi = \pi/2$) на трите магнитни полета $B_1(t_1, x)$, $B_2(t_1, x)$ и $B_3(t_1, x)$ е показано на фиг. 9.21. Да се провери, че полученото резултантно магнитно поле е бягащо по x и да се определят амплитудата и линейната скорост на това поле.



Фиг. 9.21

Анализ. При формулираните условия пулсиращите магнитни полета на трите фазни намотки ще бъдат:

$$B_1(t, x) = B_m \sin(\omega t + \psi) \cdot \cos \pi x / \tau,$$

$$B_2(t, x) = B_m \sin(\omega t + \psi - 2\pi/3) \cdot \cos(\pi x / \tau - 2\pi/3) \quad \text{и}$$

$$B_3(t, x) = B_m \sin(\omega t + \psi + 2\pi/3) \cdot \cos(\pi x / \tau + 2\pi/3).$$

Моментната стойност на резултантното поле се представя от сумата

$$\begin{aligned} B_p(t, x) = B_1(t, x) + B_2(t, x) + B_3(t, x) = & \frac{B_m}{2} \left[\sin\left(\omega t + \psi - \frac{\pi x}{\tau}\right) + \right. \\ & \left. + \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi x}{\tau}\right) \right] + \frac{B_m}{2} \left[\sin\left(\omega t + \psi - \frac{\pi x}{\tau}\right) + \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi x}{\tau} - \frac{2.2\pi}{3}\right) \right] + \\ & + \frac{B_m}{2} \left[\sin\left(\omega t + \psi - \frac{\pi x}{\tau}\right) + \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi x}{\tau} + \frac{2.2\pi}{3}\right) \right] \end{aligned}$$

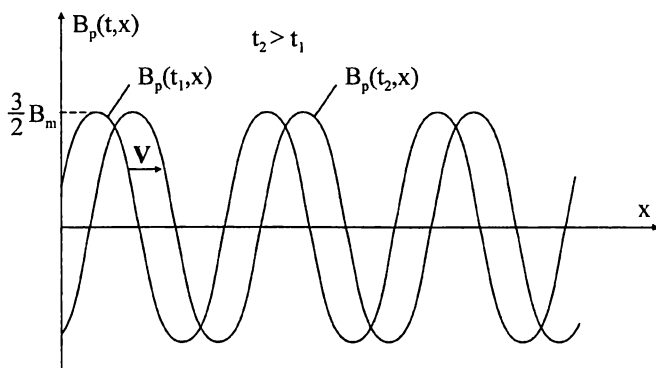
Три члена в горния израз образуват симетрична трифазна система и тяхната сума е нула, т.е.

$$\begin{aligned} & \frac{B_m}{2} \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi x}{\tau}\right) + \frac{B_m}{2} \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi x}{\tau} - \frac{2.2\pi}{3}\right) + \\ & + \frac{B_m}{2} \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi x}{\tau} + \frac{2.2\pi}{3}\right) = 0 \end{aligned}$$

Останалите събираеми образуват резултантното поле с моментна стойност

$$B_p(t, x) = \frac{3B_m}{2} \sin\left(\omega t + \psi - \frac{\pi x}{\tau}\right) \quad (9.37)$$

и амплитуда $3B_m/2$, еднаква с амплитудата на въртящото се кръгово магнитно поле. Резултантното поле достига положителната си амплитуда при аргумент $\theta = \omega t + \psi - \pi x/\tau = \pi/2$. Тъй като това е точка с $d\theta/dt = \omega - \frac{\pi}{\tau} \frac{dx}{dt} = 0$ следва, че амплитудата се премества в посока на растящите стойности на x при нарастване на времето t с линейна скорост $v = dx/dt = \omega\tau/\pi = 2\tau/T$. За двата момента t_1 и $t_2 > t_1$ графиката на движещото се по x поле $B_p(t, x)$ е показана на фиг. 9.22



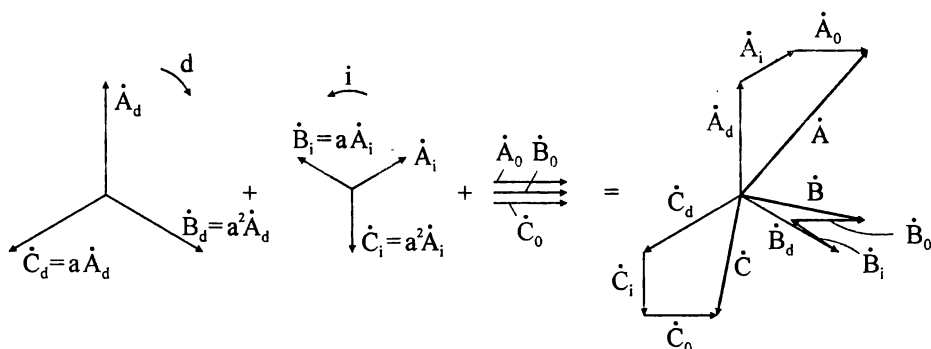
Фиг. 9.22

9.4. МЕТОД СЪС СИМЕТРИЧНИТЕ СЪСТАВКИ

Всяка несиметрична трифазна система от величини може да се разложи на сума от три симетрични трифазни подсистеми: с директна (d), индиректна (i) и нулева (0) последователност на фазите. Елементите на тези подсистеми се наричат симетрични съставки на несиметричната трифазна система. Нека комплексите на трите фазни величини за първа, втора и трета фаза на несиметричната система са съответно $\dot{A}, \dot{B}, \dot{C}$. Връзката между комплексите на всяка от фазните величини и техните симетрични съставки се представя с уравненията

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \dot{A}_0 + \dot{A}_d + \dot{A}_i, \\ \dot{B} &= \dot{B}_0 + \dot{B}_d + \dot{B}_i, \\ \dot{C} &= \dot{C}_0 + \dot{C}_d + \dot{C}_i. \end{aligned} \quad (9.38)$$

В сила е и обратното твърдение, съгласно което сумата от съставките на трите симетрични подсистеми образуват несиметрична трифазна система (фиг. 9.23).



Фиг. 9.23

На пръв поглед неизвестните в системата (9.38) са 9 на брой. Като се използват обаче връзките между комплексите на симетричните трифазни системи (фиг. 9.1, система (9.1)), към които спадат симетричните подсистеми с директна, индиректна и нулева последователност на фазите, неизвестните се редуцират само на 3 величини: \dot{A}_d , \dot{A}_i и \dot{A}_0 .

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \dot{A}_0 + \dot{A}_d + \dot{A}_i, \\ \dot{B} &= \dot{A}_0 + a^2 \dot{A}_d + a \dot{A}_i, \\ \dot{C} &= \dot{A}_0 + a \dot{A}_d + a^2 \dot{A}_i. \end{aligned} \quad (9.39)$$

Следователно, ако са известни комплексите \dot{A} , \dot{B} и \dot{C} на трите фазни величини на несиметричната трифазна система, от решението на (9.39) се получават \dot{A}_0 , \dot{A}_d и \dot{A}_i . За целта се използват свойствата на оператора a : $1 + a^2 + a = 0$, $a^3 = 1$ и $a^4 = a$. Най-напред всяко от трите уравнения се умножава с множител, който допълва до трета степен на a пред търсената симетрична съставка. След това уравненията почленно се сумират, в резултат на което се получават изразите

$$\dot{A}_0 = \frac{1}{3}(\dot{A} + \dot{B} + \dot{C}), \quad \dot{A}_d = \frac{1}{3}(\dot{A} + a\dot{B} + a^2\dot{C}) \quad \text{и} \quad \dot{A}_i = \frac{1}{3}(\dot{A} + a^2\dot{B} + a\dot{C}). \quad (9.40)$$

9.4.1. Свойства на несиметричните трифазни вериги спрямо симетричните съставки

Част от свойствата се илюстрират по-долу с четири примера.

Пример 9.2. Да се докаже, че токът \dot{I}_N в неутралния проводник на трифазна четирипроводна верига се определя от съставката с нулева последователност \dot{I}_0 на системата линейни токове \dot{I}_1 , \dot{I}_2 и \dot{I}_3 .

Решение. Тази съставка се определя по (9.40): $\dot{I}_0 = \frac{1}{3}(\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3)$ и тъй като за неутралната точка се изпълнява $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = \dot{I}_N$, следва, че $\dot{I}_N = 3\dot{I}_0$.

Пример 9.3. Да се докаже, че в трифазна трипроводна верига системата линейни токове \dot{I}_1 , \dot{I}_2 и \dot{I}_3 не съдържа съставка с нулева последователност \dot{I}_0 .

Решение. За неутралната точка на трифазната трипроводна верига (счита се, че консуматорът е свързан в звезда) се записва $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0$, откъдето се получава $\dot{I}_0 = \frac{1}{3}(\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3) = 0$.

Пример 9.4. Да се докаже, че несиметричната система линейни напрежения \dot{U}_{12} , \dot{U}_{23} и \dot{U}_{31} не съдържа съставка с нулева последователност \dot{U}_0 .

Решение. Съгласно (9.5) винаги е в сила равенството $\dot{U}_{12} + \dot{U}_{23} + \dot{U}_{31} = 0$, откъдето се достига до $\dot{U}_0 = (\dot{U}_{12} + \dot{U}_{23} + \dot{U}_{31})/3 = 0$.

Пример 9.5. Да се определи връзката между съставките на линейното и фазното напрежение. а) за подсистемата с директна последователност. б) за подсистемата с индиректна последователност.

Решение. а) Като се има предвид звездата на линейните напрежения (фиг. 9.6а) и (9.40), за директната съставка на линейните напрежения се записва:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{nd} &= (\dot{U}_{12} + a\dot{U}_{23} + a^2\dot{U}_{31})/3 = [(1-a^2)\dot{U}_1 + (a-1)\dot{U}_2 + (a^2-a)\dot{U}_3]/3 = \\ &= (1-a^2)(\dot{U}_1 + a\dot{U}_2 + a^2\dot{U}_3)/3 = (1-a^2)\dot{U}_{fd},\end{aligned}$$

откъдето за ефективните стойности се получава $U_{nd} = |1-a^2|U_{fd} = \sqrt{3}U_{fd}$.

б) Аналогично се доказват и съотношенията за другата подсистема:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{ni} &= (\dot{U}_{12} + a^2\dot{U}_{23} + a\dot{U}_{31})/3 = [(1-a)\dot{U}_1 + (a^2-1)\dot{U}_2 + (a-a^2)\dot{U}_3]/3 = \\ &= (1-a)(\dot{U}_1 + a^2\dot{U}_2 + a\dot{U}_3)/3 = (1-a)\dot{U}_{fi}\end{aligned}$$

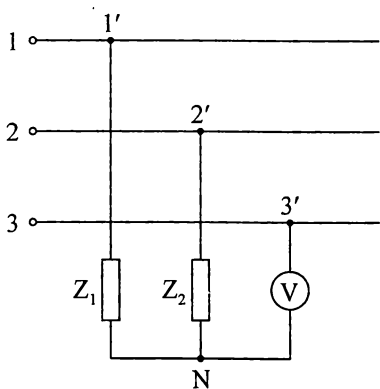
и $U_{ni} = |1-a|U_{fi} = \sqrt{3}U_{fi}$.

9.4.2. Филтри за симетрични съставки

Симетричните съставки може да бъдат не само изчислени, но и измерени с помощта на електрически измервателни схеми, наречени *филтри за симетрични съставки*. Те се прилагат широко в релейната защита на електроенер-

гйните вериги. Като илюстрация се разглежда филтър за измерване на директната и на индиректната съставка на системата линейни напрежения.

Постановка на задачата. Електрическата схема на филтъра е показана на фиг. 9.24. а) Да се определи връзката между комплексните съпротивления Z_1 и Z_2 , както и между техните параметри, така че показанието на волтметъра да бъде пропорционално на съставката с директна последователност на системата линейни напрежения; б) Да се реши задачата така, че измерваното напрежение да бъде пропорционално на индиректната съставка на системата линейни напрежения.



Фиг. 9.24

Или

$$\dot{U}_{3N} = \frac{\dot{U}_{nd}(a^2 Y_1 - Y_2) + \dot{U}_{ni}(a Y_1 - Y_2)}{Y_1 + Y_2}.$$

Показанието на волтметъра ще бъде пропорционално на U_{nd} , ако $aY_1 - Y_2 = 0$ или съответно $Z_1 = aZ_2$. Последното равенство е еквивалентно на уравнение за модулите $z_1 = z_2 = z$ и за аргументите $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi/3$. Уточнява се геометричното място на върховете на Z_1 и Z_2 (фиг. 9.25а) и се определят съотношенията между техните параметри в комплексната равнина. Тъй като $R \geq 0$, граничните положения на върха Z_2 са фиксирани от точките 1 и 2. На тях отговарят граничните точки на върха Z_1 – съответно 1' и 2'. При уточняването на параметрите се задават z и φ_2 в дефинираните граници $-\pi/2 \leq \varphi_2 \leq -\pi/6$. Параметрите на Z_2 се определят от зависимостите в триъгълника на съпротивленията (фиг. 1.41б): $R_2 = z \cos \varphi_2$ и $X_2 = z \sin \varphi_2$. От своя страна параметрите на Z_1 се намират, като се използва връзката между аргументите

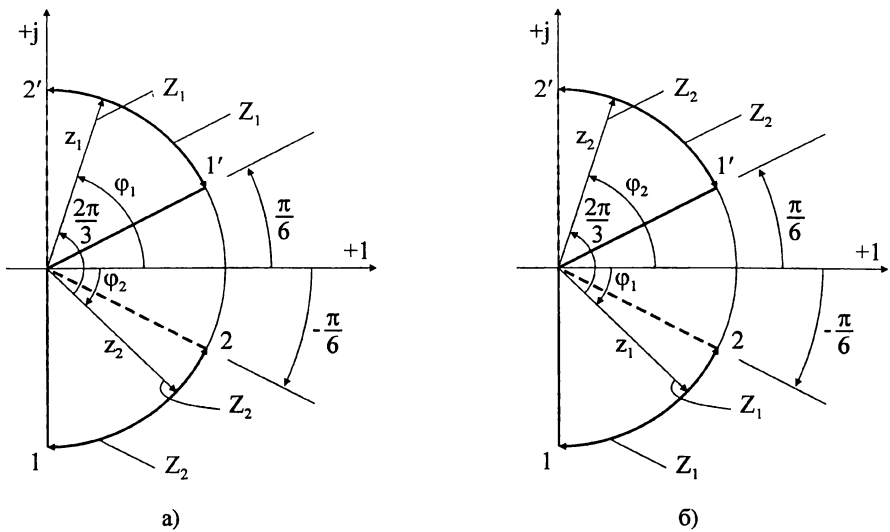
Анализ. Измерваното фазно напрежение се определя по формула (9.16), в която се отчита, че поради наличието на волтметър фазната проводимост $Y_3 = 0$

$$\dot{U}_{3N} = \frac{\dot{U}_{31}Y_1 + \dot{U}_{32}Y_2}{Y_1 + Y_2}.$$

Тъй като системата линейни напрежения няма съставка с нулева последователност и като се имат предвид както фиг. 9.6а, така и разлагането (9.39), в горното уравнение двете линейни напрежения се представят с изразите $\dot{U}_{31} = a^2 \dot{U}_{nd} + a \dot{U}_{ni}$ и $\dot{U}_{32} = -\dot{U}_{23} = -\dot{U}_{nd} - \dot{U}_{ni}$

$$R_1 = z \cos(\varphi_2 + 2\pi/3) = -0.5(R_2 + \sqrt{3}X_2) \text{ и}$$

$$X_1 = z \sin(\varphi_2 + 2\pi/3) = 0.5(-X_2 + \sqrt{3}R_2).$$



Фиг. 9.25

б) Показанието на волтметъра е пропорционално на U_{li} , ако $a^2 Y_1 - Y_2 = 0$, $a^2 Z_2 = Z_1$ или съответно $Z_2 = aZ_1$. Последното равенство се разлага на уравнение спрямо модулите $z_1 = z_2 = z$ и аргументите $\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi/3$. Получава се същото разположение, както на фиг. 9.25а, с единствената разлика, че върховете на Z_1 и Z_2 (фиг. 9.25б) сменят местата си. Граничните положения на върха Z_1 са фиксирани от точките 1 и 2. На тях отговарят граничните точки $1'$ и $2'$ за върха Z_2 . Задават се z и φ_1 в дефинираните граници $-\pi/2 \leq \varphi_1 \leq -\pi/6$. Параметрите на Z_1 и Z_2 се определят по формулите:

$$R_1 = z \cos \varphi_1, \quad X_1 = z \sin \varphi_1, \quad R_2 = z \cos(\varphi_1 + 2\pi/3) = -0.5(R_1 + \sqrt{3}X_1) \text{ и}$$

$$X_2 = z \sin(\varphi_1 + 2\pi/3) = 0.5(-X_1 + \sqrt{3}R_1).$$

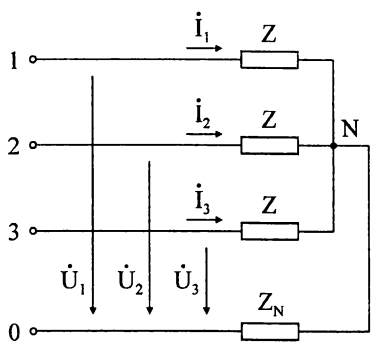
9.4.3. Съпротивления на трифазните вериги за токовете от симетричните токови подсистеми

Методът със симетричните съставки може да се използва за анализ на несиметрични режими в линейни трифазни вериги. Той има предимство, когато се решава симетрична верига с несиметрична система захранващи напрежения. Анализът на несиметричния режим се свежда до решаването на три задачи със симетричен режим в разглежданата трифазна верига, което е значително по-просто. Методът има определено предимство и при трифазни вериги, в

които съпротивленията на веригата са различни за трифазните токови подсистеми с различна последователност на фазите. Това е случаят, когато трифазната верига включва въртящи се електрически машини – генератори или двигатели.

А. Съпротивления на симетричните трифазни вериги за токовете от симетричните токови подсистеми при статичен товар

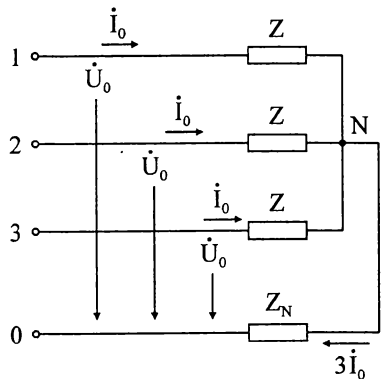
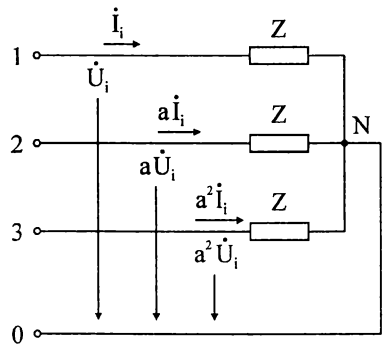
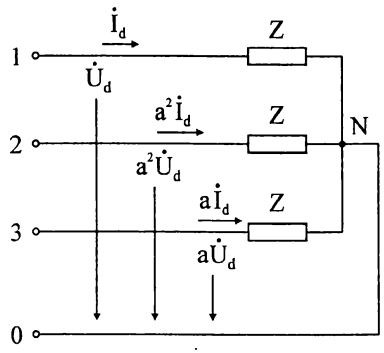
Постановка на задачата. Дадена е симетрична трифазна четирипроводна верига (фиг. 9.26), захранвана от несиметричната система от фазни напрежения \dot{U}_1, \dot{U}_2 и \dot{U}_3 . Да се определят съпротивленията на веригата за токовете от трите симетрични токови подсистеми.



Фиг. 9.26

Използва се принципът с наслагането. Трифазната верига се решава при поединичното действие на всяка от трите симетрични подсистеми на системата фазни напрежения. На фиг. 9.27а е показана веригата при въздействието на симетричната подсистема с директна последователност на фазите, а на фиг. 9.27б – с индиректна последователност, а на фиг. 9.27в – с нулева последователност на фазите.

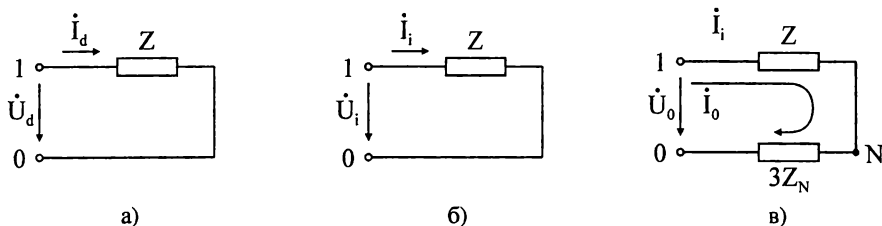
Анализ. Използва се принципът с наслагането. Трифазната верига се решава при поединичното действие на всяка от трите симетрични подсистеми на системата фазни напрежения. На фиг. 9.27а е показана веригата при въздействието на симетричната подсистема с директна последователност на фазите, а на фиг. 9.27б – с индиректна последователност, а на фиг. 9.27в – с нулева последователност на фазите.



Фиг. 9.27 а,б,в

Първите две вериги работят при симетричен режим, поради което $\dot{U}_{NO} = 0$. Решават се съответните еквивалентни схеми за първа фаза на веригата и тока на съответната токова подсистема. Токът \dot{I}_d се определя от схемата на фиг. 9.28а, а \dot{I}_i – от схемата на фиг. 9.28б. В трите фази на трифазния консуматор от фиг. 9.27в протичат токовете на системата с нулева последователност \dot{I}_0 , така че токът в неутралния проводник ще бъде $\dot{I}_N = 3\dot{I}_0$. За да се оформи едноконтурна верига за \dot{I}_0 (фиг. 9.28в), в участъка \overline{NO} следва да се моделира реално съществуващият напрежителен пад

$$\dot{U}_{NO} = \dot{I}_N Z_N = 3\dot{I}_0 Z_N = \dot{I}_0 (3Z_N).$$



Фиг. 9.28

От фиг. 9.27 и от заместващите схеми на фиг. 9.28 става ясно, че съпротивленията на веригата за токовете подсистеми с директна, индиректна и нулева последователност на фазите са съответно:

$$Z_d = \frac{\dot{U}_d}{\dot{I}_d} = Z, \quad Z_i = \frac{\dot{U}_i}{\dot{I}_i} = Z \quad \text{и} \quad Z_0 = \frac{\dot{U}_0}{\dot{I}_0} = Z + 3Z_N. \quad (9.41)$$

Б. Съпротивления на трифазните вериги при динамичен товар за токовете от симетричните токови подсистеми

В електрическите машини, които представляват трифазни вериги с динамичен товар, поради наличието на въртящо се магнитно поле съпротивленията за токовете подсистеми с различна последователност са различни: $Z_0 \neq Z_d \neq Z_i$. Тази особеност може да се провери например в един асинхронен двигател. При нормален работен режим към трифазната възбудителна намотка на двигателя е приложена симетрична система напрежения с директна последователност на фазите. Тя създава дясно въртящо се кръгово магнитно поле, което увелича подвижния ротор на двигателя. Магнитното поле и роторът се въртят едноточно, като номиналната честотата на въртене на ротора $n_{\prime\prime}$ е 1,5–4% по-малка от тази на магнитното поле n_s . Такава е и относителната скорост на въртене на магнитното поле спрямо ротора 1,5–4% n_s . Ако към същата трифазна намотка се приложи симетрична система напрежения с индиректна

последователност на фазите, но с помощта на външен двигател, роторът се върти принудително с номиналната честота на въртене n_n в своята нормална посока, относителната честота на въртене на възбуденото въртящо поле спрямо ротора ще бъде приблизително $2n_s$. Причината за това е, че симетричната система напрежения с индиректна последователност на фазите създава ляво въртящо се кръгово магнитно поле. Поради голямата относителна честота на въртене на полето спрямо ротора, в него се индуцират токове с относително голяма стойност. Те противодействат на въртящото поле със собственото си магнитно поле. Намалелият резултантен поток индуцира по-малък напрежителен пад в неподвижната трифазна намотка. Тъй като захранващото напрежение е постоянно, токът в намотката нараства. Следователно при еднакви стойности на приложените симетрични напрежения с директна и с индиректна последователност, както и при неизменна честота n_n и посока на въртене на ротора, токът с обратна последователност по ефективна стойност е по-голям от този с директна последователност. Това показва, че пълното съпротивление на двигателя за токовете с обратна последователност на фазите е по-малко от това за токовете с директна последователност. Или

$$z_i < z_d. \quad (9.42)$$

Токовата подсистема с нулева последователност на фазите създава пулсиращо магнитно поле. При неизменна честота (обороти) n_n и нормална посока на въртене на ротора условията за токовете с нулева последователност са различни от тези за другите две токови подсистеми. Или в общия случай съпротивлението на двигателя за тази токова подсистема е различно от другите две, т.е.

$$Z_0 \neq Z_d \neq Z_i. \quad (9.43)$$

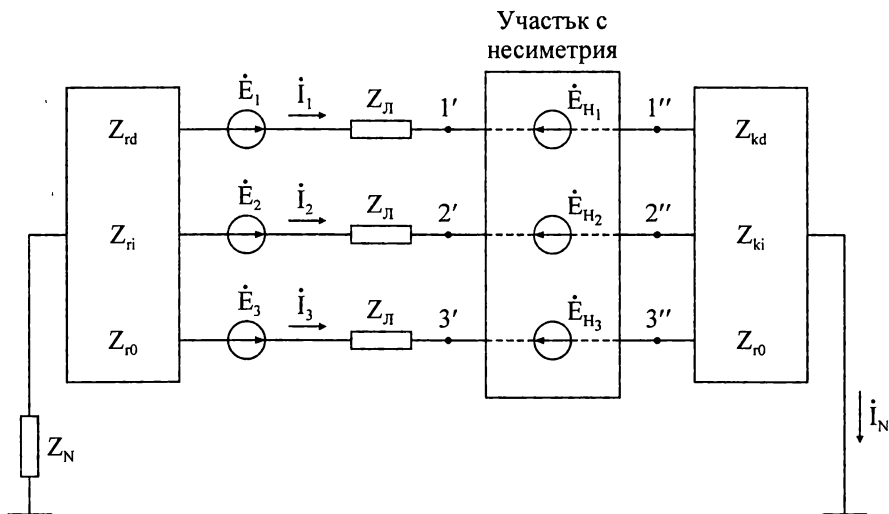
9.4.4. Анализ на аварийни режими по метода със симетричните съставки

При нормални условия на работа във високоволтовите трифазни вериги несиметричните режими се срещат твърде рядко. Те възникват предимно във вериги с дъгови електротопилни пещи или с еднофазни двигатели от електрическият транспорт. Най-често несиметрични режими се появяват при аварийна ситуация. Несиметрията бива *надлъжна* и *напречна*. *Надлъжната несиметрия се появява, когато в напречен отрез от дължината на линията всеки от линейните участъци включва различно съпротивление. Същото става и при прекъсване на един или два от линейните проводници. Напречната несиметрия се появява при включване на несиметричен товар.* Освен това тук се отнасят и различните видове къси съединения – *междофазно, между една фаза и земя, и между две фази и земя.*

Анализът се извършва, като по теоремата на компенсацията отрезът с несиметрия се заменя с трифазна несиметрична система от е.д.н. Системата от токове и несиметричната система от е.д.н. отразяват реалните условия на работа след възникването на аварийния режим. Тук се разглеждат общите принципи за анализ, като се привежда един конкретен пример.

А. Надлъжна несиметрия

Постановка на задачата. В трифазна верига със симетричен трифазен генератор $\dot{E}_1, \dot{E}_2 = a^2 \dot{E}_1, \dot{E}_3 = a \dot{E}_1$, съединен в звезда (фиг. 9.29), настъпва аварийен режим, който причинява надлъжна несиметрия. Известни са комплексните съпротивления на линейните участъци Z_L , на неутралния проводник Z_N , както и тези на генератора Z_{rd}, Z_{ri}, Z_{r0} и консуматора Z_{kd}, Z_{ki}, Z_{k0} за токовете подсистеми с различна последователност на фазите. Да се определят токовете в линията и напреженията $\dot{U}_{11'}$, $\dot{U}_{22'}$, $\dot{U}_{33'}$ в участъка с несиметрия.



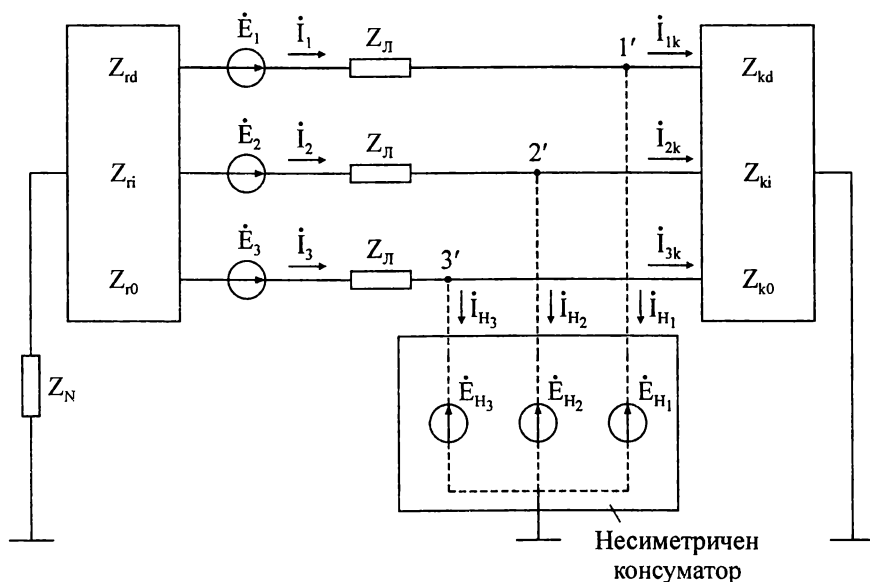
Фиг. 9.29

Анализ. За удобство в участъка с несиметрия се въвежда несиметричната система от е.д.н. $\dot{E}_{n1}, \dot{E}_{n2}$ и \dot{E}_{n3} . По теоремата за компенсацията $\dot{E}_{n1}, \dot{E}_{n2}$ и \dot{E}_{n3} заместват напреженията в участъка с несиметрия $\dot{U}_{11'} = \dot{E}_{n1}$, $\dot{U}_{22'} = \dot{E}_{n2}$ и $\dot{U}_{33'} = \dot{E}_{n3}$. След настъпване на аварията реалното състояние във веригата се отразява с равенствата: $\dot{I}_2 = 0$, $\dot{U}_{11'} = \dot{E}_{n1} = 0$, $\dot{U}_{33'} = \dot{E}_{n3} = 0$ – при прекъсване във фазата 2 и $\dot{I}_2 = 0$, $\dot{I}_3 = 0$ и $\dot{U}_{11'} = \dot{E}_{n1} = 0$ – при прекъсване във фазите 2 и 3. Несиметричната токова система и несиметричната система от е.д.н. се представят с техните симетрични съставки. При това състояние се появяват 9 неизвестни: 3 броя симетрични токови съставки; 3 броя симетрични съставки

на несиметричната система е.д.н; 2 неизвестни тока \dot{I}_1, \dot{I}_3 и напрежението $\dot{U}_{2'2'}$ (респ. токът \dot{I}_1 и напреженията $\dot{U}_{2'2'}$ и $\dot{U}_{3'3'}$ – за втория аварийен режим). Съставя се система от 9 уравнения. Тя включва: 3 уравнения от разлагането на несиметричната токова система; 3 уравнения от разлагането на несиметричната система от е.д.н. и 3 уравнения за всяка от симетричните токови съставки \dot{I}_d, \dot{I}_i и \dot{I}_0 . Последните зависимости се записват по втория закон на Кирхоф отделно за всяка съставка \dot{I}_d, \dot{I}_i и \dot{I}_0 по съответната еквивалентна схема за ед-на от фазите на веригата.

Б. Напречна несиметрия

Постановка на задачата. Приема се, че в трифазна верига със симетричен трифазен генератор, съединен в звезда (фиг. 9.30), настъпва аварийен режим с напречна несиметрия. Известни са е.д.н. $\dot{E}_1, \dot{E}_2 = a^2 \dot{E}_1$ и $\dot{E}_3 = a \dot{E}_1$, както и съпротивленията на линейните участъци $Z_{\text{л}}$, на неутралния проводник Z_N , генератора $Z_{\text{Гd}}, Z_{\text{Гi}}, Z_{\text{Г0}}$ и на консуматора $Z_{\text{kd}}, Z_{\text{ki}}, Z_{\text{k0}}$. Да се определят токовете $\dot{I}_{n1}, \dot{I}_{n2}$ и \dot{I}_{n3} и напреженията \dot{U}_1, \dot{U}_2 и \dot{U}_3 в участъка с несиметрия.

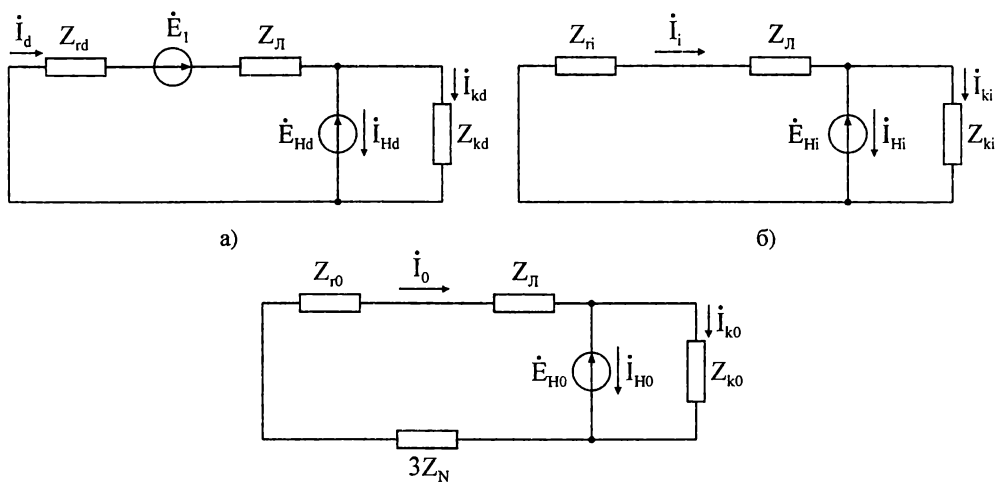


Фиг. 9.30

Анализ. За целта на мястото на аварийния участък се включва несиметричен консуматор, представен формално от несиметричната система е.д.н. $\dot{E}_{n1}, \dot{E}_{n2}$ и \dot{E}_{n3} . В участъка с несиметрия токовата и напрежителната система се разлагат на симетрични съставки. Първо се записва система от 6 уравнения с 12 неизвестни:

$$\begin{aligned}
 \dot{I}_{n1} &= \dot{I}_{n0} + \dot{I}_{nd} + \dot{I}_{ni}, & \dot{E}_{n1} &= \dot{E}_{n0} + \dot{E}_{nd} + \dot{E}_{ni}, \\
 \dot{I}_{n2} &= \dot{I}_{n0} + a^2 \dot{I}_{nd} + a \dot{I}_{ni}, & \text{и} & \quad \dot{E}_{n2} = \dot{E}_{n0} + a^2 \dot{E}_{nd} + a \dot{E}_{ni}, \\
 \dot{I}_{n3} &= \dot{I}_{n0} + a \dot{I}_{nd} + a^2 \dot{I}_{ni}; & \dot{E}_{n3} &= \dot{E}_{n0} + a \dot{E}_{nd} + a^2 \dot{E}_{ni}.
 \end{aligned}
 \tag{9.44}$$

Според вида на аварийния режим някои от величините в (9.44) приемат конкретни стойности или се отчитат някои зависимости между тях. Например при земно съединение между първа фаза и земя $\dot{I}_{n2} = 0$, $\dot{I}_{n3} = 0$ и $\dot{E}_{n1} = 0$. При двуфазно земно съединение на първа фаза и на втора фаза и земя $\dot{I}_{n3} = 0$, $\dot{E}_{n1} = 0$ и $\dot{E}_{n2} = 0$, а при двуфазно късо съединение между първа и втора фаза $\dot{I}_{n2} = -\dot{I}_{n1}$, $\dot{E}_{n2} = \dot{E}_{n1}$ и $\dot{I}_{n3} = 0$. По този начин се въвеждат нови зависимости, които намаляват неизвестните с 3. За да бъде пълна системата и при трите аварийни режима е необходимо да се добавят още три уравнения. Те се записват за еквивалентните схеми на всяка от симетричните токови съставки. На фиг. 9.31 а, б, в са показани тези схеми за токовете съставки на директната, индиректната и на подсистемата с нулева последователност на фазите.



в)
Фиг. 9.31

Тъй като в средния клон е включен идеален източник на е.д.н., трите токови съставки се определят от схемите непосредствено с изразите:

$$\begin{aligned}
 \dot{I}_{nd} &= \frac{\dot{E}_1 - \dot{E}_{nd}}{Z_{rd} + Z_n} - \frac{\dot{E}_{nd}}{Z_{kd}}, & \dot{I}_{ni} &= -\dot{E}_{ni} \left(\frac{1}{Z_{ri} + Z_n} + \frac{1}{Z_{ki}} \right) & \text{и} \\
 \dot{I}_{n0} &= -\dot{E}_{n0} \left(\frac{1}{Z_{r0} + Z_n + 3Z_N} + \frac{1}{Z_{k0}} \right).
 \end{aligned}$$

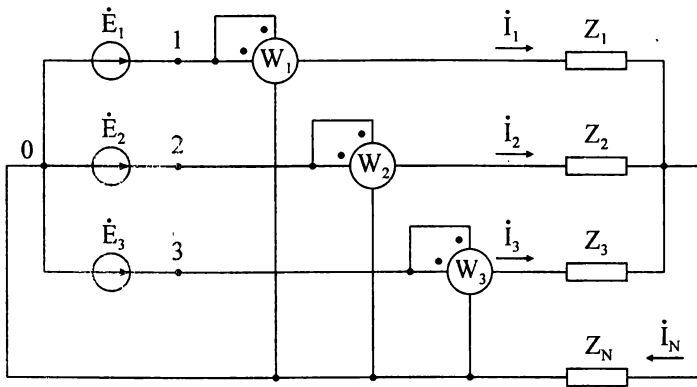
9.5. МОЩНОСТИ В ТРИФАЗНИ ВЕРИГИ

Всички видове мощности се изчисляват както при синусодален режим. Активната (реактивната) мощност, постъпваща към трифазен консуматор, е сума от активните (реактивните) мощности на всяка от фазите плюс подаваната мощност към съпротивлението на неутралния проводник. Или

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_N \quad \text{и съответно}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_N.$$

Ето защо, при несиметричен режим в *трифазна четирипроводна верига* активната мощност се измерва с три ватметъра (фиг. 9.32).



