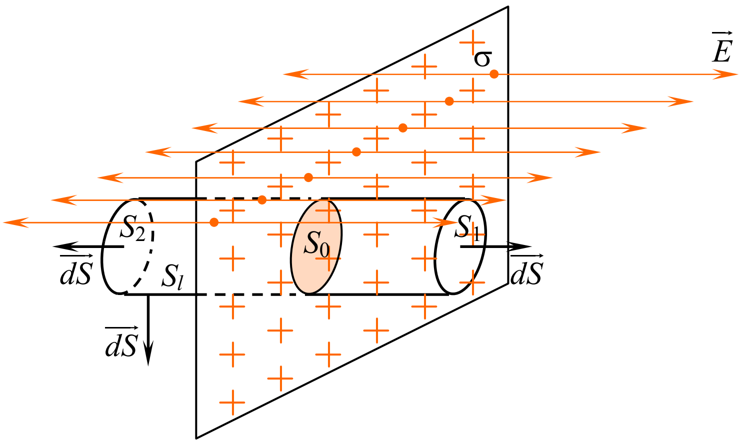
Приложение на закона на Гаус – безкрайна заредена равнина, две безкрайни заредени равнини, заредена сфера

Ще използваме закона на Гаус за определяне на интензитета на електростатичното поле в няколко случая, които са много важни от практическа гледна точка.



фиг. 1

Първо ще определим интензитета около безкрайна равнина (фиг. 1), равномерно заредена с повърхнинна плътност на зарядите **σ** ($\sigma = \dfrac{dq}{dS}$, въпрос 22). За определеност ще приемем, че зарядът ***q*** е положителен и за опростяване на записа ще приемем, че равнината е във вакуум. Следователно посоката на интензитета $\vec{E}$ ще бъде от равнината към безкрайност. Може да се покаже, че векторът на интензитета е перпендикулярен на равнината и еднакъв по големина във всяка точка около нея. Ще намерим големината му като използваме закона на Гаус. Избираме си повърхнината, през която ще пресмятаме потока на интензитета $\boldsymbol{\Phi_E}$, да бъде цилиндър, когото равнината пресича успоредно на основите (можем да си избираме произволна повърхнина). Потокът на интензитета през цилиндъра можем да пресметнем по два начина – от определението и от закона на Гаус. От определението следва:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}.\vec{dS} = \int_{S_1} \vec{E}.\vec{dS} + \int_{S_2} \vec{E}.\vec{dS} + \int_{S_l} \vec{E}.\vec{dS} =$$

$$= \int_{S_1} E\cos\alpha dS + \int_{S_2} E\cos\alpha dS + \int_{S_l} E\cos\alpha dS =$$

$$= E\int_{S_1} dS + E\int_{S_2} dS + 0 = ES_1 + ES_2 = 2ES_0$$

Интегралът по затворената повърхност ***S*** (цялата повърхнина на цилиндъра) може да се раздели на три части – по основите $\boldsymbol{S_1}$ и $\boldsymbol{S_2}$ и по околната повърхнина $\boldsymbol{S_l}$. Тъй като векторът $\vec{E}$ е перпендикулярен на равнината, той е еднопосочен с вектора на елементарната площ $\vec{dS}$ за $\boldsymbol{S_1}$ и $\boldsymbol{S_2}$ (**cosα=1**), но е перпендикулярен на $\vec{dS}$ за околната повърхнина $\boldsymbol{S_l}$ (**cosα=0**, третият интеграл е **0**). Тъй като големината на $\vec{E}$ не зависи от мястото, на което се намираме, можем да изнесем ***E*** пред интегралите, а площите на двете основи са равни ($\boldsymbol{S_1=S_2=S_0}$). Следователно, можем да изразим големината на интензитета:

(1) $E = \dfrac{\Phi_E}{2S_0}$,

а потока $\boldsymbol{\Phi_E}$ ще определим от закона на Гаус:

(2) $\Phi_E = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} q_i}{\varepsilon_0} = \dfrac{q}{\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma S_0}{\varepsilon_0}$,

тъй като равнината е заредена равномерно и тогава $q = \sigma S_0$ е зарядът, който обхваща цилиндричната повърхност. Като заместим (2) в (1) окончателно получаваме:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Виждаме, че големината на интензитета наистина не зависи от мястото около равнината, на което се намираме, а само от повърхнинната плътност на зарядите, с които е заредена равнината. Ако около равнината имаме среда с относителна диелектрична проницаемост **ε**, интензитета ще бъде:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}.$$

