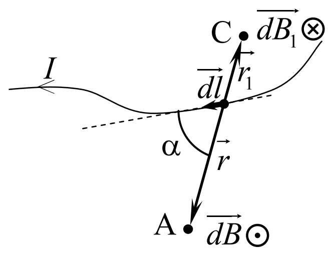
Закон на Био – Савар – Лаплас. Частни случаи – магнитно поле на прав и кръгов проводник

Закон на Био – Савар – Лаплас

Казахме, че магнитното поле се създава от проводници, по които тече ток. Магнитната индукция на полето на такъв проводник може да се определи експериментално. Така са постъпили френските физици Ж. Био и Ф. Савар, които са изследвали магнитното поле на различни проводници, по които тече ток. Те установили, че стойността на магнитната индукция в дадена точка от пространството около проводниците зависи от големината на тока, от формата и дължината на проводниците, а също и от разстоянието между тази точка и съответния проводник. Резултатите от техните експериментални изследвания били обобщени от френския физик и математик П. Лаплас, който определил математическия израз на опитно установените зависимости. Този израз сега наричаме закон на Био – Савар – Лаплас. Нека разгледаме един проводник с произволна форма и размери, по който тече постоянен ток I (фиг. 1). Ще формулираме закона на Био – Савар – Лаплас за един физически малък елемент $\vec{dl}$ от проводника. В **т. А** от полето около проводника, намираща се на разстояние r от елемента dl, магнитната индукция $\vec{dB}$, създавана от този елемент, се дава с формулата:

(1) $\vec{dB} = \dfrac{\mu_0\mu}{4\pi}\dfrac{I\vec{dl}\times\vec{r}}{r^3}$.



фиг. 1

Векторът $\vec{dl}$ е насочен в посоката на тока, а векторът $\vec{r}$ – от елемента dl към **т. А**. Виждаме, че посоката на $\vec{dB}$ се определя от посоката на векторното произведение т.е. в дадения случай ще бъде насочен към нас. Ако **т. С** се намира от другата страна на проводника (фиг. 1), посоката на индукцията $\vec{dB_1}$, създавана от елемента $\vec{dl}$ в тази точка ще бъде противоположна (тъй като за нея векторът $\vec{r_1}$ ще бъде в противоположната посока). Виждаме, че оттук се получава и обяснението на правилото за посоката на магнитните силови линии на полето, създадено от проводник с ток, което формулирахме в 1 въпрос.

Големината на магнитната индукция dB, създавана от елемента $\vec{dl}$ в **т. А**, ще бъде:

(2) $dB = \dfrac{\mu_0\mu}{4\pi}\dfrac{Idl\sin\alpha}{r^2}$,

където α е ъгълът (фиг. 1), който сключва векторът $\vec{dl}$ (а следователно и посоката на тока) с посоката на $\vec{r}$ (т.е. посоката към **т. А**).

Магнитната индукция е векторна величина и за нея също е валиден принципът на суперпозицията. Затова, ако искаме да определим индукцията $\vec{B}$, която създава целият проводник в **т. А**, трябва да сумираме векторно индукциите, създадени от всички елементи $\vec{dl}$, т.е. да интегрираме по цялата дължина L на проводника:

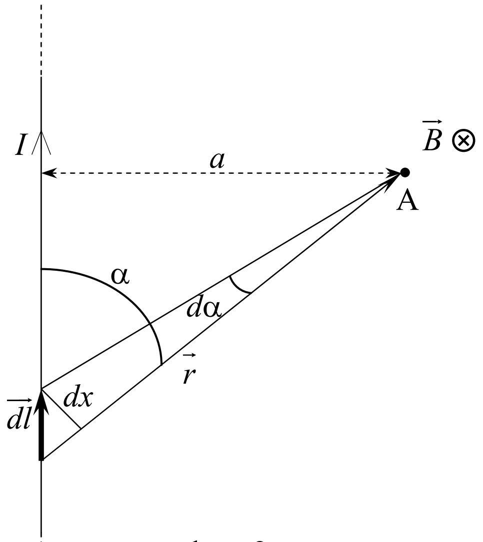
(3) $\vec{B} = \int\limits_L \vec{dB}$.