Фиг. 9.32

Тя се определя с израза:

$$P = \sum_{k=1}^3 U_k I_k \cos \varphi_k \quad \text{или с комплекси} \quad P = \sum_{k=1}^3 \operatorname{Re} \left[\dot{U}_k \dot{I}_k \right], \quad (9.45)$$

където U_k и I_k са съответно ефективните стойности на фазното напрежение и фазния ток за фаза k , а φ_k – фазовата разлика между тях; \dot{U}_k е комплексът на фазното напрежение, \dot{I}_k – спрегнатият комплекс на фазния ток. Следователно $P = P_{w1} + P_{w2} + P_{w3}$, където P_{w1} , P_{w2} и P_{w3} са съответните мощности, отчетени от трите ватметъра.

Реактивната мощност се представя с изрази, подобни на тези от (9.45)

$$Q = \sum_{k=1}^3 U_k I_k \sin \varphi_k \quad \text{или с комплекси} \quad Q = \sum_{k=1}^3 \operatorname{Im} \operatorname{ag} \left[\dot{U}_k \dot{I}_k \right]. \quad (9.46)$$

Участващите в (9.46) величини имат същия физически смисъл, тъй като в (9.45) и (9.46) мощностите P и Q се дефинират чрез комплексната мощност \dot{S} на трифазния консуматор

$$\dot{S} = \sum_{k=1}^3 \dot{U}_k \dot{I}_k . \quad (9.47)$$

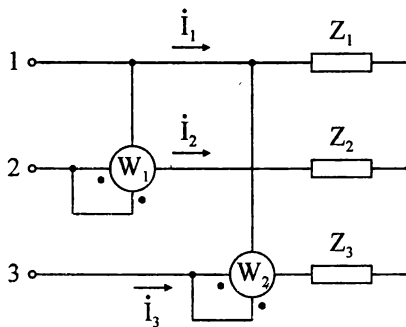
Пълната мощност се определя с познатия израз $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$.

Независимо как е съединен консуматорът, в *трифазна трипроводна верига* активната мощност може да се измери само с два ватметъра. Както при свързване на консуматора в звезда, така и при свързване в триъгълник линейните участъци са извън областта на преобразуване и токовете в тях \dot{I}_1 , \dot{I}_2 и \dot{I}_3 остават без изменение. По първия закон на Кирхоф в изолираната неутрална точка винаги се изпълнява $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0$. Тази зависимост се изпълнява и за комплексно спрегнатите стойности на токовете във възела: $I_1^* + I_2^* + I_3^* = 0$. Един от тях се определя чрез другите два, например $I_1^* = -I_2^* - I_3^*$ и този резултат се замества в (9.47). Получава се:

$\dot{S} = \dot{U}_1(-\dot{I}_2 - \dot{I}_3) + \dot{U}_2 \dot{I}_2 + \dot{U}_3 \dot{I}_3 = \dot{U}_{21} \dot{I}_2 + \dot{U}_{31} \dot{I}_3$. Следователно консумираната от трифазния товар активна мощност ще се определи с изрза

$$P = \text{Re}(\dot{U}_{21} \dot{I}_2 + \dot{U}_{31} \dot{I}_3) = P_{w1} + P_{w2} \quad (9.48)$$

и може да бъде измерена само с два ватметъра, както е показано на фиг. 9.33. В (9.48) с P_{w1} и P_{w2} са отбелязани мощностите, отчетени от двата ватметъра.



Фиг. 9.33

9.5.1. Мощности при симетричен работен режим

При симетричен работен режим токът в неутралния проводник и напрежението между двете неутрални точки са нула. Следователно $P_N = Q_N = 0$ и активната мощност към трифазния консуматор ще бъде

$$P = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi. \quad (9.49)$$

В (9.49) U_ϕ и I_ϕ са ефективните стойности на съответните фазни величини, а φ е фазовата разлика между тях. Чрез линейните напрежение и ток изразът за P добива вида:

$$P = \sqrt{3}U_l I_l \cos \varphi, \quad (9.50)$$

тъй като при съединение на консуматора в звезда $U_l = \sqrt{3}U_\phi$, $I_l = I_\phi$, а при съединението му в триъгълник $U_l = U_\phi$ и $I_l = \sqrt{3}I_\phi$. Трябва да се отбележи, че в (9.49) и в (9.50) участва дефазиранието φ между фазното напрежение и фазния ток. Аналогично се определят Q и S на симетричния трифазен консуматор

$$Q = 3U_\phi I_\phi \sin \varphi = \sqrt{3}U_l I_l \sin \varphi, \quad (9.51)$$

$$S = 3U_\phi I_\phi = \sqrt{3}U_l I_l. \quad (9.52)$$

Очевидно в съответствие с (9.49) мощността на трифазния консуматор може да се измери само с един ватметър, но тъй като в процеса на работа пълната симетрия не се гарантира, тази възможност има само теоретично значение.

9.5.2. Определяне на мощностите с помощта на симетричните съставки

На всяка една от симетричните подсистеми на входните напрежения в симетрична трифазна верига съответства симетрична токова подсистема със същата последователност на фазите. За всяка една от подсистемите режимът на работа е симетричен. Дефинира се съответната комплексна мощност, която постъпва към веригата. Съвместното действие на трите симетрични подсистеми определя общата комплексна мощност, която се подава към веригата при несиметричен работен режим

$$\dot{S} = 3(\dot{U}_d \dot{I}_d + \dot{U}_i \dot{I}_i + \dot{U}_0 \dot{I}_0). \quad (9.53)$$

9.6. НЕСИНУСОИДАЛЕН РЕЖИМ В ТРИФАЗНИ ВЕРИГИ

Присъствието на сигнал (напрежение или ток), който съдържа хармоници, води до нарастване на загубите в електропроводящите материали и до възникването на нежелани резонансни явления във веригата. Освен посочените, в трифазните електрически машини се пораждат и други нежелани процеси. Хармоници с определени поредни номера от състава на възбудителните фазни токове може да създадат паразитни обратно въртящи се магнитни полета. Те предизвикват провали във формата на въртящия момент и се влошават работните характеристики на машината. Затова конструктивните несъвършенства трябва да бъдат сведени до минимум още на етапа проектиране. Целта е да се получи по възможност по-близко до синусоидалното разпределение на генерираните фазни е.д.н., токове и на магнитодвижещото напрежение, което се обуславя от трифазната намотка. Въпреки това, много са причините за появата на хармоници: несинусоидалният характер на захранващото напрежение, наличието на нелинейност на магнитопроводите, някои конструктивни несъвършенства и др. Поради еднотипното изпълнение и симетричното разпределение на трите фазни намотки, обаче, хармоничният състав на трите фазни е.д.н. е един и същ, т.е. те включват хармоници с еднакви поредни номера. При това хармониците с един и същ пореден номер образуват симетрични трифазни системи. Освен това, характерът на процесите е такъв, че фазният сигнал представлява периодично спрегната функция на времето, т.е. в състава му участват само хармоници с нечетни поредни номера. По-нататък при анализа се използват означенията: горен индекс – за участъка от веригата, където действа величината и долен индекс – за поредния номер на хармоника. Така например $e_{(s)}^p(t)$ е s -ти хармоник в p -ти участък от веригата.

9.6.1. Особенности в хармоничния състав на фазните величини

Постановка на задачата. Трите периодични несинусоидални фазни е.д.н. $e^1(t)$, $e^2(t)$ и $e^3(t)$ на генератора се представят с изразите:

$$e^1(t) = \sum_k e_{m(k)} \sin(k\omega t + \psi_{ek}), \quad e^2(t) = \sum_k e_{m(k)} \sin \left[k\omega \left(t - \frac{T}{3} \right) + \psi_{ek} \right] \quad \text{и}$$
$$e^3(t) = \sum_k e_{m(k)} \sin \left[k\omega \left(t + \frac{T}{3} \right) + \psi_{ek} \right].$$

Тук дефазирането на ъгъл $(2\pi/3)$ за втората и третата фазна величина е представено като дефазирание във времето $(-T/3)$ и $(T/3)$, тъй като $\mp \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{\omega} = \mp \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{2\pi f} = \mp \frac{T}{3}$. Да се изследва видът на симетричните трифазни

системи от хармоници с нечетни поредни номера: а) $k = 3p$; б) $k = 3p + 1$ и в) $k = 3p - 1$, при $p = 0, 1, 2, 3, \dots$

Анализ. а) За $k = 3p$ се отчита действието на нечетните хармоници с поредни номера, кратни на три $k = 3, 9, 15, \dots$. Ъгълът на дефазиране за хармониците на втора и трета фаза е $k\omega \frac{T}{3} = 3p \frac{2\pi T}{T} = p \cdot 2\pi$, поради което

$$e^2(t) = \sum_k e_{m(k)} \sin \left[k\omega \left(t - \frac{T}{3} \right) + \psi_{ek} \right] = \sum_k e_{m(k)} \sin [k\omega t - p \cdot 2\pi + \psi_{ek}] = e^1(t),$$

$$e^3(t) = \sum_k e_{m(k)} \sin \left[k\omega \left(t + \frac{T}{3} \right) + \psi_{ek} \right] = \sum_k e_{m(k)} \sin [k\omega t + p \cdot 2\pi + \psi_{ek}] = e^1(t).$$

Следователно хармониците с поредни номера, кратни на три, образуват симетрични системи с нулева последователност на фазите.

б) За $k = 3p + 1$ се отчита действието на нечетните хармоници с поредни номера $k = 1, 7, 13, \dots$, където участва и основният първи хармоник. По абсолютна стойност ъгълът на дефазиране за хармониците на втора и трета фаза се определя с израза $k\omega \frac{T}{3} = (3p + 1) \frac{2\pi T}{T} = p \cdot 2\pi + \frac{2\pi}{3}$. Така се получава

$$e^2(t) = \sum_k e_{m(k)} \sin \left[k\omega \left(t - \frac{T}{3} \right) + \psi_{ek} \right] = \sum_k e_{m(k)} \sin \left[k\omega t - p \cdot 2\pi - \frac{2\pi}{3} + \psi_{ek} \right] =$$

$$= \sum_k e_{m(k)} \sin \left[k\omega t - \frac{2\pi}{3} + \psi_{ek} \right] \quad \text{и}$$

$$e^3(t) = \sum_k e_{m(k)} \sin \left[k\omega \left(t + \frac{T}{3} \right) + \psi_{ek} \right] = \sum_k e_{m(k)} \sin \left[k\omega t + p \cdot 2\pi + \frac{2\pi}{3} + \psi_{ek} \right] =$$

$$= \sum_k e_{m(k)} \sin \left[k\omega t + \frac{2\pi}{3} + \psi_{ek} \right].$$

От резултата личи, че хармониците с поредни номера $k = 1, 7, 13, \dots$ образуват симетрични системи с директна последователност на фазите.

в) За $k = 3p - 1$ се отчита действието на нечетните хармоници с поредни номера $k = 5, 11, 17, \dots$. Ъгълът на дефазиране за хармониците във втора и трета фаза по абсолютна стойност е $k\omega \frac{T}{3} = (3p - 1) \frac{2\pi T}{T} = p \cdot 2\pi - \frac{2\pi}{3}$, откъдето се получава:

$$e^2(t) = \sum_k e_{m(k)} \sin \left[k\omega \left(t - \frac{T}{3} \right) + \psi_{ek} \right] = \sum_k e_{m(k)} \sin \left[k\omega t - p \cdot 2\pi + \frac{2\pi}{3} + \psi_{ek} \right] =$$

$$= \sum_k e_{m(k)} \sin \left[k\omega t + \frac{2\pi}{3} + \psi_{ek} \right] \quad \text{и}$$

$$e^3(t) = \sum_k e_{m(k)} \sin \left[k\omega \left(t + \frac{T}{3} \right) + \psi_{ek} \right] = \sum_k e_{m(k)} \sin \left[k\omega t + p \cdot 2\pi - \frac{2\pi}{3} + \psi_{ek} \right] =$$

$$= \sum_k e_{m(k)} \sin \left[k\omega t - \frac{2\pi}{3} + \psi_{ek} \right].$$

Този резултат показва, че хармониците с поредни номера $k = 5, 11, 17, \dots$ образуват симетрични системи с индиректна последователност на фазите.

9.6.2. Хармоници в трифазни вериги при съединение звезда

Трябва да се имат пред вид някои характерни особености.

1. Системата линейни напрежения не включва хармоници, кратни на три. Например за напрежението $u^{12} = u^1 - u^2$ се доказва, че няма такива хармоници:

$$u^{12} = u^1 - u^2 = u_{(1)}^1 + u_{(3)}^1 + u_{(5)}^1 + u_{(7)}^1 + u_{(9)}^1 + \dots - u_{(1)}^2 - u_{(3)}^2 - u_{(5)}^2 - u_{(7)}^2 - u_{(9)}^2 - \dots =$$

$$= u_{(1)}^{12} + 0 + u_{(5)}^{12} + u_{(7)}^{12} + 0 + \dots \quad (9.54)$$

От (9.54) се определя хармоничният състав на линейното напрежение, чиято ефективна стойност е

$$U^n = \sqrt{(U_{(1)}^n)^2 + (U_{(5)}^n)^2 + (U_{(7)}^n)^2 + (U_{(11)}^n)^2 + \dots}$$

Тъй като съотношението между линейен и фазен хармоник е $U_{(k)}^n = \sqrt{3} U_{(k)}^\phi$, горното равенство добива вида:

$$U^n = \sqrt{3} \sqrt{U_{(1)}^2 + U_{(5)}^2 + U_{(7)}^2 + U_{(11)}^2 + \dots}$$

Но фазното напрежение съдържа всички хармоници и неговата ефективна стойност е $U^\phi = \sqrt{U_{(1)}^2 + U_{(3)}^2 + U_{(5)}^2 + U_{(7)}^2 + U_{(9)}^2 + U_{(11)}^2 + \dots}$. Като се сравнят U^n и U^ϕ се вижда, че при наличие на хармоници се изпълнява $U^n < \sqrt{3} U^\phi$.

2. Токът в неутралния проводник $i^N = i^1 + i^2 + i^3$ на четирипроводна верига е сума от кратните на три хармоници в системата линейни (фазни) токове:

$$\begin{aligned}
 i^N &= i_{(1)}^1 + i_{(3)}^1 + i_{(5)}^1 + i_{(7)}^1 + i_{(9)}^1 + \dots \\
 &+ i_{(1)}^2 + i_{(3)}^2 + i_{(5)}^2 + i_{(7)}^2 + i_{(9)}^2 + \dots \\
 &+ i_{(1)}^3 + i_{(3)}^3 + i_{(5)}^3 + i_{(7)}^3 + i_{(9)}^3 + \dots = \\
 &= 0 + 3i_{(3)} + 0 + 0 + 3i_{(9)} + \dots
 \end{aligned} \tag{9.55}$$

Ефективната стойност на тока $I^N = 3\sqrt{I_{(3)}^2 + I_{(9)}^2 + I_{(15)}^2 + \dots}$ се определя от (9.55).

3. В трипроводна верига линейните токове не съдържат хармоници, кратни на три. В тази верига липсва неутрален проводник, поради което токът $i^N = 0$. В съответствие с (9.55) това е възможно само ако хармониците, кратни на три, в линейните токове са нули.

4. В трипроводна верига (фиг. 9.12а) напрежението u^{NO} съдържа хармониците, кратни на три, от състава на системата фазни напрежения на генератора. По втория закон на Кирхоф се записват уравнения за контурите през фаза на генератора, съответната фаза на консуматора и участъка между двете звездни точки. Тъй като веригата е трипроводна, фазните напрежения на консуматора не включват кратни на три хармоници (вж. т.3). В съответствие с казаното, системата уравнения има вида:

$$\begin{aligned}
 -u_{(1)}^1 - u_{(3)}^1 - u_{(5)}^1 - u_{(7)}^1 - u_{(9)}^1 - \dots + u_{(1)}^{1N} + u_{(5)}^{1N} + u_{(7)}^{1N} + u_{(11)}^{1N} + \dots + u^{NO} &= 0, \\
 -u_{(1)}^2 - u_{(3)}^2 - u_{(5)}^2 - u_{(7)}^2 - u_{(9)}^2 - \dots + u_{(1)}^{2N} + u_{(5)}^{2N} + u_{(7)}^{2N} + u_{(11)}^{2N} + \dots + u^{NO} &= 0, \\
 -u_{(1)}^3 - u_{(3)}^3 - u_{(5)}^3 - u_{(7)}^3 - u_{(9)}^3 - \dots + u_{(1)}^{3N} + u_{(5)}^{3N} + u_{(7)}^{3N} + u_{(11)}^{3N} + \dots + u^{NO} &= 0.
 \end{aligned} \tag{9.56}$$

Уравненията се сумират почленно. Първият и седмият хармоници образуват симетрични системи с директна последователност, а петият – с индиректна последователност и съгласно свойствата на симетричните системи техните суми са нули. Следователно за резултата от почленното сумиране се получава:

$$-0 - 3u_{(3)} - 0 - 0 - 3u_{(9)} - \dots + 0 + 0 + 0 + \dots + 3u^{NO} = 0.$$

Или $u^{NO} = u_{(3)} + u_{(9)} + \dots$ с ефективна стойност

$$U^{NO} = \sqrt{U_{(3)}^2 + U_{(9)}^2 + \dots} \tag{9.57}$$

9.6.3. Хармоници в трифазни вериги при съединение триъгълник

1. При съединение в триъгълник и отсъствие на линейни проводници (фиг. 9.34) в генератора протича циркуляционен ток, който включва само хармоници, кратни на три (като пример може да се посочи генератор на празен ход). В затворения циркуляционен контур, образуван от фазите на генератора, действа резултантното е.д.н.

$$\begin{aligned}
 e^{pez}(t) &= e^1(t) + e^2(t) + e^3(t) = e_{(1)}^1(t) + e_{(3)}^1(t) + e_{(5)}^1(t) + e_{(7)}^1(t) + e_{(9)}^1(t) + \dots + \\
 &\quad + e_{(1)}^2(t) + e_{(3)}^2(t) + e_{(5)}^2(t) + e_{(7)}^2(t) + e_{(9)}^2(t) + \dots + \\
 &\quad + e_{(1)}^3(t) + e_{(3)}^3(t) + e_{(5)}^3(t) + e_{(7)}^3(t) + e_{(9)}^3(t) + \dots + \\
 &= +0 \quad +3e_{(3)}(t) + 0 \quad +0 \quad +3e_{(9)}(t) + \dots
 \end{aligned}$$

Резултантното е.д.н. съдържа само хармоници, които са кратни на три и обуславя хармоничния състав на циркуляционния ток. За всеки от действащите в контура хармоници на резултантното е.д.н се определят:

за $k=3$ – комплексното съпротивление на контура $Z_{(3)}^{екв} = 3Z_{(3)}$, резултантно е.д.н.

$$E_{(3)}^{pez} = 3\dot{E}_{(3)} \text{ и токът } \dot{I}_{(3)} = 3\dot{E}_{(3)} / 3Z_{(3)} ;$$

за $k=9$ – комплексното съпротивление на контура $Z_{(9)}^{екв} = 3Z_{(9)}$, резултантното

е.д.н. $E_{(9)}^{pez} = 3\dot{E}_{(9)}$ и токът $\dot{I}_{(9)} = 3\dot{E}_{(9)} / 3Z_{(9)}$, и т.н. Следователно циркуляционният ток е $i^u = i_{(3)}(t) + i_{(9)}(t) + i_{(15)}(t) + \dots$

2. Линейните токове не съдържат хармоници, кратни на три.

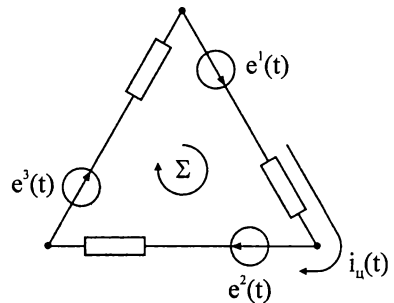
Например за тока $i^1(t)$ в първия линейен проводник (фиг. 9.35) се записва:

$$\begin{aligned}
 i^1 &= i^{31} - i^{12} = i_{(1)}^{31} + i_{(3)}^{31} + i_{(5)}^{31} + i_{(7)}^{31} + i_{(9)}^{31} + \dots \\
 &\quad - i_{(1)}^{12} - i_{(3)}^{12} - i_{(5)}^{12} - i_{(7)}^{12} - i_{(9)}^{12} - \dots = \\
 &= i_{(1)}^1 + 0 + i_{(5)}^1 + i_{(7)}^1 + 0 + \dots
 \end{aligned}$$

Ефективните стойности на токовете са:

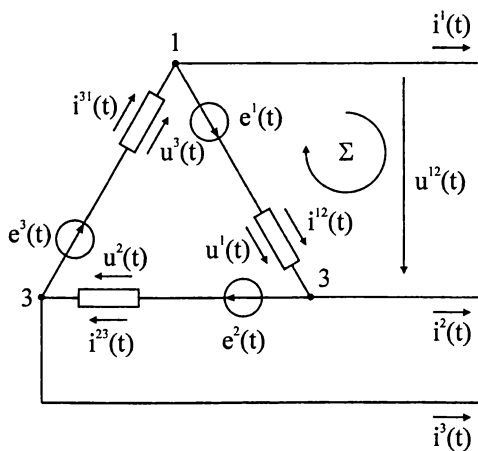
$$I^\phi = \sqrt{I_{(1)}^2 + I_{(3)}^2 + I_{(5)}^2 + I_{(7)}^2 + I_{(9)}^2 + \dots} \quad \text{и}$$

$$I^n = \sqrt{(I_{(1)}^n)^2 + (I_{(3)}^n)^2 + (I_{(7)}^n)^2 + (I_{(11)}^n)^2 \dots} = \sqrt{3} \sqrt{I_{(1)}^2 + I_{(5)}^2 + I_{(7)}^2 + I_{(11)}^2 + \dots}$$



Фиг. 9.34

съответно за фазния и линейния ток. В последния израз се отчита връзката между линейен и фазен хармоник $I_{(k)}^n = \sqrt{3} I_{(k)}$. От сравняването на двете ефективни стойности личи, че при наличие на хармоници е в сила съотношението $I^n < \sqrt{3} I^\phi$.



Фиг. 9.35

3. *Линейните (фазните) напрежения не съдържат хармоници, които са кратни на три. Проверката се извършва за контура от фиг. 9.35. Или*

$$u^{12} - u_{(1)}^1 - u_{(3)}^1 - u_{(5)}^1 - u_{(7)}^1 - u_{(9)}^1 - \dots = -e_{(1)}^1 - e_{(3)}^1 - e_{(5)}^1 - e_{(7)}^1 - e_{(9)}^1 - \dots$$

Между хармониците на е.д.н. и на напрежителния пад, с кратна на три честота (т.1 от 9.6.3), съществуват връзките $u_{(3)}^1 = e_{(3)}^1$, $u_{(9)}^1 = e_{(9)}^1$ и т.н. Така за моментната и за ефективната стойност на линейното напрежение се получават изразите:

$$u^{12} = u_{(1)}^{12} + u_{(5)}^{12} + u_{(7)}^{12} + u_{(11)}^{12} + \dots \quad \text{и}$$

$$U^n = U^\phi = \sqrt{U_{(1)}^2 + U_{(5)}^2 + U_{(7)}^2 + U_{(11)}^2 + \dots}$$

10 ЧЕТИРИПОЛЮСНИЦИ

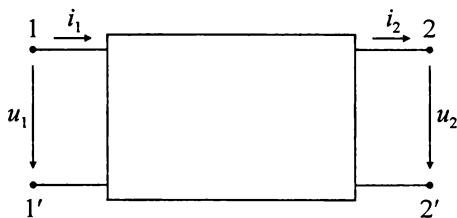
10.1. ОСНОВНИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И КЛАСИФИКАЦИИ

10.1.1. Основни положения

Четириполусникът представлява електротехническа верига, разгледана по отношение на две двойки полюси (изводи).

Схематичното изображение на един четириполусник е дадено на фиг. 10.1. То е в сила, когато между входа и изхода на четириполусника няма външна електрическа връзка. При спазване на това условие е достатъчно в схемата на четириполусника да се означават само токовете i_1 и i_2 , както е показано на фиг. 10.1.

Левите изводи 1 и $1'$ условно се наричат входни изводи или първична страна, докато десните изводи 2 и $2'$ представляват условно изходните изводи или вторичната страна на четириполусника. Дадените названия са условни и имат смисъл, ако предаването на енергия (сигнали) се извършва от входа към изхода или от първичната към вторичната страна.



Фиг. 10.1

Избраните посоки на токовете и напреженията съответстват на случай, в който към изводите на първичната страна е включен източник на енергия, а към изводите на вторичната страна е включен консуматор, като освен това електротехническата верига (четириполусник) е пасивна. Както вече стана ясно, понятията „*вход*” и „*изход*” са условни, като например при двустранно захранване или при положение, че към двете страни са включени консуматори.

Предмет на изложението по-нататък ще бъдат стационарните режими в четириполусници от горния тип, като разглежданията се базират на избраните посоки от фиг. 10.1.

10.1.2. Основни класификации

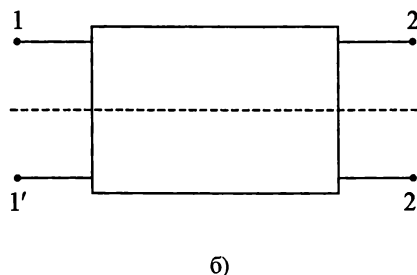
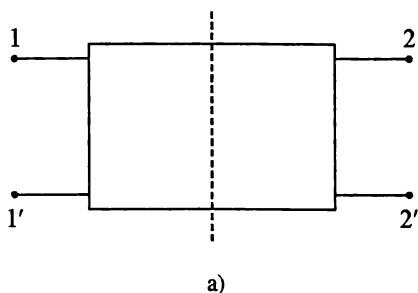
А. По отношение на това дали разглежданата между двете двойки изводи верига е пасивна или активна, четириполусниците биват **пасивни** или **активни**. При стационарен режим може да бъде използвано и следното определение: един четириполусник е пасивен, ако при едновременното прекъсване

(късо съединение) на първичната и вторичната страна, входните и изходните стационарни напрежения (токове) са равни на нула. Пасивните четириполусници се означават с буквата „П“, а активните – с буквата „А“.

Б. По отношение на това дали електрическата верига, разглеждана между двете двойки изводи е линейна или нелинейна, четириполусниците биват **линейни** или **нелинейни**.

В. По отношение на това дали електрическата верига, разглеждана между двете двойки изводи е от взаимен или невзаимен тип, четириполусниците биват **взаимни** или **невзаимни**. При взаимните четириполусници, взаимните параметри (комплексни съпротивления и проводимости Z_{pq} и Z_{qp} , Y_{pq} и Y_{qp}) са равни.

Г. По отношение на това дали електрическата верига, разглеждана между двете двойки изводи е симетрична или несиметрична, четириполусниците биват **симетрични** или **несиметрични**. Симетричните четириполусници биват с вертикална или хоризонтална ос на симетрия, както е показано на фиг. 10.2а и б.



Фиг. 10.2

Симетричните четириполусници с вертикална ос на симетрия се характеризират с два независими параметъра, докато произволен линеен пасивен четириполусник от взаимен тип се характеризира с три независими параметъра.

В изложението по-нататък, ако не е изрично споменато нещо друго, ще бъдат разглеждани **линейни** и **пасивни** четириполусници от **взаимен** тип при **стационарни режими**. Това редуциране на различните видове четириполусници не намалява общността на разглежданията. Например, както е описано в параграф 10.9, активните и взаимните четириполусници могат да бъдат моделирани с пасивни четириполусници от взаимен тип и допълнителни елементи. С точност до замяна на комплексните величини с операторни, по-нататъшните разглеждания могат лесно да бъдат приложени и при преходни режими, но при нулеви начални условия. Ненулевите начални условия могат да бъдат отразени с допълнителни източници в схемите на четириполусниците.

10.2. СИСТЕМИ УРАВНЕНИЯ НА ПАСИВНИ ЧЕТИРИПОЛЮСНИЦИ

Теорията на четириполусниците позволява да се установят взаимните връзки между първичните и вторичните напрежения и токове, без да се анализират конкретно вътрешните електрически процеси. Тъй като се разглеждат линейни четириполусници, уравненията, които свързват първичните и вторичните величини на четириполусника, са линейни.

Коефициентите на пропорционалност в уравненията, които свързват първичните и вторичните величини на четириполусника се наричат *параметри на четириполусника*.

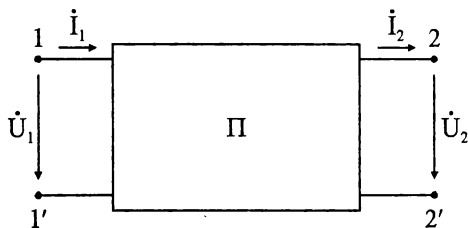
В зависимост от това коя двойка величини се изразява като линейна комбинация на останалите, съществуват шест различни системи уравнения на четириполусниците и съответно шест типа параметри. Четириполусниците от невзаимен тип имат четири независими параметъра, докато взаимните четириполусници имат три независими параметъра. Както беше вече споменато по-горе, четириполусниците с вертикална ос на симетрия имат два независими параметъра.

При позната схема на веригата на даден четириполусник, параметрите му могат да бъдат изчислени, като се използват методите за анализ на електрически вериги. Ако схемата на веригата на четириполусника не е известна, параметрите му могат да бъдат определени въз основа на подходящо подбрани опити.

Теорията на четириполусниците дава възможност изследванията на някои сложни вериги да бъдат извършени на база на представянето на тези вериги като подходящи съчетания на четириполусници. При определени условия теорията на четириполусниците позволява да бъдат намерени входно-изходните зависимости за дадена сложна верига, на база на параметрите на съставните четириполусници. Предмет на разглеждане в този параграф са различните системи уравнения на пасивните четириполусници и съответните им параметри.

Нека разгледаме стационарен синусоиден режим във взаимния, пасивен четириполусник от фиг. 10.3.

Знаците в уравненията зависят от посоките на токовете и напреженията. Както беше казано и преди, разглежданията са основани на посоките от фиг. 10.3.



Фиг. 10.3

10.2.1. Y-система уравнения

Y-системата уравнения дава връзката между входния и изходния ток като функция от входното и изходното напрежение. Нека разгледаме веригата от фиг. 10.3 под действието на два независими източника на напрежение, съот-

ветстващи на електрическите напрежения \dot{U}_1 и \dot{U}_2 на първичната и вторичната страна. Тогава всеки от токовете \dot{I}_1 , \dot{I}_2 може да се представи като алгебрична сума от компонентите, дължащи са на източниците, действащи поотделно (принцип на наслагването):

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 - Y_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 - Y_{22}\dot{U}_2 \end{cases}, \quad (10.1)$$

където Y_{ij} са съответно собствените и взаимните проводимости.

Горната система по същество представлява Y -системата уравнения на четириполюсника. Знаците пред \dot{U}_2 са отрицателни поради избраната посока на напрежението.

Ако въведем векторите $\dot{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$, $\dot{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ -\dot{U}_2 \end{bmatrix}$ и матрицата $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$,

то зависимостта (10.1) може да бъде записана в следната векторно-матрична форма

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{Y}\dot{\mathbf{U}}. \quad (10.2)$$

Матрицата \mathbf{Y} се нарича Y -матрица, а величините Y_{11} , Y_{12} , Y_{21} и Y_{22} се наричат Y -параметри или параметри на късо съединение. Това название идва и от следните дефиниционни изрази:

$$Y_{11} = \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} \right)_{\dot{U}_2=0}, \quad Y_{22} = \left(\frac{\dot{I}_2}{-\dot{U}_2} \right)_{\dot{U}_1=0}, \quad Y_{12} = \left(\frac{\dot{I}_1}{-\dot{U}_2} \right)_{\dot{U}_1=0}, \quad Y_{21} = \left(\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} \right)_{\dot{U}_2=0}, \quad (10.3)$$

т.е. определянето на Y -параметрите се извършва при късо съединение било на първичната страна ($\dot{U}_1 = 0$), било на вторичната страна ($\dot{U}_2 = 0$).

Ако четириполюсникът е от взаимен тип, взаимните комплексни проводимости Y_{12} и Y_{21} са равни. При симетричен четириполюсник са равни и собствените комплексни проводимости Y_{11} и Y_{22} .

10.2.2. Z -система уравнения

Z -системата уравнения дава връзката между входното и изходното напрежение като функция на входния и изходния ток. Тя може лесно да се получи в матрична форма, като се умножи (10.3) отляво с обратната на Y -матрицата (ако съществува). Тогава

$$\mathbf{Y}^{-1}\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Y}\dot{\mathbf{U}}. \quad (10.4)$$

Като се отчете, че $Y^{-1}Y = E$ (E – единична 2×2 матрица), се получава

$$\dot{U} = Z\dot{I}, \quad (10.5)$$

където $Z = Y^{-1}$ се нарича Z -матрица на четириполусника.

Системата (10.5) е матрична форма на Z -системата уравнения. В разгърнатата форма (10.5) има вида

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \\ -\dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \end{cases} \quad (10.6)$$

Параметрите Z_{11} , Z_{12} , Z_{21} и Z_{22} са елементи на Z -матрицата и се наричат още Z -параметри или параметри на прекъсване, тъй като определянето им се извършва в режим на прекъсване на първичната или на вторичната страна на четириполусника. Названието им е свързано и с дефиниционните изрази:

$$Z_{11} = \left(\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right)_{\dot{I}_2=0}, \quad Z_{22} = \left(\frac{-\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \right)_{\dot{I}_1=0}, \quad Z_{12} = \left(\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \right)_{\dot{I}_1=0}, \quad Z_{21} = \left(\frac{-\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \right)_{\dot{I}_2=0}.$$

Ако четириполусникът е от взаимен тип, то той се характеризира с три независими Z -параметъра, защото е изпълнено условието $Z_{12} = Z_{21}$. За симетричен четириполусник $Z_{11} = Z_{22}$.

10.2.3. Предавателни системи уравнения

Предавателните системи уравнения отразяват връзката между комплексите на първичните величини \dot{U}_1, \dot{I}_1 и комплексите на вторичните величини \dot{U}_2, \dot{I}_2 .

а) А-система уравнения

При захранване на четириполусника от първичната страна се дефинира A -системата уравнения

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2 \end{cases} \quad (10.7)$$

Тази система се използва доста често и затова параметрите в нея са означени с различни букви. Тези параметри се наричат *коэффициенти* или *константи* на четириполусника и са елементи на т.нар. A -матрица $A = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$,

която се използва при векторно-матричния запис на (10.7), а именно:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}. \quad (10.8)$$

Коефициентите A и D нямат размерност, B има качество на комплексно съпротивление, докато C има качество на комплексна проводимост. При пасивен четириполусник от взаимен тип съществува следната зависимост между коефициентите:

$$AD - BC = 1, \quad (10.9)$$

т.е. такъв четириполусник се характеризира с три независими величини. Това може да се покаже, като се изходи от Y -системата. И действително:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 - Y_{12}\dot{U}_2 &\Rightarrow \dot{I}_1 = Y_{11}\left(\frac{Y_{22}}{Y_{21}}\dot{U}_2 + \frac{1}{Y_{21}}\dot{I}_2\right) - Y_{12}\dot{U}_2, \\ \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 - Y_{22}\dot{U}_2 &\Rightarrow \dot{U}_1 = \frac{Y_{22}}{Y_{21}}\dot{U}_2 + \frac{1}{Y_{21}}\dot{I}_2. \end{aligned}$$

След съответни преобразувания на горните зависимости се достига до

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \frac{Y_{22}}{Y_{21}}\dot{U}_2 + \frac{1}{Y_{21}}\dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 &= \frac{Y_{11}Y_{22} - Y_{21}Y_{12}}{Y_{21}}\dot{U}_2 + \frac{Y_{11}}{Y_{21}}\dot{I}_2. \end{aligned} \quad (10.10)$$

След съпоставяне на (10.7) и (10.10), за коефициентите на четириполусника се получава:

$$A = \frac{Y_{22}}{Y_{21}}; B = \frac{1}{Y_{21}}; C = \frac{Y_{11}Y_{22} - Y_{21}Y_{12}}{Y_{21}}; D = \frac{Y_{11}}{Y_{21}}.$$

Като се използват горните изрази и зависимостта $Y_{12} = Y_{21}$ може да се провери, че за взаимните четириполусници

$$AD - BC = \frac{Y_{22}}{Y_{21}} \frac{Y_{11}}{Y_{21}} - \frac{1}{Y_{21}} \frac{Y_{11}Y_{22} - Y_{21}Y_{12}}{Y_{21}} = \frac{Y_{12}}{Y_{21}} = 1$$

Ако четириполусникът е симетричен, то $Y_{11} = Y_{22}$ и тогава $A = D$.

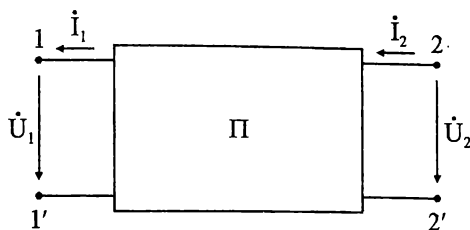
б) В-система уравнения

Тази система се отнася за случая, когато захранването е откъм вторичната страна и посоките на токовете и напреженията са избрани съгласно фиг.

