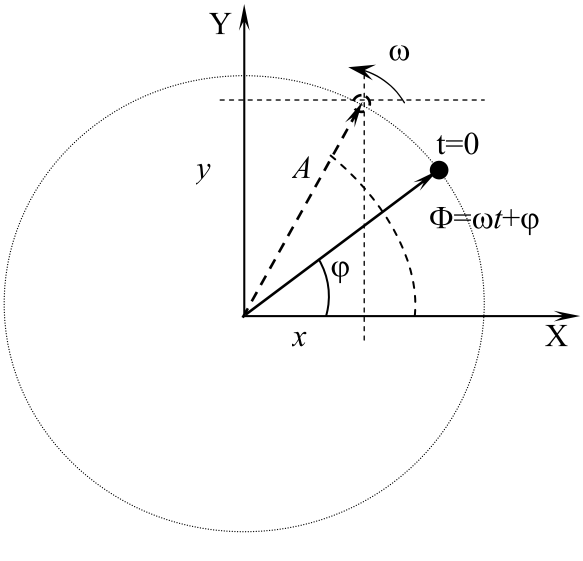
Векторно представяне на хармонично трептение. Събиране на хармонични трептения с еднакво направление. Биене

Векторно представяне на хармонично трептение

В много случаи е по-удобно да използваме т.нар. векторно представяне на едно хармонично трептение. Нека да разгледаме равномерно движение, с ъглова скорост **ω**, на материална точка по окръжност с радиус ***A*** (фиг. 1). Началната координата на точката (ъгълът спрямо оста **X** в момента ***t*=0**) е **φ**. За някакъв интервал от време ***t***, материалната точка ще се завърти на ъгъл **Δφ=ω*t*** (9 въпрос, Физика 1) и ъгловата ѝ координата ще стане **Φ=Δφ+φ=ω*t*+φ**. Ако построим радиус-вектора от началото на координатната система до точката виждаме, че той се върти около началото на координатната система със същата ъглова скорост **ω** като материалната точка, а големината му е равна на радиуса на окръжността ***A***. Проекциите на този радиус-вектор върху координатните оси **X** и **Y** във всеки момент от време ***t*** са:

$x = A\cos\Phi = A\cos\left(\omega t + \varphi\right)$ и

$y = A\sin\Phi = A\sin\left(\omega t + \varphi\right)$,



фиг. 1

т.е. те имат същия вид, както уравнението на движение на хармонично трептение (11 въпрос). Следователно можем да представим хармоничното трептение чрез проекцията на радиус-вектор (с големина, равна на амплитудата ***A*** на трептението), с начало в равновесното положение на трептящата точка, въртящ се с ъглова скорост **ω**, равна на кръговата честота на трептението и начална ъглова координата **φ**, равна на началната фаза на трептението. Това векторно представяне е много удобно, особено при събиране на трептения с еднакво направление.

Събиране на хармонични трептения с еднакво направление

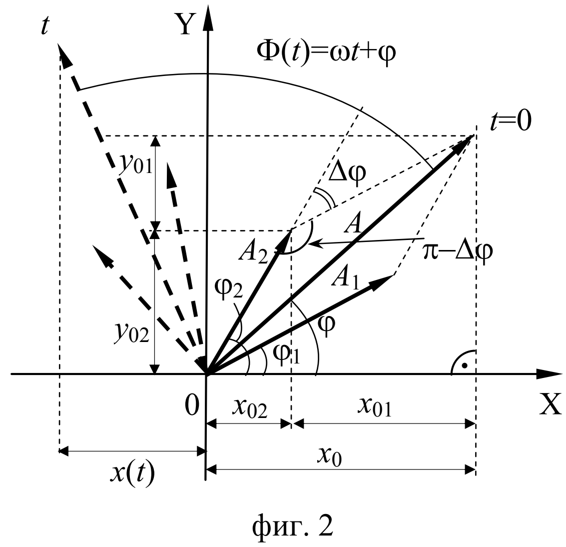
Дотук разгледахме най-простия вид трептение – хармонично трептение предизвикано от една възвръщаща сила. В много случаи на трептящото тяло могат да действат няколко сили. Като имаме предвид принципа на суперпозицията (4 въпрос, Физика 1), можем да разглеждаме действието на тези сили независимо една от друга и да получим равнодействащата като векторна сума на всички действащи сили. По същия начин можем да постъпим и с резултата от действието на силите – в случая това са независими трептения, в които участва тялото под действие на тези сили. Като имаме предвид векторното представяне на хармоничното трептение, можем да приложим принципа на суперпозицията и за тях т.е. резултантното трептение ще получим като векторна сума от векторите на отделните трептения.

Ще разгледаме първо най-простият случай – тяло (материална точка) участва в две трептения с еднаква кръгова честота **ω** (а следователно и с еднаква честота и период) в едно направление – по избраната ос **X**:

$x_1 = A_1\cos\left(\omega t + \varphi_1\right)$ и

$x_2 = A_2\cos\left(\omega t + \varphi_2\right)$.