Частни случаи – магнитно поле на прав и кръгов проводник

Във всеки конкретен случай, като използваме (1), (2) и (3), можем да получим магнитната индукция на полето в точка, в която ни е необходима. Ще разгледаме двата най прости случая – когато проводникът е праволинеен и кръгов.

Първо ще определим магнитната индукция $\vec{B}$ на полето, създавано от безкраен праволинеен проводник, по който тече постоянен ток I, на разстояние a от проводника (фиг. 2). Тъй като магнитната индукция е векторна величина, трябва да определим големината и посоката ѝ. Всеки елемент $\vec{dl}$ от проводника лежи в равнината на чертежа и всички те са еднопосочни (в посоката на тока). Векторите $\vec{r}$ за всеки от елементите $\vec{dl}$ също лежат в равнината на чертежа. Следователно векторното произведение $\vec{dl}\times\vec{r}$, което определя посоката на $\vec{dB}$ за всеки елемент $\vec{dl}$, ще бъде насочено перпендикулярно на равнината на чертежа (при избраната посока на тока – от нас към чертежа). Тъй като посоката на всички вектори $\vec{dB}$ е една и съща, такава ще бъде и посоката на $\vec{B}$ в **т. А**, а големината на индукцията B ще определим като сумираме всички индукции $\boldsymbol{dB}$ за всички елементи $\boldsymbol{dl}$ от проводника, тъй като векторите $\overrightarrow{dB}$ са еднопосочни, т.е.:

$$(4)\quad B=\int_L dB=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2}=\frac{\mu_0\mu}{4\pi}I\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\alpha}{r^2}dl\,.$$



фиг. 2

По-лесно ще пресметнем интеграла (4) ако сменим променливата $\boldsymbol{l}$ с ъгъла α, тъй като когато $\boldsymbol{l}\to-\infty$ $\alpha\to\mathbf{0}$, а когато $\boldsymbol{l}\to+\infty$ $\alpha\to\pi$. Трябва обаче да изразим и величините $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{dl}$ чрез $\boldsymbol{a}$, α и $\boldsymbol{d\alpha}$ (фиг. 2):

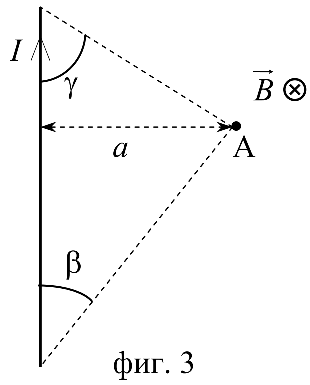
$$(5)\quad \begin{aligned} &r=\frac{a}{\sin\alpha}\\ &\left.\begin{aligned} &dx=dl\sin\alpha\\ &dx\approx r\,\mathrm{tg}d\alpha\approx rd\alpha \end{aligned}\right\}\Rightarrow dl=\frac{r}{\sin\alpha}d\alpha=\frac{a}{\sin^2\alpha}d\alpha \end{aligned}.$$

Като заместим $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{dl}$ от (5) в (4) получаваме:

$$B=\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I}{a}\int_0^{\pi}\sin\alpha d\alpha=-\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I}{a}\cos\alpha\Big|_0^{\pi}=-\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I}{a}\left(\cos\pi-\cos 0\right).$$

$$(6)\quad B=\frac{\mu_0\mu}{2\pi}\frac{I}{a}.$$

Виждаме, че магнитната индукция на безкраен праволинеен проводник с ток в дадена точка зависи само от големината на тока, който тече по проводника и разстоянието от точката до проводника (6).