10.4a. Тук посоките на двата тока са различни от тези на случаите, разглеждани досега.

Тази промяна на посоките на токовете е еквивалентна на промяна на знаците на токовете в А-системата уравнения, т.е.

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B(-\dot{i}_2) \\ -\dot{i}_1 = C\dot{U}_2 + D(-\dot{i}_2). \end{cases} \quad (10.11)$$



Фиг. 10.4a

Горната система може да бъде решена с формулите на Крамер по отношение на комплексите на вторичните величини \dot{U}_2 и \dot{i}_2 :

$$\dot{U}_2 = \frac{\begin{vmatrix} \dot{U}_1 - B \\ -\dot{i}_1 - D \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & -B \\ C & -D \end{vmatrix}} = \frac{1}{AD - BC} (D\dot{U}_1 + B\dot{i}_1) = B_{11}\dot{U}_1 + B_{12}\dot{i}_1,$$

$$\dot{i}_2 = \frac{\begin{vmatrix} A & \dot{U}_1 \\ C & -\dot{i}_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & -B \\ C & -D \end{vmatrix}} = \frac{1}{AD - BC} (C\dot{U}_1 + A\dot{i}_1) = B_{21}\dot{U}_1 + B_{22}\dot{i}_1,$$

където

$$B_{11} = \frac{D}{AD - BC}; \quad B_{12} = \frac{B}{AD - BC}; \quad B_{21} = \frac{C}{AD - BC}; \quad B_{22} = \frac{A}{AD - BC}$$

са *B-параметрите* на четириполусника, които са елементи на неговата *B-*

матрица $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$.

При четириполусник от взаимен тип $AD - BC = 1$ и предавателната *B-система* уравнения добива вида:

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = D\dot{U}_1 + B\dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 = C\dot{U}_1 + A\dot{i}_1. \end{cases} \quad (10.12)$$

10.2.4. Хибридни системи уравнения

Съществуват две хибридни (смесени) системи уравнения на един четириполюсник. Едната от тях, наречена *H-система*, отразява връзката между комплексите на първичното напрежение и вторичния ток \dot{U}_1 и \dot{I}_2 и величините \dot{U}_2 и \dot{I}_1 , при участието на *H-параметрите* H_{11} , H_{12} , H_{21} и H_{22} на четириполюсника

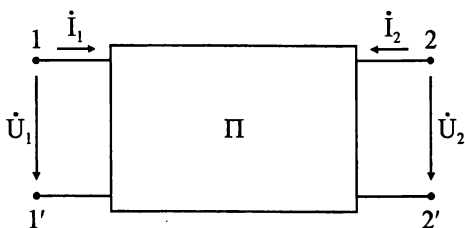
$$\begin{cases} \dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2 \end{cases} \quad (10.13)$$

H_{12} и H_{21} нямат размерност, докато H_{11} има качество на комплексно съпротивление, а H_{22} на комплексна проводимост. За четириполюсник от взаимен тип е изпълнено $H_{12} = H_{21}$. *H-параметрите* са елементи на *H-матрицата* на четириполюсника $H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$.

Втората хибридна система се нарича *G-система* уравнения. Тя показва връзката между комплексите на първичния ток и вторичното напрежение с величините \dot{U}_1 и \dot{I}_2 при участието на *G-параметрите* G_{11} , G_{12} , G_{21} и G_{22} на четириполюсника:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = G_{11}\dot{U}_1 + G_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = G_{21}\dot{U}_1 + G_{22}\dot{I}_2 \end{cases} \quad (10.14)$$

G_{12} и G_{21} нямат размерност, докато G_{11} е с качество на комплексна проводимост, а G_{22} на комплексно съпротивление. За четириполюсник от взаимен тип е изпълнено $G_{12} = G_{21}$. *G-параметрите* са елементи на *G-матрицата* на четириполюсника $G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$.



Фиг. 10.46

В много случаи, особено при анализа на електронни схеми, *H-* и *G-системите* уравнения се дефинират за посоки на токовете и напреженията, както са показани на фиг. 10.46. Важно е, обаче, когато се търсят тези параметри, да се отчитат посоките на токовете и напреженията в съответните схеми.

Пример 10.1. Коэффициентите на даден четириполусник са $A = 1$; $B = 100 \Omega$; $C = j0,01S$; $D = 1 + j$. Да се определят Y , H и G -параметрите на четириполусника.

Решение: Изхожда се от Y -системата уравнения. След съответни преобразувания се достига до:

$$\dot{i}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 - Y_{12}\dot{U}_2 \Rightarrow \dot{i}_1 = Y_{11}\left(\frac{Y_{22}}{Y_{21}}\dot{U}_2 + \frac{1}{Y_{21}}\dot{i}_2\right) - Y_{12}\dot{U}_2,$$

$$\dot{i}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 - Y_{22}\dot{U}_2 \Rightarrow \dot{U}_1 = \frac{Y_{22}}{Y_{21}}\dot{U}_2 + \frac{1}{Y_{21}}\dot{i}_2,$$

$$\dot{U}_1 = \frac{Y_{22}}{Y_{21}}\dot{U}_2 + \frac{1}{Y_{21}}\dot{i}_2,$$

$$\dot{i}_1 = \frac{Y_{11}Y_{22} - Y_{21}Y_{12}}{Y_{21}}\dot{U}_2 + \frac{Y_{11}}{Y_{21}}\dot{i}_2.$$

Отгук

$$A = \frac{Y_{22}}{Y_{21}}; B = \frac{1}{Y_{21}}; C = \frac{Y_{11}Y_{22} - Y_{21}Y_{12}}{Y_{21}}; D = \frac{Y_{11}}{Y_{21}}$$

или

$$Y_{12} = Y_{21} = \frac{1}{B}; Y_{11} = \frac{D}{B}; Y_{22} = \frac{A}{B}.$$

Следователно

$$Y_{12} = Y_{21} = \frac{1}{B} = 0,01S; Y_{11} = \frac{D}{B} = 0,01 + j0,01S; Y_{22} = \frac{A}{B} = 0,01S.$$

Ако се използва H -системата уравнения, след съответни преобразувания се достига до:

$$\dot{U}_1 = H_{11}\dot{i}_1 + H_{12}\dot{U}_2 \Rightarrow \dot{i}_1 = \frac{1}{H_{11}}\dot{U}_1 - \frac{H_{12}}{H_{11}}\dot{U}_2,$$

$$\begin{aligned} \dot{i}_2 = H_{21}\dot{i}_1 + H_{22}\dot{U}_2 &\Rightarrow \dot{i}_2 = \frac{H_{21}}{H_{11}}\dot{U}_1 - \frac{H_{21}H_{12}}{H_{11}}\dot{U}_2 + H_{22}\dot{U}_2 = \\ &= \frac{H_{21}}{H_{11}}\dot{U}_1 + \frac{H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21}}{H_{11}}\dot{U}_2. \end{aligned}$$

Отгук

$$Y_{12} = \frac{H_{12}}{H_{11}}; Y_{21} = \frac{H_{21}}{H_{11}}; Y_{11} = \frac{1}{H_{11}}; Y_{22} = -\frac{H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21}}{H_{11}} \text{ или}$$

$$H_{11} = \frac{1}{Y_{11}}; H_{12} = \frac{Y_{12}}{Y_{11}}; H_{21} = \frac{Y_{21}}{Y_{11}}; H_{22} = -\frac{Y_{11}Y_{22} - Y_{21}Y_{12}}{Y_{11}}.$$

Следователно

$$H_{11} = \frac{1}{Y_{11}} = 50 - j50, \Omega; H_{12} = \frac{Y_{12}}{Y_{11}} = 0,5 - j0,5;$$

$$H_{21} = \frac{Y_{21}}{Y_{11}} = 0,5 - j0,5;$$

$$H_{22} = -\frac{Y_{11}Y_{22} - Y_{21}Y_{12}}{Y_{11}} = -0,005 - j0,005, S.$$

Като се използва G -системата уравнения, след съответни преобразувания се достига до:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 = G_{11}\dot{U}_1 + G_{12}\dot{I}_2 &\Rightarrow \dot{I}_1 = G_{11}\dot{U}_1 - \frac{G_{12}G_{21}}{G_{22}}\dot{U}_1 + \frac{G_{12}}{G_{22}}\dot{U}_2 = \\ &= \frac{G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}}{G_{22}}\dot{U}_1 + \frac{G_{12}}{G_{22}}\dot{U}_2, \end{aligned}$$

$$\dot{U}_2 = G_{21}\dot{U}_1 + G_{22}\dot{I}_2 \Rightarrow \dot{I}_2 = -\frac{G_{21}}{G_{22}}\dot{U}_1 + \frac{1}{G_{22}}\dot{U}_2.$$

Отгук

$$Y_{12} = -\frac{G_{12}}{G_{22}}; Y_{21} = -\frac{G_{21}}{G_{22}}; Y_{11} = \frac{G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}}{G_{22}}; Y_{22} = -\frac{1}{G_{22}}; \text{ и}$$

$$G_{11} = \frac{Y_{11}Y_{22} - Y_{21}Y_{12}}{Y_{22}}; G_{12} = \frac{Y_{12}}{Y_{22}}; G_{21} = \frac{Y_{21}}{Y_{22}}; G_{22} = -\frac{1}{Y_{22}}.$$

Тогава

$$G_{11} = \frac{Y_{11}Y_{22} - Y_{21}Y_{12}}{Y_{22}} = j0,01, S; G_{12} = \frac{Y_{12}}{Y_{22}} = 1;$$

$$G_{21} = \frac{Y_{21}}{Y_{22}} = 1; G_{22} = -\frac{1}{Y_{22}} = -100, \Omega.$$

В табл. 10.1 са дадени връзките между матриците на даден пасивен четириполюсник. Важно е да се отбележи, че знаците на елементите зависят от избраните положителни посоки на токовете и напреженията по отношение на изводите. В случая посоките съответстват на тези от фиг. 10.3, а само за \mathbf{B} -матрицата са използвани посоките от фиг. 10.4а.

Дадена матрица	Y	Z	A	B	H	G
Търсена матрица						
Y	$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det Z} \begin{bmatrix} Z_{22} - Z_{12} & Z_{11} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{B} \begin{bmatrix} D & \det A \\ l & A \end{bmatrix}$	$\frac{1}{B_{22}} \begin{bmatrix} B_{11} & l \\ \det B & B_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{H_{11}} \begin{bmatrix} l & H_{12} \\ H_{21} & H_{11} - \det H \end{bmatrix}$	$\frac{1}{G_{22}} \begin{bmatrix} \det G & -G_{12} \\ -G_{21} & -l \end{bmatrix}$
Z	$\frac{1}{\det Y} \begin{bmatrix} Y_{22} - Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{C} \begin{bmatrix} A & -\det A \\ l & D \end{bmatrix}$	$\frac{1}{B_{21}} \begin{bmatrix} B_{22} & l \\ -\det B & B_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{H_{22}} \begin{bmatrix} \det H & H_{12} \\ H_{21} & H_{11} - l \end{bmatrix}$	$\frac{1}{G_{11}} \begin{bmatrix} l & -G_{12} \\ -G_{21} & -\det G \end{bmatrix}$
A	$\frac{1}{Y_{22}} \begin{bmatrix} Y_{22} & l \\ \det Y & Y_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{Z_{11}} \begin{bmatrix} -Z_{12} & -\det Z \\ -l & -Z_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det B} \begin{bmatrix} B_{22} & B_{12} \\ B_{21} & B_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{H_{21}} \begin{bmatrix} -\det H & H_{11} \\ -H_{22} & l \end{bmatrix}$	$\frac{1}{G_{21}} \begin{bmatrix} l & -G_{12} \\ \det G & -\det G \end{bmatrix}$
B	$\frac{1}{Y_{21}} \begin{bmatrix} Y_{11} & l \\ \det Y & Y_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{Z_{22}} \begin{bmatrix} -Z_{12} & -\det Z \\ -l & -Z_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} D & B \\ C & A \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{H_{12}} \begin{bmatrix} l & H_{11} \\ -H_{22} & -\det H \end{bmatrix}$	$\frac{1}{G_{12}} \begin{bmatrix} -\det G & -G_{22} \\ G_{11} & l \end{bmatrix}$
H	$\frac{1}{Y_{22}} \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & -\det Y \end{bmatrix}$	$\frac{1}{Z_{22}} \begin{bmatrix} \det Z & -Z_{12} \\ -Z_{21} & -l \end{bmatrix}$	$\frac{1}{D} \begin{bmatrix} B & \det A \\ l & -C \end{bmatrix}$	$\frac{1}{B_{11}} \begin{bmatrix} B_{22} & l \\ \det B & -B_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det G} \begin{bmatrix} G_{22} & -G_{12} \\ -G_{21} & G_{11} \end{bmatrix}$
G	$\frac{1}{Y_{21}} \begin{bmatrix} \det Y & Y_{12} \\ Y_{22} & Y_{11} - l \end{bmatrix}$	$\frac{1}{Z_{11}} \begin{bmatrix} l & -Z_{12} \\ -Z_{21} & -\det Z \end{bmatrix}$	$\frac{1}{A} \begin{bmatrix} C & \det A \\ l & -B \end{bmatrix}$	$\frac{1}{B_{22}} \begin{bmatrix} B_{11} & l \\ \det B & -B_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det H} \begin{bmatrix} H_{22} & -H_{12} \\ -\det H & -H_{21} & H_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$

Таблица 1. Връзки между различните матрици за пасивни четириполосници.

10.3. ОПИТНО ОПРЕДЕЛЯНЕ ПАРАМЕТРИТЕ НА ПАСИВНИ ЧЕТИРИПОЛЮСНИЦИ

Опитното определяне на коефициентите на един четириполусник се налага тогава, когато вътрешната му структура е неизвестна. В този случай четириполусникът се разглежда като „черна кутия“ с два входни и два изходни извода, тъй като в действителност съществува реален достъп само до тях.

Изхожда се от A -системата уравнения за пасивен четириполусник, която при захранване откъм първичната страна има вида:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2 \end{cases}$$

При накъсо свързана вторична страна ($\dot{U}_2 = 0$) се дефинира Z_{1k} – комплексно входно съпротивление на четириполусника при късо съединен изход:

$$Z_{1k} = \left(\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right)_{\dot{U}_2=0} = \frac{\dot{U}_{1k}}{\dot{I}_{1k}} = \frac{B}{D}. \quad (10.15)$$

При прекъсване на вторичната страна ($\dot{I}_2 = 0$) се дефинира Z_{10} – комплексно входно съпротивление на четириполусника при прекъсване (празен ход) на изхода:

$$Z_{10} = \left(\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right)_{\dot{I}_2=0} = \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{I}_{10}} = \frac{A}{C}. \quad (10.16)$$

При обратно захранване (откъм вторичната страна), B -системата уравнения има вида:

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = D\dot{U}_1 + B\dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 = C\dot{U}_1 + A\dot{I}_1 \end{cases}$$

Въз основа на тази система, при прекъсване на първичната страна ($\dot{I}_1 = 0$) се дефинира Z_{20} – комплексно входно съпротивление на четириполусника при захранване откъм вторичната страна и прекъсване (празен ход) на първичната страна:

$$Z_{20} = \left(\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \right)_{\dot{I}_1=0} = \frac{\dot{U}_{20}}{\dot{I}_{20}} = \frac{D}{C}. \quad (10.17)$$

Комплексните съпротивления Z_{10} , Z_{1k} и Z_{20} могат да бъдат измерени с използване на волтметър, амперметър и ватметър и подходящо свързана схема.

След отчитането на показанията на трите уреда U , I и P , съответните съпротивления се изчисляват с формулите:

$$z = \frac{U}{I}, \quad \varphi = \arccos \frac{P}{UI}; \quad Z = ze^{j\varphi}.$$

Тъй като косинусът е четна функция, за еднозначното определяне на характера на съпротивленията (ако предварително не са известни по други съобщения), т.е. за знака на съответния фазов ъгъл, се прави допълнително измерване (вж. Ръководство за лабораторни упражнения по теоретична електротехника).

Като се раздели основното уравнение за пасивни четириполюсници от взаимен тип на C^2 , се получава:

$$\frac{1}{C^2} = \frac{AD - BC}{C^2} = \frac{A}{C} \frac{D}{C} - \frac{B}{C} \frac{C}{C} = \frac{A}{C} \frac{D}{C} - \frac{B}{D} \frac{D}{C} = Z_{10} Z_{20} - Z_{1k} Z_{20}.$$

Оттук коефициентът C се изчислява с формулата:

$$C = \pm \frac{1}{\sqrt{Z_{20}(Z_{10} - Z_{1k})}}. \quad (10.18)$$

Като се отчетат (10.15), (10.16) и (10.17), за останалите коефициенти се получава:

$$A = Z_{10}C; \quad D = Z_{20}C; \quad B = Z_{1k}D. \quad (10.19)$$

От (10.18) се вижда, че коефициентът C не може да се изчисли еднозначно, а и изчисленията са доста обременителни. Поради това C може да се определи чрез реализиране на подходяща измервателна постановка при случая на прекъсване откъм вторичната страна. Ако се измерят първичният ток, вторичното напрежение и фазовата разлика между тях (вж. Ръководство за лабораторни упражнения по теоретична електротехника), коефициентът C се определя с формулата:

$$C = \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right)_{i_2=0} = \frac{\dot{I}_{10}}{\dot{U}_{20}} = \frac{I_{10}}{U_{20}} e^{j(\psi_{i_{10}} - \psi_{u_{20}})} = |C| e^{j\alpha} \quad (10.20)$$

След изчисляването му коефициентите A , B и D се определят, като се използват формули (10.19).

Пример 10.2. Данните за опитите на прекъсване, късо съединение и прекъсване на първичната страна при захранване от вторичната са, както следва:

$$U_{10} = 158,1 \text{ V}, I_{10} = 10 \text{ A}, P_{10} = 500 \text{ W}, \varphi_{10} > 0,$$

$$U_{1k} = 126,5 \text{ V}, I_{1k} = 10 \text{ A}, P_{1k} = 400 \text{ W}, \varphi_{1k} > 0,$$

$$U_{20} = 158,1 \text{ V}, I_{20} = 10 \text{ A}, P_{20} = 1500 \text{ W}, \varphi_{20} > 0.$$

Също така е известно, че при опита на прекъсване на вторичната страна, токът i_{10} изостава по фаза от напрежението u_{20} с 45° . Да се определят коефициентите на четириполусника.

Решение: Първо се определят комплексните съпротивления Z_{10} , Z_{1k} и Z_{20} .

$$z_{10} = \frac{U_{10}}{I_{10}} = 15,81 \Omega, \quad \varphi_{10} = +\arccos \frac{P_{10}}{U_{10} I_{10}} = 71^\circ 35'; \quad Z_{10} = z_{10} e^{j\varphi_{10}} = 15,81 e^{j71^\circ 35'} \Omega,$$

$$z_{1k} = \frac{U_{1k}}{I_{1k}} = 12,65 \Omega, \quad \varphi_{1k} = +\arccos \frac{P_{1k}}{U_{1k} I_{1k}} = 71^\circ 35'; \quad Z_{1k} = z_{1k} e^{j\varphi_{1k}} = 12,65 e^{j71^\circ 35'} \Omega,$$

$$z_{20} = \frac{U_{20}}{I_{20}} = 15,81 \Omega, \quad \varphi_{20} = +\arccos \frac{P_{20}}{U_{20} I_{20}} = 18^\circ 25'; \quad Z_{20} = z_{20} e^{j\varphi_{20}} = 15,81 e^{j18^\circ 25'} \Omega.$$

Тогава

$$C = \pm \frac{1}{\sqrt{Z_{20}(Z_{10} - Z_{1k})}} = \pm (0,1 - j0,1) S = \begin{cases} 0,142 e^{-j45^\circ} S \\ 0,142 e^{j135^\circ} S \end{cases}$$

Тъй като

$$C = \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right)_{i_2=0} = \frac{\dot{I}_{10}}{\dot{U}_{20}} = \frac{I_{10}}{U_{20}} e^{j(\psi_{i_{10}} - \psi_{u_{20}})} = |C| e^{j\alpha}$$

и при опита на прекъсване на вторичната страна токът i_{10} изостава по фаза от напрежението u_{20} с 45° , аргументът на C е отрицателно число (-45°) или

$$C = 0,142 e^{-j45^\circ} S.$$

Отгук

$$A = Z_{10} C = (2 + j); \quad D = Z_{20} C = (2 - j); \quad B = Z_{1k}; \quad D = 20 + j20, \Omega.$$

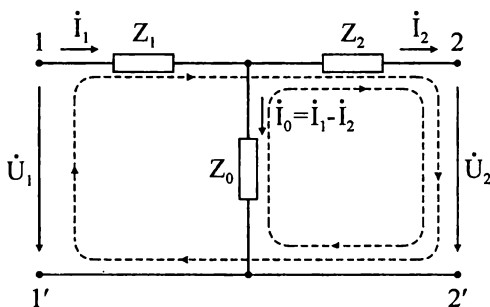
10.4. ЗАМЕСТВАЩИ СХЕМИ НА ПАСИВНИ ЧЕТИРИПОЛУСНИЦИ

В този параграф се разглеждат заместващи схеми от „ T “ и „ L “ тип, свързани с т.нар. T - и L -четириполусници, както и заместващи схеми, базирани на системите уравнения на пасивни четириполусници. Заместващите схеми са

еквивалентни на даден четириполюсник по отношение във външната верига за четириполюсника верига. В този контекст режимът във външната верига не се променя при използване на заместващите схеми. Това е вярно, ако комплексите на токовете и напреженията, свързани с двойката изводи на четириполюсника, не се променят при използването на заместващите схеми.

10.4.1. *T*-четириполюсник

Схемата на *T*-четириполюсника е дадена на фиг. 10.5а.



Фиг. 10.5а

Първата задача, която се разглежда, е по зададена заместваща схема на четириполюсника да се определят някои от параметрите, напр. коефициентите. Втората задача е при известни коефициенти на четириполюсника да се определят комплексните съпротивления на заместващата схема.

Като се използват първият и вторият закон на Кирхоф, както и законът на Ом, се получава:

$$\begin{aligned}
 \dot{I}_1 &= \dot{I}_2 + \dot{I}_0, \\
 \dot{I}_0 &= \frac{\dot{U}_0}{Z_0} = \frac{\dot{U}_2 + Z_2 \dot{I}_2}{Z_0}, \\
 \dot{I}_1 &= \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = \dot{I}_2 + \frac{\dot{U}_2 + Z_2 \dot{I}_2}{Z_0} = \frac{1}{Z_0} \dot{U}_2 + \left(1 + \frac{Z_2}{Z_0}\right) \dot{I}_2, \\
 \dot{U}_1 &= Z_1 \dot{I}_1 + Z_2 \dot{I}_2 + \dot{U}_2, \\
 \dot{U}_1 &= Z_1 \left[\frac{1}{Z_0} \dot{U}_2 + \left(1 + \frac{Z_2}{Z_0}\right) \dot{I}_2 \right] + Z_2 \dot{I}_2 + \dot{U}_2 = \\
 &= \left(1 + \frac{Z_1}{Z_0}\right) \dot{U}_2 + \left(Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_0}\right) \dot{I}_2.
 \end{aligned}$$

След съпоставка с *A*-системата уравнения (10.7) се получава:

$$A = \left(1 + \frac{Z_1}{Z_0}\right); B = \left(Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_0}\right);$$

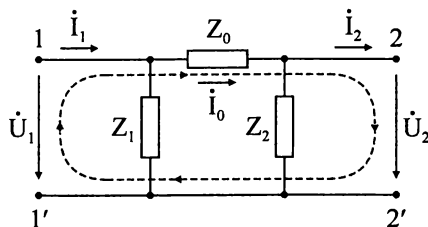
$$C = \frac{1}{Z_0}; D = \left(1 + \frac{Z_2}{Z_0}\right).$$
(10.21)

Обратните зависимости следват от зависимостите за A , C и D . Уравнението за B не се използва, тъй като то е зависимо от уравненията за A , C и D ($AD - BC = 1$). Разгледаният T -четириполюсник е от взаимен тип и има три независими елемента (комплексни съпротивления)

$$Z_0 = \frac{1}{C}; Z_1 = \frac{A-1}{C}; Z_2 = \frac{D-1}{C}.$$
(10.22)

10.4.2. Π -четириполюсник

Схемата на Π -четириполюсника е показана на фиг. 10.5б.



Фиг. 10.5б

Разглеждат се същите задачи като при T -четириполюсника. Както и в предишния случай, използваме основните закони за електрически вериги, за да опишем схемата и после изразяваме входните величини посредством изходните:

$$i_0 = i_2 + \frac{\dot{U}_2}{Z_2},$$

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 + Z_0 i_0 = \dot{U}_2 + Z_0 \left(i_2 + \frac{\dot{U}_2}{Z_2} \right),$$

$$\dot{U}_1 = \left(1 + \frac{Z_0}{Z_2} \right) \dot{U}_2 + Z_0 i_2,$$

$$i_1 = i_0 + \frac{\dot{U}_1}{Z_1} = i_2 + \frac{\dot{U}_2}{Z_2} + \frac{1}{Z_1} \left[\left(1 + \frac{Z_0}{Z_2} \right) \dot{U}_2 + Z_0 i_2 \right],$$

$$i_1 = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{Z_0}{Z_1 Z_2} \right) \dot{U}_2 + \left(1 + \frac{Z_0}{Z_1} \right) i_2.$$

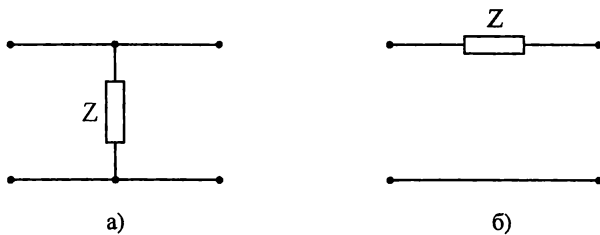
След съпоставка с A -системата уравнения (10.7) се получава:

$$\begin{aligned} A &= \left(1 + \frac{Z_0}{Z_2} \right); \quad B = Z_0; \\ C &= \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{Z_0}{Z_1 Z_2} \right); \\ D &= \left(1 + \frac{Z_0}{Z_1} \right). \end{aligned} \quad (10.23)$$

Обратните зависимости следват непосредствено от уравненията за A , B и D . Уравнението за C не се използва, тъй като то е зависимо от уравненията за A , B и D ($AD - BC = 1$). Разгледаният Π -четириполюсник също е от взаимен тип и има три независими елемента (комплексни съпротивления):

$$Z_0 = B; \quad Z_1 = \frac{B}{D-1}; \quad Z_2 = \frac{B}{A-1}. \quad (10.24)$$

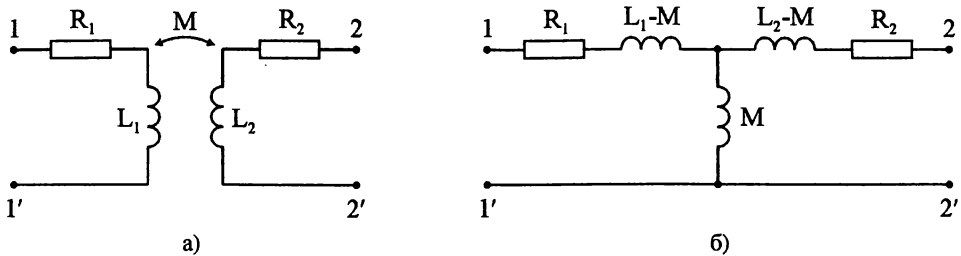
На практика често се използват два още по-прости четириполюсника, състоящи се само от един елемент, т.нар. напречен и надлъжен четириполюсник (фиг. 10.6а и 10.6б).



Фиг. 10.6

Техните коефициенти могат да бъдат определени с формулите (10.21), респ. (10.23), ако се разгледат като частни случаи на T - или Π -четириполюсниците.

Пример 10.3. Трансформаторът от фиг. 10.7а е със следните параметри: $R_1 = 6 \Omega$; $R_2 = 8 \Omega$; $L_1 = 1,6 \text{ мН}$; $L_2 = 0,4 \text{ мН}$. Коефициентът на връзката между двете бобини е $k = 0,25$. Да се определят коефициентите на еквивалентния четириполюсник (трансформаторът, разгледан между двойката изводи 1, 1' и 2, 2'), ако работната честота е $f = 1591 \text{ Нз}$.



Фиг. 10.7

Решение: Първо се определя коефициентът на взаимна индукция M . От $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ следва, че $M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0,2 \text{ мН}$. Също така $\omega = 2\pi f = 10^4 \text{ s}^{-1}$.

За трансформатора използваме заместващата схема без индуктивна връзка, дадена на фиг. 10.7б. По същество това е T -четириполусник с параметри:

$$Z_1 = R_1 + j\omega(L_1 - M) = 6 + j14, \Omega,$$

$$Z_2 = R_2 + j\omega(L_2 - M) = 8 + j2, \Omega,$$

$$Z_0 = j\omega M = j2, \Omega.$$

Следователно

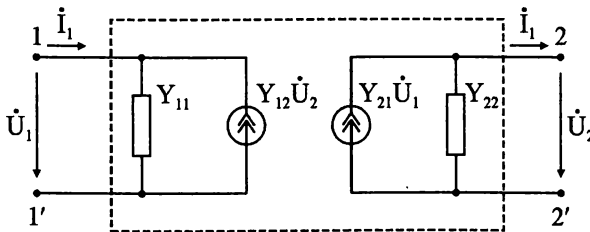
$$A = \left(1 + \frac{Z_1}{Z_0}\right) = 8 - j3; \quad B = \left(Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_0}\right) = 76 + j6, \Omega;$$

$$C = \frac{1}{Z_0} = -j0,5 \text{ S}; \quad D = \left(1 + \frac{Z_2}{Z_0}\right) = 2 - j4.$$

10.4.3. Заместващи схеми със зависими източници, базирани на системите уравнения на четириполусника

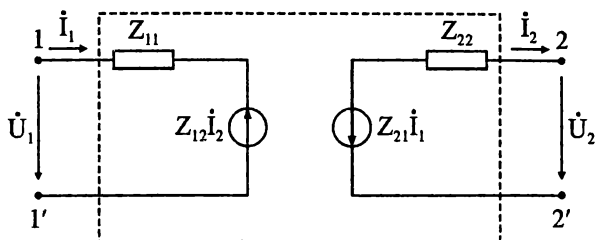
Следващите четири заместващи схеми могат да бъдат получени непосредствено от системите уравнения на четириполусниците.

Y -системата уравнения отговаря на заместващата схема от фиг. 10.8а, а Z -системата уравнения отговаря на заместващата схема от фиг. 10.8б.

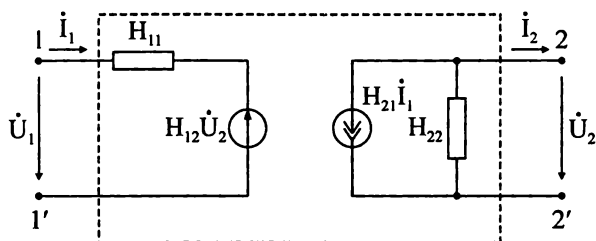


Фиг. 10.8а

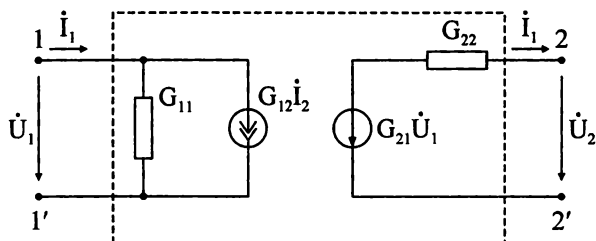
H - и G -системите уравнения отговарят на заместващите схеми от фиг. 10.8в и г.



б)



в)



г)

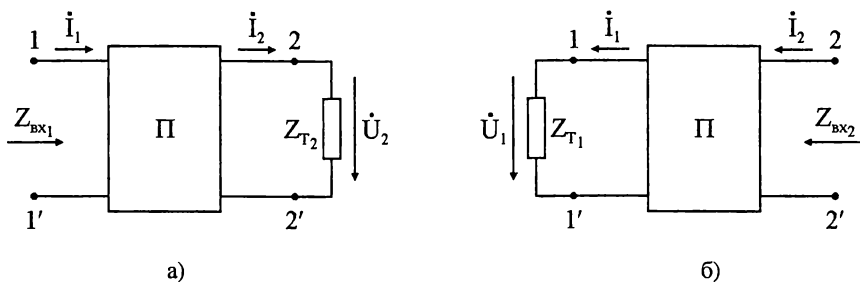
Фиг. 10.8

10.5. КОМПЛЕКСНИ ВХОДНИ, ПОВТОРНИ И ХАРАКТЕРИСТИЧНИ СЪПРОТИВЛЕНИЯ НА ПАСИВЕН ЧЕТИРИПОЛЮСНИК

Тези съпротивления се дефинират по отношение на една от страните на четириполусника при определени условия (натоварване) на другата страна.

10.5.1. Комплексни входни съпротивления

Разглежда се пасивен четириполусник, към чиято вторична страна е включено комплексно товарно съпротивление Z_{T2} (фиг. 10.9а).



Фиг. 10.9

В случая връзката между вторичното напрежение и вторичния ток се дава със закона на Ом:

$$\dot{U}_2 = Z_{T2} \dot{I}_2.$$

Този резултат се замества в *A*-системата уравнения и се получава:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{U}_1 = AZ_{T2}\dot{I}_2 + B\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = CZ_{T2}\dot{I}_2 + D\dot{I}_2 \end{cases}.$$

Комплексното входно съпротивление на четириполюсника при захранване откъм първичната страна е

$$Z_{\text{вх1}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{AZ_{T2} + B}{CZ_{T2} + D}. \quad (10.25)$$

При $Z_{T2} = 0$, $Z_{\text{вх1}} = Z_{\text{lk}} = \frac{B}{D}$, а при $Z_{T2} = \infty$, $Z_{\text{вх1}} = Z_{\text{t0}} = \frac{A}{C}$.

При захранване откъм вторичната страна и товар в първичната (фиг. 10.9б) важи равенството $\dot{U}_1 = Z_{T1}\dot{I}_1$.

Ако този резултат се замести в *B*-системата уравнения, се получава:

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = D\dot{U}_1 + B\dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 = C\dot{U}_1 + A\dot{I}_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{U}_2 = DZ_{T1}\dot{I}_1 + B\dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 = CZ_{T1}\dot{I}_1 + A\dot{I}_1 \end{cases}.$$

Комплексното входно съпротивление на четириполюсника при захранване откъм вторичната страна е

$$Z_{\text{вх2}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \frac{DZ_{T1} + B}{CZ_{T1} + A}. \quad (10.26)$$

10.5.2. Комплексни повторни съпротивления

Комплексното съпротивление $Z_{\text{вх1}}$ се нарича *комплексно първично повторно съпротивление*, ако $Z_{\text{вх1}} = Z_{T2}$, т.е. $Z_{\text{вх1}} = Z_{T2} = Z_{\Pi1}$. След заместване в (10.25) се получава:

$$Z_{\Pi1} = \frac{AZ_{\Pi1} + B}{CZ_{\Pi1} + D},$$

откъдето

$$CZ_{\Pi1}^2 + (D - A)Z_{\Pi1} - B = 0. \quad (10.27)$$

Комплексното съпротивление $Z_{\text{вх2}}$ се нарича *комплексно вторично повторно съпротивление*, ако $Z_{\text{вх2}} = Z_{T1}$, т.е. $Z_{\text{вх2}} = Z_{T1} = Z_{\Pi2}$. След заместване в (10.26) се получава:

$$Z_{\Pi2} = \frac{DZ_{\Pi2} + B}{CZ_{\Pi2} + A},$$

откъдето

$$CZ_{\Pi2}^2 + (A - D)Z_{\Pi2} - B = 0. \quad (10.28)$$

Решенията на (10.27) и (10.28) са:

$$Z_{\Pi1} = \frac{(A - D) \pm \sqrt{(A - D)^2 + 4BC}}{2C} = -Z_{\Pi2}.$$

От физическа гледна точка трябва да се вземе този знак пред корена, който води до положителна реална част на $Z_{\Pi1}$, респ. $Z_{\Pi2}$.

При взаимен четириполусник е в сила равенството $AD - BC = 1$. Тогава

$$Z_{\Pi1} = \frac{(A - D) \pm \sqrt{(A + D)^2 - 4}}{2C}.$$

При симетричен четириполусник $Z_{\text{вх1}} = Z_{\text{вх2}} = \frac{AZ_T + B}{CZ_T + D}$ и тогава

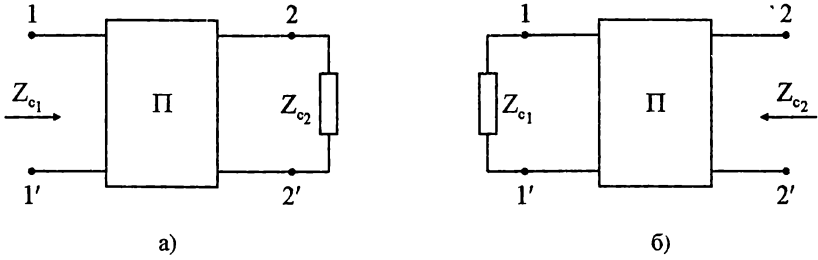
$$Z_{\Pi1} = Z_{\Pi2} = \sqrt{\frac{B}{C}}.$$

10.5.3. Комплексни характеристични съпротивления

Комплексните характеристични съпротивления Z_{C1} и Z_{C2} на един четириполусник се дефинират по начина, показан на фиг. 10.10а и б, а именно:

$$Z_{\text{вх1}} = Z_{C1} \quad Z_{T2} = Z_{C2} \quad (10.29)$$

$$Z_{\text{вх2}} = Z_{C2} \quad Z_{T1} = Z_{C1}. \quad (10.30)$$



Фиг. 10.10

Натоварването на четириполносника е съгласувано, ако товарът му е равен на характеристикното му съпротивление.

