Вълнов процес – определение, видове вълни. Основни характеристики – скорост на разпространение, дължина на вълната, вълново число. Уравнение на плоска хармонична вълна. Енергия на еластична вълна. Интензитет на вълна. Диференциално вълново уравнение

Вълнов процес – определение, видове вълни. Основни характеристики – скорост на разпространение, дължина на вълната, вълново число

Досега разглеждахме трептенията на дадено тяло (материална точка), без да се интересуваме дали то се намира в някаква среда. Ако трептящото тяло се намира в дадена точка на непрекъсната еластична среда, то привежда всички допиращи се до него частици от средата в трептеливо движение, тъй като между частиците на средата съществуват сили на взаимодействие, които оказват съпротивление срещу всякакъв вид деформации. При трептенето тялото предизвиква отместване на най-близките до него частици от равновесните им положения, вследствие на което в съседните на тялото области се появяват периодични деформации (свиване и разтягане). Като резултат от това в средата възникват еластични сили, стремящи се да върнат деформираните области към първоначалното състояние на равновесие. Така всички частици от средата започват да трептят около равновесните си положения, повтаряйки с известно закъснение хармоничните трептения на тялото, намиращо се в дадената точка на средата. Това тяло изпълнява ролята на източник или център на разпространяващия се вълнов процес, който се нарича още вълна. Колкото по-далеч от източника се намира дадена частица, толкова по-късно тя ще започне да трепти. В такъв случай фазите на трептене на източника и на частиците от средата ще бъдат различни. При предположение, че в средата няма загуба на енергия, амплитудите на трептенията на източника и различните частици на средата ще се запазват постоянни с времето. Следователно, за да наблюдаваме вълни в дадена еластична среда, т.е. частиците ѝ да започнат да трептят, е необходимо да внесем източник (трептящо тяло) в нея. Енергията на източника се предава от частица на частица и се разпространява в средата, т.е. частиците от средата трептят около равновесните си положения, а при самия вълнов процес (разпространението на трептенето) се пренася енергия, а не маса, както изглежда на пръв поглед.

В зависимост от характера на възникващите еластични деформации вълните биват надлъжни и напречни. При надлъжните вълни частиците на средата трептят по направлението, в което се разпространяват вълните. При напречните вълни частиците на средата трептят в направление, което е перпендикулярно на това, в което се разпространяват вълните.

В зависимост от областта, която обхващат вълните при разпространението си, те могат да бъдат разделени и по друг признак – обемни, когато обхващат целия обем на средата, и повърхнинни, ако обхващат само повърхностния ѝ слой. Обикновено повърхнинните вълни възникват на повърхността на течностите (например морските вълни), а обемните – при разпространението на звука в течностите и твърдите тела.

Както казахме по-горе, вълната представлява разпространение на трептенето в дадена среда. Този процес се извършва с определена скорост *v*, която наричаме скорост на разпространение на вълната. Ако средата е еднородна, скоростта, с която се разпространаява вълната е постоянна. Определено време ***t*** след възбуждане на трептението, вълната се разпространява на някакво разстояние ***r*** от източника Всички точки, които се намират на това разстояние ***r***, започват да трептят едновременно и лежат върху една повърхност, обгръщаща източника на трептенията. Тази повърхност представлява геометричното място на точките, до които достигат трептенията на източника в даден момент, и се нарича фронт на вълната. С течение на времето фронтът се изменя непрекъснато и определя границата между две области от пространството – една, в която частиците вече са започнали да трептят, и друга, до която трептенията на източника още не са достигнали. Всички точки, до които вълната достига за едно и също време, трептят с еднакви фази и образуват повърхности, които се наричат вълнови повърхности. Вълновите повърхности представляват геометричното място на точки, трептящи с еднакви фази. Те са свързани с конкретни стойности на времето и са неподвижни. Вълновите повърхности могат да имат различна форма в зависимост от конфигурацията на източника на трептене и свойствата на средата. Най-простите вълни в зависимост от формата на вълновите повърхности са плоските (вълновите повърхности представляват множество равнини, успоредни една на друга) и сферичните (вълновите повърхности са концентрични сфери). Друга величина, с която се характеризират вълновите процеси, е разстоянието между две най-близки частици, трептящи с еднакви фази. Тази величина се нарича дължина на вълната. Означава се с λ и като всяко разстояние се измерва в метри [m]. Дължината на вълната може да бъде дефинирана и по следния начин: разстоянието, на което се разпространява фронтът на дадена вълна (а следователно и самата вълна) за време, равно на един период $\boldsymbol{T}$ от трептенията на източника:

$$(1)\quad \lambda = vT = \frac{v}{f}.$$

От зависимостта (1) лесно може да се определи скоростта $\boldsymbol{v}$ на разпространение на вълната: $v=\lambda f$. Тази скорост $\boldsymbol{v}$, както и дължината на вълната λ, зависят от свойствата на средата. Честотата на вълната е същата, както и честотата $\boldsymbol{f}$ на трептения на източника и зависи само от свойствата на източника. Същото се отнася и за другите характеристики на вълната, свързани с честотата ѝ – период и кръгова честота. Амплитудата на плоската вълна (ако нямаме загуба на енергия в средата) е същата, както и на трептението, което я е възбудило, но амплитудата на сферичната вълна намалява с отдалечаване от източника. Можем да въведем още една величина, характеризираща вълната – вълново число

$$(2)\quad k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

(когато вълната се разпространява в една посока, напр. плоска вълна), което определя колко дължини на вълната се нанасят на разстояние **2π m**, а мерната му единица е [m^{-1}], или вълнов вектор $\vec{k}$ (в общия случай), чиято големина се дава от (2), а посоката му е по положителната нормала към вълновата повърхност в дадената точка.

Уравнение на плоска хармонична вълна

Ще разгледаме по-подробно най-простият случай на разпространение на трептението – плоска хармонична напречна вълна, разпространяваща се в дадена посока (напр. оста **X** на избраната отправна система с отправно тяло – източника на трептения). Всяка точка, до която е достигнала вълната в даден момент ще започне да трепти по оста **Y**, перпендикулярна на **X**. Уравнението на вълната (уравнението на движение на всички частици от средата, до които е достигнала вълната) трябва да е функция не само на времето $\boldsymbol{t}$ (както при трептението), а и на разстоянието $\boldsymbol{x}$, на което се намира дадена точка от източника на трептения (началото на координатната система) – $y=f(x,t)$. В този случай (плоска хармонична вълна), всички точки от средата, до които достига вълновият процес, повтарят трептенията на източника с известно закъснение, тъй като те се намират на различни разстояния от източника. Трептения им започват след различни интервали от време, които променят съответно фазите им (началната фаза на трептението на всяка точка зависи от разстоянието $\boldsymbol{x}$), т.е. ако знаем уравнението на трептене на източника и скоростта $\boldsymbol{v}$ на разпространение на вълната, можем да получим уравнението на трептене на всяка точка от средата в даден момент от време – това е и уравнението на вълната.

Нека уравнението на трептене на източника (за него координатата $x=0$) да бъде:

$$y(0,t) = A\sin(\omega t + \varphi).$$

Точка от средата, която се намира на разстояние $\boldsymbol{x}$ от източника, ще започне да трепти след време $\tau = \dfrac{x}{v}$ – т.е. трептението ще закъснява по фаза спрямо източника. Уравнението на трептене на тази точка ще бъде:

$$(3)\quad y(x,t) = A\sin\left(\omega(t-\tau)+\varphi\right) = A\sin\left(\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi\right) = A\sin\left(\omega t - \omega\frac{x}{v}+\varphi\right)$$

и като използваме (2) получаваме

$$(4)\quad y(x,t) = A\sin(\omega t - kx + \varphi)$$

– уравнението на плоска хармонична вълна, разпространяваща се в положителната посока на избраната ос **X**. Ако вълната се разпространява в противоположната посока, скоростта на разпространение в (3) ще има противоположен знак и (4) ще придобие вида:

$$y(x,t) = A\sin(\omega t + kx + \varphi).$$

Така общият вид на уравнението на плоска хармонична вълна ще бъде:

$$y(x,t) = A\sin(\omega t \mp kx + \varphi),$$

където знакът "–" се отнася за разпространение на вълната в положителна посока на избраната ос **X**, а знакът "+" – за разпространение в противоположната посока.

За сферични вълни амплитудата на трептенията се изменя обратнопропорционално на разстоянието $\boldsymbol{r}$, на което се намира дадената точка от източника (във всички посоки!), поради което уравнението (4) има вида:

$$y(r,t)=\frac{A}{r}\sin(\omega t-kr+\varphi)$$

Както казахме по-горе, всички точки от една вълнова повърхност трептят с еднаква фаза, чиято стойност Φ_0 зависи от x и t:

(5) $\Phi_0=\omega t-kx+\varphi=\text{const}$.