Ще използваме векторното представяне на трептенията – в този случай (фиг. 2) двата радиус-вектора, чиито проекции по оста **X** изобразяват трептенията, имат различни дължини (равни на амплитудите на двете трептения $\boldsymbol{A_1}$ и $\boldsymbol{A_2}$) и различно положение спрямо оста **X** в началния момент (началните фази на трептенията $\boldsymbol{\varphi_1}$ и $\boldsymbol{\varphi_2}$). Тъй като двата вектора се въртят с еднаква ъглова скорост **ω**, ъгълът между тях, който е равен на фазовата разлика $\boldsymbol{\Delta\Phi=\Phi_2-\Phi_1}$ между трептенията остава постоянен:



фиг. 2

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) = \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi = \text{const}\,.$$

т.е. фазовата разлика между трептенията във всеки момент от време е равна на фазовата разлика между тях в началния момент.

Радиус-векторът на резултантното трептение (сумата от двете трептения) ще получим като векторна сума на радиус-векторите на двете трептения, а неговата проекция върху оста **X** ще ни даде уравнението на движение на трептението:

(1) $x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$.

Тъй като ъгловата скорост на въртене на двата вектора е еднаква, ъгловата скорост на тяхната сума (кръговата честота на резултантното трептение) също ще бъде **ω**. Следователно, за да намерим уравнението на резултантното трептение, трябва да определим само амплитудата ***A*** и началната фаза **φ**. От фиг. 2 се вижда, че амплитудата ***A*** (от правилото за събиране на вектори) е:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\pi - \Delta\varphi)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}\,,$$

а за началната фаза **φ** ще получим:

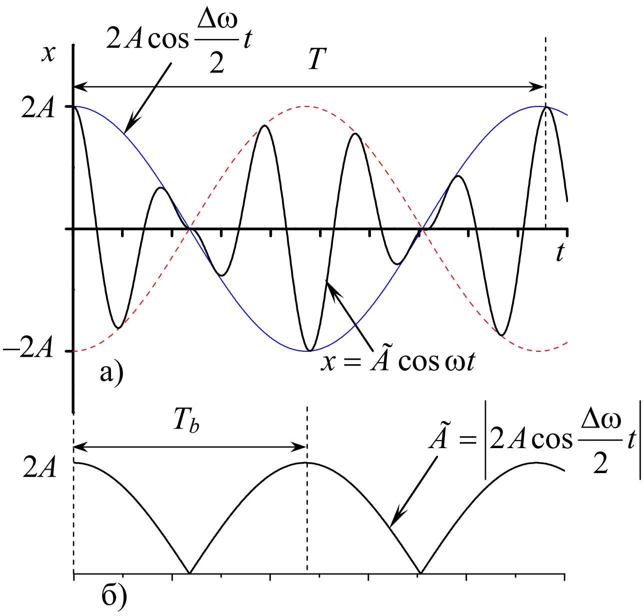
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y_{01} + y_{02}}{x_{01} + x_{02}} = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}.$$

Така уравнението на движение (1) придобива вида:

$$x = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}\,\cos\left(\omega t + \operatorname{arctg}\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}\right).$$

Следователно, когато събираме хармонични трептения с еднакви честоти в едно направление, резултантното трептение също е хармонично трептение, със същата честота, а амплитудата и началната му фаза зависят от амплитудите и началните фази на всички трептения. Векторното представяне на хармоничните трептения ни позволява да събираме и повече трептения в едно направление – прибавяме ги последователно, както процедираме с векторите. Резултантното трептение винаги е в същото направление, както съставящите го.



фиг. 3

Биене

Ако двете трептения не са с еднакви честоти, но двете честоти са много близки, **ω₁≈ω₂=ω**, се наблюдава едно интересно явление с голямо приложение – биене. Ще разгледаме най-простият случай на биене, когато двете трептения имат еднакви амплитуди ***A***, началните им фази са равни на **0** и се извършват в еднакво направление. Уравненията на движение на двете трептения в този случай са:

$$x_1 = A\cos\omega_1 t$$

$$x_2 = A\cos\omega_2 t$$

и за резултантното трептение ще получим:

$$x = x_1 + x_2 = A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t = 2A\cos\frac{(\omega_2 - \omega_1)}{2}t\cos\frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}t = \left(2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\omega t\,.$$

Тъй като $\frac{\Delta\omega}{2} \ll \omega$, изразът в скобите се променя много по-бавно от $\cos\omega t$ и можем да го считаме за променлива амплитуда на хармонично трептение с кръгова честота **ω**. От друга страна този израз може да бъде отрицателен при определени стойности на ***t*** т.е. не може да бъде амплитуда на трептение, тъй като амплитудата е винаги положителна величина. Тогава можем да разглеждаме абсолютната стойност на израза като променлива амплитуда $\tilde{A}$:

(2) $\tilde{A} = \left|2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right|$

и уравнението на движение ще придобие вида:

(3) $x = \widetilde{A} \cos \omega t$.

Графиките на уравнението на движение (3) и амплитудата $\tilde{A}$ (2) са показани на фиг. 3. Вижда се (фиг. 3б), че периодът на (2) е два пъти по-малък (съответно честотата е два пъти по-голяма) отколкото периодът $\boldsymbol{T}$ на хармоничното трептение $2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t$ (фиг. 3а) т.е. периодът на биене $\boldsymbol{T_b}$ (периодът на променливата амплитуда) ще бъде:

$$T_b = \frac{1}{2}T = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\frac{\Delta\omega}{2}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega},$$

а честотата на биене:

$$f_b = \frac{1}{T_b} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = f_2 - f_1 .$$

Явлението биене намира широко приложение в практиката когато е необходима фина настройка на дадена честота, напр. при настройване на музикални инструменти.