След заместване на (10.29) и (10.30) в изразите за $Z_{\text{вх1}}$ и $Z_{\text{вх2}}$ се получава:

$$Z_{C1} = \frac{AZ_{C2} + B}{CZ_{C2} + D} \quad \text{и} \quad Z_{C2} = \frac{DZ_{C1} + B}{CZ_{C1} + A},$$

откъдето следва

$$CZ_{C1}Z_{C2} + DZ_{C1} = AZ_{C2} + B \quad (10.31)$$

и

$$CZ_{C1}Z_{C2} + AZ_{C2} = DZ_{C1} + B. \quad (10.32)$$

След изваждане на (10.31) и (10.32) се достига до

$$DZ_{C1} - AZ_{C2} = AZ_{C2} - DZ_{C1},$$

откъдето

$$DZ_{C1} = AZ_{C2}, \quad (10.33)$$

а след събиране на (10.31) и (10.32) се получава $2CZ_{C1}Z_{C2} = 2B$ т.е.

$$CZ_{C1}Z_{C2} = B. \quad (10.34)$$

Накрая умножението на (10.33) с (10.34) и деленето на (10.33) с (10.34) дава характеристикните съпротивления:

$$Z_{C1} = \sqrt{\frac{AB}{CD}}, \quad Z_{C2} = \sqrt{\frac{DB}{CA}}. \quad (10.35)$$

Трябва да се отбележи, че физически смисъл има онзи знак пред корените, който отговаря на положителен знак на реалните части на Z_{C1} и Z_{C2} .

Когато четириполусникът е симетричен

$$Z_{C1} = Z_{C2} = Z_{П1} = Z_{П2} = Z_C = \sqrt{\frac{B}{C}}.$$

10.6. КОНСТАНТА НА РАЗПРОСТРАНЕНИЕ НА ВЗАИМЕН ЧЕТИРИПОЛЮСНИК. ХИПЕРБОЛИЧЕН ВИД НА А-СИСТЕМАТА УРАВНЕНИЯ НА ВЗАИМЕН ЧЕТИРИПОЛЮСНИК

10.6.1. Константа на разпространение на взаимен четириполусник

Константата на разпространение γ на взаимен четириполусник се дефинира посредством два напълно равностойни изрази:

$$ch\gamma = \sqrt{AD} \quad \text{или} \quad sh\gamma = \sqrt{BC}.$$

Като се отчете, че $ch^2\gamma - sh^2\gamma = 1$ и познатата връзка между коефициентите на взаимен четириполусник $AD - BC = 1$ се вижда, че ако γ се дефинира чрез $ch\gamma = \sqrt{AD}$, то се стига до $sh\gamma = \sqrt{BC}$ и обратно.

Въз основа на зависимостите

$$2ch\gamma = e^\gamma + e^{-\gamma}$$

$$2sh\gamma = e^\gamma - e^{-\gamma}$$

се намира

$$e^\gamma = ch\gamma + sh\gamma = \sqrt{AD} + \sqrt{BC},$$

или

$$\gamma = \ln(\sqrt{AD} + \sqrt{BC}). \quad (10.36)$$

В общия случай γ е комплексно число: $\gamma = \alpha + j\beta$. Реалната му част α се нарича константа на затихване, а имагинерната му част β се нарича фазова константа. Ако $\sqrt{AD} + \sqrt{BC}$ се представи в експоненциална форма

$$\sqrt{AD} + \sqrt{BC} = re^{j\theta},$$

$$e^\gamma = e^{(\alpha + j\beta)} = re^{j\theta},$$

то

откъдето

$$r = e^{\alpha} \Rightarrow \alpha = \ln r$$

$$e^{j\theta} = e^{j\beta} \Rightarrow \beta = \theta + 2k\pi.$$

В горната формула k е цяло число, а компонентът $2k\pi$ се въвежда, за да отчете многозначността на логаритмичната функция.

10.6.2. Хиперболичен вид на A -системата уравнения на взаимен четириполусник

Характеристични величини на един четириполусник са комплексните характеристични съпротивления Z_{C1} и Z_{C2} и константата на разпространение γ .

Хиперболичният вид на A -системата уравнения се получава, когато коефициентите на четириполусника A , B , C и D се изразят чрез характеристичните величини. Това е възможно, тъй като независимите коефициенти за даден взаимен четириполусник са точно колкото са характеристичните величини.

Изхожда се от зависимостите

$$Z_{C1} = \sqrt{\frac{AB}{CD}}, \quad (10.37)$$

$$Z_{C2} = \sqrt{\frac{DB}{CA}}. \quad (10.38)$$

След умножение и деление на (10.37) с (10.38) се получава:

$$Z_{C1}Z_{C2} = \frac{B}{C}, \quad \frac{Z_{C1}}{Z_{C2}} = \frac{A}{D}$$

или

$$\sqrt{\frac{B}{C}} = \sqrt{Z_{C1}Z_{C2}}, \quad (10.39)$$

$$\sqrt{\frac{A}{D}} = \sqrt{\frac{Z_{C1}}{Z_{C2}}}. \quad (10.40)$$

Като се отчете, че

$$\sqrt{BC} = sh\gamma \quad (10.41)$$

$$\sqrt{AD} = ch\gamma \quad (10.42)$$

следва

$$A = ch\gamma \sqrt{\frac{Z_{C1}}{Z_{C2}}}, \quad D = ch\gamma \sqrt{\frac{Z_{C2}}{Z_{C1}}}, \quad B = sh\gamma \sqrt{Z_{C1}Z_{C2}}, \quad C = sh\gamma \frac{1}{\sqrt{Z_{C1}Z_{C2}}}. \quad (10.43)$$

Получените изрази се заместват в (10.7) и се получава хиперболичният вид на A -системата уравнения на взаимен четириполусник:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \left(\sqrt{\frac{Z_{C1}}{Z_{C2}}} \operatorname{ch} \gamma \right) \dot{U}_2 + \left(\sqrt{Z_{C1} Z_{C2}} \operatorname{sh} \gamma \right) \dot{i}_2 \\ \dot{i}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{Z_{C1} Z_{C2}}} \operatorname{sh} \gamma \right) \dot{U}_2 + \left(\sqrt{\frac{Z_{C2}}{Z_{C1}}} \operatorname{ch} \gamma \right) \dot{i}_2 . \end{cases}$$

След съответни преобразувания се стига до окончателния вид:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \sqrt{\frac{Z_{C1}}{Z_{C2}}} \left[(\operatorname{ch} \gamma) \dot{U}_2 + (Z_{C2} \operatorname{sh} \gamma) \dot{i}_2 \right] \\ \dot{i}_1 = \sqrt{\frac{Z_{C2}}{Z_{C1}}} \left[\left(\frac{\operatorname{sh} \gamma}{Z_{C2}} \right) \dot{U}_2 + (\operatorname{ch} \gamma) \dot{i}_2 \right] . \end{cases} \quad (10.44)$$

С цел изясняването на физическия смисъл на константата на затихването и фазовата константа се разглеждат два частни случая.

а) съгласувано натоварен четириполусник

В този случай $Z_{T2} = Z_{C2}$ и тогава $\dot{U}_2 = Z_{C2} \dot{i}_2$ или $\dot{i}_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_{C2}}$. След отчитането на тези съотношения в (10.44) се получава:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \sqrt{\frac{Z_{C1}}{Z_{C2}}} \dot{U}_2 (\operatorname{ch} \gamma + \operatorname{sh} \gamma) = \sqrt{\frac{Z_{C1}}{Z_{C2}}} e^{\gamma} \dot{U}_2 \\ \dot{i}_1 = \sqrt{\frac{Z_{C2}}{Z_{C1}}} \dot{i}_2 (\operatorname{sh} \gamma + \operatorname{ch} \gamma) = \sqrt{\frac{Z_{C2}}{Z_{C1}}} e^{\gamma} \dot{i}_2 . \end{cases} \quad (10.45)$$

От (10.45) следва $\frac{\dot{U}_1 \dot{i}_1}{\dot{U}_2 \dot{i}_2} = e^{2\gamma}$

или

$$\frac{\dot{U}_1 \dot{i}_1}{\dot{U}_2 \dot{i}_2} = \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} e^{j(\psi_{u1} + \psi_{i2} - \psi_{u2} - \psi_{i1})} = \frac{S_1}{S_2} e^{j(\psi_{u1} + \psi_{i2} - \psi_{u2} - \psi_{i1})} = e^{2\gamma} = e^{2(\alpha + j\beta)},$$

откъдето:

$$e^{2\alpha} = \frac{S_1}{S_2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \ln \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} \quad (10.46)$$

$$\beta = \frac{\psi_{u_1} + \psi_{u_2} - \psi_{i_1} - \psi_{i_2}}{2}. \quad (10.47)$$

От (10.46) се вижда, че константата на затихването на съгласувано натоварен четириполусник е свързана със загубите на пълна мощност в него. Измервателната единица е [В] *Бел* или [dB] *децибел* и α има стойност 1 В, ако отношението на пълните мощности на входа и изхода на съгласувано натоварен четириполусник е 10. Също така може да се използва и единицата [Np] *Непер*, която е свързана с отношение e^2 на двете мощности. Връзката между двете единици е $1 \text{ В} = \ln \sqrt{10} \text{ Np} \approx 1,15 \text{ Np}$.

б) съгласувано натоварен симетричен четириполусник

В този случай $Z_{C1} = Z_{C2} = Z_C$. Тогава:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = (ch\gamma)\dot{U}_2 + (Z_C sh\gamma)\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = \left(\frac{sh\gamma}{Z_C}\right)\dot{U}_2 + (ch\gamma)\dot{I}_2. \end{cases}$$

Като се отчете, че $\dot{U}_2 = Z_C \dot{I}_2$ или $\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_C}$, се получава:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = (ch\gamma)\dot{U}_2 + (sh\gamma)\dot{U}_2 = e^\gamma \dot{U}_2 \\ \dot{I}_1 = (sh\gamma)\dot{I}_2 + (ch\gamma)\dot{I}_2 = e^\gamma \dot{I}_2. \end{cases} \quad (10.48)$$

т.е.

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = e^\gamma \quad \text{и} \quad \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = e^\gamma.$$

Тъй като $e^\gamma = e^{(\alpha + j\beta)} = e^\alpha e^{j\beta}$ и $\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{U_1}{U_2} e^{j(\psi_{u_1} - \psi_{u_2})}$, $\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{I_1}{I_2} e^{j(\psi_{i_1} - \psi_{i_2})}$.

Тогава:

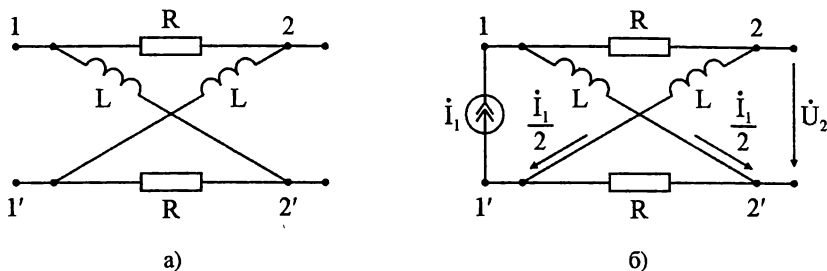
$$\alpha = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{I_1}{I_2}, \quad (10.49)$$

$$\beta = (\psi_{u_1} - \psi_{u_2}) = (\psi_{i_1} - \psi_{i_2}). \quad (10.50)$$

От (10.49) следва, че константата на затихването α показва как се изменят (затихват) амплитудите на напрежението и тока при съгласувано натоварен, взаимен, пасивен и симетричен четириполусник. Фазовата константа β

показва как се изменят фазите на напрежението и тока поради влиянието на съгласувано натоварения, взаимен, пасивен и симетричен четириполусник. α се измерва в [Np] или [B], а β се измерва в радиани.

Пример 10.4. За четириполусника от фиг. 10.11а $R = 10\Omega$ и $X_L = 10\Omega$. Да се определят коефициентите му и характеристикните му параметри.



Фиг. 10.11

Решение: За определяне на коефициента C се използва дефиниционният израз:

$$C = \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right)_{i_2=0} = \frac{\dot{I}_{10}}{\dot{U}_{20}} = \frac{I_{10}}{U_{20}} e^{j(\psi_{i_{10}} - \psi_{u_{20}})} = |C| e^{j\alpha},$$

т.е. C се определя при опит на прекъсване на вторичната страна, както е показано на схемата от фиг. 10.11б.

Вижда се, че двата RL двуполусника са паралелно свързани на източника на ток и тъй като параметрите им са еднакви, токът във всеки от тях е половината от общия ток \dot{I}_1 .

Тогава за \dot{U}_2 се получава $\dot{U}_2 = jX_L(\dot{I}_1/2) - R(\dot{I}_1/2) = (-R + jX_L)(\dot{I}_1/2)$.

Следователно:

$$C = \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right)_{i_2=0} = \frac{2}{-R + jX_L} = \frac{2}{-10 + j10} = -0,1 - j0,1, S.$$

Понеже четириполусникът е симетричен, за определяне на останалите коефициенти се използват само съпротивленията Z_{10} и Z_{1k} . Както беше споменато по-горе, при прекъсване на вторичната страна двата еднакви RL двуполусника са паралелно свързани и тогава:

$$Z_{10} = \frac{R + jX_L}{2} = 5 + j5, \Omega.$$

При късо съединение на вторичната страна двата еднакви паралелни RL двуполусника се оказват свързани последователно. Тогава:

$$Z_{1k} = \frac{RjX_L}{R + jX_L} + \frac{RjX_L}{R + jX_L} = 10 + j10, \Omega.$$

Като знаем коефициента C и съпротивления Z_{10} и Z_{1k} , останалите коефициенти се получават с използване на познатите формули

$$A = Z_{10}C = -j; D = A = -j; B = Z_{1k}; D = 10 - j10, \Omega.$$

За характеристичните параметри се получава, както следва:

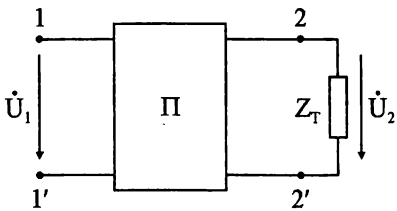
$$Z_{C1} = Z_{C2} = \sqrt{\frac{B}{C}} = \sqrt{\frac{10 - j10}{-0,1 - j0,1}} = 10e^{j45^\circ} = 5\sqrt{2} + j5\sqrt{2}, \Omega,$$

$$\gamma = \ln(\sqrt{AD} + \sqrt{BC}) = 0,88 - j90^\circ.$$

10.7. КОЕФИЦИЕНТИ НА ПРЕДАВАНЕ НА ПАСИВНИ ЧЕТИРИПОЛЮСНИЦИ

10.7.1. Комплексен коефициент на предаване по напрежение

Разглежда се пасивен четириполусник, натоварен откъм вторичната страна с комплексно съпротивление Z_T (фиг. 10.12a).



Фиг. 10.12a

Нека на входа на четириполусника действа източник на е.д.н., на който съответства комплексът на напрежението \dot{U}_1 .

Комплексният коефициент на предаване по напрежение \dot{K}_u се дефинира като отношение на комплекса на изходното към комплекса на входното напрежение:

$$\dot{K}_u = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}. \quad (10.51)$$

За да се изведе зависимостта на \dot{K}_u от коефициентите на четириполусника, в първото уравнение на A -системата \dot{I}_2 се замества с $\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_T}$ и се получава:

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 = A\dot{U}_2 + B\frac{\dot{U}_2}{Z_T} = \frac{AZ_T + B}{Z_T}\dot{U}_2.$$

Отгук

$$\dot{K}_u = \frac{U_2}{U_1} = \frac{Z_T}{AZ_T + B}. \quad (10.52)$$

При прекъсване на вторичната страна $Z_T \rightarrow \infty$ и тогава:

$$\dot{K}_{u\infty} = \lim_{Z_T \rightarrow \infty} \dot{K}_u = \frac{1}{A}. \quad (10.53)$$

10.7.2. Комплексен коефициент на предаване по ток

Разглежда се пасивен четириполюсник, на товарен откъм вторичната страна с комплексно съпротивление Z_T (фиг. 10.12б), на входа на който действа източник на ток \dot{I}_1 .

Комплексният коефициент на предаване по ток \dot{K}_i се дефинира като отношение на комплекса на изходния ток към комплекса на входния ток:

$$\dot{K}_i = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}. \quad (10.54)$$

За да се изведе зависимостта на \dot{K}_i от коефициентите на четириполюсника, във второто уравнение на A -системата \dot{U}_2 се замества с $\dot{U}_2 = Z_T \dot{I}_2$ и се получава:

$$\dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2 = CZ_T\dot{I}_2 + D\dot{I}_2 = (CZ_T + D)\dot{I}_2.$$

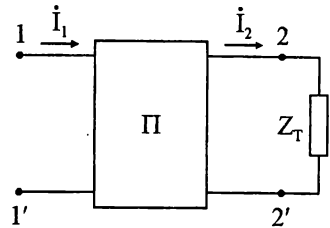
Отгук

$$\dot{K}_i = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{1}{CZ_T + D}. \quad (10.55)$$

При късо съединение на вторичната страна $Z_T \rightarrow 0$ и тогава

$$\dot{K}_{i0} = \lim_{Z_T \rightarrow 0} \dot{K}_i = \frac{1}{D}.$$

При симетричен четириполюсник $A = D$ и тогава комплексният коефициент на предаване по напрежение при прекъсване на вторичната страна е равен на комплексния коефициент на предаване по ток при късо съединение на вторичната страна



Фиг. 10.12б

$$\dot{K}_{\infty} = \frac{1}{A} = \frac{1}{D} = \dot{K}_{i0}. \quad (10.56)$$

10.8. СЪЕДИНЕНИЯ НА ПАСИВНИ ЧЕТИРИПОЛЮСНИЦИ

Както беше споменато в началото на тази глава, теорията на четириполусниците позволява изследванията на някои сложни вериги да бъдат извършени на база на представянето на тези вериги като подходящи съчетания (съединения) на четириполусници. При определени условия теорията на четириполусниците позволява да бъдат намерени входно-изходните зависимости за дадена сложна верига на база на параметрите на съставните четириполусници. Предмет на разглеждане в тази част са различните съединения на четириполусниците. Основно ще бъдат представени верижното, паралелното и последователното свързване на пасивни четириполусници.

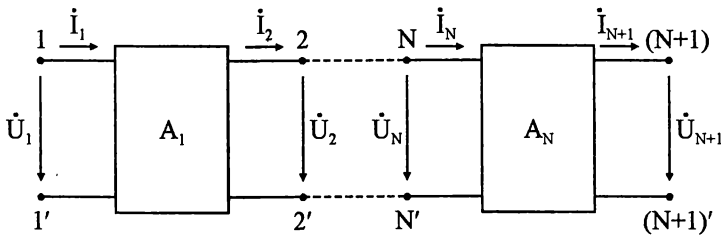
Трябва да се има предвид, че когато се свързват реални схеми, които се представят като четириполусници, свързването трябва да бъде регулярно.

Дадено свързване е *регулярно*, ако осъществяването му не води до преразпределяне на токовете и напреженията в съставните четириполусници, а само пропорционалното им изменение.

Докато верижното съединение винаги е регулярно, за останалите свързвания трябва да се прави проверка за регулярност. Повече подробности за измерванията могат да бъдат намерени в Ръководството за лабораторни упражнения по теоретична електротехника.

10.8.1. Верижно съединение

При верижното съединение изходът на всеки от четириполусниците е свързан с входа на следващия и т.н., както е показано на фиг. 10.13а.



Фиг. 10.13а

За четириполусниците от фигурата може да се запише:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{i}_1 \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix} = A_2 \begin{bmatrix} \dot{U}_3 \\ \dot{i}_3 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{bmatrix} \dot{U}_N \\ \dot{i}_N \end{bmatrix} = A_N \begin{bmatrix} \dot{U}_{N+1} \\ \dot{i}_{N+1} \end{bmatrix}, \quad (10.57)$$

където A_1, A_2, \dots, A_N са A -матриците на съставните четириполусници. Чрез последователно заместване на всяко от следващите в предишното уравнение от (10.57) се стига до

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{i}_1 \end{bmatrix} = A_1 A_2 \dots A_N \begin{bmatrix} \dot{U}_{N+1} \\ \dot{i}_{N+1} \end{bmatrix}. \quad (10.58)$$

Цялото верижно съединение може да бъде разгледано като един четириполусник по отношение на изводите 1, 1' и $N+1, (N+1)'$ и за него да се запише следната A -система уравнения

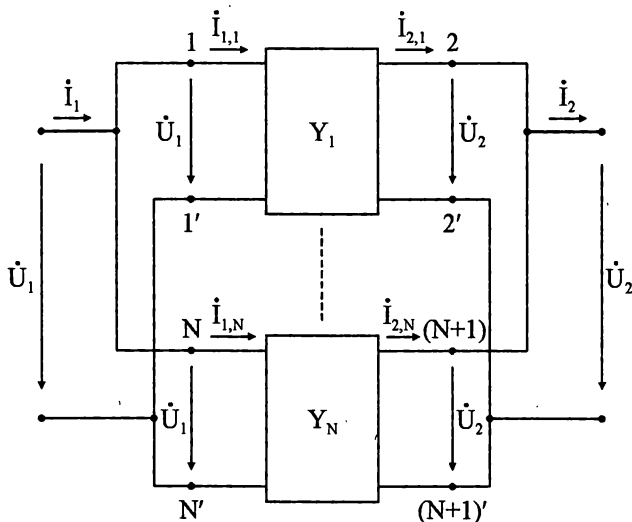
$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{i}_1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \dot{U}_{N+1} \\ \dot{i}_{N+1} \end{bmatrix}. \quad (10.59)$$

След съпоставка на (10.58) и (10.59) се вижда, че замяната на верижното съединение с един нов четириполусник ще бъде еквивалентна, ако този четириполусник има A -матрица, която е произведение на A -матриците на съставните четириполусници в реда, в който са свързани, т.е.

$$A = A_1 A_2 \dots A_N. \quad (10.60)$$

10.8.2. Паралелно съединение

При паралелното съединение всички входове на четириполусниците са съединени паралелно и всичките им изходи са съединени паралелно, както е показано на фиг. 10.136.



Фиг. 10.136

За всеки от съставните четириполусници може да се запише Y -системата уравнения

$$\dot{I}_k = Y_k \dot{U}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (10.61)$$

където $\dot{I}_k = \begin{bmatrix} \dot{I}_{1,k} \\ \dot{I}_{2,k} \end{bmatrix}$, $k = 1, 2, \dots, N$ са векторите на първичните и вторичните токове на съставните четириполусници, а

$$\dot{U}_k = \begin{bmatrix} \dot{U}_{1,k} \\ \dot{U}_{2,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \dot{U}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (10.62)$$

са векторите на първичните и вторичните напрежения, които при този начин на свързване са равни.

Първият закон на Кирхоф за общите възли на входа и изхода, може да се запише в следната векторна форма $\dot{I} = \sum_{k=1}^N \dot{I}_k$.

Като се отчетат (10.61) и (10.62), окончателно се получава

$$\dot{I} = \sum_{k=1}^N \dot{I}_k = \sum_{k=1}^N Y_k \dot{U}_k = \left(\sum_{k=1}^N Y_k \right) \dot{U}. \quad (10.63)$$

Цялото паралелно съединение може да бъде разгледано като един четириполусник по отношение на изводите 1, 1' и N+1, (N+1)' и за него да се запише следната Y -система уравнения:

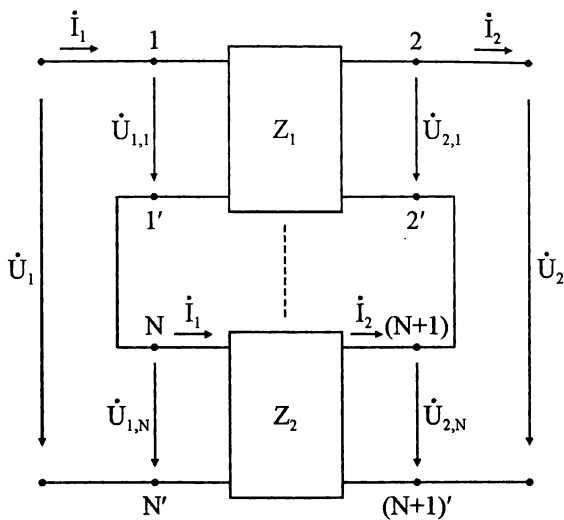
$$\dot{I} = Y \dot{U}. \quad (10.64)$$

След съпоставка на (10.63) и (10.64) се вижда, че замяната на паралелно съединение с един нов четириполусник ще бъде еквивалентна, ако този четириполусник има Y -матрица, която е сума от Y -матриците на съставните четириполусници т.е.

$$Y = \sum_{k=1}^N Y_k. \quad (10.65)$$

10.8.3. Последователно съединение

При последователно съединение всички входове на четириполусниците и всичките им изходи са съединени последователно, както е показано на фиг. 10.13в.



Фиг. 10.13в

За всеки от съставните четириполусници може да се запише Z -системата уравнения

$$\dot{U}_k = Z_k \dot{I}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (10.66)$$

където $\dot{U}_k = \begin{bmatrix} \dot{U}_{1,k} \\ \dot{U}_{2,k} \end{bmatrix}$, $k = 1, 2, \dots, N$ са векторите на първичните и вторичните напрежения на съставните четириполусници, а

$$\dot{I}_k = \begin{bmatrix} \dot{I}_{1,k} \\ \dot{I}_{2,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \dot{I}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (10.67)$$

са векторите на първичните и вторичните токове, които при този начин на свързване са равни.

Напрежението \dot{U}_1 е сума от входните напрежения на съставящите четириполусници, а \dot{U}_2 е сума от изходните им напрежения. Това може да се запише в следната векторна форма $\dot{U} = \sum_{k=1}^N \dot{U}_k$.

Като се отчетат (10.66) и (10.67), се получава окончателно:

$$\dot{U} = \sum_{k=1}^N \dot{U}_k = \sum_{k=1}^N Z_k \dot{I}_k = \left(\sum_{k=1}^N Z_k \right) \dot{I}. \quad (10.68)$$

Цялото последователно съединение може да бъде разгледано като един четириполусник по отношение на изходите 1, 1' и N+1, (N+1)' и за него да се запише следната Z -система уравнения:

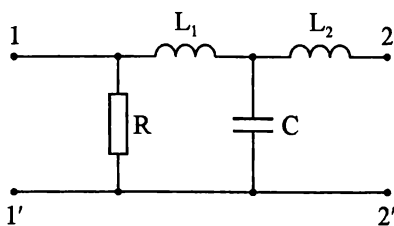
$$\dot{U} = Z\dot{I} . \quad (10.69)$$

След съпоставка на (10.68) и (10.69) се вижда, че замяната на последователното съединение с един нов четириполусник ще бъде еквивалентна, ако този четириполусник има Z -матрица, която е сума от Z -матриците на съставните четириполусници т.е.

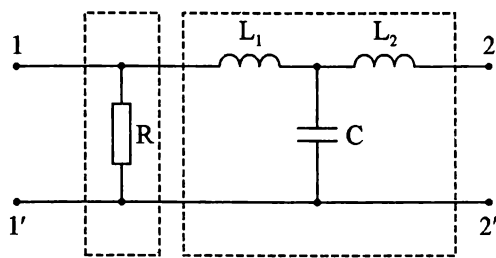
$$Z = \sum_{k=1}^N Z_k . \quad (10.70)$$

В заключение трябва да се има предвид, че могат да съществуват още два вида свързвания, а именно: когато входовете на четириполусниците са свързани последователно, а изходите паралелно и обратно – входовете са свързани паралелно, а изходите последователно. В тези случаи се показва аналогично, че съединението на четириполусниците може да се замени с един еквивалентен четириполусник, като в първия случай се сумират H -матриците на съставните четириполусници, а във втория случай – G -матриците.

Пример 10.5. Параметрите на четириполусника от фиг. 10.14а са $R = 100 \Omega$, $\omega L_1 = \omega L_2 = 2,5 \Omega$, $1/\omega C = 5 \Omega$. Да се определи комплексното входно съпротивление при прекъсване на вторичната страна и комплексния коефициент на предаване по напрежение при прекъсване на вторичната страна на четириполусника.



а)



б)

Фиг. 10.14

Решение: Дадения четириполусник може да се представи като верижно съединение на два четириполусника, както е показано на фиг. 10.14б.

Първият четириполусник е напречен с A -матрица:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/R & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,01 & 1 \end{bmatrix} .$$

Вторият четириполусник е T -четириполусник и коефициентите му се определят с използване на формулите:

$$A = \left(1 + \frac{j\omega L_1}{-j(1/\omega C)} \right) = 0,5; \quad B = \left(j\omega L_1 + j\omega L_2 + \frac{j\omega L_1 j\omega L_2}{-j(1/\omega C)} \right) = j3,75 \Omega;$$

$$C = \frac{1}{-j(1/\omega C)} = j0,2 \text{ S}; \quad D = \left(1 + \frac{j\omega L_2}{-j(1/\omega C)} \right) = 0,5.$$

Следователно A -матрицата на втория четириполусник е

$$A^{(II)} = \begin{bmatrix} 0,5 & j3,75 \\ j0,2 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Отгук за матрицата A на еквивалентния четириполусник се получава

$$A = A^{(I)} A^{(II)} = \begin{bmatrix} 0,5 & j3,75 \\ 0,005 + j0,02 & 0,5 + j0,0375 \end{bmatrix}.$$

Следователно коефициентите на четириполусника са:

$$A = 0,5; \quad B = j3,75 \Omega; \quad C = 0,005 + j0,02 \text{ S}; \quad D = 0,5 + j0,0375.$$

Комплексното входно съпротивление при прекъсване на вторичната страна се определя от формулата

$$Z_{10} = \frac{A}{C} = 0,0625 - j2,5 \Omega.$$

Комплексният коефициент на предаване по напрежение при прекъсване на вторичната страна се определя от израза

$$\dot{K}_{u\infty} = \lim_{Z_T \rightarrow \infty} \dot{K}_u = \frac{1}{A} = 2.$$

10.9. НЕВЗАИМНИ И АКТИВНИ ЧЕТИРИПОЛЮСНИЦИ

В този параграф са дадени основните зависимости, свързани с невзаимните и активните четириполусници

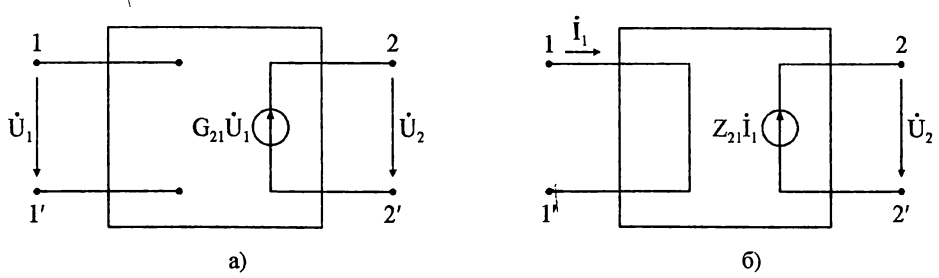
10.9.1. Невзаимни четириполусници

Даден четириполусник е невзаимен, ако веригата между двете двойки полюси е от невзаимен тип.

Изследването на сложни електронни схеми, представени като съединения на четириполусници, е свързано с използването на невзаимни четириполусници, тъй като много от градивните елементи (транзистори, тиристори, идеални операционни усилватели и др.) са от невзаимен тип. Като най-прости невзаимни четириполусници могат да бъдат разгледани четирите типа зависими източници, жираторът и преобразувателят на съпротивление.

а) Източник на напрежение, управляван с напрежение (ИНУН)

ИНУН е четириполусен елемент, показан на фиг. 10.15а. *A*- и *G*-матриците на този четириполусник са:



Фиг. 10.15

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{G_{21}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ G_{21} & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.71)$$

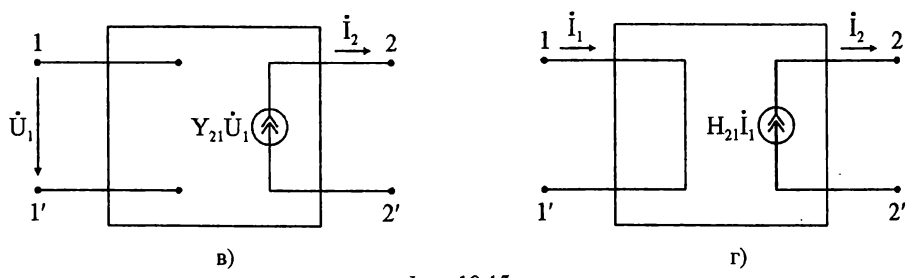
б) Източник на напрежение, управляван с ток (ИНУТ)

ИНУТ е четириполусен елемент, показан на фиг. 10.15б. *A*- и *Z*-матриците на този четириполусник са:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{Z_{21}} & 0 \end{bmatrix}; Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -Z_{21} & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.72)$$

в) Източник на ток, управляван с напрежение (ИТУН)

ИТУН е четириполусен елемент, даден на фиг. 10.15в.



Фиг. 10.15

A - и Y -матриците на този четириполусник са:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{Y_{21}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{21} & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.73)$$

г) *Източник на ток, управляван с ток (ИТУТ)*

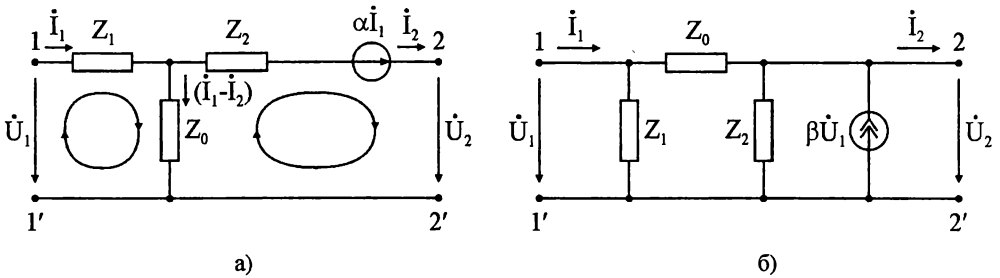
ИТУТ е четириполусен елемент, показан на фиг. 10.15г.

A - и H -матриците на този четириполусник са:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{Y_{21}} \\ 0 & \frac{1}{H_{21}} \end{bmatrix}; H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ H_{21} & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.74)$$

Четириполусниците от фиг. 10.15, съответстващи на основните видове зависими източници, имат по две матрици. Останалите матрици за тези четириполусници не съществуват.

Две от най-простите заместващи схеми на невзаимни четириполусници са дадени на фиг. 10.16а и б. По същество те се получават от пасивни T - и Π -четириполусници, като към тях са добавени зависими източници.



Фиг. 10.16

За четириполусника от фиг. 10.16а α има качество на съпротивление, а за четириполусника от фиг. 10.16б β има качество на проводимост.

Пример 10.6. Да се определят параметрите на заместващата схема от фиг. 10.16а посредством елементите на Z -матрицата на четириполусника.

Решение: От уравненията по втория закон на Кирхоф за контурите от фиг. 10.16а се получава:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= Z_1 \dot{i}_1 + Z_0 (\dot{i}_1 - \dot{i}_2) = (Z_1 + Z_0) \dot{i}_1 - Z_0 \dot{i}_2, \\ -\dot{U}_2 &= Z_2 \dot{i}_2 - \alpha \dot{i}_1 - Z_0 (\dot{i}_1 - \dot{i}_2) = -(Z_0 + \alpha) \dot{i}_1 + (Z_2 + Z_0) \dot{i}_2. \end{aligned}$$

Като се съпоставят горните уравнения с (10.6), се получава:

$$Z_{11} = Z_1 + Z_0, \quad Z_{12} = -Z_0, \quad Z_{21} = -(Z_1 + \alpha), \quad Z_{22} = Z_2 + Z_0.$$

Оттук за параметрите на еквивалентната заместваща схема следва

$$Z_0 = -Z_{12}, \quad Z_1 = Z_{11} + Z_{12}, \quad Z_2 = Z_{22} + Z_{12}, \quad \alpha = Z_{12} - Z_{21}.$$

Пример 10.7. Да се определят параметрите на заместващата схема от фиг. 10.16б посредством елементите на Y -матрицата на четириполусника.

Решение: От първия закон на Кирхоф за възлите 1 и 2 се получава:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{\dot{U}_1}{Z_1} + i_0 = \frac{\dot{U}_1}{Z_1} + \frac{(\dot{U}_1 - \dot{U}_2)}{Z_0}, \\ i_2 &= i_0 - \frac{\dot{U}_2}{Z_2} + \beta \dot{U}_1 = \frac{(\dot{U}_1 - \dot{U}_2)}{Z_0} - \frac{\dot{U}_2}{Z_2} + \beta \dot{U}_1. \end{aligned}$$

Оттук

$$\begin{aligned} i_1 &= \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_0}\right)\dot{U}_1 - \frac{1}{Z_0}\dot{U}_2, \\ i_2 &= \left(\frac{1}{Z_0} + \beta\right)\dot{U}_1 - \left(\frac{1}{Z_0} + \frac{1}{Z_2}\right)\dot{U}_2. \end{aligned}$$

Съпоставяйки горните уравнения с (10.1), за елементите на Y -матрицата на четириполусника се получава:

$$Y_{11} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_0}, \quad Y_{12} = \frac{1}{Z_0}, \quad Y_{21} = \frac{1}{Z_0} + \beta, \quad Y_{22} = \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_0}.$$

Оттук параметрите на еквивалентната заместваща схема са:

$$Z_0 = \frac{1}{Y_{12}}, \quad Z_1 = \frac{1}{Y_{11} - Y_{12}}, \quad Z_2 = \frac{1}{Y_{22} - Y_{12}}, \quad \beta = Y_{21} - Y_{12}.$$

Други два достатъчно прости четириполусника от невзаимен тип, които се използват като градивни елементи в електронните схеми, са жираторът и преобразувателят на съпротивление.

