

**Решени изпитни теми по Висша Математика III
за Технически Университет — София**

Николай Икономов

3 януари 2011 г.

Съдържание

Указател	3
1 Първа тема	4
2 Втора тема	14
Литература	22

Темите са взети от форума на ТУ–София (линк) и от студенти. Научните степени на преподавателите са взети от сайта на ФПМИ (линк). За контакти: nike32@abv.bg

- Първа, втора тема (доц. д-р В. Касчиева, 2009)

Означения: тангенс $\tan(x)$, котангенс $\cot(x)$, аркус тангенс $\arctan(x)$.

Указател

Задачите по категории. Задачите са решени в реда в който са категориите.

- Теория на вероятностите
 - Условна вероятност — 1-4+теория, 2-2
 - Дискретна случайна величина — 1-6+теория
 - Непрекъснатата случайна величина — 2-5+теория
- Комплексен анализ
 - Уравнения на Коши-Риман — 1-1+теория, 2-3
 - Резидууми (Residues) — 1-2+теория, 2-4
- Интегрални уравнения — 1-3*, 2-1*

Задачите по теми. Задачите в скоби не са решени.

- Първа тема — 1, 2, 3*, 4, {5}, 6
- Втора тема — 1*, 2, 3, 4, 5, {6}

1 Първа тема

Задача 1. С помощта на условията на Коши-Риман, да се намери аналитична функция, за която $u(x, y) = 2xy + e^x \sin(y)$, $f(0) = 0$.

Задача 2. Да се пресметне интегралът

$$\int_{|z-2|=4} \frac{e^{2z}}{z^2(z-2)} dz.$$

Задача 3. Чрез трансформацията на Лаплас, решете задачата на Коши

$$y'' + 9y = 6 \sin(2x), \quad y(0) = y'(0) = -3.$$

Задача 4. От урна с 4 бели и 3 черни топки е изгубена една случайна топка. След това от урната се вади една топка.

- а) Намерете вероятността извадената топка да е бяла.
- б) Ако извадената е бяла, намерете вероятността изгубената топка да е била бяла.

Задача 5. Теорема и неравенство на Чебишев.

Задача 6. Случайната величина X има разпределение:

X	-1	0	1	2	3
P	c	$2c$	$2c$	c	c

Намерете: c , EX , DX , $P(0 < X < 2)$, $F(x)$ и начертайте графиката на $F(x)$.

Всяка задача е по 10 точки.

Задача 4. От урна с 4 бели и 3 черни топци е изгубена една случайна топка. След това от урната се вади една топка.

- а) Намерете вероятността извадената топка да е бяла.
- б) Ако извадената е бяла, намерете вероятността изгубената топка да е била бяла.

Решение. Условна вероятност. Вероятността за случване на събитието A при условие събитието B вече да се е случило:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

Свойства:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B), \quad A \cap B = \emptyset \text{ (несъвместими)} \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B), \quad A \cap B \neq \emptyset \text{ (съвместими)} \\ P(A \cap B) &= P(A)P(B), \quad A, B \text{ — независими} \iff P(A/B) = P(A) \\ P(A \cap B) &= P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B), \quad A, B \text{ — зависими} \end{aligned}$$

Сумата от вероятностите на случайните събития H_i е единица:

$$\sum_{i=1}^n P(H_i) = 1$$

Вероятностите $P(H_i)$ се наричат априорни (преди опита) вероятности. (Още се наричат хипотези.)

Формула за пълната вероятност. Ако H_1, H_2, \dots, H_n е пълна група от две по две несъвместими събития и случайното събитие A се сбъдва само заедно с някое от тях, то:

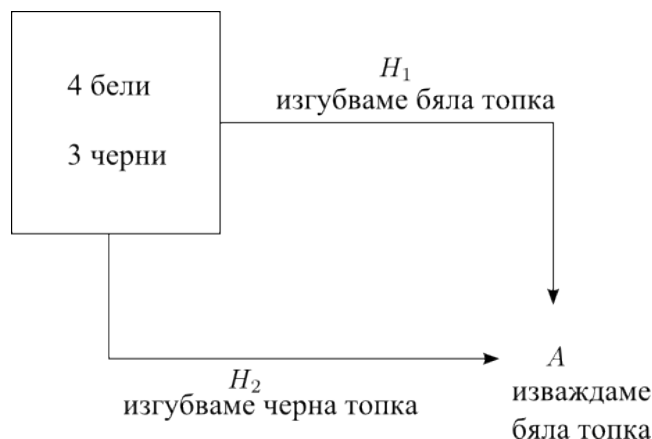
$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)$$

Това е основната формула за намиране на вероятността събитието A да се случи. Тази формула е по-кратък запис на първото свойство — обединение на две несъвместими събития.

