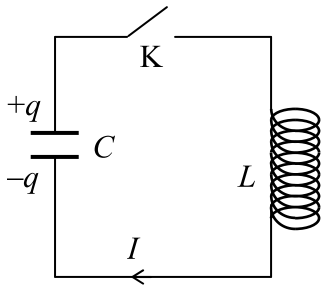
Свободни електромагнитни трептения – незатихващи и затихващи. Принудени електромагнитни трептения. Променлив ток

Свободни незатихващи електромагнитни трептения

Нека да разгледаме един контур, в който се включени кондензатор с капацитет $\boldsymbol{C}$ и намотка с индуктивност $\boldsymbol{L}$ (фиг. 1). Ако кондензатора е зареден със заряд $\boldsymbol{q}$, между плочите му е създадено напрежение $U=-\Delta\varphi=\dfrac{q}{C}$ (26 въпрос, Физика 1) и по контура ще започне да тече ток $I=-\dfrac{dq}{dt}$ (големините на напрежението и тока трябва да бъдат положителни величини).



фиг. 1

Ако в контура няма включена индуктивност, токът ще протича до изравняване на потенциалите на плочите на кондензатора (токът не е постоянен). Когато токът тече през намотката обаче, в нея се създава магнитно поле, което се увеличава с увеличаване на тока. Следователно в намотката се индуцира ЕДН на самоиндукция $\varepsilon_i=-L\dfrac{dI}{dt}$ (10 въпрос), което, по правилото на Ленц, създава ток в обратна посока на протичащия. Това намалява тока във веригата и той по-бавно достига максималната си стойност. Когато токът започне да намалява, посоката на индуцирания ток се променя (пак по правилото на Ленц) и е в посока на първоначалния ток. Това води до протичане на ток във веригата против посоката на електростатичното поле до зареждане на плочите на кондензатора със заряди, противоположни по знак на началните. Тъй като кондензаторът отново е зареден, пак ще започне да тече ток в контура, но в обратна посока. Ако пренебрегнем съпротивлението $\boldsymbol{R}$ на съединителните проводници и намотката, няма да имаме загуба на енергия за нагряването им и зарядите върху плочите на кондензатора ще се възстановяват до първоначалната си стойност. От закона на Ом (29 въпрос, Физика 1) за затворената верига на фиг. 1 ще получим:

(1) $U+\varepsilon_i=IR$

$$\frac{q}{C}-L\frac{dI}{dt}=\frac{q}{C}+L\frac{d^2q}{dt^2}=0$$

(2) $\dfrac{d^2q}{dt^2}+\dfrac{q}{LC}=0$

Полученото равенство (2) е диференциално уравнение от втори ред и има същия вид, както диференциалното уравнение на хармонично (свободно незатихващо) трептене на пружинно махало (12 въпрос). Това ни дава основание да наречем промяната на заряда (тока, напрежението) в контура електромагнитно трептене (в разглеждания идеален случай това е хармонично трептене), а самия контур – трептящ кръг. В конкретния случай (2), величината, която се променя периодично (и отговаря на отклонението $\boldsymbol{x}$ на пружинното махало) е зарядът $\boldsymbol{q}$ върху плочите на кондензатора. Коефициентът пред $\boldsymbol{q}$ в уравнението трябва да е квадратът на кръговата честота на трептенето:

$\omega=\sqrt{\dfrac{1}{LC}}$ (съответно периодът на трептенията е $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{LC}$),

а решенията на (2) трябва да бъдат уравненията на трептението:

(3) $\begin{aligned} q&=q_m\sin(\omega t+\varphi) \\ q&=q_m\cos(\omega t+\varphi) \end{aligned}$,

където $\boldsymbol{q_m}$ и φ са двете произволни константи. Амплитудата на това трептене $\boldsymbol{q_m}$ е началният заряд, с който сме заредили кондензатора. Всеки от двата израза (3) може да бъде уравнение на незатихващо електромагнитно трептене. Ако изберем началния момент да бъде моментът в който включваме ключа **K**, зарядът в този момент е максимален ($\boldsymbol{q=q_m\Rightarrow\varphi=0}$) и уравнението на това свободно незатихващо трептене придобива вида:

(4) $q=q_m\cos\omega t$.