След определено време такава стойност на фазата Φ_0 ще има друга вълнова повърхност с друга координата т.е. конкретната стойност на фазата се премесва по оста **X**. Скоростта на преместване на фазата можем да определим от (5) като първата производна на координатата x по времето t:

$$x=\frac{1}{k}(\omega t+\varphi-\Phi_0)$$

(6) $\frac{dx}{dt}=\frac{\omega}{k}=v$

Виждаме, че скоростта на промяна на фазата е същата, както и скоростта на разпространение на вълната v. Затова тази скорост се нарича още фазова скорост на вълната.

Енергия на еластична вълна. Интензитет на вълна

Източникът на трептения в една хомогенна еластична среда притежава определена енергия. В процеса на разпространение на вълната тази енергия се пренася от една частица в пространството до друга. При плоските еластичните вълни (тези, които се разпространяват в еластична среда) тя може да се определи просто. Ако в разглежданата среда няма загуба на енергия, амплитудите на трептящите частици са еднакви. Извършвайки хармонично трептене около равновесното си положение, всяка частица от средата притежава пълна механична енергия (12 въпрос):

$$E=\frac{1}{2}m\omega^2A^2$$

където m е масата на частицата, ω – кръговата ѝ честота, а A – амплитудата на трептението ѝ. Ако в обем V от средата броят на трептящите частици е N, енергията на единица обем (плътността на енергията на вълната) ще бъде:

(7) $w=\frac{NE}{V}=\frac{1}{2}\frac{Nm}{V}\omega^2A^2=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2$

където ρ е плътността на средата.

Интензитетът на вълната е величина, която определя средната енергия, пренасяна от вълната за единица време през единица площ, разположена перпендикулярно на посоката ѝ на разпространение:

(8) $I=\frac{E}{St}$.

Мерната единица за интензитет на вълна е ват на квадратен метър [W/m^2]. Можем да изразим интензитета на дадена вълна и чрез амплитудата ѝ, като използваме получената зависимост на енергията в единица обем w от амплитудата A на вълната (7). Ако вълната се разпространява със скорост v в цилиндричен слой от средата със сечение S, за време t ще се разпространи на разстояние $h=vt$. Енергията, която се пренася през площта S за това време, ще бъде енергията на вълната в обема V на цилиндъра с основа S и височина h:

$$E=wV=wSh=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2Svt,$$

а интензитетът на вълната в този обем от средата съгласно (8) ще бъде:

$$I=\frac{1}{2}\frac{\rho v\omega^2A^2St}{St}=\frac{1}{2}\rho v\omega^2A^2.$$

Виждаме, че интензитетът на еластичната вълна е пропорционален на квадрата на амплитудата на вълната. Такава зависимост е валидна за всички вълни (вкл. и за светлинните).

Диференциално вълново уравнение

Когато разглеждахме трептенията (12, 15, 16 въпроси) видяхме, че уравнението на трептението е решение на някакво обикновено диференциално уравнение от втори ред за $x(t)$. Тук също можем да получим диференциално уравнение от втори ред за $y(x,t)$, чието решение е (4), но тъй като имаме функция на две променливи x и t, то ще бъде частно диференциално уравнение. Нека да намерим вторите производни на (4) по променливите x и t:

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\omega A\cos\left(\omega t-kx+\varphi\right)\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-\omega^2 A\sin\left(\omega t-kx+\varphi\right)$$

$$(9)\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-\omega^2 y$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-kA\cos\left(\omega t-kx+\varphi\right)\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-k^2 A\sin\left(\omega t-kx+\varphi\right)$$

$$(10)\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-k^2 y\,.$$

От (6), (9) и (10) следва:

$$-\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$(11)\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,,$$

където сме заместили **ω/*k*** с фазовата скорост ***v*** от (6). Уравнение (11) е частно диференциално уравнение от втори ред и се нарича диференциално вълново уравнение на плоска вълна, която се разпространява по оста **X**. Решенията на (11) са функции от вида (4) т.е. уравнения на плоска хармонична вълна. Възможно е обаче да се направи и обратното заключение: ако една величина ***y*(*x*,*t*)** зависи от времето и координатите така, че нейните частни производни удовлетворяват уравнение (11), тази величина съответства на разпространяваща се плоска хармонична вълна по оста **X** (такава вълна се нарича още бягаща вълна).

В общия случай, когато една плоска хармонична вълна **ξ(*x*,*y*,*z*,*t*)** се разпространява в произволна посока в тримерното пространство, уравнение (11) се записва най-често по следния начин:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=\Delta\xi=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\,,$$

където ξ е отклонението от равновесното положение, а

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

се нарича оператор на Лаплас.