Формула на Бейс. Ако $P(A)$ е както в предишната формула, то:

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)}$$

Тази формула се използва за преоценяване на вероятностите, което е възможно само ако събитието A вече се е случило. Вероятностите $P(H_k/A)$ се наричат апостериорни (след опита) вероятности.



Да се върнем към задачата. Нека H_1 е събитието изгубената топка да е бяла, а H_2 — изгубената топка да е черна. Белите топки са 4, всички топки са 7, вероятността да изгубим бяла топка е $4/7$:

$$P(H_1) = \frac{4}{7}, \quad P(H_2) = \frac{3}{7}, \quad \sum_{i=1}^2 P(H_i) = 1$$

Вероятността да изгубим черна топка е $3/7$, тъй като черните топки са 3. Сумата на двете вероятности е единица (имаме само две събития).

Сега искаме да извадим бяла топка. Нека да отбелжим събитието “изваждане на бяла топка” с A . Но това събитие се случва само ако H_1 или H_2 вече са се случили. Тоест това е условна вероятност. Вероятността да извадим бяла топка след като сме изгубили бяла се бележи с $P(A/H_1)$ — извадили сме бяла само след като събитието “изгубване на бяла топка” се е случило.

Но ние вече сме изгубили бяла топка, тоест топките в кутията са 3 бели и 3 черни. Тогава вероятността да извадим бяла топка е:

$$P(A/H_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Нека сега да сме изгубили черна топка. Тогава в кутията имаме 4 бели и 2 черни. Вероятността да извадим бяла топка е:

$$P(A/H_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Събитията са несъвместими, единия път изгубваме бяла, другия път изгубваме черна като започваме отначало — всички топки са налични. Тоест можем да приложим формулата за условна вероятност:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$$

Вероятността да извадим бяла топка е $4/7$:

$$P(A) = \frac{4}{7}$$

Сега втора подточка. Тук се използва формулата на Бейс — тя преоценява вероятностите. Събитието A вече се е случило — извадили сме бяла топка, искаме след опита да изчислим вероятността изгубената топка да е била бяла — това е събитието H_1 . Тогава:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{4/7 \cdot 1/2}{4/7} = \frac{1}{2}$$

Нека да изчислим вероятността изгубената топка да е била черна:

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{3/7 \cdot 2/3}{4/7} = \frac{1}{2}$$

Сумата от двете събития трябва да е единица, което е така.

Отговор: $P(A) = 4/7$, $P(H_1/A) = 1/2$. □

Задача 6. Случайната величина X има разпределение:

X	-1	0	1	2	3
P	c	$2c$	$2c$	c	c

Намерете: c , EX , DX , $P(0 < X < 2)$, $F(x)$ и начертайте графиката на $F(x)$.

Решение. Дискретна случайна величина.

X	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_n
$P(x_i)$	p_1	p_2	p_3	p_4	...	p_n

Случайната величина X се нарича дискретна, ако приема краен брой стойности. Зависимостта между стойностите на случайната величина x_i и вероятностите p_i се нарича закон за разпределение:

$$P(X = x_i) = p_i$$

Сумата от всички вероятности е единица:

$$\sum_{i=1}^n P(x_i) = \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Математическото очакване (средна стойност) е сумата от произведението на случайната величина с нейната вероятност:

$$EX = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Дисперсията е мярка за отклонение на математическото очакване. Изразява се със следната формула:

$$DX = E(X - EX)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - EX)^2 p_i$$

$$\begin{aligned} DX &= E(X - EX)^2 = E(X^2 - 2XEX + (EX)^2) = \\ &= EX^2 - 2EXEX + (EX)^2 = EX^2 - (EX)^2 \end{aligned}$$

Записано най-кратко:

$$DX = EX^2 - (EX)^2, \quad EX^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i$$

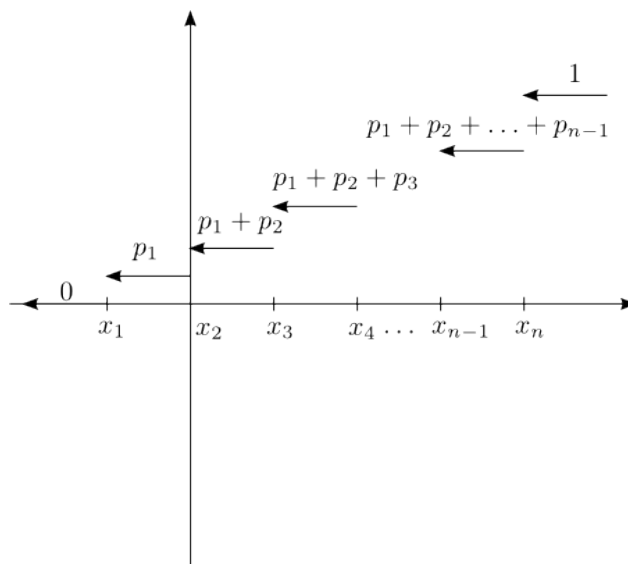
Функция на разпределение $F(X)$ се изчислява по следната формула:

$$F(X) = \sum_{i, x_i < X} p_i$$

Това означава, че всички стойности се събират, започвайки отляво. Ето така:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < x_1, \\ p_1 & x_1 \leq X \leq x_2, \\ p_1 + p_2 & x_2 \leq X \leq x_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 & x_3 \leq X \leq x_4 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 & x_4 \leq X \leq x_5 \\ \dots & \dots \\ p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 & x_n \leq X \end{cases}$$

Големият X показва нашата позиция в момента. Тоест, когато сме отляво на най-ниската стойност в нашата таблица x_1 , разпредението $F(X)$ е нула, когато сме отдясно на най-високата стойност x_n , разпредението $F(X)$ е единица.



Едно от свойствата на функцията на разпределение $F(X)$ е:

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Ще го използваме за да решим докрай задачата.

Нека да се върнем към задачата.

$$\frac{X}{P} \begin{array}{c|c|c|c|c} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline c & 2c & 2c & c & c \end{array}$$

Първо трябва да намерим c . Сумата от всички вероятности е единица:

$$c + 2c + 2c + c + c = 1 \implies 7c = 1 \implies c = \frac{1}{7}$$

Тогава таблицата става:

$$\frac{X}{P} \begin{array}{c|c|c|c|c} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1/7 & 2/7 & 2/7 & 1/7 & 1/7 \end{array}$$

Намираме математическото очакване:

$$EX = \sum_{i=1}^5 x_i p_i = -1 \cdot \frac{1}{7} + 0 \cdot \frac{2}{7} + 1 \cdot \frac{2}{7} + 2 \cdot \frac{1}{7} + 3 \cdot \frac{1}{7} = -\frac{1}{7} + \frac{4}{7} + \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$$

Сега математическото очакване за X^2 :

$$EX^2 = \sum_{i=1}^5 x_i^2 p_i = 1 \cdot \frac{1}{7} + 0 \cdot \frac{2}{7} + 1 \cdot \frac{2}{7} + 4 \cdot \frac{1}{7} + 9 \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{7} + \frac{9}{7} = \frac{16}{7}$$

Дисперсията:

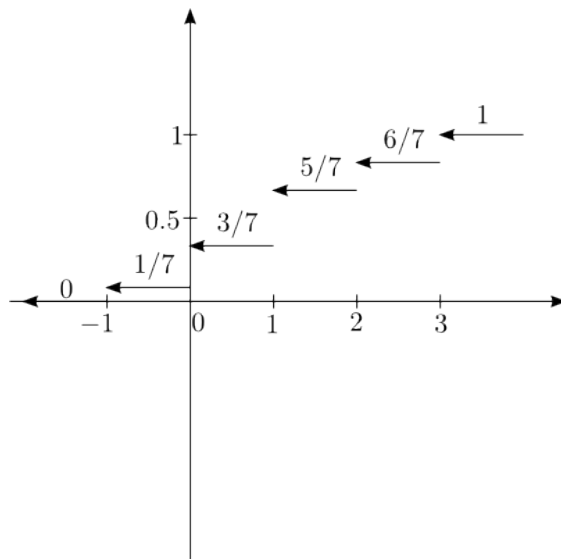
$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{16}{7} - \left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{7 \cdot 16}{49} - \frac{36}{49} = \frac{76}{49}$$

Таблицата отново:

$$\frac{X}{P} \begin{array}{c|c|c|c|c} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1/7 & 2/7 & 2/7 & 1/7 & 1/7 \end{array}$$

Функцията на разпределение $F(X)$:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < -1, \\ 1/7 & -1 \leq X \leq 0, \\ 1/7 + 2/7 = 3/7 & 0 \leq X \leq 1 \\ 1/7 + 2/7 + 2/7 = 5/7 & 1 \leq X \leq 2 \\ 1/7 + 2/7 + 2/7 + 1/7 = 6/7 & 2 \leq X \leq 3 \\ 1/7 + 2/7 + 2/7 + 1/7 + 1/7 = 1 & 3 \leq X \end{cases}$$



Сега се търси вероятността X да е между нула и две.

$$P(0 < X < 2) = F(2) - F(0)$$

Имаме знак по-малко, не по-малко или равно. Тоест сме отляво на двойката, което е $5/7$, и отдясно на нулата, което е $3/7$.

$$P(0 < X < 2) = F(2) - F(0) = \frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2}{7}$$

Отговор: $c = 1/7$, $EX = 6/7$, $DX = 76/49$, $P(0 < X < 2) = 2/7$. \square

Задача 1. С помощта на условията на Коши-Риман, да се намери аналитична функция, за която $u(x, y) = 2xy + e^x \sin(y)$, $f(0) = 0$.

