Събиране на хармонични трептения в две взаимно перпендикулярни направления. Частни случаи

Събиране на хармонични трептения в две взаимно перпендикулярни направления

Ако трептенията, в които участва материалната точка, са във взаимно перпендикулярни направления, движенито ѝ в общия случай не е хармонично трептение. Материалната точка се движи по някаква криволинейна траектория, в зависимост от честотите, амплитудите и началните фази на двете трептения. Получените траектории при различни съотношения на честотите на двете трептения се наричат фигури на Лисажу. В този случай е по-лесно вместо да използваме векторни диаграми да определим уравнението на траекторията на движение. Ние ще разгледаме пак най-простият случай – когато честотите на двете трептения са равни. Нека уравненията на движение на двете трептения са:

$$\begin{aligned} x &= A\cos\omega t \\ y &= B\cos\left(\omega t+\varphi\right) \end{aligned} \quad (4)$$

Това е параметричното уравнение на кривата в равнината **XY**. За да получим зависимостта $\boldsymbol{y(x)}$ в явен вид, трябва да изключим времето $\boldsymbol{t}$ от двете уравнения (4):

$$\left.\begin{aligned} &\cos\omega t = \frac{x}{A} \\ &\sin\omega t = \sqrt{1-\cos^2\omega t} = \sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}} \\ &\cos\left(\omega t+\varphi\right) = \cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi = \frac{y}{B} \end{aligned}\right\} \frac{x}{A}\cos\varphi - \sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}\sin\varphi = \frac{y}{B}.$$

$$\frac{y}{B}-\frac{x}{A}\cos\varphi = -\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}\sin\varphi$$

$$\left(\frac{y}{B}\right)^2 - 2\frac{y}{B}\frac{x}{A}\cos\varphi + \left(\frac{x}{A}\right)^2\cos^2\varphi = \sin^2\varphi - \left(\frac{x}{A}\right)^2\sin^2\varphi .$$

$$\left(\frac{y}{B}\right)^2 - 2\frac{y}{B}\frac{x}{A}\cos\varphi + \left(\frac{x}{A}\right)^2 = \sin^2\varphi \quad (5)$$

Това е уравнение на елипса, чиято голяма полуос сключва някакъв ъгъл с оста **X**. Следователно траекторията на движение на материалната точка е елипса, параметрите на която зависят от разликата $\boldsymbol{\varphi}$ в началните фази на двете трептения и техните амплитуди.

Частни случаи

Ще разгледаме няколко частни случая.

1. Разликата в началните фази на двете трептения $\boldsymbol{\varphi=0}$. В този случай (5) ще бъде:

$$\left(\frac{y}{B}\right)^2 - 2\frac{y}{B}\frac{x}{A} + \left(\frac{x}{A}\right)^2 = 0$$

$$\frac{y}{B}-\frac{x}{A} = 0 \qquad .$$

$$y = \frac{B}{A}x$$

Това е уравнение на права в I и III квадрант, която минава през началото на координатната система и сключва ъгъл $\mathrm{arctg}\dfrac{B}{A}$ с оста $\boldsymbol{X}$. Това е хармонично трептение по тази права с амплитуда $\sqrt{A^2+B^2}$ с уравнение:

$$r = \sqrt{A^2+B^2}\cos\omega t .$$

2. Разликата в началните фази на двете трептения $\boldsymbol{\varphi=\pi}$. Този случай се отличава от предишния само по положението на правата – тя ще бъде във II и IV квадрант:

$$\left(\frac{y}{B}\right)^2+2\frac{y}{B}\frac{x}{A}+\left(\frac{x}{A}\right)^2=0$$

$$\frac{y}{B}+\frac{x}{A}=0 \qquad .$$

$$y=-\frac{B}{A}x$$

Уравнението на движение ще има същия вид, но началното положение ще бъде друго.

3. Разликата в началните фази на двете трептения **φ=±π/2**. От (5) следва, че движението ще бъде по елипса, чиито главни оси съвпадат с координатните оси:

$$\left(\frac{y}{B}\right)^2+\left(\frac{x}{A}\right)^2=1\,.$$

Двата случая се различават само по посоката на движение на точката по елипсата – при **φ=π/2** движението е по часовниковата стрелка, а при **φ=–π/2** е в обратна посока. Ако амплитудите на двете трептения са равни, ***A*=*B*=*R***, резултантното движение ще бъде по окръжност с радиус ***R***.

При плавна промяна на фазовата разлика от **0** до **2π**, траекторията се променя и преминава от права в I и III квадрант през наклонена елипса, елипса по координатните оси, права в II и IV квадрант пак наклонена елипса и т.н. до права в I и III квадрант при **φ=2π**.