

Работа при движение на проводник с ток в магнитно поле. Магнитен поток. Закон на Гаус. Циркулация на вектора на магнитната индукция. Магнитно поле на соленоид и тороид

Работа при движение на проводник с ток в магнитно поле. Магнитен поток

Както казахме (4 въпрос), ако проводникът с ток, поставен във външно магнитно поле не е закрепен неподвижно, той ще започне да се премества. Следователно над проводника се извършва работа (действа сила и имаме преместване). Ще пресметнем тази работа в най-простия случай – когато праволинеен проводник, по който тече постоянен ток I , а едната ѝ страна, с дължина l , е подвижно свързана към другите и може свободно (без триене) да се хлъзга по тях (фиг. 1). Ако поставим рамката в магнитно поле с индукция \vec{B} , на всяка страна от нея ще действа сила на Ампер и страната, която не е закрепена, ще започне да се движи под действие на тази сила. За малък интервал от време dt тя ще се придвижи на разстояние dx . В показания случай на фиг. 1 посоката на силата на Ампер, която действа на подвижната страна на рамката, е надясно, а големината ѝ е (4 въпрос):

$$F = IBl \sin \alpha,$$

където α е ъгълът, който сключва посоката на тока, който тече по страната l , с посоката на магнитната индукция на външното поле \vec{B} . Ако $\alpha \neq \pi/2$, на подвижната страна ще действа компонента на силата, която ще се опитва да я завърти и тя няма да може да се хлъзга без триене по другите две страни. Затова ние ще разгледаме по-простия случай, когато подвижната страна е перпендикулярна на посоката на полето ($\alpha = \pi/2$ и $\sin \alpha = 1$) и под действие на силата на Ампер ще извършва само постъпателно движение. Тогава действащата сила ще бъде $F = IBl$ и извършената елементарна работа dA за преместването на проводника на разстояние dx ще бъде (7 въпрос, Физика 1):

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{x} = F dx \cos \beta = IBl dx \cos \beta,$$

където β е ъгълът между посоките на векторите \vec{F} и $d\vec{x}$ (ако равнината на рамката е перпендикулярна на посоката на полето, $\beta = 0$, и $\cos \beta = 1$). Произведението $l dx$ е големината на площта dS (защрихованата площ на фиг. 1), която описва подвижната страна при движението си. Така, за работата dA , получаваме:

$$(1) \quad dA = I B dS \cos \beta.$$

Както се вижда от фиг. 1, ъгълът между нормалата \vec{n} към площта dS (посоката на вектора $d\vec{S}$) и магнитната индукция \vec{B} също е β ($\vec{F} \perp \vec{B}$, $d\vec{x} \perp \vec{n}$). Така произведението $B dS \cos \beta$ прилича на една величина, която въведохме за електростатичното поле (поток на вектора на интензитета $d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS \cos \beta$, 23 въпрос, Физика 1) и аналогично дефинира потокът $d\Phi_B$ на вектора на магнитната индукция през площта dS , като скаларното произведение на векторите \vec{B} и $d\vec{S} = \vec{n} dS$:

$$(2) \quad d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B dS \cos \beta.$$

Ако искаме да пресметнем потока на магнитната индукция Φ_B през произволна площ S , трябва да интегрираме (2) по цялата площ:

$$\Phi_B = \int_S d\Phi_B = \int_S B \cos \beta dS.$$

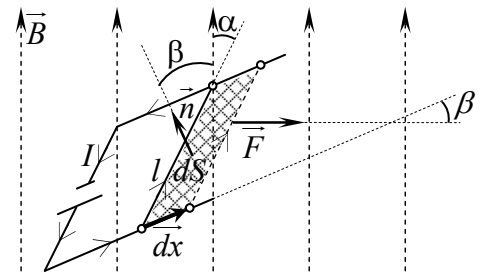
От определението се вижда, че мерната единица за магнитен поток (поток на вектора на магнитната индукция) е $[T \cdot m^2]$ и се нарича вебер [Wb] на името на немския физик В. Вебер. Магнитният поток Φ_B (аналогично на Φ_E за електростатичното поле) е пропорционален на броя на магнитните силови линии, които пресичат перпендикулярно дадената площ S (с противоположни знаци за влизащите и излизащите линии).

Като имаме предвид (2), (1) може да се запише във вида:

$$(3) \quad dA = I d\Phi_B,$$

където $d\Phi_B$ е магнитният поток през площта dS , която описва проводникът при своето движение.

Формула (3) е валидна за произволен ток (не само за постоянен) и за произволно магнитно поле. Пълната работа A за преместване на проводник, по който тече ток I , на крайно разстояние между положения 1 и 2 в магнитно поле с индукция \vec{B} ще бъде:



фиг. 1

$$(4) \quad A = \int_1^2 dA = \int_1^2 Id\Phi_B = \int_S IB \cos \beta dS,$$

където S е площта, която описва проводникът при своето движение.