Решение. Нека да имаме комплексно число $z = x + iy$, комплексна аналитична функция $f(z)$, реални функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$. Тогава комплексната функция $f(z)$ е равна на:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

За нея важат уравнения на Коши-Риман:

$$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}$$

Като имаме дадена едната реална функция, чрез първите ѝ частни производни можем да намерим другата реална функция.

Нека да видим как точно. Имаме дадена функцията $u(x, y)$:

$$u(x, y) = 2xy + e^x \sin(y)$$

Диференцираме функцията $u(x, y)$ по x :

$$u'_x = 2y + e^x \sin(y) \implies v'_y = 2y + e^x \sin(y)$$

Производните са равни са заради уравненията на Коши-Риман. Сега интегрираме функцията $v(x, y)$ по y :

$$v(x, y) = \int [2y + e^x \sin(y)] dy = y^2 - e^x \cos(y) \quad (1)$$

Сега диференцираме функцията $u(x, y)$ по y :

$$u'_y = 2x + e^x \cos(y) \implies v'_x = -[2x + e^x \cos(y)]$$

Интегрираме функцията $v(x, y)$ по x :

$$v(x, y) = - \int [2x + e^x \cos(y)] dx = -[x^2 + e^x \cos(y)] = -x^2 - e^x \cos(y) \quad (2)$$

Както се вижда имаме два резултата (1) и (2) за $v(x, y)$, за отговора: от повтарящите се функции се преписва само едната (не се събират), останалото се преписва:

$$v(x, y) = y^2 - x^2 - e^x \cos(y) + C$$

Добавя се и константа. Тогава функцията $f(z)$ е:

$$f(z) = 2xy + e^x \sin(y) + i(y^2 - x^2 - e^x \cos(y) + C)$$

Трябва да намерим константата. Затова е условието $f(0) = 0$. Намираме стойността на функцията при $z = 0$, тоест $x = 0$ и $y = 0$:

$$f(0) = 0 + e^0 \cdot 0 + i(0 - 0 - e^0 \cdot 1 + C) = i(-1 + C) = Ci - i$$

Сега приравняваме на нула:

$$Ci - i = 0 \implies Ci = i \implies C = 1$$

Функцията $f(z)$:

$$f(z) = 2xy + e^x \sin(y) + i(y^2 - x^2 - e^x \cos(y) + 1)$$

Отговор: $v(x, y) = y^2 - x^2 - e^x \cos(y) + 1$. □

Задача 2. Да се пресметне интегралът

$$\int_{|z-2|=4} \frac{e^{2z}}{z^2(z-2)} dz.$$

Решение. Нулирането на знаменателя в определена точка се нарича полюс от кратност m (степената на полюса). Изчисляването на стойността на интеграла в полюс се нарича резидуум.

Формулата за резидуум от m кратен полюс е:

$$\operatorname{Res} z_0 = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^m f(z)]^{(m-1)}$$

Това е граница от $m - 1$ производна на $(z - z_0)f(z)$.

Формулата за еднократен полюс е:

$$\operatorname{Res} z_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$$

Стойността на интеграла е сбора от резидуумите:

$$I = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{Res} z_i$$

Нека да се върнем към задачата. Дадената функция

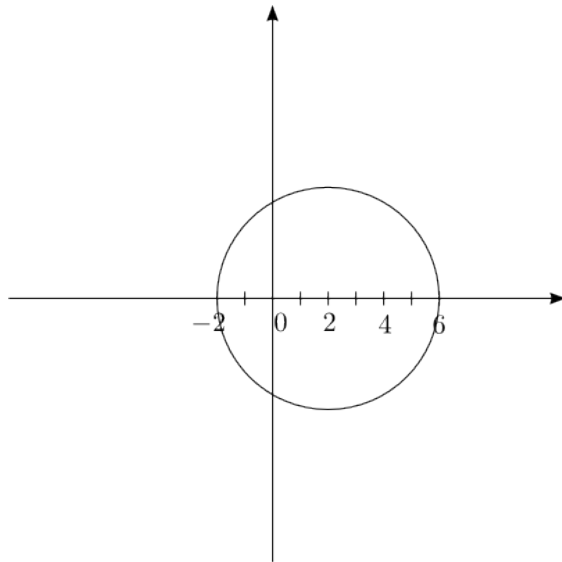
$$\frac{e^{2z}}{z^2(z-2)}$$

има двукратен полюс в $z = 0$ и еднократен полюс в $z = 2$. Тогава стойността на интеграла е:

$$I = 2\pi i(\operatorname{Res} 0 + \operatorname{Res} 2)$$

Условието е:

$$\int_{|z-2|=4} \frac{e^{2z}}{z^2(z-2)} dz$$



Интегрираме върху окръжност с център 2 и радиус 4. И двата полюса са вътре в окръжността. Нека да изчислим еднократния полюс в $z = 2$:

$$\operatorname{Res} 2 = \lim_{z \rightarrow 2} (z - 2) \frac{e^{2z}}{z^2(z-2)} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{e^{2z}}{z^2} = \frac{e^4}{4}$$

Сега двукратния полюс в $z = 0$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res} 0 &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \left[(z-0)^2 \frac{e^{2z}}{z^2(z-2)} \right]^{(2-1)} = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 0} \left[z^2 \frac{e^{2z}}{z^2(z-2)} \right]^{(1)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{e^{2z}}{z-2} \right]' = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2e^{2z}(z-2) - e^{2z} \cdot 1}{(z-2)^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{2z}(2z-4-1)}{(z-2)^2} = \frac{-5}{4}\end{aligned}$$

Тогава стойността на интеграла е:

$$I = 2\pi i \left[\frac{e^4}{4} - \frac{5}{4} \right] = \frac{\pi i}{2} (e^4 - 5)$$

Отговор: $(e^4 - 5)\pi i/2$.

□

2 Втора тема

Задача 1. С методите на операционното смятане решете интегралното уравнение

$$x(t) = t + 2 \int_0^t \cos(t - \tau)x(\tau)d\tau.$$

Задача 2. Имаме 2 еднакви на външен вид кутии. В първата има 4 бели и 6 черни топки, във втората — 7 бели и 5 черни топки.

- а) Каква е вероятността да извадим бяла топка от произволна кутия?
- б) Извадена е бяла топка от случайно избрана кутия. Каква е вероятността взетата бяла топка да е от втората кутия?

Задача 3. Намерете аналитичната функция

$$\omega = f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

ако $v(x, y) = 3xy + e^x \cos(y)$ (хармонична функция), а $f(0) = i$.

Задача 4. Решете интеграла

$$\oint_{|z-i|=1,5} \frac{z+1}{z(z^2+1)^2} dz.$$

Задача 5. Дадена е случайната величина X с плътност на разпределение

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-ax}, & x \geq 0, a > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Намерете параметъра a и математическото очакване EX .

Задача 6. Доказателство на основната теорема на Коши и на теоремата на Коши за многосвързана област.

Всяка задача е по 10 точки.

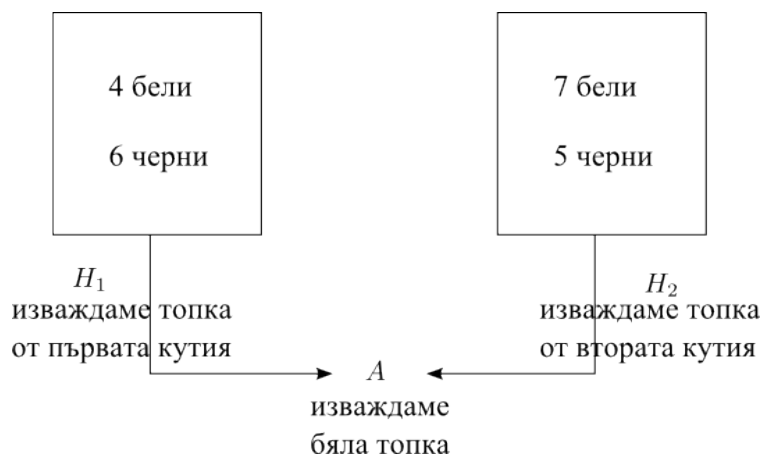
Задача 2. Имаме 2 еднакви на външен вид кутии. В първата има 4 бели и 6 черни топки, във втората — 7 бели и 5 черни топки.

а) Каква е вероятността да извадим бяла топка от произволна кутия?

б) Извадена е бяла топка от случайно избрана кутия. Каква е вероятността взетата бяла топка да е от втората кутия?