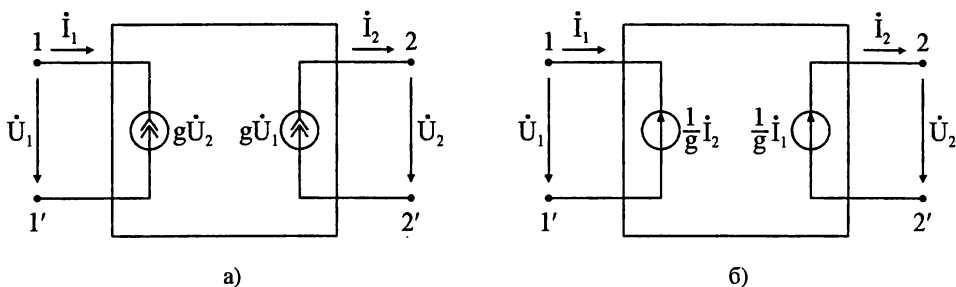
д) *Жиратор*

Жираторът се характеризира с матриците:

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & -g \\ g & 0 \end{bmatrix}; \quad Z = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{g} \\ -\frac{1}{g} & 0 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{g} \\ g & 0 \end{bmatrix},$$

където g е реално число.

H - и G -матриците на жиратора не съществуват. За реализация на жиратор трябва да се използват два зависими източника, както е показано на фиг. 10.17а и б.



Фиг. 10.17

Като се използва A -системата уравнения лесно се установява, че входно-съпротивление на жиратора е

$$Z_{\text{вх}} = \frac{1}{g^2} Z_T,$$

където Z_T е товарното съпротивление за жиратора. При чисто капацитивен товар $Z_T = -j \frac{1}{\omega C}$ входното му съпротивление има чисто индуктивен характер

$$Z_{\text{вх}} = j \frac{\omega C}{g^2} = j \omega L_{\text{вх}},$$

т.е. с помощта на жиратор и идеален кондензатор може да се реализира идеална бобина и обратно – с жиратор и идеална бобина може да се реализира идеален кондензатор.

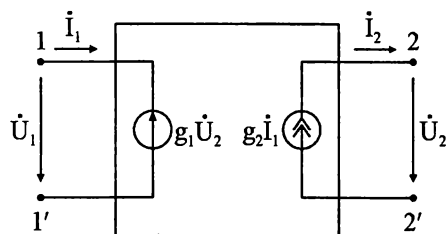
е) Преобразувател на съпротивление

Преобразувателят на съпротивление се характеризира със следната A -матрица:

$$A = \begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{g_2} \end{bmatrix},$$

където g_1 и g_2 са безразмерни реални числа.

За реализация на преобразувателя на съпротивление се използват два зависими източника, както е показано на фиг. 10.18.



Фиг. 10.18

Входното съпротивление на преобразувателя се дава с формулата

$$Z_{\text{вх}} = g_1 g_2 Z_T.$$

Ако някой от коефициентите g_1 или g_2 е отрицателен и товарът е резистивен $Z_T = R_T$, то

$$Z_{\text{вх}} = g_1 g_2 R_T < 0,$$

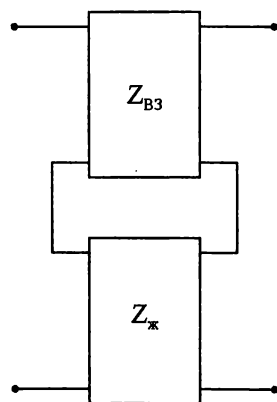
т.е. може да се реализира резистивен елемент с отрицателно съпротивление.

По-сложни схеми могат да бъдат моделирани като подходящи съединения на четириполусници от взаимен тип и елементарни четириполусници от невзаимен тип като зависими източници и жиратори.

Като пример ще разгледаме еквивалентна схема на невзаимен четириполусник с жиратор. Нека представим Z -матрицата на дадения невзаимен четириполусник във вида:

$$Z = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Z_{11} & \frac{1}{2}(Z_{12} + Z_{21}) \\ \frac{1}{2}(Z_{12} + Z_{21}) & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(Z_{12} - Z_{21}) \\ -\frac{1}{2}(Z_{12} - Z_{21}) & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= Z_{\text{вз}} + Z_{\text{ж}},$$



Фиг. 10.19

т.е. Z -матрицата се представя като сума от две матрици $Z_{\text{вз}}$ и $Z_{\text{ж}}$.

$Z_{\text{вз}}$ съответства на взаимен четириполусник, а $Z_{\text{ж}}$ е Z -матрицата на жиратор с

$$g_{\text{ж}} = \frac{2}{Z_{12} - Z_{21}}.$$

При положение, че $g_{\text{ж}}$ е реално число, невзаимният четириполусник може да се представи като последователно съединение на четириполусник от взаимен тип със Z -матрица $Z_{\text{вз}}$ и жиратор със Z -матрица $Z_{\text{ж}}$ (фиг. 10.19).

10.9.2. Активни четириполусници

При активните четириполусници токовете и напреженията, свързани с първичната и вторичната страна, при отсъствие на източници в първичната и вторичната верига, може да не са нула. Тези токове и напрежения се дължат на наличието на независими източници в схемата на веригата, разгледана като четириполусник. В този случай системите уравнения (10.1), (10.6), (10.7), (10.12), (10.13), (10.14) не се удовлетворяват, тъй като за тези системи при едновременно прекъсване или късо съединение на първичната и вторичната страна съответните токове и напрежения са нули. Следователно всяка от тези системи трябва да се допълни с множители, отчитащи независимите източници в четириполусниците.

Нека допълним A -системата уравнения с компонентите \dot{U}_1' и \dot{I}_1' , посредством които се отчита влиянието на независимите източници в четириполусника

$$\begin{cases} \dot{U}_1' = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 + \dot{U}_1' \\ \dot{I}_1' = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2 + \dot{I}_1' \end{cases} \quad (10.75)$$

При едновременно късо съединение на първичната и на вторичната страна $\dot{U}_1 = 0$ и $\dot{U}_2 = 0$. Тогава токовете \dot{I}_1 и \dot{I}_2 са съответно $\dot{I}_1 = \dot{I}_{1k}$ и $\dot{I}_2 = \dot{I}_{2k}$ и могат да бъдат определени опитно. В този случай

$$\begin{cases} 0 = B\dot{I}_{2k} + \dot{U}_1' \\ \dot{I}_{1k} = D\dot{I}_{2k} + \dot{I}_1' \end{cases} \quad (10.76)$$

и тогава

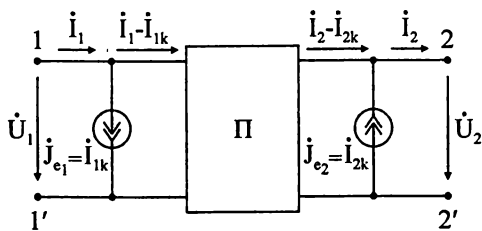
$$\begin{cases} \dot{U}_1' = -B\dot{I}_{2k} \\ \dot{I}_1' = \dot{I}_{1k} - D\dot{I}_{2k} \end{cases} \quad (10.77)$$

След заместване на (10.77) в (10.75) се получава:

$$\begin{cases} \dot{U}_1' = A\dot{U}_2 + B(\dot{I}_2 - \dot{I}_{2k}) \\ \dot{I}_1' - \dot{I}_{1k} = C\dot{U}_2 + D(\dot{I}_2 - \dot{I}_{2k}) \end{cases} \quad (10.78)$$

На системата уравнения (10.78) съответства заместващата схема от фиг. 10.20.

Тази схема показва, че активният четириполусник може да бъде представен като пасивен четириполусник със същите коефициенти като активния и два независими източника на ток, стойностите $\dot{J}_{e1} = \dot{I}_{1k}$, $\dot{J}_{e2} = \dot{I}_{2k}$ на които могат да бъдат определени опитно.



Фиг. 10.20

Стойностите на \dot{U}_1' и \dot{I}_1' могат да бъдат определени и с опити при едновременно прекъсване на първичната и на вторичната страна $\dot{I}_1 = 0$ и $\dot{I}_2 = 0$. Тогава $\dot{U}_1 = \dot{U}_{10}$, $\dot{U}_2 = \dot{U}_{20}$ и (10.75) добиват вида:

$$\begin{cases} \dot{U}_{10} = A\dot{U}_{20} + \dot{U}_1' \\ 0 = C\dot{U}_{20} + \dot{I}_1' \end{cases} \quad (10.79)$$

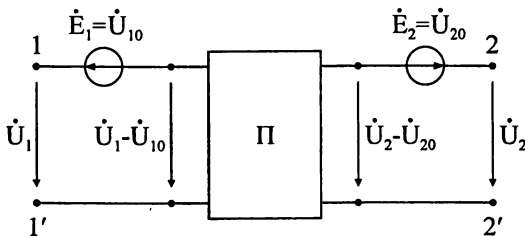
от което следва:

$$\begin{cases} \dot{I}_1' = -C\dot{U}_{20} \\ \dot{U}_1' = \dot{U}_{10} - A\dot{U}_{20} \end{cases} \quad (10.80)$$

След заместване на (10.80) в (10.75) се получава:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 - \dot{U}_{10} = A(\dot{U}_2 - \dot{U}_{20}) + B\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = C(\dot{U}_2 - \dot{U}_{20}) + D\dot{I}_2 \end{cases} \quad (10.81)$$

Заместващата схема от фиг. 10.21 съответства на системата уравнения (10.81).



Фиг. 10.21

Тази схема показва, че активният четириполюсник може да бъде представен като пасивен четириполюсник със същите коефициенти и два независими източника на е.д.н. $\dot{E}_1 = \dot{U}_{10}$ и $\dot{E}_2 = \dot{U}_{20}$, стойностите на които могат да бъдат определени опитно.

10.10. МНОГОПОЛЮСНИЦИ

Ако в четириполусника не са групирани изводите по двойки, то той може да се разглежда като частен случай на *многополусник*.

В общия случай схемата на *многополусника* е показана на фиг. 10.22.

При избраните посоки на токовете съгласно първия закон на Кирхоф

$$\sum_{k=1}^{n+1} \dot{i}_k = 0. \quad (10.82)$$

Режимът на изводите на многополусника се определя и от напреженията

$$\dot{U}_k = \dot{V}_k - \dot{V}_{n+1}, \quad k = 1, \dots, n \quad (10.83)$$

между всеки от възлите 1, 2, ..., n и възела ($n+1$), който се избира за базов. Ако потенциалът на ($n+1$)-я възел бъде избран за нула, то

$$\dot{U}_k = \dot{V}_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (10.84)$$

От (10.82) и (10.83) следва, че всеки многополусник (n -полусник) има n независими тока и n независими напрежения.

Въз основа на принципа на наслагването, уравненията за връзка между токовете и напреженията могат да бъдат записани в следната матрична форма:

$$\dot{I} = Y\dot{U}, \quad (10.85)$$

където Y е $n \times n$ матрицата на напреженията от комплексни проводимости, а \dot{I} и \dot{U} са n -мерни вектори на токовете $\dot{I}_1, \dots, \dot{I}_n$ и на напреженията $\dot{U}_1, \dots, \dot{U}_n$.

За всеки полюс $k, k = 1, \dots, n$

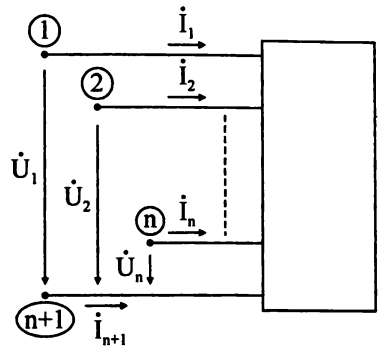
$$\dot{I}_k = Y_{k1}\dot{U}_1 + Y_{k2}\dot{U}_2 + \dots + Y_{kn}\dot{U}_n, \quad (10.86)$$

където: Y_{kk} е *входната (собствена) комплексна проводимост* по отношение на възлите k и $n+1$, а Y_{kp} е *взаимната комплексна проводимост* на двойката изводи ($k, n+1$) по отношение на изводите ($p, n+1$).

Уравнението (10.85) може да бъде записано и във вида:

$$\dot{U} = Z\dot{I}, \quad (10.87)$$

където $Z = Y^{-1}$ е $n \times n$ матрица от комплексни съпротивления.



Фиг. 10.22

За всеки полюс $k, k = 1, \dots, n$, по отношение на полюса с номер $n+1$

$$\dot{U}_k = Z_{k1}\dot{I}_1 + Z_{k2}\dot{I}_2 + \dots + Z_{kn}\dot{I}_n, \quad (10.88)$$

където Z_{kk} са входните (собствени) комплексни съпротивления по отношение на възли k и $n+1$, а Z_{kp} са взаимните комплексни съпротивления на двойката изводи $(k, n+1)$ по отношение на изводите $(p, n+1)$.

Параметрите Y_{kp} и Z_{kp} могат да бъдат определени и опитно при едновременно прекъсване, респ. късо съединение между съответните двойки изводи:

$$Y_{kp} = \left(\frac{\dot{I}_k}{\dot{U}_p} \right)_{\substack{\dot{U}_q=0 \\ q \neq p}}, \quad Z_{kp} = \left(\frac{\dot{U}_k}{\dot{I}_p} \right)_{\substack{\dot{U}_q=0 \\ q \neq p}}.$$

Както и четириполюсниците, многополюсниците биват пасивни и активни, от взаимен и от невзаимен тип.

Y - и Z -матриците на взаимните многополюсници са симетрични, а на невзаимните са несиметрични. За някои многополюсници Y - или Z -матриците може да не съществуват (като при напречния и надлъжния четириполюсници и четириполюсниците, съответстващи на зависимите източници).

Напряженията на многополюсниците могат да бъдат определени по отношение на всеки от възлите им (в зависимост от номерацията), както и по отношение на възел, външен за веригата на многополюсника.

Ако бъдат формирани два хибридни вектора (от токове и напряжения), може да се получи т.нар. хибридно описание:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \cdot \\ \dot{U}_p \\ \cdot \\ \dot{I}_{p+1} \\ \cdot \\ \dot{I}_n \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \cdot \\ \dot{I}_p \\ \cdot \\ \dot{U}_{p+1} \\ \cdot \\ \dot{U}_n \end{bmatrix},$$

където \mathbf{H} е т. нар. *хибридна матрица*, елементите на която са от различен тип – комплексни съпротивления и комплексни проводимости.

11.1. ОСНОВНИ ПОЛОЖЕНИЯ

При веригите със съсредоточени параметри, които разгледахме досега, се приемаше, че верижните параметри съпротивление, индуктивност и капацитет са съсредоточени в определени участъци от веригата, или по-точно в елементите на електрическата верига – резистори, бобини и кондензатори. Това означава, че електромагнитното поле и електромагнитните процеси съществуват и са съсредоточени само в краен брой елементи. Например магнитното поле е локализирано само в индуктивните елементи, електрическото поле е локализирано само в капацитивните елементи, а преобразуването на електромагнитна енергия в топлина става само в резисторите. Освен това, при веригите със съсредоточени параметри се приема, че електромагнитните процеси се разпространяват с безкрайно голяма скорост. Това означава, че независимо от пространствените размери на веригата, след включването ѝ към източници на енергия електромагнитните процеси се разпространяват по цялото ѝ протежение, без да зависят от пространствените координати x , y и z . В този случай токът и напрежението са функции само на времето – $i = i(t)$ и $u = u(t)$.

Тези допускания дават възможност да се анализират електрическите вериги чрез по-прост математически апарат – законите на Кирхоф и произтичащите от тях методи за анализ на линейни вериги със съсредоточени параметри. В някои случаи, обаче, тези допускания водят до неточни резултати, а в други случаи теорията на линейните вериги със съсредоточени параметри е принципно неприложима.

Известно е, че електромагнитното поле е непрекъснато и много пъти е необходимо да се отчита неговото разпределение по цялата дължина на изследваното устройство. Това налага елементите, които отразяват проявите и действието на електромагнитното поле (бобини, кондензатори и резистори) и техните параметри (индуктивност, капацитет и съпротивление) да бъдат непрекъснато разпределени. От друга страна, ако дължината на веригата е съизмерима или по-голяма от дължината на електромагнитната вълна, разпространяваща се във веригата, е необходимо да се отчита крайната скорост на разпространение на електромагнитното поле, а оттук и зависимостта на процесите от пространствените координати.

Всички тези условия са довели до създаването на теорията на веригите с разпределени параметри. *Веригите с разпределени параметри* са такива вери-

ги, при които параметрите индуктивност, капацитет и съпротивление са разпределени по цялата дължина на веригата.

Ако мислено отделим някакъв краен участък от веригата с разпределени параметри, то токът и напрежението на края на този участък са различни от тока и напрежението в началото на участъка. Другояче казано, токовете и напреженията във веригите с разпределени параметри са функции на времето t и на пространствена координата x (напр. разстоянието от началото на веригата), т.е. $i = i(x, t)$ и $u = u(x, t)$.

Ще отбележим, че една верига може да се разглежда като верига със съсредоточени параметри, или верига с разпределени параметри в зависимост от честотата (респ. дължината на вълната). Най-общо веригата се разглежда като верига с разпределени параметри, ако дължината на веригата l е съизмерима, или по-голяма от дължината на електромагнитната вълна λ , т.е.

$$l \approx \lambda, \text{ или } l > \lambda,$$

където $\lambda = cT = c/f$, T и f са периодът и честотата на електромагнитната вълна, а c е скоростта на светлината.

Типичен представител на веригите с разпределени параметри са дългите линии. *Дългите линии* са вериги, предназначени за предаване на електромагнитна енергия, или сигнали на разстояние и имащи дължина, превишаваща дължината на вълната на електромагнитното колебание.

По-нататък ще разгледаме процесите в *еднородни дълги линии* (или само *еднородни линии*), в които разпределението на параметрите се запазва неизменно по цялата дължина на линията. Като примери за еднородни линии могат да се посочат енергопреносните линии (далекопроводи), съобщителните линии, коаксиалните кабелни линии, фидери, вълноводи, лентови линии и др.

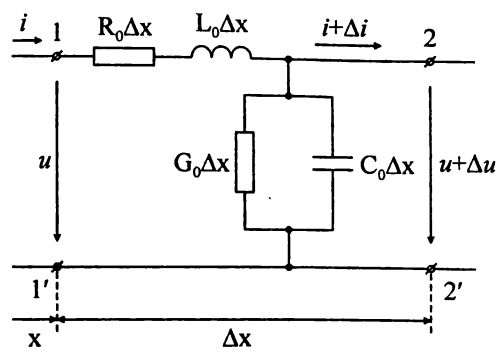
11.2. УРАВНЕНИЯ ЗА АНАЛИЗ НА ПРОЦЕСИ В ЕДНОРОДНА ЛИНИЯ

Да отделим елементарен участък от линията с дължина Δx , намиращ се на разстояние x от началото на линията. Неговата еквивалентна схема може приблизително да се представи чрез последователно включени елементи със съпротивление $R_0 \Delta x$ и индуктивност $L_0 \Delta x$, и паралелно включени елементи с проводимост $G_0 \Delta x$ и капацитет $C_0 \Delta x$ (фиг. 11.1). Параметрите R_0 , L_0 , G_0 и C_0 се наричат *първични параметри на еднородната линия*. Те представляват параметри на единица дължина и имат следните размерности: $[R_0] = \Omega/m$, $[L_0] = H/m$, $[G_0] = S/m$, $[C_0] = F/m$. Напрежението u и токът i са функции на времето t и пространствената координата x , т.е. $u = u(x, t)$ и $i = i(x, t)$.

По-нататък приемаме, че $u(x, t)$ и $i(x, t)$ са непрекъснати функции по отношение на двата си аргумента. Освен това приемаме, че за малкия участък Δx важат законите на Кирхоф.

По втори и първи закон на Кирхоф записваме съответно уравненията

$$u = u + \Delta u + R_0 \Delta x i + L_0 \Delta x \frac{\partial i}{\partial t},$$



Фиг. 11.1

$$i = i + \Delta i + G_0 \Delta x (u + \Delta u) + C_0 \Delta x \frac{\partial (u + \Delta u)}{\partial t}.$$

Пренебрегваме безкрайно малките величини от втори ред, т.е. полагаме

$$G_0 \Delta x \Delta u \approx 0 \quad \text{и} \quad C_0 \Delta x \frac{\partial (\Delta u)}{\partial t} \approx 0.$$

Тогава получените уравнения могат да се запишат във вида:

$$-\Delta u = R_0 \Delta x i + L_0 \Delta x \frac{\partial i}{\partial t}, \quad -\Delta i = G_0 \Delta x u + C_0 \Delta x \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Разделяме двете страни на последните уравнения на Δx и след извършване на граничен преход при $\Delta x \rightarrow 0$ получаваме системата диференциални уравнения, описващи процесите в еднородната линия:

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \quad (11.1)$$

Уравненията в системата (11.1) се наричат още *телеграфни уравнения*, тъй като за първи път са били получени за линиите на телеграфните връзки.

Напрежението u и токът i участват едновременно в двете уравнения. Чрез преработка на системата могат да се получат отделни уравнения за u и i . За тази цел диференцираме първото уравнение от системата (11.1) по x , а второто – по t :

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = R_0 \frac{\partial i}{\partial x} + L_0 \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} \\ -\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = G_0 \frac{\partial u}{\partial t} + C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{cases}$$

В първото уравнение на така получената система заместваме $\partial^2 i / \partial x \partial t$ и $\partial i / \partial x$ с изразите съответно от второто уравнение и от системата (11.1). След преобразуване получаваме

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + L_0 C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (G_0 L_0 + R_0 C_0) \frac{\partial u}{\partial t} + R_0 G_0 u = 0. \quad (11.2a)$$

По аналогичен начин може да се получи и уравнението за тока i , което има вида

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + L_0 C_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (G_0 L_0 + R_0 C_0) \frac{\partial i}{\partial t} + R_0 G_0 i = 0. \quad (11.2b)$$

Системата телеграфни уравнения (11.1) и уравненията (11.2) принадлежат към класа на линейните частни диференциални уравнения. Техните решения, съгласно теорията на частните диференциални уравнения, се определят при зададени гранични условия по отношение на пространствената променлива x и зададени начални условия по отношение на времето t .

11.3. СТАЦИОНАРНИ СИНУСОИДАЛНИ ПРОЦЕСИ В ЕДНОРОДНА ЛИНИЯ. КОМПЛЕКСЕН ВИД НА ТЕЛЕГРАФНИТЕ УРАВНЕНИЯ И ТЕХНИТЕ РЕШЕНИЯ

11.3.1. Уравнения за еднородна линия при стационарен синусоидален режим

Ще смятаме, че в еднородна линия, която има дължина l , е установен стационарен синусоидален режим. Това означава, че напрежението и токът във всяка точка от линията x са синусоидални функции на времето t , т.е.

$$u(x, t) = \sqrt{2}U(x) \sin(\omega t + \psi_u), \quad (11.3a)$$

$$i(x, t) = \sqrt{2}I(x) \sin(\omega t + \psi_i). \quad (11.3b)$$

Тъй като законът за изменение на u и i във времето е известен, то остава чрез диференциалните уравнения да намерим закона за изменение на u и i като функции на разстоянието x . За тази цел е удобно да се въведат комплексните образи $\dot{u}(x,t)$ и $\dot{i}(x,t)$ на u и i и да се използват съотношенията

$$u(x,t) = \text{Im}[\dot{u}(x,t)] = \text{Im}[\sqrt{2}\dot{U}(x)e^{j\omega t}], \quad (11.4a)$$

$$i(x,t) = \text{Im}[\dot{i}(x,t)] = \text{Im}[\sqrt{2}\dot{I}(x)e^{j\omega t}], \quad (11.4b)$$

където $\dot{U}(x)$ и $\dot{I}(x)$ са комплексите на напрежението и тока на разстояние x от началото на линията.

След заместване на (11.4) в (11.1) се получава *комплексният вид на телеграфните уравнения*

$$\begin{cases} -\frac{d\dot{U}(x)}{dx} = (R_0 + j\omega L_0)\dot{I}(x) \\ -\frac{d\dot{I}(x)}{dx} = (G_0 + j\omega C_0)\dot{U}(x) \end{cases} \quad (11.5a)$$

Ако се въведе комплексното съпротивление $Z_0 = R_0 + j\omega L_0$ и комплексната проводимост $Y_0 = G_0 + j\omega C_0$, последната система се записва в следния вид:

$$\begin{cases} -\frac{d\dot{U}(x)}{dx} = Z_0\dot{I}(x) \\ -\frac{d\dot{I}(x)}{dx} = Y_0\dot{U}(x) \end{cases} \quad (11.5b)$$

След диференциране по x на първото уравнение от (11.5b) и последващо заместване на $\dot{I}(x)/dx$ от второто уравнение в първото, се получава

$$\frac{d^2\dot{U}(x)}{dx^2} = Z_0 Y_0 \dot{U}(x).$$

Въвежда се величината

$$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}, \quad (11.6a)$$

която се нарича *константа на разпространение*. Тя е комплексна величина и може да се представи във вида

$$\gamma = \alpha + j\beta, \quad (11.66)$$

където α е константа на затихването, а β е константа на фазата.

При това положение се достига до следното уравнение за $\dot{U}(x)$:

$$\frac{d^2 \dot{U}(x)}{dx^2} - \gamma^2 \dot{U}(x) = 0. \quad (11.7a)$$

По аналогичен начин се получава и уравнението за тока

$$\frac{d^2 \dot{i}(x)}{dx^2} - \gamma^2 \dot{i}(x) = 0. \quad (11.76)$$

За решаването на уравнение (11.7a) се намират корените на характеристичното уравнение $\lambda^2 - \gamma^2 = 0$, т.е. $\lambda_{1,2} = \pm\gamma$. Тогава решението на уравнение (11.7a) се записва във вида

$$\dot{U}(x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}, \quad (11.8)$$

където A_1 и A_2 са неизвестни константи.

По аналогичен начин може да се получи и решението за $\dot{I}(x)$ от уравнение (11.76). Но тогава в израза за $\dot{I}(x)$ ще присъстват още две неизвестни константи. За да се избегне това е по-удобно $\dot{I}(x)$ да се определи от първото уравнение на (11.56), като предварително се диференцира изразът за $\dot{U}(x)$ от равенство (11.8). Получаваме

$$\dot{i}(x) = -\frac{1}{Z_0} \frac{d\dot{U}(x)}{dx} = \frac{\gamma}{Z_0} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}).$$

В последния израз се въвежда *вълновото съпротивление* Z_e , което се определя чрез зависимостите:

$$Z_e = \frac{Z_0}{\gamma} = \frac{Z_0}{\sqrt{Z_0 Y_0}} = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}. \quad (11.9a)$$

Вълновото съпротивление може да се представи и в експоненциална форма

$$Z_e = z_e e^{j\varphi_e}. \quad (11.96)$$

При това положение получаваме следните изрази за решението на системата (11.5), или на уравненията (11.7):

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x} \\ \dot{I}(x) = \frac{1}{Z_g} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}) \end{cases} \quad (11.10)$$

Константата на разпространение γ и вълновото съпротивление Z_g се наричат *вторични параметри на еднородната линия*.

При $\omega = 0$ от (11.9) следва $Z_g = \sqrt{R_0/G_0}$ и $\varphi_g = 0$, т.е. вълновото съпротивление е чисто активно. При $\omega \rightarrow \infty$ вълновото съпротивление има същия характер, или по-точно $Z_g = \sqrt{L_0/C_0}$ и $\varphi_g = 0$.

За въздушните и кабелните линии винаги е изпълнено неравенството $R_0/G_0 > L_0/C_0$. При това положение модулът на вълновото съпротивление намалява с увеличаване на честотата, клонейки към величината $\sqrt{L_0/C_0}$. Ъгълът φ_g се изменя от нулева стойност при $\omega = 0$ до нулева стойност при $\omega \rightarrow \infty$. Следователно при някаква честота φ_g ще има екстремум. Може да се докаже, че за въздушни и кабелни линии φ_g винаги е отрицателна величина, т.е. $\varphi_g < 0$.

11.3.2. Комплексни решения на телеграфните уравнения при зададени гранични условия в началото на линията

Нека в началото на линията са зададени следните гранични условия:

$$\dot{U}(x)|_{x=0} = \dot{U}_1 \quad \text{и} \quad \dot{I}(x)|_{x=0} = \dot{I}_1.$$

В системата (11.10) се полага $x = 0$ и след отчитане на граничните условия се получава:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A_1 + A_2 \\ Z_g \dot{I}_1 = A_1 - A_2 \end{cases}.$$

Решенията на последната система са:

$$A_1 = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + Z_g \dot{I}_1), \quad A_2 = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - Z_g \dot{I}_1).$$

След въвеждане на изразите за A_1 и A_2 в уравненията (11.10), стигаме до следните решения на телеграфните уравнения в произволна точка x от дължината на линията:

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + Z_g \dot{I}_1)e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - Z_g \dot{I}_1)e^{\gamma x} \\ \dot{I}(x) = \frac{1}{2Z_g}(\dot{U}_1 + Z_g \dot{I}_1)e^{-\gamma x} - \frac{1}{2Z_g}(\dot{U}_1 - Z_g \dot{I}_1)e^{\gamma x} \end{cases} \quad (11.11)$$

Ако се отчетат зависимостите

$$\frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} = ch\gamma x, \quad \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} = sh\gamma x,$$

изразите за $\dot{U}(x)$ и $\dot{I}(x)$ от равенство (11.11) приемат вида

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{U}_1 ch\gamma x - Z_g \dot{I}_1 sh\gamma x \\ \dot{I}(x) = -\frac{\dot{U}_1}{Z_g} sh\gamma x + \dot{I}_1 ch\gamma x \end{cases} \quad (11.12)$$

В края на линията, т.е. при $x = l$ са изпълнени граничните условия

$$\dot{U}(x)|_{x=l} = \dot{U}_2, \quad \dot{I}(x)|_{x=l} = \dot{I}_2,$$

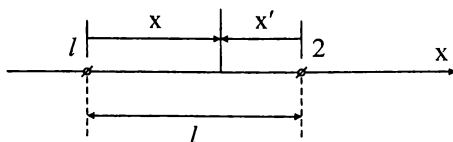
а системата (11.12) след отчитане на тези гранични условия дава равенствата

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = \dot{U}_1 ch\gamma l - Z_g \dot{I}_1 sh\gamma l \\ \dot{I}_2 = -\frac{\dot{U}_1}{Z_g} sh\gamma l + \dot{I}_1 ch\gamma l \end{cases} \quad (11.13)$$

11.3.3. Комплексни решения на телеграфните уравнения при зададени гранични условия в края на линията

Решенията на телеграфните уравнения могат да бъдат получени и в друга форма, ако вместо напрежението \dot{U}_1 и тока \dot{I}_1 в началото на линията са известни напрежението \dot{U}_2 и тока \dot{I}_2 в края на линията, която има дължина l . Това означава константите A_1 и A_2 в равенство (11.10) да бъдат определени чрез \dot{U}_2 и \dot{I}_2 . В този случай е по-удобно разстоянието да се отчита от края на

линията. За тази цел чрез равенството $x = l - x'$ се прави смяна на променливата x с x' , при което новото разстояние x' се отчита вече от края на линията (фиг. 11.2).



Фиг. 11.2

След заместване на x с $l - x'$ в уравненията (11.10) се получава

$$\begin{cases} \dot{U}(x') = A_1 e^{-\gamma(l-x')} + A_2 e^{\gamma(l-x')} \\ \dot{i}(x') = \frac{1}{Z_g} (A_1 e^{-\gamma(l-x')} - A_2 e^{\gamma(l-x')}) \end{cases}$$

Въвеждат се нови константи

$$A_3 = A_1 e^{-\gamma l}, \quad A_4 = A_2 e^{\gamma l},$$

при което се стига до уравненията

$$\begin{cases} \dot{U}(x') = A_3 e^{\gamma x'} + A_4 e^{-\gamma x'} \\ \dot{i}(x') = \frac{1}{Z_g} (A_3 e^{\gamma x'} - A_4 e^{-\gamma x'}) \end{cases} \quad (11.14)$$

Константите A_3 и A_4 се определят от граничните условия

$$\dot{U}(x') \Big|_{x'=0} = \dot{U}_2 \quad \text{и} \quad \dot{i}(x') \Big|_{x'=0} = \dot{i}_2.$$

След въвеждане на тези гранични условия в последната система нами-
раме

$$A_3 = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + Z_g \dot{i}_2), \quad A_4 = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - Z_g \dot{i}_2).$$

Тогава системата (11.14) се записва във вида

$$\begin{cases} \dot{U}(x') = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + Z_g \dot{i}_2) e^{\gamma x'} + \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - Z_g \dot{i}_2) e^{-\gamma x'} \\ \dot{i}(x') = \frac{1}{2Z_g}(\dot{U}_2 + Z_g \dot{i}_2) e^{\gamma x'} - \frac{1}{2Z_g}(\dot{U}_2 - Z_g \dot{i}_2) e^{-\gamma x'} \end{cases} \quad (11.15)$$

Ако отново се използват хиперболични функции, за комплексните решения на телеграфните уравнения при зададени гранични условия в края на линията се получава

$$\begin{cases} \dot{U}(x') = \dot{U}_2 ch \gamma x' + Z_a \dot{I}_2 sh \gamma x' \\ \dot{I}(x') = \frac{\dot{U}_2}{Z_a} sh \gamma x' + \dot{I}_2 ch \gamma x' \end{cases} \quad (11.16)$$

Ще отбележим, че в последната система пространствената координата x' се измерва от края на линията по посока към началото.

Ако в (11.16) положим $x' = l$ и отчетем граничните условия

$$\dot{U}(x')|_{x'=l} = \dot{U}_1, \quad \dot{I}(x')|_{x'=l} = \dot{I}_1,$$

се получава

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 ch \gamma l + Z_a \dot{I}_2 sh \gamma l \\ \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_2}{Z_a} sh \gamma l + \dot{I}_2 ch \gamma l \end{cases} \quad (11.17)$$

Уравненията (11.17) съвпадат с А-системата уравнения за симетричен четириполусник. Следователно еднородната линия може да се разглежда като симетричен четириполусник с коефициенти $A = D = ch \gamma l$, $B = Z_a sh \gamma l$, $C = (1/Z_a) sh \gamma l$. Чрез тези коефициенти могат да се получат еквивалентните Т- и П-образни заместващи схеми на четириполусника, съответно на еднородната линия.

11.4. ПАДАЩИ И ОТРАЗЕНИ ВЪЛНИ. РЕАЛНИ РЕШЕНИЯ НА ТЕЛЕГРАФНИТЕ УРАВНЕНИЯ И ТЕХНИТЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Да разгледаме комплексните решения на телеграфните уравнения, дадени в равенство (11.11). След полагането

$$\dot{U}_\Pi = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + Z_a \dot{I}_1), \quad \dot{U}_O = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - Z_a \dot{I}_1),$$

тези решения могат да се запишат по следния начин:

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{U}_{над}(x) + \dot{U}_{отп}(x) = \dot{U}_\Pi e^{-\gamma x} + \dot{U}_O e^{\gamma x} \\ \dot{I}(x) = \dot{I}_{над}(x) + \dot{I}_{отп}(x) = \frac{\dot{U}_\Pi}{Z_a} e^{-\gamma x} - \frac{\dot{U}_O}{Z_a} e^{\gamma x} \end{cases} \quad (11.18)$$

$$\dot{U}_{\text{пад}}(x) = \dot{U}_{\text{п}} e^{-\gamma x} = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + Z_g \dot{I}_1) e^{-\gamma x}, \quad (11.19a)$$

$$\dot{U}_{\text{отр}}(x) = \dot{U}_{\text{о}} e^{\gamma x} = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - Z_g \dot{I}_1) e^{\gamma x}, \quad (11.19б)$$

$$\dot{I}_{\text{пад}}(x) = \frac{\dot{U}_{\text{п}}}{Z_g} e^{-\gamma x} = \frac{\dot{U}_1 + Z_g \dot{I}_1}{2Z_g} e^{-\gamma x}, \quad (11.19в)$$

$$\dot{I}_{\text{отр}}(x) = -\frac{\dot{U}_{\text{о}}}{Z_g} e^{\gamma x} = -\frac{\dot{U}_1 - Z_g \dot{I}_1}{2Z_g} e^{\gamma x}. \quad (11.19г)$$

Виждаме, че напрежението и токът, определени чрез равенства (11.18), представляват сума от две събираеми. Първите събираеми намаляват с увеличаване на разстоянието от началото на линията x , а вторите нарастват. Може да се каже, че в линията съществуват два типа вълни: падащи вълни (означени с индекс *пад*) и отразени вълни (означени с индекс *отр*). Свойствата на тези вълни се илюстрират добре, ако се намерят моментните стойности на напрежението и тока.