Ако токът, който тече по проводника, е постоянен и равнината на контура е перпендикулярна на полето, (4) се опростява значително и можем да запишем:

$$A = I \int_S B dS,$$

а ако и полето е хомогенно ($\vec{B} = \text{const}$) изразът (4) придобива вида:

$$A = IB \int_S dS = IBS.$$

Закон на Гаус. Циркулация на вектора на магнитната индукция

Когато говорихме за поток на интензитета на електростатичното поле, ние формулирахме закона на Гаус за потока на интензитета Φ_E през произволна затворена повърхност и видяхме, че този поток е пропорционален на големината на заряда, заграден от тази повърхност (23 въпрос, Физика 1). Тук също можем да запишем подобен закон. Казахме, че магнитният поток Φ_B е пропорционален на броя на магнитните силови линии (взети със съответния знак), които пресичат дадената площ. Нека да пресметнем магнитния поток през някаква затворена повърхност, напр. сфера, разположена около праволинеен проводник с ток (фиг. 2). Знаем, че магнитните силови линии са затворени криви, те нямат начало и край. Следователно, ако една силова линия пресича повърхността, напр. влиза в нея, тя не може да завърши някъде вътре в обема, който се загражда от тази повърхност т.е. трябва и да излезе от повърхността. Тъй като силовите линии, които влизат през повърхността и тези, които излизат, трябва да се отчитат с противоположни знаци, сумата от всички линии, които пресичат повърхността е нула. Следователно магнитният поток през тази повърхност също ще е нула. Това е същността на закона на Гаус за магнитния поток (който може и да се докаже математически) – магнитният поток през произволна затворена повърхност е равен на нула:

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Ако направим сравнение със закона на Гаус за потока на интензитета на електростатичното поле (23 въпрос, Физика 1), ще видим, че законът на Гаус за магнитния поток изразява точно факта, че не съществуват магнитни заряди. Ако такива съществуваха, магнитният поток през затворена повърхност щеше да е пропорционален на големината им.

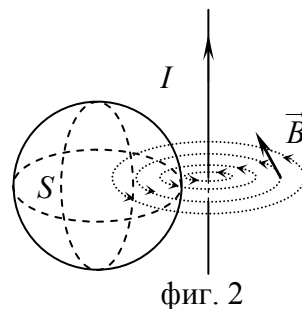
Ще въведем още една величина за магнитното поле по аналогия със съответната величина за електростатично поле – циркулацията C на вектора на магнитната индукция по затворен контур. Това е интегралът по затворения контур L на вектора на магнитната индукция \vec{B} :

$$C = \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}.$$

Ние използвахме закона на Гаус в електростатиката за по-лесно пресмятане на интензитета на електростатичното поле. Тук не можем да използваме закона на Гаус за магнитния поток за пресмятане на магнитната индукция. Можем обаче да използваме т.нар. теорема на Ампер за циркулацията на вектора на магнитната индукция – циркулацията C на вектора на магнитната индукция \vec{B} по произволен затворен контур L е равна на сумата от токовете, пресичащи площта S , заградена от контура, умножена с магнитната константа μ_0 (ако средата не е вакуум трябва да умножим с $\mu_0\mu$):

$$(5) \quad C = \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i.$$

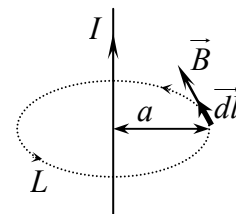
Токовете I_i се вземат със знак "+" когато пресичат площта S по посока на нормалата \vec{n} , която сме избрали за положителна и със знак "-" – ако са в обратна посока. Обикновено положителната нормала се избира в така, че погледнато от върха на вектора \vec{n} посоката на обикаляне на контура да е в посока обратна на часовниковата стрелка.



Когато говорихме за електростатичното поле казахме, че циркуляцията на вектора на интензитета по затворен контур винаги е равна на нула ($\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$), което беше условието за консервативност (потенциалност) на полето, тъй като ни дава възможност да въведем еднозначно величината потенциал. Казахме също, че ако циркуляцията на вектора не е нула, не можем да въведем еднозначно потенциал за това векторно поле т.е. от теоремата на Ампер следва, че магнитното поле не е потенциално (консервативно) както електростатичното, а е вихрово.

Теоремата на Ампер (5) също може да се докаже математически. Ние ще покажем валидността ѝ за случая на безкраен праволинеен проводник с ток, тъй като за такъв проводник сме пресмятали магнитната индукция на полето (3 въпрос).

Нека пресметнем циркуляцията на магнитната индукция (вектора на магнитната индукция \vec{B}) на полето, създадено от безкраен праволинеен проводник, по който тече ток I (фиг. 3). Тъй като теоремата на Ампер е валидна за произволен контур, можем да си изберем такъв, че да си улесним максимално пресмятането. Затова избираме окръжност в равнина перпендикулярна на проводника, с център върху проводника и радиус равен на разстоянието a , на което искаме да пресметнем магнитната индукция B (този контур в случая е силовата линия на магнитното поле, която минава през точката, в която ще определяме индукцията). Посоката на обикаляне на контура (т.е. посоката на елемента $d\vec{l}$ от контура) ще изберем по посока на силовата линия – така векторите \vec{B} и $d\vec{l}$ ще са еднопосочни във всяка точка от контура L . Големината B на магнитната индукция ще бъде една и съща за всички точки от избраната окръжност (от закона на Био – Савар – Лаплас, 3 въпрос, I , r , и α са едни и същи). Тогава циркуляцията на \vec{B} по избраният контур (5) ще бъде:



фиг. 3

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L B \cos \beta dl = B \oint_L dl = BL = B \cdot 2\pi a = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

Тъй като \vec{B} и $d\vec{l}$ са еднопосочни, $\cos \beta = 1$, а дължината на окръжността $L = 2\pi a$. Стигнахме до същата формула, която получихме и от закона на Био – Савар – Лаплас (3 въпрос).