Напрежението $\boldsymbol{U}$ между плочите на кондензатора също ще се изменя по периодичен закон, подобен на (4):

(5) $U=\dfrac{q}{C}=\dfrac{q_m}{C}\cos\omega t=U_m\cos\omega t$,

където U_m е максималната стойност (амплитудата) на напрежението. Токът I е първата производна на заряда по времето и също ще се изменя по периодичен закон:

$$(6)\quad I = -\frac{dq}{dt} = \omega q_m \sin\omega t = I_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Вижда се, че в този случай токът изостава по фаза с $\pi/2$ от напрежението.

Можем да продължим аналогията с трептенията на пружинното махало. Нека да видим как се променя енергията на трептящия кръг. В началния момент кондензаторът е зареден до максималния заряд q_m и има потенциална енергия $E = \frac{1}{2}\frac{q_m^2}{C}$ (26 въпрос, Физика 1), която е пълната енергия на трептящия кръг. Това състояние отговаря на положението на максимално отклонение на топчето в началния момент, когато пълната му енергия е също само потенциална $E = \frac{1}{2}kA^2$ След време $t=T/4$, от (4) и (6) следва, че зарядът на кондензатора е **0** (а също и напрежението (5) между плочите му), а токът е максимален – цялата енергия на електричното поле се е превърнала в енергия на магнитното поле $E = \frac{1}{2}LI_m^2$ (10 въпрос). Този момент при пружинното махало отговаря на преминаването на топчето през равновесно положение – тогава потенциалната му енергия се е превърнала изцяло в кинетична $E = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$ и скоростта му е максимална. За следващия четвърт период (до момента $t=T/2$) токът в трептящия кръг намалява до **0**, а напрежението и зарядът на кондензатора отново достигат максимална стойност, но с обратен знак. Това отговаря на максималното отклонение на топчето в противоположната посока. За времето от $T/2$ до T се извършват същите процеси, но в обратна посока.

Затихващи електромагнитни трептения

В един реален трептящ кръг винаги имаме и някакво съпротивление R на съединителните проводници и намотката (фиг. 2). Това води до отделяне на топлина и съответно до невъзвратими загуби на енергия. Следователно електромагнитното трептение в реален трептящ кръг е аналогично на затихващо механично трептение (15 въпрос), а съпротивлението R на контура, както ще видим по-нататък, е аналог на коефициентът на триене r. Като имаме предвид и съпротивлението R, законът на Ом (1) за този затворен контур ще се придобие вида:

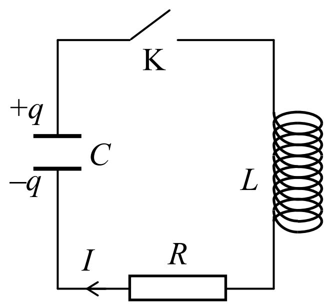
$$\frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt} = RI = -R\frac{dq}{dt}$$

и диференциалното уравнение на затихващото електромагнитно трептение ще бъде:

$$\frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0$$

$$(7)\quad \frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0,$$



фиг. 2

където $\beta = \frac{R}{2L}$ е коефициентът на затихване, а $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ е собствената кръгова честота. Виждаме, че с така въведените означения, (7) има същия вид, както и диференциалното уравнение на затихващо механично трептение (15 въпрос). Следователно, решенията му трябва да имат същия вид:

$$(8)\quad \begin{aligned} q &= q_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi) \\ q &= q_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

с намаляваща амплитуда $q_m(t) = q_0 e^{-\beta t}$ (q_0 е началният заряд, с които сме заредили кондензатора) и кръгова честота (15 въпрос):

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Също както и при механичните трептения, кръговата честота на затихващото трептение **ω** е по-малка от собствената кръгова честота **ω₀** (съответно периодът $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$ е по-голям от $T_0=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$).