В общия случай са в сила съотношенията

$$\dot{U}_{\text{п}} = U_{\text{п}} e^{j\psi_{\text{п}}}, \quad \dot{U}_{\text{о}} = U_{\text{о}} e^{j\psi_{\text{о}}}, \quad \gamma = \alpha + j\beta, \quad Z_g = z_g e^{j\varphi_g}.$$

Тъй като $\dot{U}_{\text{п}}$ и $\dot{U}_{\text{о}}$ участват в изразите съответно на падащите и отразените вълни както на напрежението, така и на тока, то за по-прост запис ще положим $\psi_{\text{п}} = \psi_{\text{о}} = 0$. Тогава от равенства (11.18) и (11.4) получаваме следните изрази за моментните стойности на напрежението и тока:

$$u(x, t) = \sqrt{2} U_{\text{п}} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x) + \sqrt{2} U_{\text{о}} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x), \quad (11.20a)$$

$$i(x, t) = \sqrt{2} \frac{U_{\text{п}}}{z_g} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x - \varphi_g) - \sqrt{2} \frac{U_{\text{о}}}{z_g} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x - \varphi_g). \quad (11.20б)$$

Да анализираме първоначално само първите събираеми на тези изрази, които представляват падащите вълни

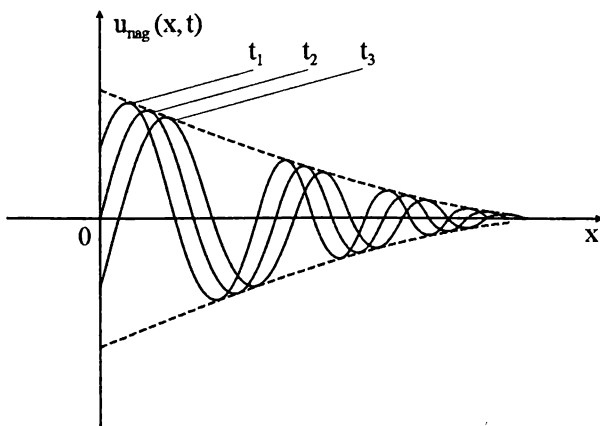
$$u_{\text{пад}}(x, t) = \sqrt{2} U_{\text{п}} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x), \quad (11.21a)$$

$$i_{\text{пад}}(x, t) = \sqrt{2} \frac{U_{\text{п}}}{z_g} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x - \varphi_g). \quad (11.21б)$$

Във всяка точка x тези величини представляват синусоидални функции на времето. Амплитудата на тези синусоидални функции намалява по експоненциален закон с увеличаване на разстоянието x от началото на линията. Намалението на амплитудата се определя от константата на затихването α (чрез множителя $e^{-\alpha x}$), което изяснява физическия смисъл и наименованието на тази константа. Лесно се вижда, че константата на фазата β оказва влияние на фазата на напряжението и тока, откъдето произтича нейното наименование.

За да изясним характера на вълновия процес ще приемем временно, че в линията няма затихване, т.е. $\alpha = 0$. Пространствено-временните координати (x_1, t_1) определят стойността на падащата вълна (на напряжението или тока) на разстояние x_1 от началото на линията в момента t_1 . Възможно е да се намерят други координати (x_2, t_2) , за които падащата вълна да има същата стойност. За тази цел е достатъчно аргументите (или фазите) на падащата вълна за двата набора координати да бъдат равни, т.е. да се удовлетворява уравнението $\omega t_1 - \beta x_1 = \omega t_2 - \beta x_2$, или $x_2 - x_1 = (\omega/\beta)(t_2 - t_1)$. При това положение се създава впечатление, че вълната се е преместила на разстояние $x_2 - x_1$ за време $t_2 - t_1$. Може да се каже, че падащите вълни се движат по посока, съвпадаща с нарастването на пространствената координата x . Подобно е положението и в случая, когато в линията има затихване и $\alpha \neq 0$, но с тази разлика, че само фазите остават неизменни, а амплитудите на движещите се вълни намаляват по експоненциален закон.

На фиг. 11.3 са показани падащите вълни на напряжението за три различни момента $t_1 < t_2 < t_3$.



Фиг. 11.3

За да определим фазовата скорост на разпространение на вълната изхождаме от факта, че движещата се вълна запазва неизменна своята фаза. Пространствено-временното състояние на вълна, която запазва неизменна своята фаза, се дава с равенството $\omega t - \beta x = \text{const}$. След диференциране се получава

$$\frac{d}{dt}(\omega t - \beta x) = 0, \quad \text{или} \quad v_\phi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta}. \quad (11.22)$$

Величината v_ϕ се нарича *фазова скорост на разпространение на вълната*. Тя представлява скоростта, с която се разпространява вълна, запазваща неизменна фазата си.

Дължина на вълната λ се нарича разстоянието между две най-близки точки, взети по посока на разпространение на вълната, за които фазите на вълната се различават с 2π . Следователно λ се определя от уравнението

$$\omega t - \beta x - [\omega t - \beta(x + \lambda)] = 2\pi,$$

от което получаваме

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}. \quad (11.23)$$

Тогава за фазовата скорост са в сила зависимостите

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta} = \lambda f = \frac{\lambda}{T}, \quad \lambda = v_\phi T \quad (11.24)$$

където f и T са честотата и периода (по отношение на времето) на вълната. Оттук следва, че дължината на вълната е равна на разстоянието, което тя изминава за време T равно на периода на колебанията.

Падащата вълна се разпространява по посока на оста x , поради което се нарича още и *права вълна*.

Ако разгледаме отразените вълни

$$u_{\text{отр}}(x, t) = \sqrt{2} U_0 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x), \quad (11.25a)$$

$$i_{\text{отр}}(x, t) = -\sqrt{2} \frac{U_0}{Z_0'} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x - \phi_0), \quad (11.25b)$$

ще видим, че те имат същия характер както падащите вълни, но се разпространяват в обратна посока, т.е. от края към началото на линията. Поради това тази вълна се нарича още и *обратна вълна*.

При отразените вълни от условието за неизменност на фазата $\omega t + \beta x = \text{const}$ се получава отрицателна фазова скорост $v_\phi = -\omega/\beta$.

Падащите и отразените вълни се наричат още и *бягащи вълни*.

Подобен анализ може да се направи и като се изходи от равенства (11.15), даващи комплексните решения на телеграфните уравнения в зависимост от координатата x' .

Накрая на този раздел ще дадем още една зависимост за вълновото съпротивление, която изяснява неговия физически смисъл. От формули (11.19) следва, че вълновото съпротивление може да се изрази чрез отношението на комплексите (или комплексните амплитуди) на падащите (а също и отразените) вълни на напрежението и тока, т.е.

$$Z_g = \frac{\dot{U}_{\text{пад}}(x)}{\dot{I}_{\text{пад}}(x)}, \quad Z_g = -\frac{\dot{U}_{\text{отр}}(x)}{\dot{I}_{\text{отр}}(x)}. \quad (11.26)$$

От формули (11.19) се вижда още, че вълновото съпротивление е постоянно във всяка точка от линията, т.е. не зависи от координатата x .

11.5. ВХОДНО СЪПРОТИВЛЕНИЕ НА ЛИНИЯТА

Входното съпротивление на еднородна линия при стационарен синусоиден режим се определя като отношението на комплексите (или комплексните амплитуди) на напрежението и тока в началото на линията. Като се използват комплексните уравнения (11.17) се получава:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2 \text{ch}\gamma l + Z_g \dot{I}_2 \text{sh}\gamma l}{\frac{\dot{U}_2}{Z_g} \text{sh}\gamma l + \dot{I}_2 \text{ch}\gamma l}. \quad (11.27)$$

Ако се въведе товарното съпротивление Z_T (чрез равенството $\dot{U}_2 = Z_T \dot{I}_2$), се стига до формулата:

$$Z_{\text{вх}} = Z_g \frac{Z_T \text{ch}\gamma l + Z_g \text{sh}\gamma l}{Z_T \text{sh}\gamma l + Z_g \text{ch}\gamma l}. \quad (11.28a)$$

Последната формула, след разделяне на числителя и знаменателя със $Z_g \text{ch}\gamma l$, може да се представи в следния вид:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{Z_T + Z_g \text{th}\gamma l}{1 + \frac{Z_T}{Z_g} \text{th}\gamma l}. \quad (11.28b)$$

Ще разгледаме някои частни случаи на работа на линията.

1) При *късо съединение в края на линията* е изпълнено $Z_T = 0$. Тогава

$$Z_{\text{вх,кк}} = Z_g \operatorname{th} \gamma l . \quad (11.29)$$

2) При *прекъсване в края на линията* е изпълнено $Z_T \rightarrow \infty$. В този случай

$$Z_{\text{вх,пр}} = Z_g \operatorname{cth} \gamma l . \quad (11.30)$$

Последните две формули дават възможност вторичните параметри вълново съпротивление и константа на разпространение да се изразят чрез входните комплексните съпротивления при късо съединение и прекъсване в края на линията, т.е.

$$Z_g = \sqrt{Z_{\text{вх,кк}} Z_{\text{вх,пр}}} , \quad \operatorname{th} \gamma l = \sqrt{Z_{\text{вх,кк}} / Z_{\text{вх,пр}}} .$$

Понякога е удобно да се изрази $Z_{\text{вх}}$ чрез $Z_{\text{вх,кк}}$ и $Z_{\text{вх,пр}}$. За тази цел заместваме равенства (11.29) и (11.30) в (11.28б), при което се получава

$$Z_{\text{вх}} = \frac{Z_T + Z_{\text{вх,кк}}}{1 + \frac{Z_T}{Z_{\text{вх,пр}}}} = Z_{\text{вх,пр}} \frac{Z_T + Z_{\text{вх,кк}}}{Z_T + Z_{\text{вх,пр}}} . \quad (11.31)$$

3) При *режим на съгласувано натоварване на линията* е изпълнено съотношението $Z_T = Z_g$. Тогава от (11.28) следва

$$Z_{\text{вх}} = Z_g = Z_T , \quad (11.32)$$

т.е. ако товарното съпротивление е равно на вълновото съпротивление, то и входното съпротивление е равно на вълновото съпротивление.

11.6. КОЕФИЦИЕНТИ НА ОТРАЖЕНИЕ

Коефициентите на отражение на линията са комплексни величини, които се дефинират като отношение на комплексите (или комплексните амплитуди) на отразената и падащата вълна в края на линията, съответно за напрежението и тока. Да разгледаме зависимостите, дадени в равенство (11.15). Първите събираеми в десните страни на това равенство представляват падащите вълни, а

вторите – отразените вълни (координатата x' се измерва от края на линията, при което с намаляване на x' първите събираеми намаляват, а вторите нарастват). При $x' = 0$ се получават вълните в края на линията. Като отчетем и равенството $\dot{U}_2 = Z_T \dot{I}_2$, за падащите и отразените вълни в края на линията се получава:

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = \dot{U}_{\text{пад}} + \dot{U}_{\text{отр}} \\ \dot{I}_2 = \dot{I}_{\text{пад}} + \dot{I}_{\text{отр}} \end{cases}, \quad (11.33a)$$

където

$$\dot{U}_{\text{пад}} = \frac{1}{2}(Z_T + Z_g)\dot{I}_2, \quad \dot{U}_{\text{отр}} = \frac{1}{2}(Z_T - Z_g)\dot{I}_2, \quad (11.33б)$$

$$\dot{I}_{\text{пад}} = \frac{1}{2Z_g}(Z_T + Z_g)\dot{I}_2, \quad \dot{I}_{\text{отр}} = -\frac{1}{2Z_g}(Z_T - Z_g)\dot{I}_2. \quad (11.33в)$$

При това положение *коэффициентът на отражение по напрежение* σ_u и *коэффициентът на отражение по ток* σ_i се определят чрез следните равенства:

$$\sigma_u = \frac{\dot{U}_{\text{отр}}}{\dot{U}_{\text{пад}}} = \frac{Z_T - Z_g}{Z_T + Z_g}, \quad \sigma_i = \frac{\dot{I}_{\text{отр}}}{\dot{I}_{\text{пад}}} = -\frac{Z_T - Z_g}{Z_T + Z_g}. \quad (11.34)$$

В сила е равенството

$$\sigma_u = -\sigma_i. \quad (11.35)$$

Лесно се установява, че в края на линията са изпълнени съотношенията:

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = \dot{U}_{\text{пад}}(1 + \sigma_u) \\ \dot{I}_2 = \dot{I}_{\text{пад}}(1 + \sigma_i) \end{cases}. \quad (11.36)$$

Ще разгледаме някои частни случаи.

1) При късо съединение в края на линията е изпълнено $Z_T = 0$. В този случай $\sigma_u = -1$ и $\sigma_i = 1$. Моментните стойности на падащата и отразената вълна на напрежението в края на линията имат равни амплитуди и са дефазирани на 180° . Амплитудата на резултантната вълна на напрежението в края на линията ще бъде равна на нула. В същото време моментните стойности на падащата и отразената вълна на тока в края на линията ще имат равни амплитуди и фази, което води до двойно увеличаване на резултантния ток в края на късо съединената линия (в сравнение с падащата вълна на тока).

2) При *прекъсване в края на линията* е изпълнено $Z_T \rightarrow \infty$. В този случай $\sigma_u = 1$ и $\sigma_i = -1$. Картината става противоположна на тази в първия случай: резултантният ток в края на линията ще бъде равен на нула, а моментната стойност на резултантното напрежение в края на линията става два пъти по-голяма (в сравнение с падащата вълна на напрежението).

3) При *режим на съгласувано натоварване на линията* е изпълнено съотношението $Z_T = Z_g$. В този случай коефициентите на отражение са нули, т.е. $\sigma_u = \sigma_i = 0$ и отразени вълни на тока и напрежението отсъстват. Напрежението и токът във всяка точка на линията, в това число и на входа (при $x = 0$), се определят само от падащите вълни. Тогава от равенство (11.26) получаваме:

$$Z_g = \frac{\dot{U}_{\text{пад}}(0)}{\dot{I}_{\text{пад}}(0)} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_{\text{вх}},$$

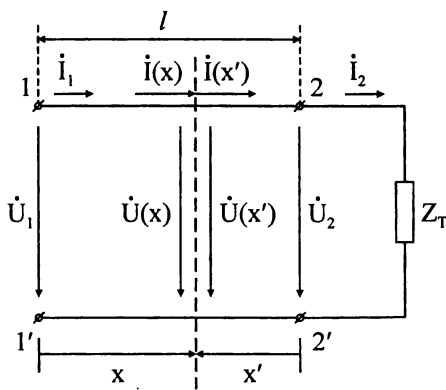
т.е. входното съпротивление на линията е равно на вълновото съпротивление. Този резултат беше вече получен по друг начин.

11.7. УРАВНЕНИЯ НА ЕДНОРОДНА ЛИНИЯ ПРИ РАЗЛИЧНИ РЕЖИМИ НА РАБОТА

11.7.1. Късо съединение в края на линията и прекъсване в края на линията

При нормален режим на работа в края на линията е включен товар с комплексно съпротивление Z_T . Ще смятаме, че задаваща величина или въздействие за линията е напрежението в началото на линията, което е определено с комплекса \dot{U}_1 . Комплексите на напрежението и тока в края на линията при наличие на товар са \dot{U}_2 и \dot{I}_2 . Комплексите на напрежението и тока в произволна точка x' от линията се определят чрез системата уравнения (11.16) (фиг. 11.4).

При късо съединение в края на линията са в сила съотношенията $Z_T = 0$ и $\dot{U}_2 = 0$. В този случай при неизменно напрежение на входа \dot{U}_1 токът в края на линията ще се измени и ще бъде различен от тока при наличие



Фиг. 11.4

на товар. Нека да изменим напрежението \dot{U}_1 така, че токът в края на линията при късо съединение да стане равен на тока при наличие на товар \dot{I}_2 . При това положение от равенство (11.16) се получава

$$\begin{cases} \dot{U}_{\text{кc}}(x') = Z_g \dot{I}_2 \operatorname{sh} \gamma x' \\ \dot{I}_{\text{кc}}(x') = \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma x' \end{cases} \quad (11.37)$$

При прекъсване в края на линията е изпълнено $Z_T \rightarrow \infty$ и $\dot{I}_2 = 0$, а напрежението в края на линията (при неизменно напрежение в началото на линията) ще се измени и ще бъде различно от напрежението при наличие на товар. В този случай изменяме напрежението в началото на линията, така че напрежението в края на линията при прекъсване да стане равно на напрежението при наличие на товар \dot{U}_2 . Тогава от равенство (11.16) се получава:

$$\begin{cases} \dot{U}_{\text{np}}(x') = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma x' \\ \dot{I}_{\text{np}}(x') = \frac{\dot{U}_2}{Z_g} \operatorname{sh} \gamma x' \end{cases} \quad (11.38)$$

След сравняването на равенства (11.37) и (11.38) с равенство (11.16) се вижда, че са в сила равенствата

$$\begin{cases} \dot{U}(x') = \dot{U}_{\text{кc}}(x') + \dot{U}_{\text{np}}(x') \\ \dot{I}(x') = \dot{I}_{\text{кc}}(x') + \dot{I}_{\text{np}}(x') \end{cases} \quad (11.39)$$

Последните зависимости показват, че напрежението (токът) в произволна точка от линията и при произволен товар може да се представи като наслагване на напрежението (тока) при късо съединение в края на линията и напрежението (тока) при прекъсване в края на линията. Този факт се използва често при практическите анализи на предавателни линии.

11.7.2. Режим на съгласувано натоварване на линията

Както вече беше показано, при режим на съгласувано натоварване на еднородната линия са изпълнени съотношенията $Z_T = Z_g$ и $Z_{\text{вх}} = Z_g$. При това положение от системата (11.16), като вземем предвид равенствата $\dot{U}_2 = Z_g \dot{I}_2$ и $\operatorname{ch} \gamma x \pm \operatorname{sh} \gamma x = e^{\pm \gamma x}$, се получава

$$\begin{cases} \dot{U}(x') = \dot{U}_2 e^{\gamma x'} \\ \dot{I}(x') = \dot{I}_2 e^{\gamma x'} = \frac{\dot{U}_2}{Z_g} e^{\gamma x'} \end{cases} \quad (11.40)$$

Системата уравнения (11.40) показва отново, че в еднородна линия при режим на съгласувано свързване съществуват само падащи вълни.

От (11.40) при $x' = l$ следва

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 e^{\gamma l} \\ \dot{I}_1 = \dot{I}_2 e^{\gamma l} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dot{U}_2 = \dot{U}_1 e^{-\gamma l} \\ \dot{I}_2 = \dot{I}_1 e^{-\gamma l} \end{cases}. \quad (11.41)$$

В комплексните решения (11.40), без да се намали общността на разглеждане може да се приеме, че $\dot{U}_2 = U_2$. При това положение за моментните стойности на падащите вълни на напрежението и тока в произволна точка x' от линията се получава

$$u(x', t) = \sqrt{2} U_2 e^{\alpha x'} \sin(\omega t + \beta x'), \quad (11.42a)$$

$$i(x', t) = \sqrt{2} \frac{U_2}{z_g} e^{\alpha x'} \sin(\omega t + \beta x' + \varphi_g). \quad (11.42b)$$

Имайки предвид последните изрази, може да се намери активната мощност, преминаваща през напречно сечение на линията с координата x'

$$P(x') = \frac{U_2^2}{z_g} e^{2\alpha x'} \cos \varphi_g. \quad (11.43)$$

Мощността постъпваща в началото на линията е

$$P_1 = P(x') \Big|_{x'=l} = \frac{U_2^2}{z_g} e^{2\alpha l} \cos \varphi_g. \quad (11.44a)$$

Мощността отделена в края на линията е

$$P_2 = P(x') \Big|_{x'=0} = \frac{U_2^2}{z_g} \cos \varphi_g. \quad (11.44b)$$

От последните две формули следват равенствата

$$P_1 = P_2 e^{2\alpha l} \quad \text{и} \quad P_2 = P_1 e^{-2\alpha l}. \quad (11.45)$$

Получените изрази дават възможност да се намери коефициентът на полезно действие на линията, който има вида

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = e^{-2\alpha}. \quad (11.46)$$

Режимът на съгласувано включване на линията е най-изгоден. При него липсват загуби на енергия, дължащи се на отразените вълни. Освен това липсват и някои допълнителни ефекти, свързани с отразените сигнали, например появяване на т.нар. ехо-сигнали, които се наслагват с основния сигнал и го изкривяват.

11.8. ЛИНИЯ БЕЗ ЗАГУБИ. СТОЯЩИ ВЪЛНИ

11.8.1. Общи зависимости и уравнения

В някои линии (линии с малка дължина и линии, работещи на високи честоти) са изпълнени условията $R_0 \ll \omega L_0$ и $G_0 \ll \omega C_0$. Такива линии могат да се приемат за идеални, т.е. без загуби и да се положи

$$R_0 = 0, \quad G_0 = 0. \quad (11.47)$$

За константата на разпространение в този случай се получава

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{-\omega^2 L_0 C_0} = j\omega \sqrt{L_0 C_0}, \quad (11.48a)$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}, \quad \gamma = j\beta. \quad (11.48б)$$

Като се вземат предвид равенства (11.22) и (11.23), може да се запише:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \gamma = j \frac{2\pi}{\lambda}, \quad v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \quad (11.48в)$$

Вълновото съпротивление приема вида

$$Z_a = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \rho. \quad (11.49)$$

За входното съпротивление е валидна формула (11.28a), от която след отчитане на равенствата

$$ch\gamma l = chj\beta l = \cos \beta l = \cos \frac{2\pi}{\lambda} l, \quad sh\gamma l = shj\beta l = j \sin \beta l = j \sin \frac{2\pi}{\lambda} l,$$

се получава

$$Z_{вх} = \rho \frac{Z_T \cos \frac{2\pi}{\lambda} l + j\rho \sin \frac{2\pi}{\lambda} l}{jZ_T \sin \frac{2\pi}{\lambda} l + \rho \cos \frac{2\pi}{\lambda} l}. \quad (11.50)$$

При анализа на процесите в линии без загуби е по-удобно разстоянието да се отчита не от началото на линията, а от края. Поради това ще използваме системата уравнения (11.16). Като се вземат предвид равенствата

$$ch\gamma x' = chj\beta x' = \cos \beta x', \quad sh\gamma x' = shj\beta x' = j \sin \beta x',$$

от системата (11.16) се получава, че процесите в еднородна линия без загуби се описват с уравненията

$$\begin{cases} \dot{U}(x') = \dot{U}_2 \cos \beta x' + j\rho \dot{i}_2 \sin \beta x' \\ \dot{i}(x') = j \frac{\dot{U}_2}{\rho} \sin \beta x' + \dot{i}_2 \cos \beta x' \end{cases} \quad (11.51)$$

След полагането $x' = l$ от (51) следват равенствата

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \cos \beta l + j\rho \dot{i}_2 \sin \beta l \\ \dot{i}_1 = j \frac{\dot{U}_2}{\rho} \sin \beta l + \dot{i}_2 \cos \beta l \end{cases} \quad (11.52)$$

11.8.2. Частни случаи

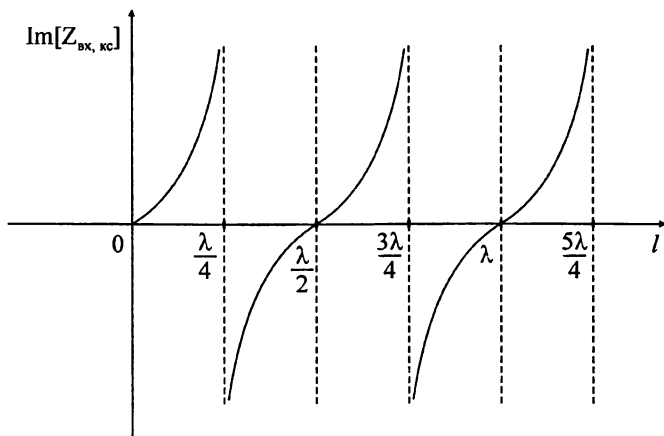
Ще анализираме процесите в еднородна линия без загуби при някои частни случаи.

1) При късо съединение в края на линията е изпълнено $Z_T = 0$ и $\dot{U}_2 = 0$. От равенство (11.50) се получава

$$Z_{вх,кч} = j\rho \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} l, \quad (11.53)$$

т.е. $Z_{вх,кч}$ е чисто реактивно съпротивление, което зависи от дължината на линията l и от дължината на вълната λ .

Ако $l = \lambda/4$, то $Z_{\text{вх,кв}} = j\rho \operatorname{tg}(\pi/2) \rightarrow \infty$, а еднородната линия има поведение на прекъсната верига, въпреки късото съединение в края ѝ. При $l = \lambda/2$ е изпълнено $Z_{\text{вх,кв}} = j\rho \operatorname{tg}\pi = 0$, а линията има поведение на късо съединена верига. Поради периодичността на функцията $\operatorname{tg}(2\pi/\lambda)l$ тези явления се повтарят и при други стойности на l . На фиг. 11.5 е показана графиката на функцията $\operatorname{Im}[Z_{\text{вх,кв}}]$ в зависимост от дължината на линията l . От графиката се вижда, че съществуват интервали, за които $\operatorname{Im}[Z_{\text{вх,кв}}] > 0$ (в тези интервали $Z_{\text{вх,кв}}$ има индуктивен характер) и интервали, за които $\operatorname{Im}[Z_{\text{вх,кв}}] < 0$ (в тези интервали $Z_{\text{вх,кв}}$ има капацитивен характер).



Фиг. 11.5

Уравненията на еднородната линия без загуби (11.51) при късо съединение в края на линията приемат вида

$$\begin{cases} \dot{U}(x') = j\rho \dot{I}_2 \sin \beta x' = j\rho \dot{I}_2 \sin \frac{2\pi}{\lambda} x' \\ \dot{I}(x') = \dot{I}_2 \cos \beta x' = \dot{I}_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} x' \end{cases} \quad (11.54)$$

Ще определим моментните стойности на напрежението и тока. За прост запис приемаме, че токът в края на линията има нулева начална фаза, т.е. $\dot{I}_2 = I_2$. Тогава от равенство (11.54) се получава

$$\begin{cases} u(x', t) = \sqrt{2}\rho I_2 \sin \beta x' \sin(\omega t + \pi/2) = \sqrt{2}\rho I_2 \sin \frac{2\pi}{\lambda} x' \sin(\omega t + \pi/2) \\ i(x', t) = \sqrt{2}I_2 \cos \beta x' \sin \omega t = \sqrt{2}I_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} x' \sin \omega t \end{cases} \quad (11.55)$$

Амплитудата на напрежението $\sqrt{2}\rho I_2 \sin(2\pi/\lambda)x'$ и амплитудата на тока $\sqrt{2}I_2 \cos(2\pi/\lambda)x'$ са функции на координатата x' . В линията има точки, наречени *възли*, в които амплитудите на напрежението и тока във всеки момент от времето са равни на нула. Възлите на напрежението (тока) остават на едно място, а стойностите на напрежението (тока) между възлите пулсират, достигайки положителните и отрицателните амплитудни стойности. По такъв начин в линията възникват вълни, които не се разпространяват по линията, а се намират на едно и също място и пулсират във времето по синусоидален или косинусоидален закон. Такива вълни се наричат *стоящи вълни*.

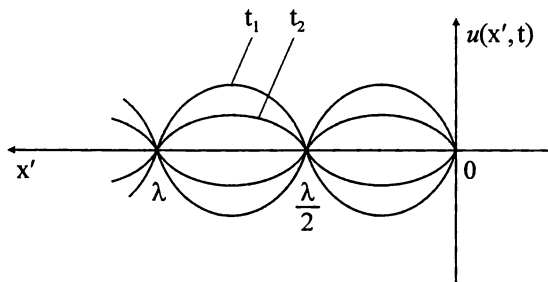
От равенство (11.55) се вижда, че възлите на напрежението се определят от уравненията

$$\sin \frac{2\pi}{\lambda} x' = 0, \quad \frac{2\pi}{\lambda} x' = k\pi, \quad x' = k \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Стоящите вълни на напрежението са показани на фиг. 11.6.

По аналогичен начин се анализират и стоящите вълни на тока.

Стоящите вълни могат да се разглеждат като резултат от наслагането на падаща вълна и отразена вълна без затихване и с амплитуди равни на половината от амплитудата на стоящата вълна. Този факт може да се обоснове, като се изходи от комплексните уравнения (11.54), които (при $I_2 = I_2$) могат да се представят по следния начин:



Фиг. 11.6

$$\begin{aligned} \dot{U}(x') &= j\rho I_2 \sin \beta x' = \frac{\rho I_2}{2} e^{j\beta x'} - \frac{\rho I_2}{2} e^{-j\beta x'} = \frac{\rho I_2}{2} e^{j\beta x'} + \frac{\rho I_2}{2} e^{-j(\beta x' - \pi)} = \\ &= \dot{U}_{\text{пад}}(x') + \dot{U}_{\text{отр}}(x'), \end{aligned}$$

$$i(x') = I_2 \cos \beta x' = \frac{I_2}{2} e^{j\beta x'} + \frac{I_2}{2} e^{-j\beta x'} = i_{\text{пад}}(x') + i_{\text{отр}}(x')$$

На тези комплексни решения съответстват следните моментни стойности:

$$u(x', t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \rho I_2 \sin(\omega t + \beta x') + \frac{\sqrt{2}}{2} \rho I_2 \sin(\omega t - \beta x' + \pi), \quad (11.56a)$$

$$i(x', t) = \frac{\sqrt{2}}{2} I_2 \sin(\omega t + \beta x') + \frac{\sqrt{2}}{2} I_2 \sin(\omega t - \beta x'). \quad (11.566)$$

Изразите за напрежението и тока, получени в равенства (11.56) са еквивалентни на тези от равенства (11.55), което може да се покаже чрез прости тригонометрични преобразувания. От друга страна, равенства (11.56) представят напрежението и тока като сума от падащи и отразени вълни с два пъти по-малки амплитуди от тези на стоящите вълни. Нещо повече, в края на линията (при $x' = 0$) резултантното напрежение е равно на нула, а резултантният ток е два пъти по-голям от тока на падащата вълна. Този факт вече беше получен чрез анализ на базата на коефициентите на отражението.

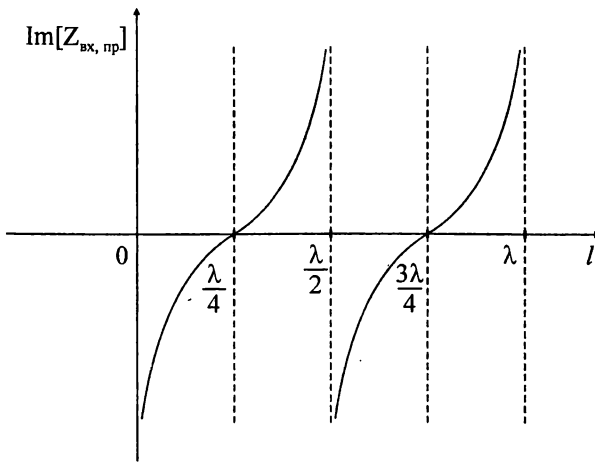
2) При прекъсване в края на линията е изпълнено $Z_T \rightarrow \infty$ и $i_2 = 0$. В този случай от (11.50) следва

$$Z_{\text{вх, пр}} = -j\rho \cot g \frac{2\pi}{\lambda} l, \quad (11.57)$$

т.е. $Z_{\text{вх, пр}}$ е чисто реактивно съпротивление, което зависи от дължината на линията l и от дължината на вълната λ .

Анализът на $Z_{\text{вх, пр}}$ е аналогичен на анализа на $Z_{\text{вх, кс}}$. Ще отбележим само, че при $l = \lambda/4$ се получава $Z_{\text{вх, пр}} = 0$, т.е. еднородната линия има поведение на късо съединена верига, въпреки липсата на товар в края ѝ.

На фиг. 11.7 е показана графиката на функцията $\text{Im}[Z_{\text{вх, пр}}]$, в зависимост от дължината на линията l .



Фиг. 11.7

Уравненията на еднородната линия без загуби (11.51) при прекъсване в края на линията приемат вида:

$$\begin{cases} \dot{U}(x') = \dot{U}_2 \cos \beta x' \\ \dot{i}(x') = j \frac{\dot{U}_2}{\rho} \sin \beta x' \end{cases} \quad (11.58)$$

От тези уравнения, приемайки отново за по-прост запис, че $\dot{U}_2 = U_2$, получаваме моментните стойности на напрежението и тока

$$\begin{cases} u(x', t) = \sqrt{2} U_2 \cos \beta x' \sin \omega t \\ i(x', t) = \sqrt{2} \frac{U_2}{\rho} \sin \beta x' \sin(\omega t + \pi/2) \end{cases} \quad (11.59)$$

Уравненията в равенство (11.59) представляват отново уравнения на стоящи вълни. От уравнения (11.59) и (11.55) се вижда, че възлите на напрежението при прекъсване на линията съвпадат с възлите на тока при късо съединение и възлите на тока при прекъсване на линията съвпадат с възлите на напрежението при късо съединение.

3) При режим на съгласувано натоварване на линията са в сила равенствата $Z_T = Z_a = Z_{ax} = \rho$. От уравненията (11.51), като се използва съотношението $\dot{U}_2 = \rho \dot{i}_2$, се получава

$$\begin{cases} \dot{U}(x') = \dot{U}_2 (\cos \beta x' + j \sin \beta x') = \dot{U}_2 e^{j\beta x'} = \dot{U}_{\text{пад}}(x') \\ \dot{i}(x') = \dot{i}_2 (\cos \beta x' + j \sin \beta x') = \dot{i}_2 e^{j\beta x'} = \dot{i}_{\text{пад}}(x') \end{cases} \quad (11.60)$$

От последните уравнения, приемайки, че $\dot{U}_2 = U_2$ и $\dot{i}_2 = I_2$, се получават моментните стойности на напрежението и тока:

$$\begin{cases} u(x', t) = \sqrt{2} U_2 \sin(\omega t + \beta x') \\ i(x', t) = \sqrt{2} I_2 \sin(\omega t + \beta x') \end{cases} \quad (11.61)$$

Получените уравнения описват падащи вълни, разпространяващи се в линията отляво надясно, т.е. от началото към края. Щепомним, че разстоянието x' се отчита от края на линията, при което за падащата вълна знакът пред $\beta x'$ е „+“. По такъв начин е доказано, че в еднородна линия без загуби и при съгласувано натоварване съществуват само падащи вълни (или бягащи вълни) на напрежението и тока, които са с постоянни, независещи от пространствената координата амплитуди.

11.9. ЛИНИЯ БЕЗ ИЗКРИВЯВАНИЯ

В най-общ случай на входа на предавателните линии постъпват несинусоидални сигнали, които могат да бъдат периодични или непериодични. В първия случай чрез редовете на Фурие, а във втория случай чрез интегралното преобразуване на Фурие сигналите могат да се заменят съответно с дискретен, или непрекъснат спектър от хармоници с различни честоти. Следователно може да се приеме, че по линията се разпространяват синусоидални сигнали (напрежения и токове) с различни честоти. Резултантният сигнал се определя от наслагването на разпространяващите се по линията прави и обратни вълни на отделните хармоници. Нежелани явления при функционирането на линиите в тези случаи представляват различните изкривявания, които претърпяват различните по честота бягащи вълни. Тези изкривявания са свързани със зависимостта на константата на разпространение γ и вълновото съпротивление Z_0 от честотата.

В общия случай за константата на разпространение γ са в сила зависимостите

$$\gamma = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta,$$

откъдето следва, че константата на затихването α и константата на фазата β зависят от честотата, т.е. $\alpha = \alpha(\omega)$ и $\beta = \beta(\omega)$.

Различните стойности на α за различните честоти водят до изменение на амплитудите на отделните хармоници в различна степен (чрез множителите $e^{\pm\alpha(\omega)x}$, или $e^{\pm\alpha(\omega)x'}$). Това именно нееднакво затихване за различните честоти представлява *амплитудните изкривявания*.

Аналогично, различните стойности на β за различните честоти водят до различни фазови скорости за различните хармоници ($v_\phi = \omega/\beta(\omega)$). Тази именно нееднаква фазова скорост за различните честоти представлява *фазовите изкривявания*.

Линия без изкривявания е такава линия, за която формата на сигнала в началото на линията и в края на линията е еднаква, т.е. всички стойности от кривите на напрежението и тока като функция на времето в края на линията са право пропорционални на съответните стойности от кривите на напрежението и тока в началото на линията. За да имаме предаване по линията на сигнали без изкривявания е необходимо коефициентът α да не зависи от честотата, а коефициентът β да бъде право пропорционален на честотата. В последния случай от формулата $v_\phi = \omega/\beta$ се получава, че фазовата скорост не зависи от честотата. Тези условия се изпълняват, когато са в сила съотношенията:

$$\frac{R_0}{G_0} = \frac{L_0}{C_0}, \quad \text{или} \quad \frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}. \quad (11.62)$$

Ще докажем, че ако е изпълнено равенство (11.62), то α и ν_ϕ не зависят от честотата. За коефициента γ имаме

$$\gamma = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{R_0 G_0 \left(1 + j\omega \frac{L_0}{R_0}\right) \left(1 + j\omega \frac{C_0}{G_0}\right)}.$$

След отчитане на равенство (11.62) се получава

$$\gamma = \sqrt{R_0 G_0} + j\omega \sqrt{R_0 G_0} \frac{L_0}{R_0} = \sqrt{R_0 G_0} + j\omega \sqrt{L_0 C_0}. \quad (11.63)$$

От последното равенство следват горните твърдения, т.е.

$$\alpha = \sqrt{R_0 G_0}, \quad \beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}, \quad \nu_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \quad (11.64)$$

В литературата се среща и следното определение на линия без изкривявания: линия, параметрите на която удовлетворяват условието (11.62), се нарича *линия без изкривявания*.

За вълновото съпротивление имаме

$$Z_s = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \sqrt{\frac{R_0/L_0 + j\omega}{G_0/C_0 + j\omega}}.$$

След отчитане на условието (11.62) получаваме

$$Z_s = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}} = \rho, \quad (11.65)$$

т.е. вълновото съпротивление на линия без изкривявания не зависи от честотата.

Тъй като вълновото съпротивление на линия без изкривявания е чисто активно, то при съгласувано натоварване напрежението и токът във всяка точка от линията съвпадат по фаза. Нещо повече, отношението между моментните стойности на напрежението и тока в произволна точка от линията е

$$\frac{u}{i} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \quad (11.66)$$

От последното равенство се получава

$$\frac{1}{2}L_0i^2 = \frac{1}{2}C_0u^2. \quad (11.67)$$

Следователно във всяка точка на линия без изкривявания, която е натоварена съгласувано и във всеки момент от времето, енергията на магнитното поле е равна на енергията на електрическото поле.

За много от предавателните линии, използвани в практиката, е в сила неравенството $R_0/G_0 \gg L_0/C_0$, т.е. тези линии не могат да бъдат линии без изкривявания. За да се отстранят изкривяванията в линиите се включват допълнителни индуктивности или се използват специални филтри, коригиращи звена, усилвателни и други устройства.