Магнитно поле на соленоид и тороид

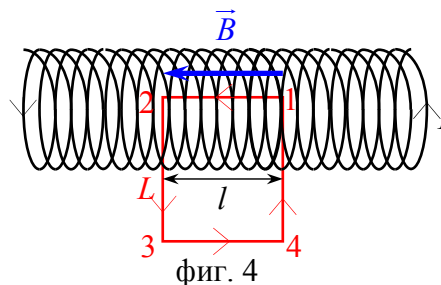
Ще използваме теоремата за циркуляцията за да пресметнем магнитната индукция в два много важни в практическо отношение случая – магнитното поле на соленоид и тороид.

Соленоидът представлява намотка, по която тече ток. Ако дължината на соленоида е много по голяма от напречното му сечение, можем да го считаме за безкраен. Това доста опростява пресмятанята, затова ще изведем формулата за магнитната индукция на безкраен соленоид. Може да се покаже, че в този случай магнитното поле е съсредоточено във вътрешността на соленоида и е хомогенно, а извън него магнитната индукция е равна на нула (сравнение с две безкрайни заредени равнини, безкраен плосък кондензатор, 24 въпрос, Физика 1). Нека да пресметнем големината на магнитната индукция B на безкраен соленоид, по който тече ток I (фиг. 4), като използваме теоремата на Ампер (5). В случая е удобно да си изберем контура L във форма на правоъгълник, две от страните на който се перпендикулярни на соленоида, а другите две са по дължината му, като едната е вътре в него. Циркуляцията на вектора на магнитната индукция по този контур ще бъде:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_2^3 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_3^4 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_4^1 \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \int_1^2 dl + 0 + 0 + 0 = Bl = \mu_0 \sum_{i=1}^N I_i = \mu_0 NI$$

$$(6) B = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 n I$$

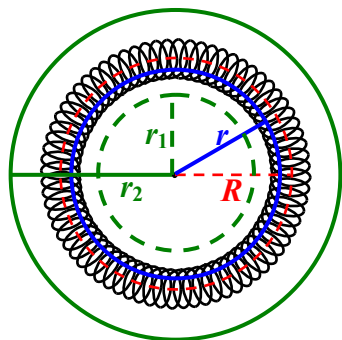
Вторият и четвъртият интеграл са равни на нула, защото по тези страни векторите \vec{B} и $d\vec{l}$ са перпендикулярни (скаларното произведение е нула), а третият е нула, защото извън соленоида магнитната индукция $B=0$. Токовете, които преминават през площта на контура са еднопосочни и еднакви по големина ($I_i=I$), а броят им е равен на броя навивки N , които се обхващат от контура.



фиг. 4

С n сме означили броя навивки на единица дължина $n=N/l$. Така, от формула (6) следва, че магнитната индукция на полето в безкраен соленоид е пропорционална на тока, който тече в намотката и на броя

навивки на единица дължина. Ако в соленоида поставим някакво вещество, коефициентът на пропорционалност в (6) ще стане $\mu_0\mu$ и ако веществото е феромагнетик с голямо μ , ще получим силен електромагнит.



фиг. 5

Тороидът представлява затворен соленоид (фиг. 5). Нека по навивките на тороида с радиус R протича постоянен ток с големина I и броят на навивките на единица дължина е n . Ще приложим отново теоремата на Ампер (5) за да пресметнем магнитната индукция в тороида и извън него. За тази цел ще изберем кръгови контури, с центрове в центъра на тороида, които минават през вътрешността на тороида (с радиус r) и извън него (с радиуси r_1 и r_2). За контура, който минава вътре в тороида ще получим:

$$C = \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint_L dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 \sum_{i=1}^N I_i = \mu_0 \cdot 2\pi R n I ,$$

$$(7) \quad B = \mu_0 n I \frac{R}{r} .$$

На разстояние r от центъра на тороида, големината на магнитната индукция се дава от (7), а посоката ѝ е по допирателната към окръжността с радиус r и зависи от посоката на тока. Ако радиусът на навивките е много по-малък от радиуса R на тороида, отношението R/r е много близко до единица и (7) придобива вида (6).

Като приложим теоремата на Ампер (5) за контурите с радиуси r_1 и r_2 ще получим, че магнитната индукция извън тороида е нула, защото първият контур не обхваща токове, а вторият обхваща равен брой токове, пробждащи контура, в двете посоки.