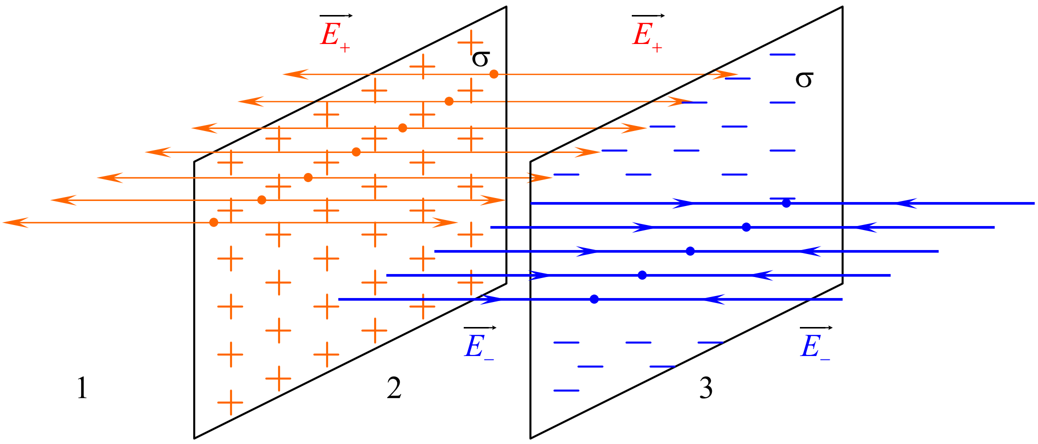
Полето около равнината е еднородно и посоката на интензитета е от нея към безкрайност. Ако равнината е заредена с отрицателен заряд, посоката на вектора на интензитета ще бъде в обратна посока

– от безкрайност към равнината, със същата големина, ако повърхнинната плътност **σ** е със същата стойност.

По-интересен в практическо отношение е случаят, когато имаме две равнини, заредени с еднаква повърхнинна плътност **σ** но с противоположни знаци (фиг. 2). Това е принципното устройство на плоския кондензатор. За да получим големината на интензитета на полето в областите **1**, **2** и **3** ще използваме принципа на суперпозицията:

$$E_1 = E_3 = 0$$

$$E_2 = E_+ + E_- = 2\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

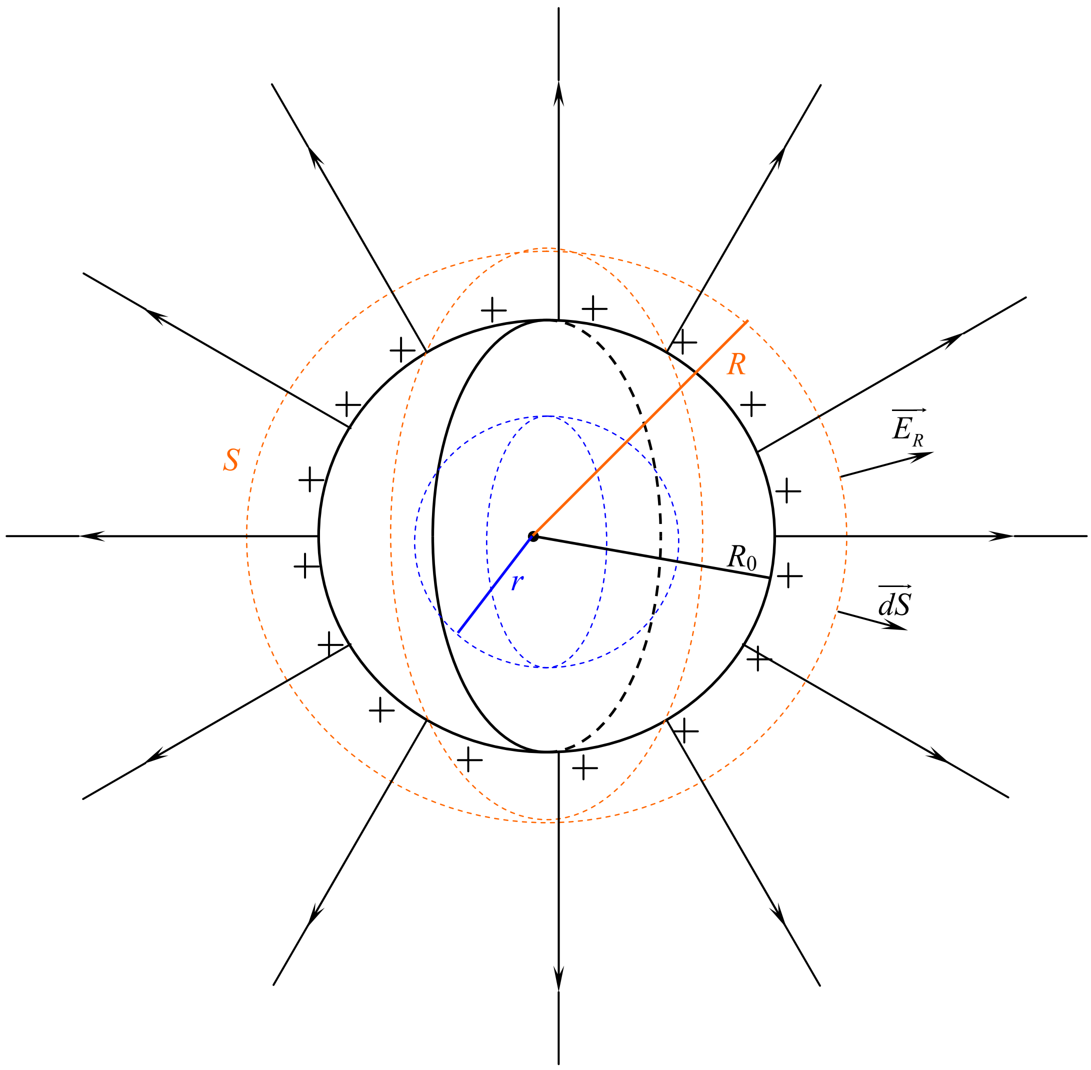


фиг. 2

тъй като големините на интензитетите на двете полета са равни, в областите **1** и **3** интензитетите на полетата на двете равнини са с противоположни посоки и векторната им сума е **0**, а в област **2** са еднопосочни и големините се събират. Следователно електростатично поле има само между двете равнини и неговата големина е два пъти по-голяма, отколкото около една равнина. Посоката на полето между равнините е от положително към отрицателно заредената равнина. Ако между двете равнини имаме диелектрик с относителна диелектрична проницаемост **ε**, интензитетът на полето ще бъде:

$$E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

Друг интересен случай е този, в който зарядът ***q*** е разпределен равномерно по повърхността на сфера с радиус $\boldsymbol{R_0}$ (фиг. 3). Пак ще предположим за определеност, че зарядът, разпределен върху сферата е положителен и сферата се намира във вакуум. Ще определим интензитета на полето в точка, която се намира извън сферата на разстояние $\boldsymbol{R > R_0}$ от центъра ѝ и в точка,



фиг. 3

намираща се вътре в сферата на разстояние $r<R_0$ от центъра. Пак ще използваме потока на интензитета, като го пресметнем чрез закона на Гаус и определението за поток на интензитета.

Първо ще определим интензитета на полето на разстояние R от центъра на сферата (извън сферата). Може да се покаже, че силовите линии на полето са прави линии, перпендикулярни на повърхността ѝ, започващи от сферата и продължаващи до безкрайност. Следователно, интензитетът на полето $\overrightarrow{E_R}$ е насочен по радиуса и е еднакъв по големина във всяка точка на разстояние R. В такъв случай е удобно да изберем затворената повърхност, през която ще пресмятаме потока на интензитета, да бъде сфера с радиус R. Тя обхваща цялата сфера с радиус R_0 и следователно, целият заряд q. Тогава от определението за потока на интензитета Φ_E получаваме:

$$\Phi_{E_R} = \oint_S \overrightarrow{E_R}.\overrightarrow{dS} = \oint_S E_R \cos\alpha dS = E_R \oint_S dS = E_R 4\pi R^2,$$

тъй като векторът на площта $\overrightarrow{dS}$ също е перпендикулярен на повърхността на сферата (**cos**α**=1**) и E_R не зависи от R и може да се изнесе пред интеграла. Стойността на интеграла по цялата затворена повърхност S е точно площта на сферата ($S=4\pi R^2$). Оттук можем да определим големината на интензитета чрез потока:

(1) $$E_R = \frac{\Phi_{E_R}}{4\pi R^2}.$$

Потокът на интензитета ще определим от закона на Гаус:

(2) $$\Phi_{E_R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Като заместим (2) в (1) получаваме за големината на интензитета:

(3) $$E_R = \frac{q}{4\pi R^2 \varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2} = k\frac{q}{R^2}.$$

Виждаме, че (3) има същия вид, както формулата за интензитет на точков заряд, разположен в центъра на сферата (формула (1) от въпрос 23). Следователно, електростатичното поле на равномерно заредена сфера извън сферата е идентично с това на точков заряд, разположен в центъра на сферата. Т.е. в този случай можем да заменим сферата с точков заряд и да прилагаме закона на Кулон.

В случая, когато търсим интензитета на полето на разстояние r (вътре в сферата), можем по същия начин да си изберем затворената повърхност да бъде сфера с радиус r и да пресметнем потока на интензитета Φ_E през тази повърхност:

$$\Phi_{E_r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i}{\varepsilon_0} = 0,$$

тъй като в този случай сферата не обхваща никакви заряди (те са на повърхността на сферата с радиус $R_0>r$), т.е. интензитета на полето E_r също ще е нула. Този факт се използва при т.нар. електростатична защита на помещения, машини и съоръжения от външни електростатични полета (Фарадеев кафез).