Всеки от двата израза (8) може да бъде уравнение на затихващо електромагнитно трептение. За затихващите електромагнитни трептения също можем да дефинираме декремент на затихване, като отношението на две съседни амплитуди (които се различават във времето с един период ***T***):

$$\frac{q_m(t)}{q_m(t+T)}=\frac{q_0e^{-\beta t}}{q_0e^{-\beta(t+T)}}=e^{\beta T}$$

и логаритмичен декремент на затихване:

$$\delta=\ln e^{\beta T}=\beta T=\pi\frac{R}{L}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{4L^2}}}.$$

Принудени електромагнитни трептения

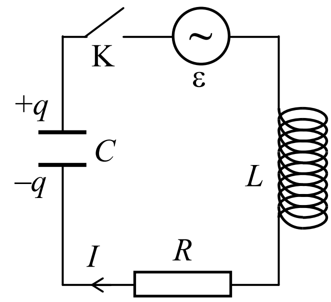
Ако искаме да поддържаме реално незатихващо трептение, трябва, както и в случая на механичните трептения, да внасяме енергия в системата в подходящ момент т.е. трябва да включим в трептящия кръг източник на ЕДН (фиг. 3). И в този случай външното ЕДН (също както външната сила при механичните трептения) трябва да се променя по периодичен закон напр. $\boldsymbol{\varepsilon=\varepsilon_m\cos\omega t}$, но то трябва да е отместено по фаза на **π** от фазата на собственото трептение (това е ЕДН, което зарежда кондензатора т.е. трябва да действа обратно на посоката на електростатичното поле) и при така избраните начален момент и положителна посока на тока, външното ЕДН трябва да бъде $\varepsilon=\varepsilon_m\cos(\omega t\pm\pi)=-\varepsilon_m\cos\omega t$, законът на Ом ще бъде:

$$U+\varepsilon_i+\varepsilon=IR,$$

а диференциалното уравнение на принуденото трептение ще придобие вида:

$$\frac{q}{C}+L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}=\varepsilon_m\cos\omega t$$

$$(9)\quad \frac{d^2q}{dt^2}+2\beta\frac{dq}{dt}+\omega_0^2q=\frac{\varepsilon_m}{L}\cos\omega t$$



фиг. 3

Както казахме и за механичните трептения (15 въпрос), общото решение на това нехомогенно уравнение (9) се получава от сумата на общото решение (8) на хомогенното уравнение (7) и едно частно решение на (9), което ще търсим пак във вида:

$$(10)\quad q=q_m\cos(\omega t-\psi).$$

Като използваме полученото в 15 въпрос, за амплитудата $\boldsymbol{q_m}$ и началната фаза **ψ** на (10) можем да запишем:

$$q_m=\frac{\varepsilon_m}{L\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}},$$

$$\mathrm{tg}\psi=\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

и като имаме предвид конкрентните стойности на **ω₀** и **β** ($\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $\beta=\dfrac{R}{2L}$), можем да запишем:

$$(11)\quad q_m=\frac{\varepsilon_m}{\omega\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$(12)\quad \mathrm{tg}\psi=\frac{R}{\dfrac{1}{\omega C}-\omega L}.$$

Величината $\boldsymbol{X_L=\omega L}$ се нарича индуктивно съпротивление, а $\boldsymbol{X_C=1/\omega C}$ – капацитивно. Така (11) и (12) могат да се запишат в по-компактен вид:

$$q_m = \frac{\varepsilon_m}{\omega\sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}}$$

$$\text{tg}\psi = \frac{R}{X_C - X_L}.$$

Следователно уравнението на принуденото трептение ще бъде:

$$(13)\ \ q = q_0 e^{-\beta t}\cos\omega' t + \frac{\varepsilon_m}{\omega\sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}}\cos\left(\omega t - \text{arctg}\frac{R}{X_C - X_L}\right),$$