12.1. УВОД

Разглежданите досега независими източници имат свойството, че техните електродвижещи напрежения или токове са независими от стойността на коя да е величина от веригата. Повечето електронни прибори обаче – транзистори, тиристоры, операционни усилватели и подобните на тях, не могат да бъдат моделирани с използване само на пасивни двуполусни елементи и независими източници, които бяха използвани и досега за описание на веригите. За да могат да се моделират тези прибори, трябва да се въведе класа на „*зависимите източници*“, или още наречени „*управляеми източници*“. Напрежението (или токът) на *зависимия* източник зависи от някое друго напрежение или ток от веригата. Зависимите източници са *активни* елементи. Те се използват като инструмент за построяване на математически модели на голям брой електронни елементи – транзистори и операционни усилватели, и електронни схеми – усилватели и генератори на сигнали, активни филтри и др. Математическите модели са изключително важни за електронната схемотехника, защото позволяват да се анализират и предсказват характеристиките на изследваните вериги.

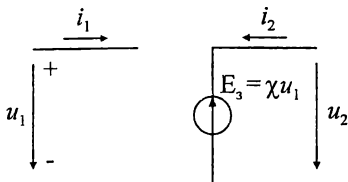
Повечето електронни прибори – транзистори, тиристоры, операционни усилватели и др., имат повече от два извода. Например транзисторът, който има три извода, често се представя като прибор с четири извода, групирани в две двойки (два входни и два изходни извода). В тези устройства напрежението (или токът) в изходната двойка изводи е функция на напрежението (или тока) във входната двойка изводи. Зависимите източници също имат по четири извода, което ги прави подходящи за моделиране на тези прибори.

Зависимите източници са четири вида. Те се дефинират с по две уравнения, които свързват входното напрежение и ток с изходното напрежение и ток. Те имат имена, които показват връзката на един клон с друг клон. Четирите вида зависими източници ще бъдат разгледани накратко.

1. *Източник на напрежение, управляван с напрежение (ИНУН)*. Схематичното му означение е показано на фиг. 12.1.

Този зависим източник се описва с уравненията:

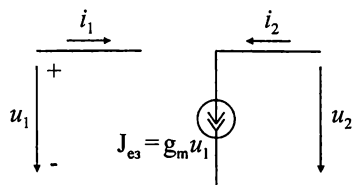
$$\begin{aligned} i_1 &= 0, \\ E_3 &= \chi u_1 \\ u_2 &= E_3 \end{aligned} \quad (12.1)$$



Фиг. 12.1

напрежението на изводите на източника е постоянно, независимо от товара. Обаче управляваният източник зависи от условията на входните изводи на елемента. Второто уравнение се нарича „управляващо уравнение“ за зависимия източник, защото то свързва напрежението на източника с входа, или управляващото напрежение.

2. *Източник на ток, управляван с напрежение (ИТУН).* Схематичното му изображение е показано на фиг. 12.2.

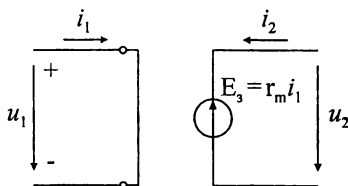


Фиг. 12.2

Константата g_m се нарича *предавателна проводимост*, зададена в единици *сименс*, S. Управляващото напрежение u_1 определя тока на източника J_{es} , независещ от напрежението u_2 . Следователно изходният ток i_2 се определя единствено от управляващото напрежение u_1 .

3. *Източник на напрежение, управляван с ток (ИНУТ).* Схематичното му изображение е показано на фиг. 12.3.

Изходното напрежение на този елемент се управлява от входния ток i_1 , съгласно уравненията:



Фиг. 12.3

където r_m се нарича *предавателно съпротивление*, с размерност Ω . Тъй като стойността на напрежението се поддържа равна на $r_m i_1$ независимо от изходния ток i_2 , то i_1 се нарича *управляващ ток*. Второто уравнение е управляващото уравнение на зависимия източник на напрежение.

4. *Източник на ток, управляван с ток (ИТУТ).* Символичното му означение е показано на фиг. 12.4.

Величината *усилване по напрежение* χ е бездименсионна. Входното напрежение се нарича „управляващо“ напрежение, тъй като то определя стойността на „управлявания“ източник на напрежение E_3 . Характеристиките на управляемия източник са същите като тези на независимите източници на напрежение, в смисъл, че

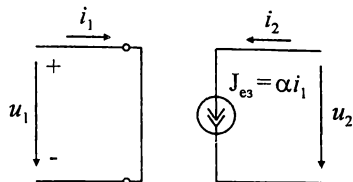
Входното напрежение u_1 на този източник управлява изходния ток i_2 според уравненията:

$$\begin{aligned} i_1 &= 0 \\ J_{es} &= g_m u_1 \\ i_2 &= J_{es} \end{aligned} \quad (12.2)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ E_3 &= r_m i_1 \\ u_2 &= E_3 \end{aligned} \quad (12.3)$$

Изходният ток i_2 в този елемент се управлява от входния ток i_1 , както се дефинира от уравненията:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ J_{e3} &= \alpha i_1 \\ i_2 &= J_{e3} \end{aligned} \quad (12.4)$$



Фиг. 12.4

Константата α е бездименсионна и се нарича *токово усилване* на елемента. Управляващият ток определя тока на зависимия източник на ток, независимо от изходното напрежение. Управляващото уравнение за този елемент е второто.

Четириите зависими източника, дефинирани в горните редове, са линейни и време-независими. Те ще бъдат използвани по-нататък за въвеждане на еквивалентни схеми на широк клас активни електронни прибори. Могат да бъдат комбинирани с пасивни елементи, за да се представят по-точно характеристиките на електронните прибори.

Някои примери за приложение на зависимите източници са:

- модел на вакуумен триод – с ИНУН;
- модел на полеви транзистор – с ИТУН;
- модел на биполярен транзистор – с ИТУТ;
- модел на операционен усилвател – с ИНУН;
- модел на линеен трансформатор – с ИТУТ.

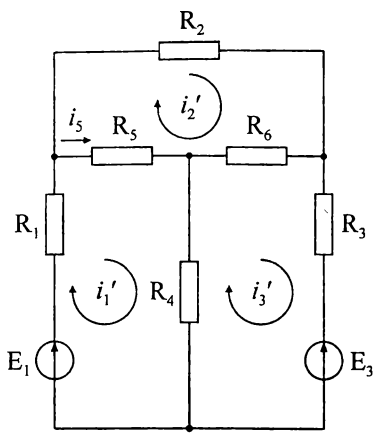
12.2. ВЪВЕЖДАНЕ НА ЗАВИСИМИТЕ ИЗТОЧНИЦИ

12.2.1. Въвеждане на зависимите източници в метода с контурните токове

При записването на системата уравнения по метода с контурните токове въвеждането на зависимите източници на напрежение е сравнително лесно. Те се записват от дясната страна на съответните уравнения, както и независимите източници на напрежение. Разликата е, че се налага зависимият източник след това да бъде изразен чрез контурните токове и получените членове се прехвърлят от лявата страна на уравнението. Това ще бъде показано за схемата на фиг. 12.5, в която действа зависимият източник $E_3 = r_m i_5$.

По метода с контурните токове се записва:

$$\begin{cases} (R_1 + R_4 + R_5) i_1' - R_5 i_2' - R_4 i_3' = E_1 \\ -R_5 i_1' + (R_2 + R_5 + R_6) i_2' - R_6 i_3' = 0 \\ -R_4 i_1' - R_6 i_2' + (R_3 + R_4 + R_6) i_3' = -E_{33} \end{cases}$$



Фиг. 12.5

Замества се $E_{33} = r_m i_5 = r_m (i_1' - i_2')$ в третото уравнение:

$$-R_4 i_1' - R_6 i_2' + (R_3 + R_4 + R_6) i_3' + r_m (i_1' - i_2') = 0$$

Отделят се коефициентите пред контурните токове и за третото уравнение се получава:

$$-(R_4 - r_m) i_1' - (R_6 + r_m) i_2' + (R_3 + R_4 + R_6) i_3' = 0$$

Вижда се, че при наличие на зависими източници матрицата \mathbf{R} става несиметрична:

$$R_{31} = -(R_4 - r_m) \neq R_{13} = -R_4$$

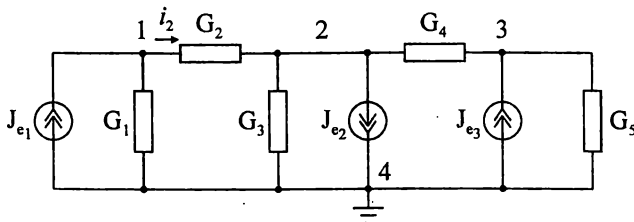
$$R_{32} = -(R_6 + r_m) \neq R_{23} = -R_6$$

Това затруднява числената реализация на метода с контурните токове, защото се налага да бъдат използвани алгоритми за решаване на системи уравнения от общ вид (с несиметрична матрица). Тези алгоритми използват повече памет и работят по-бавно в сравнение с алгоритмите за решаване на симетрични системи уравнения.

Ако в изследваната верига има зависими източници на ток, те могат предварително да се преобразуват в еквивалентни източници на напрежение и след това се работи по същия начин.

12.2.2. Въвеждане на зависимите източници в метода с възловите потенциали

При записването на системата уравнения по метода с възловите потенциали е сравнително лесно въвеждането на зависими източници на ток. Те се записват от дясната страна на съответните уравнения, както и независимите източници на ток. Разликата е, че се налага зависимият източник на ток след това да бъде изразен чрез възловите потенциали и получените членове се прехвърлят от лявата страна на уравнението. Това ще бъде показано за схемата на фиг. 12.6, в която има един зависим източник на ток, управляван с ток: $J_{e3} = \alpha i_2$.



Фиг. 12.6

Избира се възел 4 с нулев потенциал. За останалите възли се записва система уравнения по метода с възловите потенциали:

$$\begin{cases} (G_1 + G_2)V_1 - G_2 V_2 = J_{e1} \\ -G_2 V_1 + (G_2 + G_3 + G_4)V_2 - G_4 V_3 = -J_{e2} \\ -G_4 V_2 + (G_4 + G_5)V_3 = J_{e3} \end{cases}$$

Зависимият източник на ток J_{e3} се изразява чрез възловите потенциали V_1 и V_2 и се замества в третото уравнение:

$$\begin{aligned} J_{e3} &= \alpha i_2 = \alpha G_2(V_1 - V_2) \\ -G_4 V_2 + (G_4 + G_5)V_3 &= \alpha G_2(V_1 - V_2) \\ -\alpha G_2 V_1 - (G_4 - \alpha G_2)V_2 + (G_4 + G_5)V_3 &= 0 \end{aligned}$$

Особеността тук е, че възловата матрица на проводимостите \mathbf{G} става несиметрична. Така например:

$$\begin{aligned} G_{31} &= -\alpha G_2 \neq G_{13} = 0 \\ G_{32} &= -(G_4 - \alpha G_2) \neq G_{23} = -G_4 \end{aligned}$$

Това усложнява числената реализация на метода с възловите потенциали.

Ако във веригата има зависими източници на напрежение, те могат да се преобразуват еквивалентно в зависими източници на ток и след това се работи по описания по-горе начин.

12.3. ПРИЛОЖЕНИЯ НА ЗАВИСИМИТЕ ИЗТОЧНИЦИ

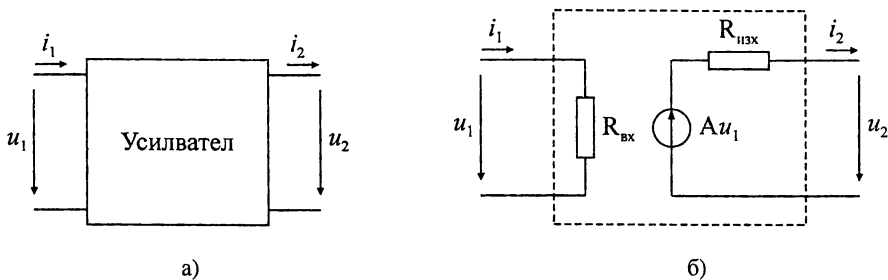
12.3.1. Модел на усилвател на напрежение

Усилвателят на напрежение е верига, на чийто вход се подава напрежение с определена амплитуда, а на изхода му се получава напрежение с по-голяма амплитуда от тази на входното. Усилването по напрежение се получава благодарение на използване на активни полупроводникови прибори в тези вериги – транзистори или операционни усилватели.

В много случаи усилвателят на напрежение е достатъчно да се разгледа като „черна кутия“ с една двойка входни и една двойка изходни изводи, както е показано на фиг. 12.7а.

Това дава възможност да бъдат използвани само няколко важни параметъра на усилвателя при взаимодействието му с останалата част от веригата, а не всички подробности от електрическата му схема и нейните елементи. Т.е., усилвателят се разглежда като функционален блок, който може да се моделира много просто със зависим източник. Един от моделите, използван и за пред-

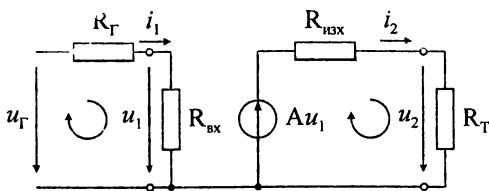
ставяне на усилвателя на напрежение чрез зависим източник на напрежение е показан на фиг. 12.7б.



Фиг. 12.7

В този модел $R_{вх}$ е входното съпротивление на усилвателя, а $R_{изх}$ е изходното съпротивление на усилвателя. Моделът използва зависим източник на напрежение, управляван с напрежение (ИНУН). Електронните прибори в усилвателя осигуряват входното напрежение u_1 да се умножи по някакъв коефициент A и това се представя чрез зависим източник на напрежение Au_1 .

Този модел на усилвател на напрежение ще бъде включен в една реална схема, като към входа ще бъде свързан източник на сигнал u_{Γ} с вътрешно съпротивление R_{Γ} , а към изхода – товарно съпротивление R_{Γ} (фиг. 12.8).



Фиг. 12.8

Веригата се състои от два отделни контура; единствената връзка между тях е чрез зависимия източник. За анализа ще бъде записан вторият закон на Кирхоф за двата контура.

1) Записва се втори закон на Кирхоф за първия контур:

$$-u_{\Gamma} + R_{\Gamma}i_1 + R_{вх}i_1 = 0,$$

откъдето

$$i_1 = \frac{u_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + R_{вх}},$$

следователно

$$u_1 = R_{вх}i_1 = \frac{R_{вх}u_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + R_{вх}}.$$

2) Записва се втори закон на Кирхоф за втория контур:

$$(R_{\text{изх}} + R_{\text{T}})i_2 = Au_1$$

откъдето

$$i_2 = \frac{Au_1}{R_{\text{изх}} + R_{\text{T}}} = \frac{AR_{\text{вх}}i_1}{R_{\text{изх}} + R_{\text{T}}} = \frac{AR_{\text{вх}}u_{\text{Г}}}{(R_{\text{изх}} + R_{\text{T}})(R_{\text{Г}} + R_{\text{вх}})}$$

Тъй като изходното напрежение е

$$u_2 = R_{\text{T}}i_2,$$

то усилването по напрежението k_u е

$$k_u = \frac{u_2}{u_{\text{Г}}} = \frac{R_{\text{T}}i_2}{u_{\text{Г}}} = \frac{AR_{\text{вх}}R_{\text{T}}}{(R_{\text{изх}} + R_{\text{T}})(R_{\text{Г}} + R_{\text{вх}})} = \frac{A}{\left(\frac{R_{\text{изх}}}{R_{\text{T}}} + 1\right)\left(\frac{R_{\text{Г}}}{R_{\text{вх}}} + 1\right)} \quad (12.5)$$

Ако $R_{\text{вх}} \gg R_{\text{Г}}$ и $R_{\text{T}} \gg R_{\text{изх}}$, то $k_u \approx A$.

Вижда се, че коефициентът на усилване на натоварения усилвател k_u ще бъде близък до максимално възможното усилване на усилвателя A , ако той е натоварен с товарно съпротивление R_{T} , много по-голямо от изходното му съпротивление $R_{\text{изх}}$, и ако входното му съпротивление $R_{\text{вх}}$ е много по-голямо от вътрешното съпротивление на генератора $R_{\text{Г}}$. Тези условия се наричат *условия за получаване на максимално усилване от усилвател на напрежение*.

Усилването по ток k_i е

$$k_i = \frac{i_2}{i_1} = \frac{AR_{\text{вх}}}{R_{\text{изх}} + R_{\text{T}}} \quad (12.6)$$

което следва от израза

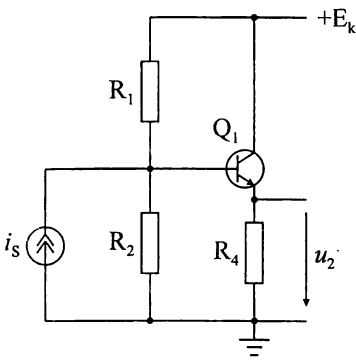
$$i_2 = \frac{Au_1}{R_{\text{изх}} + R_{\text{T}}} = \frac{AR_{\text{вх}}i_1}{R_{\text{изх}} + R_{\text{T}}}.$$

12.3.2. Транзисторен усилвател по схема общ колектор (емитерен повторител)

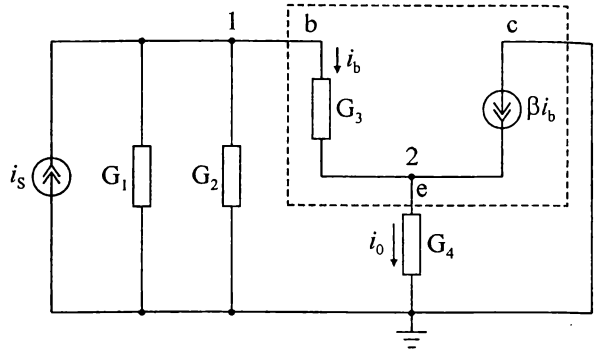
Схемата на транзисторен усилвател по схема общ колектор (емитерен повторител) е показана на фиг. 12.9. На фиг. 12.10 е показана същата схема, като транзисторът е заместен с приблизителен модел, използващ зависим източник на ток, управляван с ток (ИТУТ).

Търсят се:

1. Усилването по напрежение $k_u = u_2 / u_1$
2. Усилването по ток $k_i = i_2 / i_1$
3. Входното съпротивление $R_{\text{вх}}$



Фиг. 12.9



Фиг. 12.10

По метода с възловите потенциали се записват две уравнения за възли 1 и 2:

$$\begin{cases} (G_1 + G_2 + G_3)V_1 - G_3V_2 = i_s \\ -G_3V_1 + (G_3 + G_4)V_2 = \beta i_b \end{cases}$$

Токът на базата се изразява с потенциалите на възли 1 и 2:

$$i_b = G_3(V_1 - V_2)$$

Замества се i_b във второто уравнение на системата:

$$-G_3V_1 + (G_3 + G_4)V_2 = \beta G_3(V_1 - V_2).$$

Прегрупира се и за второто уравнение се получава:

$$-(\beta + 1)G_3V_1 + [(\beta + 1)G_3 + G_4]V_2 = 0.$$

Окончателният вид на системата ще бъде:

$$\begin{cases} (G_1 + G_2 + G_3)V_1 - G_3V_2 = i_s \\ -(\beta + 1)G_3V_1 + [(\beta + 1)G_3 + G_4]V_2 = 0 \end{cases}$$

Решава се системата относно V_1 и V_2 .

Детерминатата Δ ще бъде:

$$\begin{aligned} \Delta &= (G_1 + G_2 + G_3)[(\beta + 1)G_3 + G_4] - (\beta + 1)G_3^2 = \\ &= (G_1 + G_2)[(\beta + 1)G_3 + G_4] + G_3G_4 \end{aligned}$$

Използвайки формулите на Крамер, за потенциалите V_1 и V_2 се получава:

$$V_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} i_S & -G_3 \\ 0 & (\beta+1)G_3 + G_4 \end{vmatrix}, \quad V_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} (G_1 + G_2 + G_3) & i_S \\ -(\beta+1)G_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$V_1 = \frac{1}{\Delta} [(\beta+1)G_3 + G_4] i_S; \quad V_2 = \frac{1}{\Delta} (\beta+1)G_3 i_S$$

1) Коэффициент на усилване по напрежение k_u :

$$k_u = \frac{u_2}{u_1} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{(\beta+1)G_3}{[(\beta+1)G_3 + G_4]} \quad (12.7)$$

Типично β е число от порядъка на $100 \div 500$ (β е коефициентът на усилване по ток на биполярните транзистори – параметър h_{21} от каталозите за полупроводникови прибори), а G_4 и G_3 са съизмерими. Тогава следва, че

$$k_u = \frac{u_2}{u_1} \approx 1 \quad (12.8)$$

Това е характерно свойство на емитерния повторител – коефициентът му на усилване по напрежение е приблизително равен на единица (но винаги по-малък от единица). Затова схемата се нарича *емитерен повторител* – защото повтаря входното напрежение на изхода си – в емитера на транзистора.

2) Коэффициент на предаване по ток k_i

Първо се определя изходният ток на транзистора – токът в емитера му е:

$$i_0 = G_4 V_2 = \frac{1}{\Delta} (\beta+1) G_3 G_4 i_S$$

Съставя се отношението на изходен към входен ток:

$$k_i = \frac{i_0}{i_S} = \frac{1}{\Delta} (\beta+1) G_3 G_4 = \frac{(\beta+1) G_3 G_4}{(G_1 + G_2)[(\beta+1)G_3 + G_4] + G_3 G_4} \quad (12.9)$$

При същите опростяващи предположения (както и че R_1 и R_2 са големи – $1 \div 2 \text{ M}\Omega$, съответно G_1 и G_2 са твърде малки $\sim 1 \cdot 10^{-6} \text{ S}$) се получава приблизителната формула за k_i :

$$k_i \approx (\beta+1) \quad (12.10)$$

Този резултат показва, че усилването по ток на емитерния повторител е значително и приблизително равно на усилването по ток β на транзистора. Оттам усилването по мощност ще бъде също твърде голямо.

3) Входно съпротивление $R_{\text{вх}}$

$$R_{\text{вх}} = \frac{V_1}{i_s} = \frac{(\beta + 1)G_3 + G_4}{(G_1 + G_2)[(\beta + 1)G_3 + G_4] + G_3G_4} \quad (12.11)$$

При същите опростяващи предположения се получава:

$$R_{\text{вх}} \approx \frac{(\beta + 1)}{G_4} = (\beta + 1)R_4 \quad (12.12)$$

Следователно емитерният повторител има много голямо входно съпротивление, приблизително равно на β пъти емитерното му съпротивление, което го прави много подходящ за буферни стъпала – за включване на нискоомни товари към източник, без да се натоварва източника.

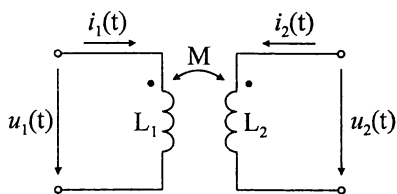
При тези разглеждания не е включено влиянието на товарното съпротивление и вътрешното съпротивление на генератора. Също така този модел на транзистора е предназначен за ниски и средни честоти, т.е. пренебрегват се инерционните процеси в активните елементи и паразитните обратни връзки.

12.3.3. Еквивалентна схема на линеен трансформатор, използваща зависими източници

Зависимите източници на ток могат да бъдат използвани за създаване на модел на линеен трансформатор (две индуктивно свързани бобини). Такъв модел има някои предимства, в сравнение с простата Т-образна еквивалентна схема на линеен трансформатор.

Разглежда се линеен трансформатор с параметри L_1 , L_2 и M .

По втори закон на Кирхоф за двата контура се записва:



Фиг. 12.11

$$\begin{aligned} u_1(t) &= L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \\ u_2(t) &= \pm M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \quad (12.13)$$

Решават се тези уравнения относно $\frac{di_1}{dt}$ и $\frac{di_2}{dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= \frac{L_2}{L_1L_2 - M^2} u_1 \mp \frac{M}{L_1L_2 - M^2} u_2 \\ \frac{di_2}{dt} &= \mp \frac{M}{L_1L_2 - M^2} u_1 + \frac{L_1}{L_1L_2 - M^2} u_2 \end{aligned} \quad (12.14)$$

Като се използва коефициентът на връзката $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ и това, че

$$k^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2}, \text{ горните уравнения се записват като}$$

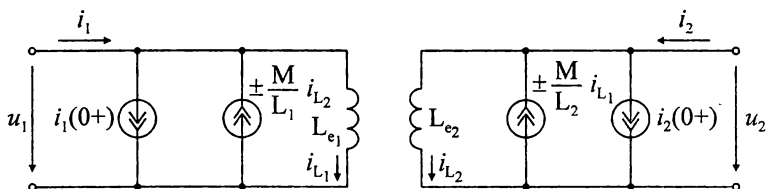
$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= \frac{1}{L_{e1}} u_1 \mp \frac{M}{L_1 L_{e2}} u_2 \\ \frac{di_2}{dt} &= \mp \frac{M}{L_2 L_{e1}} u_1 + \frac{1}{L_{e2}} u_2 \end{aligned}, \quad (12.15)$$

където $L_{e1} = L_1(1 - k^2)$ и $L_{e2} = L_2(1 - k^2)$.

Следователно връзката ток – напрежение за схемата на фиг. 12.11 се дава с

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{1}{L_{e1}} \int_{0+}^t u_1(\tau) d\tau \mp \frac{M}{L_1 L_{e2}} \int_{0+}^t u_2(\tau) d\tau + i_1(0+) = i_{L1} \mp \frac{M}{L_1} i_{L2} + i_1(0+) \\ i_2(t) &= \mp \frac{M}{L_2 L_{e1}} \int_{0+}^t u_1(\tau) d\tau + \frac{1}{L_{e2}} \int_{0+}^t u_2(\tau) d\tau + i_2(0+) = \mp \frac{M}{L_2} i_{L1} + i_{L2} + i_2(0+) \end{aligned} \quad (12.16)$$

Тук знак (-) се взема при (+) в изходните уравнения и обратно. Като се имат предвид последните изрази за i_1 и i_2 , може да се конструира еквивалентна схема за линеен трансформатор, която използва само индуктивности и ИГУТ (фиг. 12.12).



Фиг. 12.12

Тази еквивалентна схема удовлетворява дефиниционните уравнения и осигурява изолация между първичната и вторичната намотки, която е налице при трансформаторите. Тя е по-достоверна от простата T-образна заместваща схема на трансформатор, която не осигурява изолация между намотките и не отчита началните условия.

Трябва да се отбележи, че съпротивленията на намотките и техните капацитети, както и капацитетът между намотките в тези модели са пренебрегнати.

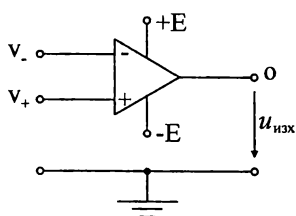
12.4. ОПЕРАЦИОННИ УСИЛВАТЕЛИ

12.4.1. Общи сведения

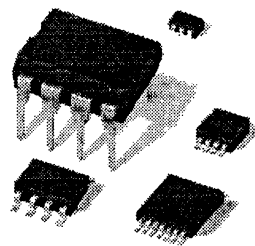
Операционният усилвател (ОУ) е полупроводниково устройство – усилвател на напрежение с диференциален вход, състоящ се от няколко десетки транзистора и резистори. Характерно за него е голямото усилване по напрежение, обикновено в границите $1 \cdot 10^5 \div 1 \cdot 10^6$. Това голямо усилване позволява с ОУ да се конструират вериги, които могат да изпълняват различни математически операции – събиране, изваждане, диференциране, интегриране, умножение и др. Поради тази причина този тип усилватели на напрежение са наречени *операционни усилватели*.

Първоначално във времето ОУ е бил изпълняван с дискретни транзистори върху една платка. С напредъка на микроелектронната техника схемата му е била реализирана в един чип, като има и модели с четири ОУ в един корпус. Поради неговата универсалност и ниска цена операционният усилвател се е наложил като базов градивен елемент в електрониката, автоматиката, измервателната техника и комуникациите.

Схемното означение на ОУ е показано на фиг. 12.13а, а няколко вида корпуси на ОУ са показани на фиг. 12.13б.



а)



б)

Фиг. 12.13

Два от изводите, означени с +E и –E, се свързват към двуполярен източник на постоянно напрежение ($5 \div 15$ V), който захранва операционния усилвател. Входните изводи, означени с "+" и "-", се наричат *неинвертиращ вход* и *инвертиращ вход*, към които се подават входните сигнали (v_+ и v_- са техните потенциали). Изводът, означен с "o", е изходът на операционния усилвател. В някои типове ОУ има и допълнителни изводи, които се използват за честотна корекция и баланс на нулата на изхода, но те няма да бъдат разглеждани тук.

Изходният сигнал на операционния усилвател $u_{\text{изх}}$ зависи само от разликата $u_d = v_+ - v_-$ между потенциалите на двата входни извода. Ако вход "+" се свърже към земя, а сигналът се подаде към вход "-", то $u_{\text{изх}}$ и v_- ще имат противоположни знаци, т.е. сигналът *се инвертира*. Ако вход "-" се свърже

към земя, а входен сигнал се подаде към вход "+", то $u_{\text{изх}}$ и v_+ ще имат еднакви знаци – т.е. сигналът *не се инвертира*.

На фиг. 12.14 е показана опростена (използваща само прави линии) предавателна характеристика на ОУ – функцията $u_{\text{изх}} = f(u_d)$, където $u_{\text{изх}}$ е изходното напрежение без товар.

Когато диференциалното входно напрежение u_d има малка амплитуда, изходното напрежение е пропорционално на входното. Когато амплитудата на входното напрежение надвиши някаква критична стойност, означена с $V_{\text{нас}}/A$, изходното напрежение престава да се увеличава и остава постоянно – това явление се нарича *насищане*. В действителност изходното напрежение се насища на две нива $\pm V_{\text{нас}}$.

Първият сегмент, минаващ през началото на координатната система на фиг. 12.14, се нарича *линейна активна област*. Наклонът на този сегмент, означен с A , се нарича *усилване без обратна връзка* (усилване при отворена верига) на ОУ. Това е усилването по напрежение, когато липсва връзка между изхода и входа на ОУ. Типичните стойности за A са в обхвата $10^5 \div 10^6$. Критичните входни напрежения, при които настъпва насищане, са $\pm V_{\text{нас}} / A$. Ако $V_{\text{нас}} = 15 \text{ V}$ и $A = 10^5$, критичните входни напрежения са $\pm 0,15 \text{ mV}$.

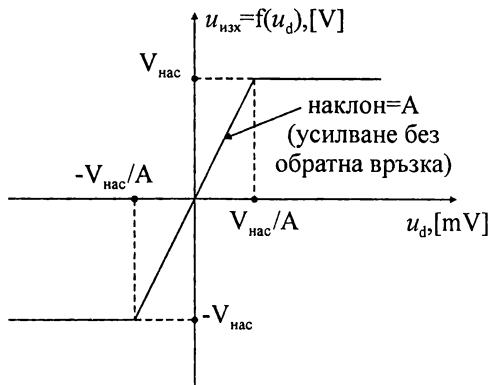
Математически кривата от фиг. 12.14 се описва със следните уравнения:

$$\begin{aligned} u_{\text{изх}} &= Au_d = A(v_+ - v_-), \quad \text{за } |u_d| \leq V_{\text{нас}} / A \\ u_{\text{изх}} &= V_{\text{нас}}, \quad \text{за } u_d \geq V_{\text{нас}} / A \\ u_{\text{изх}} &= -V_{\text{нас}}, \quad \text{за } u_d \leq -V_{\text{нас}} / A \end{aligned} \quad (12.17)$$

Модели на операционните усилватели

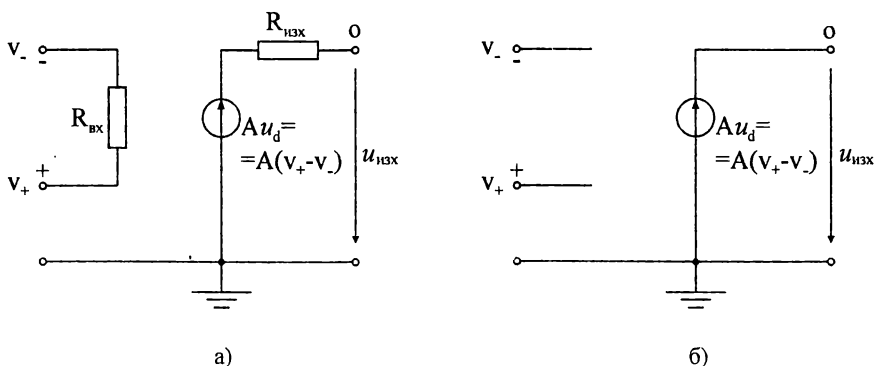
Схемен модел на ОУ за постоянен ток е показан на фиг. 12.15а. Той е валиден при работа в линейната активна област. Използва се линеен зависим източник на напрежение, управляван с напрежение и два резистора: $R_{\text{вх}}$ и $R_{\text{изх}}$. Функционалната зависимост $u_{\text{изх}} = f(u_d)$ е дадена с кривата на фиг. 12.14.

Основни параметри в този линеен модел на ОУ са *усилването без обратна връзка* A , *входното съпротивление* $R_{\text{вх}}$ и *изходното съпротивление* $R_{\text{изх}}$. Типичните стойности за $R_{\text{вх}}$ са от порядъка на $1 \text{ M}\Omega$, а за $R_{\text{изх}}$ – по-малки от 100Ω . Ако входните изводи на ОУ са свързани към източник, имащ



Фиг. 12.14

вътрешно съпротивление $R_T \ll R_{вх}$, тогава $R_{вх}$ може приблизително да бъде заместено с безкрайно съпротивление (отворена верига). Ако изходът на ОУ е свързан към товар $R_T \gg R_{изх}$, то ефектът на $R_{изх}$ може да бъде пренебрегнат, като $R_{изх}$ се замества с нулево съпротивление (късо съединение).



Фиг. 12.15

След пренебрегването на тези два резистора, схемният модел на ОУ в линейната му област се свежда до този на фиг. 12.15б. Това опростява значително анализа на веригите с ОУ. Основният елемент в този модел е зависимият източник на напрежение, управляван с напрежение (ИНУН). Разликата между ОУ и един стандартен ИНУН е, че коефициентът на усилване по напрежение на ОУ е много голям ($A > 10^5$).

Вериги с ОУ се анализират, като се замести всеки ОУ с някой от моделите на фиг. 12.15. Изборът зависи от това каква степен на точност е желана. Ако ОУ работи в линейната активна област и не е необходима много висока точност, то простият модел от фиг. 12.15б ще бъде достатъчен.

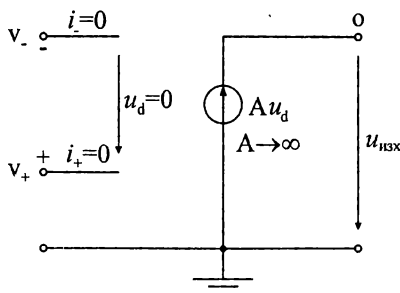
Анализът на схеми с ОУ е най-лесен, ако се използва модел на *идеален* ОУ. Казва се, че един ОУ е *идеален*, ако за модела от фиг. 12.15а са в сила следните свойства:

- $A \rightarrow \infty$ – безкрайно усилване
- $R_{вх} \rightarrow \infty$ – безкрайно голямо входно съпротивление
- $R_{изх} = 0$ – нулево изходно съпротивление

Тъй като $u_{изх} = A u_d$, и следователно $u_d = u_{изх} / A$, при $A \rightarrow \infty$ следва, че $u_d = 0$, или още, че $v_+ = v_-$ (тъй като $u_d = v_+ - v_-$). Това явление се нарича *виртуално късо съединение*. Ако един от входните изводи е заземен, виртуалното късо съединение става *виртуална земя*. За идеален ОУ, работещ в линейната си активна област, са в сила уравненията:

$$\begin{aligned}
 i_+ &= 0 \\
 i_- &= 0 \\
 u_d &= 0, \text{ или } v_+ = v_-
 \end{aligned}
 \tag{12.18}$$

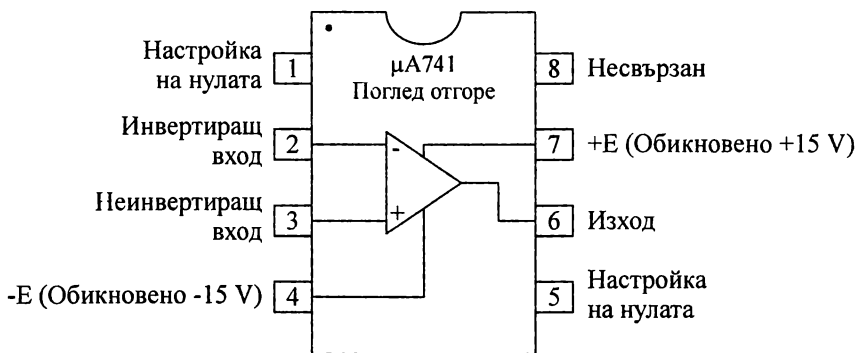
Препоръчваният начин за анализ на схеми с ОУ, когато не се изисква висока точност, е да се замести реалният ОУ с модел на идеален ОУ, според фиг. 12.15в и да се използва свойството, че входните токове на ОУ са равни на нула. Това е допустимо, ако ОУ работи в линейната активна област.



Фиг. 12.15в

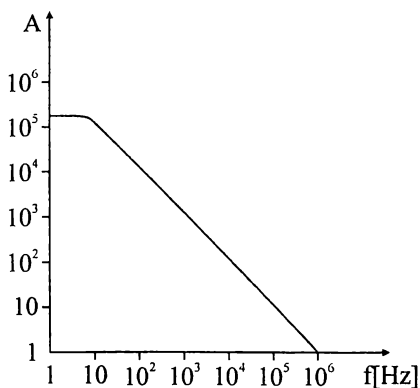
Вторият начин за анализ е да се замести ОУ с модела с крайно усилване от фиг. 12.15б. Анализира се веригата и се получава отговор, съдържащ усилването A като параметър. След това се полага $A \rightarrow \infty$, с което се получава отговор за случая на идеален ОУ. Този начин е малко по-сложен, особено за вериги с няколко ОУ.