Решение. Нека да отбележим изваждането на бяла топка от първата кутия с H_1 , а от втората кутия с H_2 . Имаме две събития, всяко с вероятност да се случи $1/2$, сборът им е единица:

$$P(H_1) = \frac{1}{2}, P(H_2) = \frac{1}{2}, \sum_{i=1}^2 P(H_i) = 1$$



Нека да отбележим събитието “изваждане на бяла топка” с A . Събитието се случва само ако H_1 или H_2 вече са се случили. Изваждаме топка от първата кутия, белите топки са 4, всички топки са 10:

$$P(A/H_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Сега изваждаме топка от втората кутия, белите топки са 7, всички топки са 12:

$$P(A/H_2) = \frac{7}{12}$$

Двете събития са несъвместими — можем да извадим топка или от първата кутия или от втората кутия. Следователно можем да приложим формулата за пълната вероятност:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{12} = \\ &= \frac{1}{5} + \frac{7}{24} = \frac{24}{120} + \frac{35}{120} = \frac{59}{120} \end{aligned}$$

Сега втора подточка. Прилагаме формулата на Бейс за да изчислим вероятността да сме извадили бялата топка от втората кутия:

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{1/2 \cdot 7/12}{59/120} = \frac{7}{24} \cdot \frac{120}{59} = \frac{35}{59}$$

Да изчислим и вероятността да сме извадили бяла топка от първата кутия, сбора на двете вероятности трябва да е единица:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{1/2 \cdot 2/5}{59/120} = \frac{1}{5} \cdot \frac{120}{59} = \frac{24}{59}$$

Отговор: $P(A) = 59/120$, $P(H_2/A) = 35/59$. □

Задача 5. Дадена е случайната величина X с плътност на разпределение

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-ax}, & x \geq 0, a > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Намерете параметъра a и математическото очакване EX .

Решение. *Непрекъснатата случайна величина.* Случайната величина X и нейната функция на разпределение $F(X)$ са непрекъснати, ако съществува $f(x) \geq 0$, $f(x)$ интегруема в $(-\infty, \infty)$ за всяко реално x , така че:

$$F(X) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Функцията $f(x)$ се нарича плътност на разпределение.

Нормиращо свойство (аналог на сумата от всички вероятности при дискретна случайна величина):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Това свойство е за намиране на стойностите на вероятността:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Математическото очакване е:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Дисперсията е по същата формула:

$$DX = E(X - EX)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x)dx$$

$$\begin{aligned} DX &= E(X - EX)^2 = E(X^2 - 2XEX + (EX)^2) = \\ &= EX^2 - 2EXEX + (EX)^2 = EX^2 - (EX)^2 \end{aligned}$$

Записано най-кратко:

$$DX = EX^2 - (EX)^2, \quad EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$$

Нека да се върнем към задачата. Трябва да намерим параметъра a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \implies \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{\infty} x e^{-ax} dx = 1$$

Първият интеграл е нула. Вторият е несобствен, пресмята се така:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x e^{-ax} dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N x e^{-ax} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{a} \int_0^N x e^{-ax} d(-ax) \right] = \\ &= -\frac{1}{a} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\int_0^N x d(e^{-ax}) \right] = -\frac{1}{a} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[x e^{-ax} \Big|_0^N - \int_0^N e^{-ax} dx \right] \end{aligned}$$

Интегрирахме по-части, $-1/a$ излезе отпред (не зависи от x).

$$\begin{aligned} -\frac{1}{a} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[x e^{-ax} \Big|_0^N - \int_0^N e^{-ax} dx \right] &= -\frac{1}{a} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[N e^{-aN} - 0 e^{-a0} - \int_0^N e^{-ax} dx \right] = \\ &= -\frac{1}{a} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} N e^{-aN} - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-ax} dx \right] \end{aligned}$$

Нека да погледнем лявата граница:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N e^{-aN} = [\infty \cdot e^{-\infty}] = [\infty \cdot 0]$$

Това е неопределеност, трябва да я преобразуваме в безкрайност върху безкрайност или нула върху нула, за да приложим правилото на Лопитал.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N e^{-aN} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{e^{aN}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

Прилагаме правилото на Лопитал — диференцираме поотделно числителя и знаменателя:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{e^{aN}} \implies \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{a e^{aN}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Нека да отбележим, че $e^{-\infty} \rightarrow 0$, $e^{\infty} \rightarrow \infty$ (вижда се и на графиката на e^x).