фиг. 3

От (6) можем лесно да получим и мерната единица за интензитет на магнитно поле – [A/m] – като използваме връзката между $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{H}$ – $\boldsymbol{B}=\mu_0\mu\boldsymbol{H}$ за среда, която не е феромагнитна (1 въпрос):

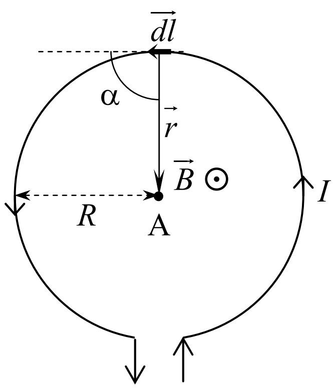
$$H=\frac{B}{\mu_0\mu}=\frac{I}{2\pi a}\ \text{[A/m]}.$$

Ако проводникът не е с безкрайна дължина (фиг. 3), можем да направим същите разсъждения, а промяната ще бъде само в границите на интегрирането – ъгълът α се изменя от β до $\pi\!-\!\gamma$ вместо от $\mathbf{0}$ до π. Така, за големината на магнитната индукция на проводник с дължина $\boldsymbol{l}$ в **т. А**, получаваме:

$$B=\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I}{a}\int_{\beta}^{\pi-\gamma}\sin\alpha d\alpha=-\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I}{a}\cos\alpha\Big|_{\beta}^{\pi-\gamma}=-\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I}{a}\left(\cos\left(\pi-\gamma\right)-\cos\beta\right)=-\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I}{a}\left(-\cos\gamma-\cos\beta\right).$$

$$(7)\quad B=\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I}{a}\left(\cos\gamma+\cos\beta\right).$$

От фиг. 3 се вижда, че ъглите β и γ, които сключват направленията от **т. А** към краищата на проводника със самия проводник, зависят от дължината $\boldsymbol{l}$ на проводника. Ако проводникът е безкраен, ъглите β и γ клонят към $\mathbf{0}$ и (7) придобива вида (6).



фиг. 4

Ще определим и магнитната индукция, която създава кръгов ток в центъра на кръга в равнината на проводника (фиг. 4). Посоката на магнитната индукция $\overrightarrow{dB}$ в **т. А** за всеки елемент $\overrightarrow{dl}$ от проводника също е перпендикулярна на чертежа, тъй като векторите $\overrightarrow{dl}$ и $\vec{r}$ лежат в равнината на чертежа, (за дадената посока на тока $\overrightarrow{dB}$ е насочен към нас) и следователно посоката на $\vec{B}$ също ще бъде такава, а големината $\boldsymbol{B}$ ще получим като сумираме всички индукции $\boldsymbol{dB}$ за всички елементи $\boldsymbol{dl}$, тъй като и в този случай векторите $\overrightarrow{dB}$ са еднопосочни. Тъй като проводникът не е безкраен, можем да използваме (2) без да сменяме променливата на интегриране. От друга страна, всеки елемент $\overrightarrow{dl}$ е насочен по допирателната към окръжността, т.е. той е перпеникулярен на радиуса на окръжността, а следователно и на $\vec{r}$ – $\mathbf{sin}\boldsymbol{\alpha}$ за всички елементи $\boldsymbol{dl}$ ще бъде $\mathbf{1}$. Разстоянието $\boldsymbol{r}$ от всеки елемент $\boldsymbol{dl}$ до **т. А** също е еднакво и е равно на радиуса на окръжността $\boldsymbol{R}$. Така за големината на индукцията $\boldsymbol{B}$ в центъра на кръга получаваме:

$$B = \int_L dB = \int_L \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Idl \sin\alpha}{r^2} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{R^2} \int_L dl = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{R^2} 2\pi R$$

$$(8) \quad B = \mu_0 \mu \frac{I}{2R}.$$

Подчертаваме, че (8) е големината на магнитната индукция в центъра на кръга в равнината на проводника. Магнитната индукция в точка, която се намира на перпендикуляра към чертежа по оста на токовия контур извън равнината на чертежа, ще бъде по-малка от (8), защото ще се увеличи разстоянието от точката до всеки елемент ***dl*** от проводника.