Операционният усилвател $\mu A741$ (фиг. 12.16) е един от най-популярните ОУ, използван от разработчиците на електронна апаратура в близкото минало. Входното му съпротивление е приблизително $2 \text{ M}\Omega$, а изходното му съпротивление е 75Ω . Типичното му усилване по напрежение без обратна връзка е $A = 2 \cdot 10^5$. Трябва да се има предвид, че тази стойност на коефициента на усилване е валидна за постоянно напрежение.



Фиг. 12.16

При увеличаване на честотата коефициентът на усилване по напрежение без обратна връзка намалява. Честотната характеристика на коефициента на усилване по напрежение без обратна връзка A на $\mu A741$ е показана на фиг. 12.17.



Фиг. 12.17

Тя има наклон на спадащата част на характеристиката -20 dB/dec (децибела на декада, т.е. намалява десет пъти при десеткратно увеличение на честотата), поради вътрешната му честотна компенсация с кондензатор $C = 30 \text{ pF}$. Такава спадаща честотна характеристика осигурява стабилност на схемата, т.е. тя не се самовъзбужда. Тази стабилност естествено е за сметка на намаленото усилване при високи честоти.

За операционните усилватели произведението от коефициент на усилване и ширина на честотната лента е характерен параметър, който се означава с GBW :

$$GBW = A \cdot \Delta f \quad (12.19)$$

За ОУ $\mu A741$ този параметър е равен на 1 MHz . Това означава, че произведението на усилване и честота за всяка точка от честотната характеристика на коефициента на усилване без обратна връзка е 1 MHz . Ако $\mu A741$ работи с коефициент на усилване 100 (зададен чрез резисторите за обратна връзка), то ширината на честотната лента ще бъде 10 kHz . За честотите, по-големи от 10 kHz , усилването ще намалява с -20 dB/dec . Ако е необходимо по-голямо усилване, например 1000 , то честотната лента се намалява до 1 kHz . В справочниците често пъти вместо GBW се дава ширината на честотната лента при коефициент на усилване, равен на единица, която при $\mu A741$ е 1 MHz .

Операционните усилватели са сложни електронни устройства, които имат както линейно, така и нелинейно поведение. За да работи като линейно устройство, изходното напрежение u_0 и изходният ток i_0 на операционния усилвател трябва да удовлетворяват три условия:

$$|u_0| \leq u_{\text{нас}}; \quad |i_0| \leq i_{\text{нас}}; \quad \left| \frac{du_0(t)}{dt} \right| \leq SR$$

където:

$u_{\text{нас}}$ е напрежението на насищане;

$i_{\text{нас}}$ е токът на насищане;

SR е скоростта на нарастване (Slew Rate).

Тези три величини са параметри на ОУ. Например за ОУ $\mu A741$, захранен с $+15 \text{ V}$ и -15 V , тези параметри са:

$$u_{\text{нас}} = 14 \text{ V}; \quad i_{\text{нас}} = 2 \text{ mA}; \quad SR = 5 \cdot 10^5 \text{ V/s.}$$

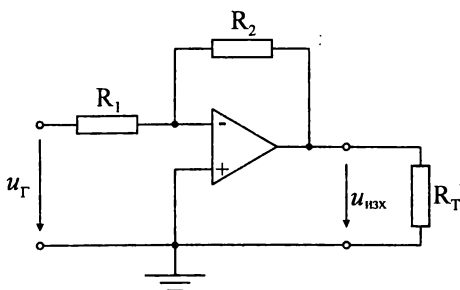
Например, ако изходното напрежение е 10 V, а товарното съпротивление е 10 kΩ, то изходният ток ще бъде $i_0 = u_0 / R_T = 10/10 \cdot 10^3 = 1 \text{ mA} < i_{\text{нас}} = 2 \text{ mA}$ и тогава може да се счита, че $\mu\text{A}741$ ще работи в линейния участък на характеристиката си. Ако обаче товарното съпротивление е 3,3 kΩ, то изходният ток ще бъде 3 mA и ще надвишава тока на насищане, което означава, че в този режим на работа $\mu\text{A}741$ няма да има поведение на линейно устройство.

Други популярни типове ОУ са LM101A, LF411, TL074, TL084, OP113E, LM521.

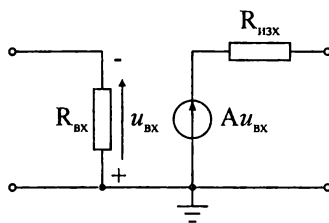
12.4.2. Анализ на инвертиращ усилвател с ОУ

Схемата на фиг. 12.18 се нарича *инвертиращ усилвател* с ОУ. При нея входният сигнал u_{Γ} се включва последователно през съпротивление R_1 към инвертиращия вход на ОУ, докато неинвертиращият вход е свързан към земя.

Необходимо е да се намерят изрази за коефициента на усилване по напрежение $k_u = u_{\text{изх}} / u_{\Gamma}$ и за входното съпротивление на усилвателя $R_{\text{вх}}$.



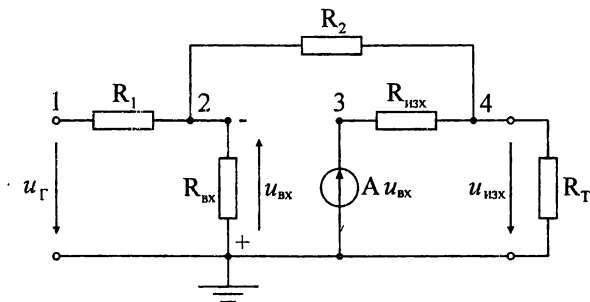
Фиг. 12.18



Фиг. 12.19

За да се определи коефициентът на усилване по напрежение и входното съпротивление на усилвателя, ОУ се замества с неговия модел от фиг. 12.19.

Получената еквивалентна схема е показана на фиг. 12.20.



Фиг. 12.20

За анализа ще бъде използван методът с възловите потенциали. Вместо съпротивленията на резисторите, ще бъдат използвани съответните проводимости, което прави по-лесен запис на системата. Общата маса се избира с нулев потенциал.

Системата уравнения по метода с възловите потенциали е:

$$\text{Възел 1: } V_1 = u_\Gamma$$

$$\text{Възел 2: } -G_1 V_1 + (G_1 + G_{\text{вх}} + G_2) V_2 - G_2 V_4 = 0$$

Заместването на първото във второто уравнение дава:

$$(a) \quad (G_1 + G_{\text{вх}} + G_2) V_2 - G_2 V_4 = G_1 u_\Gamma$$

$$\text{Възел 3: } V_3 = A u_{\text{вх}} = -A V_2$$

$$\text{Възел 4: } -G_2 V_2 - G_{\text{изх}} V_3 + (G_2 + G_{\text{изх}} + G_T) V_4 = 0$$

Заместването на третото в четвъртото уравнение дава:

$$(b) \quad (A G_{\text{изх}} - G_2) V_2 + (G_2 + G_{\text{изх}} + G_T) V_4 = 0$$

Уравнения (a) и (b) се решават относно V_2 и V_4 с формулите на Крамер.

$$\begin{cases} (G_1 + G_{\text{вх}} + G_2) V_2 - G_2 V_4 = G_1 u_\Gamma \\ (A G_{\text{изх}} - G_2) V_2 + (G_2 + G_{\text{изх}} + G_T) V_4 = 0 \end{cases} \quad (12.20)$$

За детерминантата на системата Δ се получава:

$$\begin{aligned} \Delta &= (G_1 + G_{\text{вх}} + G_2)(G_2 + G_{\text{изх}} + G_T) + G_2 [A G_{\text{изх}} - G_2] = \\ &= (G_1 + G_{\text{вх}})(G_2 + G_{\text{изх}} + G_T) + G_2 [(A + 1)G_{\text{изх}} + G_T] \end{aligned} \quad (12.21)$$

За потенциала V_2 се получава:

$$V_2 = \frac{G_1 (G_2 + G_{\text{изх}} + G_T) u_\Gamma}{\Delta}$$

За потенциала $V_4 = u_{\text{изх}}$ се получава:

$$u_{\text{изх}} = V_4 = -\frac{G_1 (A G_{\text{изх}} - G_2) u_\Gamma}{\Delta}$$

Усилването по напрежение k_u е отношението на $u_{\text{изх}}$ към u_Γ :

$$k_u = \frac{u_{\text{изх}}}{u_\Gamma} = -\frac{G_1 (A G_{\text{изх}} - G_2)}{\Delta} \quad (12.22)$$

Входното съпротивление на усилвателя (спрямо възел '2') се дефинира с

$$R_{\text{вх}} = \frac{V_2}{i_1}.$$

Тъй като $i_1 = (V_1 - V_2)G_1$, то

$$R_{\text{вх}} = \frac{V_2}{(V_1 - V_2)G_1} = \frac{1}{G_1 \left(\frac{u_{\Gamma}}{V_2} - 1 \right)},$$

след заместване на израза за V_2 се получава:

$$R_{\text{вх}} = \frac{(G_2 + G_{\text{изх}} + G_{\text{T}})}{G_{\text{вх}}(G_2 + G_{\text{изх}} + G_{\text{T}}) + G_2[(A+1)G_{\text{изх}} + G_{\text{T}}]}. \quad (12.23)$$

В типичните усилвателни схеми с операционни усилватели се изпълняват съотношенията:

$$G_{\text{вх}} \ll G_1, \quad G_{\text{изх}} \gg G_2 \quad \text{и} \quad G_{\text{изх}} \gg G_{\text{T}}. \quad (12.24)$$

1. Стойността на $G_{\text{вх}}$ на използваните ОУ е достатъчно малка, за да бъде пренебрегната в сравнение с G_1 . Следователно, $G_{\text{вх}}$ може да бъде взето за нула, или $R_{\text{вх}} = \infty$. Тогава входните токове на ОУ са нулеви.

2. Стойността на $G_{\text{изх}}$ на използваните в практиката ОУ е много голяма в сравнение с G_2 и G_{T} . Следователно $G_{\text{изх}}$ може да бъде взето за ∞ или $R_{\text{изх}} = 0$. Тогава изходното напрежение $u_{\text{изх}}$ на ОУ е идентично равно на $Au_{\text{вх}}$. Следователно изходното напрежение зависи само от усилването A и входното напрежение $u_{\text{вх}}$, то е независимо от товарното съпротивление R_{T} .

Като се вземат предвид тези неравенства се получават следните приблизителни изрази за детерминантата Δ , усилването по напрежение k_u и входното съпротивление $R_{\text{вх}}$:

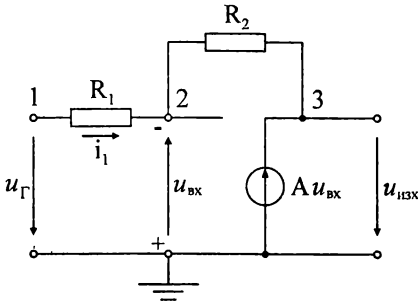
$$\Delta \approx G_1 G_{\text{изх}} + G_2 G_{\text{изх}} (A+1) = G_{\text{изх}} [G_1 + G_2 (A+1)] \quad (12.25)$$

$$k_u = \frac{u_{\text{изх}}}{u_{\Gamma}} \approx - \frac{AG_1}{G_1 + G_2 (A+1)} \quad (12.26)$$

$$R_{\text{вх}} \approx \frac{1}{G_2 (A+1)} = \frac{R_2}{A+1} \quad (12.27)$$

Възловият анализ на инвертиращия усилвател с използване на приближителния модел на ОУ ($R_{\text{вх}} = \infty$, $R_{\text{изх}} = 0$, A – крайно) е значително по-прост. Този анализ е показан по-долу.

Системата възлови уравнения е:



Фиг. 12.21

$$\begin{cases} V_1 = u_{\Gamma} \\ -G_1 V_1 + (G_1 + G_2) V_2 - G_2 V_3 = 0 \\ V_3 = A u_{\text{вх}} = -A V_2 \end{cases}$$

$$(G_1 + G_2) V_2 - G_2 (-A V_2) = G_1 u_{\Gamma}$$

$$[G_1 + (A + 1) G_2] V_2 = G_1 u_{\Gamma}$$

$$V_2 = \frac{G_1 u_{\Gamma}}{G_1 + (A + 1) G_2}$$

$$k_u = \frac{V_3}{u_{\Gamma}} = \frac{-A V_2}{u_{\Gamma}} = -\frac{A G_1}{G_1 + (A + 1) G_2} \quad (12.28)$$

$$\begin{aligned} R_{\text{вх}(2)} &= \frac{V_2}{i_1} = \frac{V_2}{(V_1 - V_2) G_1} = \frac{1}{G_1 \left(\frac{u_{\Gamma}}{V_2} - 1 \right)} = \frac{1}{G_1 \left[\frac{G_1 + (A + 1) G_2}{G_1} - 1 \right]} \\ &= \frac{1}{G_2 (A + 1)} = \frac{R_2}{A + 1} \end{aligned}$$

$$R_{\text{вх}(2)} = \frac{R_2}{A + 1} \quad (12.29)$$

Това е входното съпротивление на схемата по отношение на възел 2 – $R_{\text{вх}(2)}$. По отношение на възел 1 входното съпротивление ще бъде равно на

$$R_{\text{вх}(1)} = R_1 + \frac{R_2}{A + 1} \quad (12.30)$$

Много често в практиката се използва приближението $A \rightarrow \infty$. Това води до т.нар. „идеален ОУ“. При това допускане се получава:

$$k_u = \frac{u_{\text{изх}}}{u_{\Gamma}} \approx -\frac{G_1}{G_2} = -\frac{R_2}{R_1}, \quad (12.31)$$

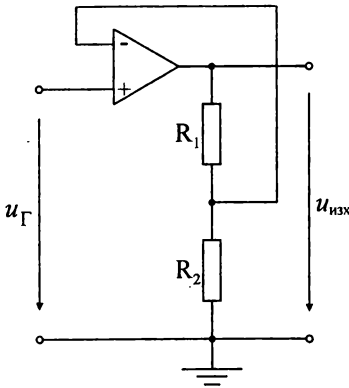
която е една широко използвана формула за усилването по напрежение на инвертиращи схеми с ОУ.

Входното съпротивление в този случай ще бъде равно на R_1 :

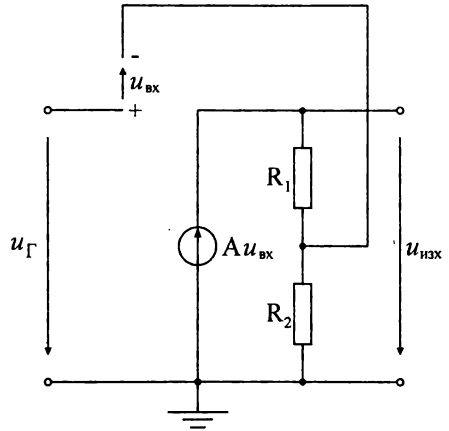
$$R_{\text{вх}(1)} = R_1. \quad (12.32)$$

12.4.3. Анализ на неинвертиращ усилвател с ОУ

Схемата на неинвертиращ усилвател с ОУ е показана на фиг. 12.22. Търси се израз за коефициента на усилване по напрежение k_u .



Фиг. 12.22



Фиг. 12.23

Използва се опростеният модел на ОУ с $R_{\text{вх}} = \infty$; $R_{\text{изх}} = 0$; и A – крайно. По втори закон на Кирхоф се записват следните уравнения:

$$\begin{cases} u_{\text{изх}} = Au_{\text{вх}} \\ -u_{\Gamma} + u_{\text{вх}} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_{\text{изх}} = 0 \end{cases}$$

Изразява се $u_{\text{вх}}$ от второто уравнение и се замества в първото:

$$u_{\text{вх}} = u_{\Gamma} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_{\text{изх}}$$

$$u_{\text{изх}} = Au_{\text{вх}} = A\left(u_{\Gamma} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_{\text{изх}}\right)$$

$$u_{\text{изх}} \left(1 + \frac{R_2}{R_1 + R_2} A\right) = Au_{\Gamma}$$

$$k_u = \frac{u_{\text{изх}}}{u_{\Gamma}} = \frac{A}{1 + A \frac{R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{A}}_{\approx 0} + \frac{R_2}{R_1 + R_2}} \approx \frac{R_1 + R_2}{R_2}$$

$$k_u \approx \frac{R_1 + R_2}{R_2} = \frac{R_1}{R_2} + 1, \quad (12.33)$$

което е в сила при идеален ОУ ($A \rightarrow \infty$).

Входното съпротивление на тази схема е:

$$R_{\text{вх}(1)} = R_{\text{вхОУ}} \left(1 + \frac{R_2}{R_1 + R_2} A \right), \quad (12.34)$$

което е с много голяма стойност. Този израз не може да се получи от горната опростена схема на ОУ. Той може да се изведе при използване на модел на ОУ с параметри $R_{\text{вх}}$, $R_{\text{изх}}$, A и възлов анализ на схемата.

Когато $R_1 = 0$, то $k_u = 1$ и се получава т.нар. *буферен усилвател с единично усилване (повторител на напрежение)*. Входното му съпротивление е равно на

$$R_{\text{вх}(1)} = R_{\text{вхОУ}} (1 + A). \quad (12.35)$$

Този усилвател има много високо входно съпротивление и много ниско изходно съпротивление. Използва се като буферно стъпало, когато входното съпротивление на следващото стъпало не е достатъчно високо и би натоварило значително изхода на предходното стъпало.

12.4.4. Анализ на активен високочестотен филтър с ОУ

Електрическите филтри са четириполусници, които пропускат сигнали с едни честоти и не пропускат сигнали с други честоти. Терминът „пропускат“ означава, че за тези честоти коефициентът на предаване по напрежение е единица (или близък до единица).

Електрическите филтри се разделят на *пасивни* и *активни*. Пасивните филтри съдържат само пасивни елементи – R , L , и C .

Активните филтри представляват четириполусници, съдържащи пасивни RC-звена и активни елементи: транзистори и по-често операционни усилватели. Обикновено активните филтри не съдържат индуктивни елементи (бобини), поради следните причини:

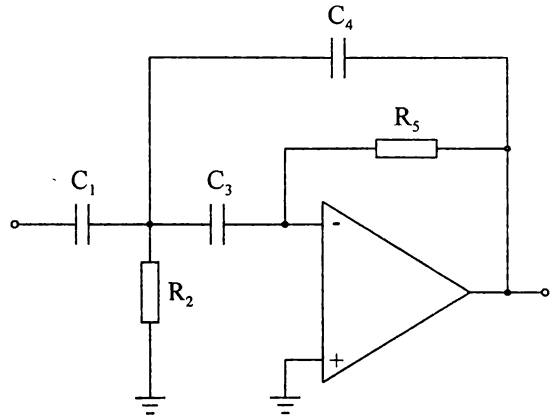
- бобините имат големи размери и тегло, особено за нискочестотни приложения;
- активните загуби в проводниците на бобините водят до различия между разчетните и реалните характеристики на филтрите;

- в бобините с нелинейни магнитопроводи се наблюдават нелинейни явления, свързани с насищането на магнитопровода.

За разлика от пасивните филтри, активните филтри осигуряват по-качествено разделяне на лентите на пропускане и затихване. В тях сравнително лесно могат да се регулират неравномерностите на честотната характеристика, коефициентът на усилване в лентата на пропускане и качественият фактор (Q-фактор). Освен това съгласуването на товара с филтъра не представлява проблем, поради ниското изходното съпротивление на операционните усилватели. Консумираната от тях мощност е много малка и размерите им са миниатюрни. Поради тези предимства активните филтри са намерили много широко приложение, най-вече за работа в звуковия обхват.

Тук ще бъде разгледан активен високочестотен филтър, реализиран с операционен усилвател (фиг. 12.24). Поставя се задачата да се изведе израз за предавателната характеристика на филтъра $H(p) = U_{\text{изх}}(p) / U_{\text{вх}}(p)$, където p е операторната променлива $p = j\omega$.

Използва се опростеният модел на ОУ с $R_{\text{вх}} = \infty$; $R_{\text{изх}} = 0$; и A – крайно. След заместване на ОУ с него се получава схемата от фиг. 12.25.



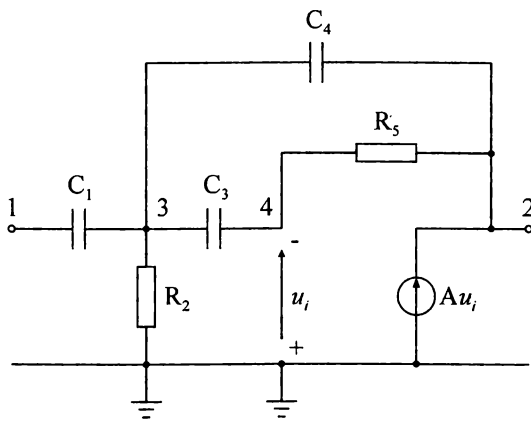
Фиг. 12.24

Записват се следните уравнения по метода с възловите потенциали за възли 3 и 4:

$$\begin{cases} \left(pC_1 + pC_3 + pC_4 + \frac{1}{R_2} \right) V_3 - pC_1 V_1 - pC_3 V_4 - pC_4 V_2 = 0 \\ \left(pC_3 + \frac{1}{R_5} \right) V_4 - pC_3 V_3 - \frac{1}{R_5} V_2 = 0 \end{cases}$$

Отчита се, че $V_2 = Au_i = -AV_4$, и се замества в горните уравнения. При това се получава система с две неизвестни V_3 и V_4 . Потенциалът на входния извод V_1 се счита за известен.

$$\begin{cases} \left(pC_1 + pC_3 + pC_4 + \frac{1}{R_2} \right) V_3 - p(C_3 - AC_4)V_4 = pC_1 V_1 \\ -pC_3 V_3 + \left[pC_3 + \frac{1}{R_5} (1 + A) \right] V_4 = 0 \end{cases}$$



Фиг. 12.25

Решава се системата относно V_4 :

$$\begin{aligned}
 V_4 &= \frac{\begin{vmatrix} p(C_1 + C_3 + C_4) + \frac{1}{R_2} & pC_1V_1 \\ -pC_3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p(C_1 + C_3 + C_4) + \frac{1}{R_2} & -p(C_3 - AC_4) \\ -pC_3 & pC_3 + \frac{1}{R_5}(1+A) \end{vmatrix}} \\
 &= \frac{p^2C_1C_3V_1}{\left[p(C_1 + C_3 + C_4) + \frac{1}{R_2} \right] \left[pC_3 + \frac{1}{R_5}(1+A) \right] - p^2C_3(C_3 - AC_4)}
 \end{aligned}$$

За предавателната функция $H_u(p)$ след заместване с израза за V_4 и полагане на $A \rightarrow \infty$ се получава:

$$\begin{aligned}
 H_u(p) &= \frac{V_2}{V_1} = \frac{-AV_4}{V_1} = \frac{-p^2C_1C_3}{\left[p(C_1 + C_3 + C_4) + \frac{1}{R_2} \right] \frac{1}{R_5} + p^2C_3C_4} = \\
 &= \frac{-p^2C_1C_3}{p^2C_3C_4 + p(C_1 + C_3 + C_4)\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_2R_5}}
 \end{aligned}$$

Разделят се числителят и знаменателят на коефициента пред втората степен на p в знаменателя и се получава окончателната форма на предавателната функция:

$$H_u(p) = \frac{-p^2 \frac{C_1}{C_4}}{p^2 + p \frac{(C_1 + C_3 + C_4)}{R_5 C_3 C_4} + \frac{1}{R_2 R_5 C_3 C_4}} \quad (12.36)$$

Тази функция може да се сравни със стандартната форма на предавателна функция на високочестотен филтър от втори ред (т.нар. *биквад*):

$$H_u(p) = \frac{H_0 p^2}{p^2 + \frac{\omega_p}{Q_p} p + \omega_p^2} \quad (12.37)$$

където:

H_0 е усилването в лентата на пропускане ;

Q_p е качественият фактор на полюса;

ω_p е ъгловата честота на полюса на характеристиката (тя е свързана с ъгловата честотата на максимума на характеристиката ω_m със съотношението

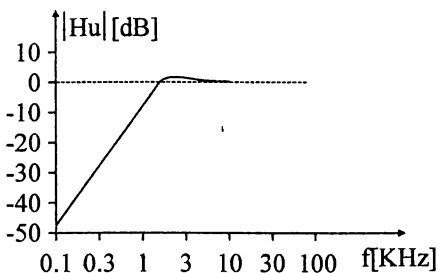
$$\omega_m = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q_p^2}}}$$

След съпоставяне на стандартната форма с получената предавателна функция се намират следните изрази за параметрите на филтъра:

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{R_2 R_5 C_3 C_4}}; \quad H_0 = -\frac{C_1}{C_4}; \quad (12.38)$$

$$\frac{\omega_p}{Q_p} = \frac{(C_1 + C_3 + C_4)}{R_5 C_3 C_4} \rightarrow Q_p = \sqrt{\frac{R_5}{R_2}} \frac{\sqrt{C_3 C_4}}{(C_1 + C_3 + C_4)}$$

Проектирането на този вид филтри с един ОУ е затруднено, защото са налице три уравнения, свързващи параметрите на филтъра с елементите му, а елементите са пет. В този случай е необходимо да се приемат стойностите на два от елементите от инженерни съображения и да се изчислят останалите три. В повечето случаи за получаване на удовлетворителни резултати са необходими няколко проби, с различни стойности на приеманите за дадени елементи. Освен това, тъй като всеки от елементите R_2 , R_5 , C_1 , C_3 и C_4 участва в определянето на повече от един от параметрите на филтъра (H_0 , ω_p , Q_p), то параметрите на филтъра не могат да бъдат настройвани независимо един от друг.



Фиг. 12.26

Амплитудно-честотната характеристика на високочестотния филтър от фиг. 12.24, получена с PSpice, е показана на фиг. 12.26. Елементите на филтъра имат стойности: $C_1 = C_3 = C_4 = 10 \text{ nF}$; $R_2 = 3.333 \text{ k}\Omega$; $R_5 = 30 \text{ k}\Omega$. Изчислените параметри на филтъра са: $H_0 = -1$;

$$Q_p = 1; f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{10^4}{2\pi} = 1591.55 \text{ Hz}$$

$$f_m = f_p \sqrt{2} = 2250.8 \text{ Hz}.$$

12.4.5. Анализ на активен лентов филтър с ОУ

Разглежда се активен лентов филтър, реализиран с 4 операционни усилвателя, показан на фиг. 12.27. Представената схема се характеризира с независима регулировка на основните параметри на филтъра: f_p – централната честота на лентата на пропускане (честота на полюса на характеристиката); H_0 – коефициента на предаване по напрежение за централната честота; Q_p – качественият фактор на полюса, който определя селективността на филтъра. Сравнително големият брой ОУ не е недостатък, защото има много модели ОУ, които съдържат по 4 ОУ в корпус, например TL084, LM324 и др., и защото във филтровата схематехника по-голям проблем е лесната и точна настройка на филтъра.

Поставя се задачата да се определи предавателната характеристика на филтъра $H(p) = U_{\text{изх}}(p) / U_{\text{вх}}(p)$ и начина за настройка на основните параметри на филтъра чрез елементите на схемата.

Тъй като схемата е сравнително сложна, удобно е операционните усилватели да се заместят с модел на идеален операционен усилвател: $R_{\text{вх}} = \infty$; $R_{\text{изх}} = 0$; $A = \infty$. Получената опростена заместваща схема е показана на фиг. 12.28.

Номерират се възлите, като общата маса се приема с нулев потенциал. Потенциалът на входния възел се счита за известен. Търси се потенциалът на изходния възел 9.

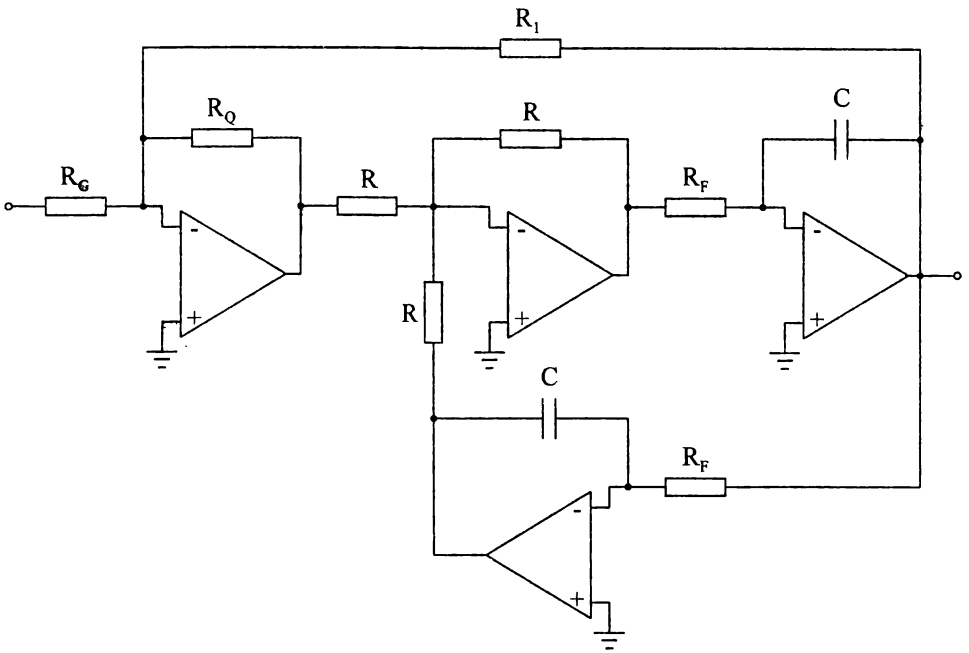
При използване на модел на идеален ОУ (при което $A = \infty$) са в сила зависимостите:

$$V_3 = -AV_2 \rightarrow V_2 = -V_3 / A = 0$$

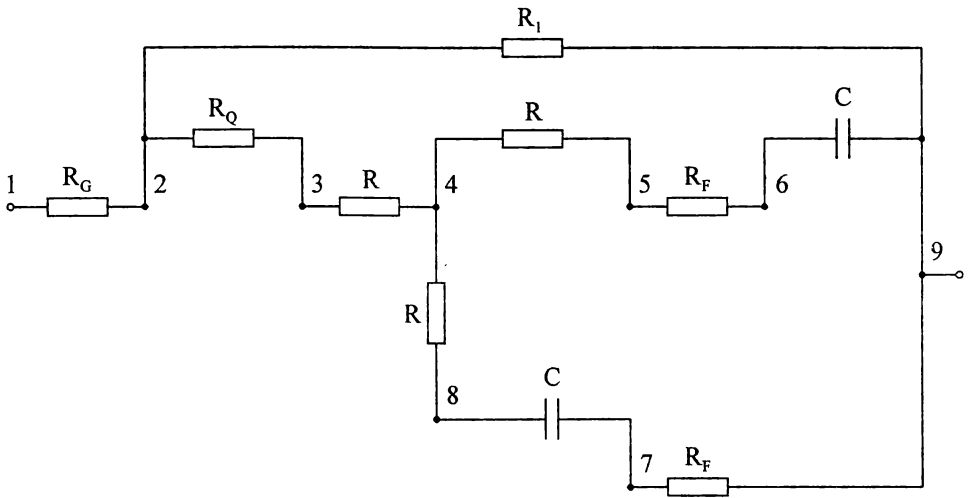
$$V_5 = -AV_4 \rightarrow V_4 = -V_5 / A = 0$$

$$V_9 = -AV_6 \rightarrow V_6 = -V_9 / A = 0$$

$$V_8 = -AV_7 \rightarrow V_7 = -V_8 / A = 0$$



Фиг. 12.27



Фиг. 12.28

За възли 2, 4, 6, и 7 се записват уравнения по първи закон на Кирхоф, като клоновите токове се изразяват с възловите потенциали. Входните токове на операционните усилватели се приемат за нулеви, тъй като $R_{вх} = \infty$. Тази система уравнения се записва в операторен вид, с използване на операторната

променлива $p = j\omega$ (оператор на Лаплас) за записване на операторните съпротивления. На практика множителят $j\omega$ от формулите за комплексните съпротивления се замества с оператора p ($Z_R(p) = R$; $Z_L(p) = pL$; $Z_C(p) = \frac{1}{pC}$).

$$\frac{V_3}{R_Q} + \frac{V_9}{R_1} + \frac{V_1}{R_G} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{V_3}{R} + \frac{V_5}{R} + \frac{V_8}{R} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{V_5}{R_F} + pCV_9 = 0 \quad (3)$$

$$\frac{V_9}{R_F} + pCV_8 = 0 \quad (4)$$

От уравнения (3) и (4) се изразяват V_5 и V_8 и се заместват в (2):

$$V_5 = -pCR_F V_9; \quad V_8 = -\frac{1}{pCR_F} V_9.$$

От него се изразява V_3 и се замества в (1):

$$V_3 = -V_5 - V_8 = \left(pCR_F + \frac{1}{pCR_F} \right) V_9$$

$$-\frac{1}{R_Q} \left(pCR_F + \frac{1}{pCR_F} \right) V_9 - \frac{1}{R_1} V_9 = \frac{V_1}{R_G}$$

След това се изразява V_9 чрез V_1 :

$$V_9 = -\frac{\frac{V_1}{R_G}}{\frac{pCR_F}{R_Q} + \frac{1}{pCR_F R_Q} + \frac{1}{R_1}} = -\frac{V_1 pCR_F R_Q R_1}{R_G [p^2 C^2 R_F^2 R_1 + R_1 + pCR_F R_Q]}$$

Отношението на изходния към входния потенциал V_9 към V_1 дава предавателната характеристика $H(p)$:

$$H(p) = \frac{V_9}{V_1} = -\frac{p \frac{R_Q}{CR_F R_G}}{p^2 + \frac{R_Q}{CR_F R_1} p + \frac{1}{C^2 R_F^2}} \quad (12.39)$$

За лентов филтър от 2-ри ред предавателната функция има канонична форма

$$H(p) = H_0 \frac{\frac{\omega_p}{Q_p} p}{p^2 + \frac{\omega_p}{Q_p} p + \omega_p^2}, \quad (12.40)$$

където:

ω_p е ъгловата честота на полюса (максимума на характеристиката);

H_0 е коефициентът на предаване при централната честота на филтъра (т.е. при ъгловата честота на полюса);

Q_p е качественият фактор на полюса.

От съпоставянето на коефициентите пред p в двете форми се получават изразите:

$$\omega_p = \frac{1}{R_F C} \rightarrow f_p = \frac{1}{2\pi R_F C}; \quad (12.41)$$

$$H_0 = -\frac{R_1}{R_G}; \quad Q_p = \frac{R_1}{R_Q}.$$

- Оттук се вижда, че централната честота може да се настрои с избор на елементите C и R_F . Обикновено се задава C и се изчислява R_F , за да се получи желаната централна честота на филтъра. За по-точното ѝ настройване резисторите R_F се реализират с прецизни многооборотни потенциометри.

- Качественият фактор на полюса Q_p се задава чрез резистора R_Q .

- Коефициентът на предаване при централната честота на филтъра H_0 се задава чрез резистора R_G .

Вижда се, че и трите параметъра на този филтър могат да се настройват независимо един от друг, само с по един резистор (f_p с R_F , Q_p с R_Q , H_0 с R_G), което улеснява практическата му реализация и настройка.

Използваните операционни усилватели трябва да бъдат с достатъчно голямо произведение GBW (усилване по честотна лента), като се препоръчва то да бъде поне 10 пъти по-голямо от произведението $f_p Q_p$. Тогава реалната амплитудно-честотна характеристика на активния филтър ще се различава незначително от теоретичната му характеристика, определяна само от RC елементите.

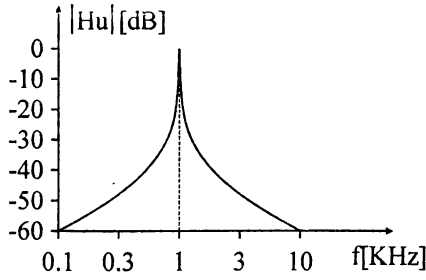
Резисторът R_1 се избира около 100 k Ω , а трите резистора R е желателно да бъдат над 5 k Ω , например 10 k Ω . Препоръчва се всички използвани резистори и кондензатори да бъдат с толеранси 1 %.

На фиг. 12.29 е показана амплитудно-честотната характеристика (АЧХ) на филтъра, която е равна на $|H(j\omega)|$, получена с PSpice, при следните стойности на елементите:

$R = 10 \text{ k}\Omega$; $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$; $R_G = 100 \text{ k}\Omega$; $R_Q = 1 \text{ k}\Omega$; $C = 10 \text{ nF}$; $R_F = 15,9 \text{ k}\Omega$

При тези стойности за параметрите на филтъра се получава:

$f_p = 1000 \text{ Hz}$; $Q = 100$; $|H_0| = 1$, което може да се провери от графиката на АЧХ от фиг. 12.29.



Фиг. 12.29

Литература:

1. *С. Л. Фархи, С. П. Папазов*, Теоретична електротехника , част 1, изд. „Техника“, София, 1987.
2. *П. А. Йонкин и др.*, Теоретические основы электротехники, том I, Москва, „Высшая школа“, 1976.
3. *Г. И. Атабеков*, Теоретические основы электротехники, том I, Москва, „Энергия“, 1978.
4. *Г. В. Зевеке, П. А. Йонкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов*, Основы теории цепей, Москва, „Энергоатомиздат“, 1989.
5. *В. П. Попов*, Основы теории цепей, Москва, „Высшая школа“, 2003.
6. *К. С. Демирчян, Л. Р. Нейман, Н. В. Коровкин, В. Л. Чечурин*, Теоретические основы электротехники, том I, II, III, Санкт-Петербург, изд. „ПИТЕР“, 2004.

К. Брандиски, Ж. Георгиев, В. Младенов, Р. Станчева

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА – ЧАСТ I

българска
първо издание
обем 26 п.к.
формат 70/100/16
цена 12.00 лв.
ИК „КИНГ“