Обратно към интеграла:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{a} \left[0 - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-ax} dx \right] &= \frac{1}{a} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-ax} dx = -\frac{1}{a^2} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-ax} d(-ax) = \\ &= -\frac{1}{a^2} \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-ax} \Big|_0^N = -\frac{1}{a^2} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} e^{-aN} - \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-a0} \right] = -\frac{1}{a^2} [0 - 1] = \frac{1}{a^2} \end{aligned}$$

Интегралът е равен на единица:

$$\int_0^{\infty} xe^{-ax} dx = 1 \implies \frac{1}{a^2} = 1 \implies a = \pm 1$$

По условие $a > 0$, тогава $a = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Сега математическото очакване:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^0 x0dx + \int_0^{\infty} x(xe^{-x})dx = \int_0^{\infty} x^2e^{-x} dx$$

Интегралът се решава чрез интегриране по части.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^2e^{-x} dx &= - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N x^2e^{-x} d(-x) = - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N x^2 d(e^{-x}) = \\ &= - \lim_{N \rightarrow \infty} \left[x^2e^{-x} \Big|_0^N - \int_0^N e^{-x} d(x^2) \right] = \\ &= - \lim_{N \rightarrow \infty} \left[N^2e^{-N} - 0^2e^{-0} - \int_0^N 2xe^{-x} dx \right] \end{aligned}$$

Нека да разгледаме лявата граница:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^2e^{-N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^2}{e^N} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

Това е неопределена форма, можем да приложим правилото на Лопитал:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^2}{e^N} \implies \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2N}{e^N} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

Пак неопределена форма, прилагаме правилото още веднъж:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2N}{e^N} \implies \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{e^N} = \frac{2}{\infty} = 0$$

Първите две събираеми са нула, остава само интеграла:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N 2xe^{-x} dx &= -2 \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N xe^{-x} d(-x) = -2 \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N xde^{-x} = \\ &= -2 \lim_{N \rightarrow \infty} \left[xe^{-x} \Big|_0^N - \int_0^N e^{-x} dx \right] = \\ &= -2 \lim_{N \rightarrow \infty} \left[Ne^{-N} - 0e^{-0} - \int_0^N e^{-x} dx \right] \end{aligned}$$

Пак разглеждаме лявата граница и прилагаме правилото на Лопитал:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Ne^{-N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{e^N} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \implies \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{e^N} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Първите две събираеми са нула, пак остава само интеграла:

$$\begin{aligned} 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-x} dx &= -2 \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-x} d(-x) = -2 \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-x} \Big|_0^N = \\ &= -2 \lim_{N \rightarrow \infty} [e^{-N} - e^{-0}] = -2 \left[\lim_{N \rightarrow \infty} e^{-N} - 1 \right] = -2[0 - 1] = 2 \end{aligned}$$

Отговор: $a = 1$, $EX = 2$. □

Задача 3. Намерете аналитичната функция

$$\omega = f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

ако $v(x, y) = 3xy + e^x \cos(y)$ (хармонична функция), а $f(0) = i$.

Решение. Уравнения на Коши-Риман:

$$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}$$

Имаме дадена функцията $v(x, y)$:

$$v(x, y) = 3xy + e^x \cos(y)$$

Диференцираме $v(x, y)$ по x :

$$v'_x = 3y + e^x \cos(y) \implies u'_y = -[3y + e^x \cos(y)]$$

Интегрираме $u(x, y)$ по y :

$$u(x, y) = - \int [3y + e^x \cos(y)] dy = - \left[\frac{3}{2}y^2 + e^x \sin(y) \right] = -\frac{3}{2}y^2 - e^x \sin(y) \quad (3)$$

Сега диференцираме $v(x, y)$ по y :

$$v'_y = 3x - e^x \sin(y) \implies u'_x = 3x - e^x \sin(y)$$

Интегрираме $u(x, y)$ по x :

$$u(x, y) = \int [3x - e^x \sin(y)] dx = \frac{3}{2}x^2 - e^x \sin(y) \quad (4)$$

Събираме функцията $u(x, y)$ от (3) и (4):

$$u(x, y) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 - e^x \sin(y) + C$$

Функцията $f(z)$ е:

$$f(z) = \frac{3}{2}(x^2 - y^2) - e^x \sin(y) + C + i(3xy + e^x \cos(y))$$

Трябва да намерим константата. Ще използваме условието $f(0) = i$:

$$f(0) = \frac{3}{2}(0 - 0) - e^0 \cdot 0 + C + i(0 + e^0 \cdot 1) = C + i(0 + 1) = C + i$$