където:

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

е кръговата честота на затихващото трептение. Както казахме и в 15 въпрос, първият член на (13) намалява много бързо и след времето за "синхронизация" в трептящия кръг имаме само хармонично трептение с честота **ω** и амплитуда (11) т.е. уравнението на това трептение се дава само от (10). Следователно, от даден момент нататък напрежението в трептящия кръг е:

$$\varepsilon = \varepsilon_m \cos\left(\omega t - \pi\right),$$

а токът:

$$I = -\frac{dq}{dt} = \omega q_m \sin\left(\omega t - \psi\right) = I_m \cos\left(\omega t - \psi - \frac{\pi}{2}\right) = I_m \cos\left(\omega t - \pi - \left(\psi - \frac{\pi}{2}\right)\right) = I_m \cos\left(\omega t - \pi - \varphi\right),$$

т.е. токът изостава по фаза от напрежението с $\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$. В съответствие с (12):

$$(14)\ \ \text{tg}\varphi = \text{tg}\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\text{tg}\psi} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{X_L - X_C}{R}.$$

Максималната стойност (амплитудата) на тока ще бъде:

$$(15)\ \ I_m = \omega q_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}}.$$

И в този случай на принудени трептения се наблюдава явлението резонанс. От (11) и полученото в 15 въпрос следва, че при кръгова честота $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$ рязко се увеличава зарядът на кондензатора, а следователно и напрежението върху него. Затова този резонанс се нарича резонанс на напрежение. От (15) се вижда, че при собствената честота $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ на трептящия кръг, токът в него ще е максимален – тогава имаме резонанс на ток.

Променлив ток

Променлив ток наричаме всеки ток, чиято посока или големина се променя във времето. Електромагнитните трептения, които разглеждахме досега, са най-простия случай на протичане на променлив ток в една електрична верига. Обикновено когато се говори за променлив ток (напр. в бита или промишлеността) се разбира синусоидален ток с постоянна амплитуда т.е. това е принуденото електромагнитно трептение, което разгледахме. Ако ЕДН на източника (фиг. 3) се изменя по закона:

$$\varepsilon = \varepsilon_m \cos\omega t,$$

токът във веригата ще изостава по фаза от напрежението с **φ**:

$$I = I_m \cos\left(\omega t - \varphi\right).$$

Ако индуктивното съпротивление е по-голямо от капацитивното (**X_L>X_C**), от (14) следва, че **φ>0** и токът действително ще изостава по фаза от напрежението, но ако **X_L<X_C** (**φ<0**), напрежението ще изостава по фаза от тока. Амплитудата на тока (15) може да се запише като:

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}} = \frac{\varepsilon_m}{Z}$$

(16) $$Z = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}\ .$$

Величината $\boldsymbol{Z}$ (16) се нарича пълно съпротивление на веригата или импеданс. Съпротивлението $\boldsymbol{R}$ се нарича активно съпротивление, а $\boldsymbol{X=X_L-X_C}$ се нарича реактивно съпротивление. Като използваме (14), можем да определим как се променя фазата на тока спрямо напрежението през активно, индуктивно или капацитивно съпротивление. Когато имаме включено само активно съпротивление $\boldsymbol{R}$ (тогава $\boldsymbol{L=0}$ и $\boldsymbol{C=\infty}$):

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R} = \frac{0}{R} = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

$$I = I_m \cos\left(\omega t - \varphi\right) = I_m \cos \omega t$$

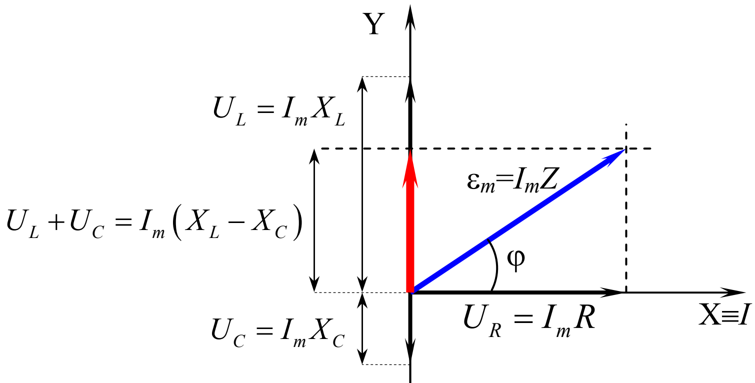
(17) $$I_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}} = \frac{\varepsilon_m}{R}\ .$$