Приравняваме на i :

$$C + i = i \implies C = 0$$

Функцията $f(z)$:

$$f(z) = \frac{3}{2}(x^2 - y^2) - e^x \sin(y) + i(3xy + e^x \cos(y))$$

Отговор: $u(x, y) = 3/2(x^2 - y^2) - e^x \sin(y)$. □

Задача 4. Решете интеграла

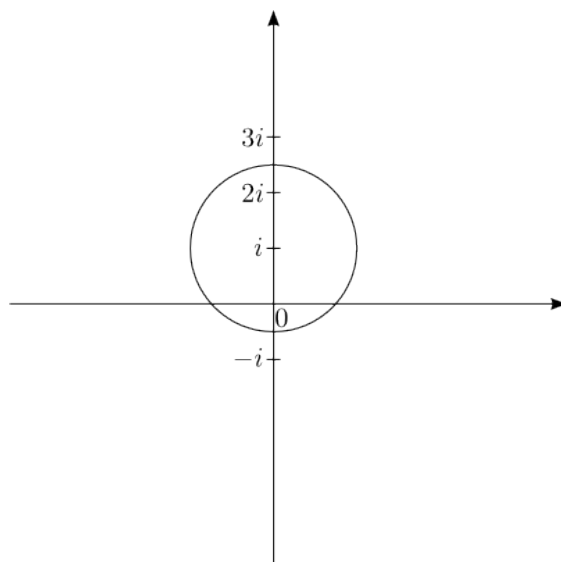
$$\oint_{|z-i|=1,5} \frac{z+1}{z(z^2+1)^2} dz.$$

Решение. Трябва да разложим подинтегралната функция:

$$\frac{z+1}{z(z^2+1)^2} = \frac{z+1}{z[(z-i)(z+i)]^2} = \frac{z+1}{z(z-i)^2(z+i)^2}$$

Имаме еднократен полюс в $z = 0$, двукратен полюс в $z = i$ и двукратен полюс в $z = -i$. Условието е:

$$\oint_{|z-i|=1,5} \frac{z+1}{z(z^2+1)^2} dz$$



Интегрираме върху окръжност с център i и радиус 1,5. Точките 0 и i са в окръжността, но $-i$ не е. В такъв случай решението е:

$$I = 2\pi i(\operatorname{Res} 0 + \operatorname{Res} i)$$

Нека да изчислим еднократния полюс в нулата:

$$\operatorname{Res} 0 = \lim_{z \rightarrow 0} (z - 0) \frac{z + 1}{z(z - i)^2(z + i)^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z + 1}{(z^2 + 1)^2} = \frac{1}{1} = 1$$

Сега двукратния полюс в i :

$$\operatorname{Res} i = \frac{1}{(2 - 1)!} \lim_{z \rightarrow i} \left[(z - i)^2 \frac{z + 1}{z(z - i)^2(z + i)^2} \right]^{(2-1)} = \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{z + 1}{z(z + i)^2} \right]'$$

Да сметнем отделно производната:

$$\begin{aligned} \left[\frac{z + 1}{z(z + i)^2} \right]' &= \frac{z(z + i)^2 - (z + 1)[z(z + i)^2]'}{z^2(z + i)^4} = \\ &= \frac{z(z + i)^2 - (z + 1)[(z + i)^2 + z2(z + i)]}{z^2(z + i)^4} = \frac{z(z + i) - (z + 1)[z + i + 2z]}{z^2(z + i)^3} = \\ &= \frac{z(z + i) - (z + 1)(3z + i)}{z^2(z + i)^3} = \frac{z^2 + zi - (3z^2 + zi + 3z + i)}{z^2(z + i)^3} = \frac{-2z^2 - 3z - i}{z^2(z + i)^3} \end{aligned}$$

Заместваме обратно в границата:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow i} \frac{-2z^2 - 3z - i}{z^2(z + i)^3} &= \frac{-2i^2 - 3i - i}{i^2(2i)^3} = \frac{2 - 4i}{2i} = \frac{1 - 2i}{i} = \\ &= \frac{1 - 2i - i}{i} \frac{-i}{-i} = \frac{-i + 2i^2}{-i^2} = \frac{-i - 2}{1} = -2 - i \end{aligned}$$

Решението е:

$$I = 2\pi i(1 - 2 - i) = 2\pi i(-1 - i) = 2\pi(1 - i)$$

Отговор: $2\pi(1 - i)$. □

Литература

- Функционален анализ: доц. д-р О. Каменов (л), доц. д-р Г. Венков (у)
- Комплексен анализ: проф. дмн Р. Ковачева (л), ст. ас. М. Дурчева (у)
- Теория на вероятностите: доц. д-р Л. Топчийска (л), гл. ас. Б. Гилев (у)
- Сайтове: Wikibooks LaTeX, gnuplot tips, Wikipedia, Wolfram MathWorld
- Софтуер: TeX Live, gnuplot, Inkscape, Notepad++, Sumatra PDF, Windows XP