В този случай токът е във фаза с напрежението. Ако във веригата имаме включена само намотка с индуктивност $\boldsymbol{L}$ ($\boldsymbol{R=0}$ и $\boldsymbol{C=\infty}$):

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L}{R} = \frac{\omega L}{0} = +\infty \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$I = I_m \cos\left(\omega t - \varphi\right) = I_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

(18) $$I_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}} = \frac{\varepsilon_m}{X_L} = \frac{\varepsilon_m}{\omega L}$$



фиг. 4

и токът изостава с $\boldsymbol{\pi/2}$ от напрежението. В случая, когато имаме включен само кондензатор с капацитет $\boldsymbol{C}$ ($\boldsymbol{R=0}$ и $\boldsymbol{L=0}$), за фазовата разлика ще получим:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{-\dfrac{1}{\omega C}}{R} = \frac{-\dfrac{1}{\omega C}}{0} = -\infty \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$I = I_m \cos\left(\omega t - \varphi\right) = I_m \cos\left(\omega t - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

(19) $$I_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}} = \frac{\varepsilon_m}{X_C} = \frac{\varepsilon_m}{\dfrac{1}{\omega C}} = \varepsilon_m \omega C\ ,$$

откъдето се вижда, че токът избързва с $\boldsymbol{\pi/2}$ от напрежението (съответно напрежението изостава с $\boldsymbol{\pi/2}$ от тока). Когато имаме реална електрическа верига с последователно включени всички елементи ($\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{C}$), ъгълът $\boldsymbol{\varphi}$ ще има стойност между $\boldsymbol{-\pi/2}$ и $\boldsymbol{\pi/2}$. В този случай (фиг. 3) падовете на напрежението (амплитудите на съответните напрежения) върху активното съпротивление $\boldsymbol{U_R}$, индуктивността $\boldsymbol{U_L}$ и капацитета $\boldsymbol{U_C}$, като имаме предвид (17), (18) и (19) ще бъдат съответно:

$$U_R = I_m R; \quad U_L = I_m X_L; \quad U_C = I_m X_C\ .$$

Сумата от трите пада на напрежения трябва да ни даде приложеното ЕДН $\boldsymbol{\varepsilon}$. Като имаме предвид фазовите отмествания в индуктивността и капацитета (съответно $\boldsymbol{\pi/2}$ и $\boldsymbol{-\pi/2}$), можем да построим и векторната диаграма (фиг. 4) на напреженията.

Отделената мощност във цялата верига $\boldsymbol{P_t}$ трябва да е произведението на тока и напрежението:

$$P_t = I\varepsilon = I_m \varepsilon_m \cos\left(\omega t - \varphi\right)\cos \omega t\ ,$$

а средната мощност $\boldsymbol{P}$, отделена за един период $\boldsymbol{T}$ ще бъде:

$$P = \frac{I_m \varepsilon_m}{2}\cos\varphi = \frac{I_m}{\sqrt{2}}\frac{\varepsilon_m}{\sqrt{2}}\cos\varphi = I_{eff} U_{eff} \cos\varphi\ .$$

U_{eff} и I_{eff} се наричат ефективни стойности съответно на напрежението и тока. Това са стойностите на постоянни напрежение и ток, при които ще се отдели същата активна мощност, както за съответния променлив ток. Множителят **cosφ** се нарича фактор на мощността и трябва да е близък до **1**.