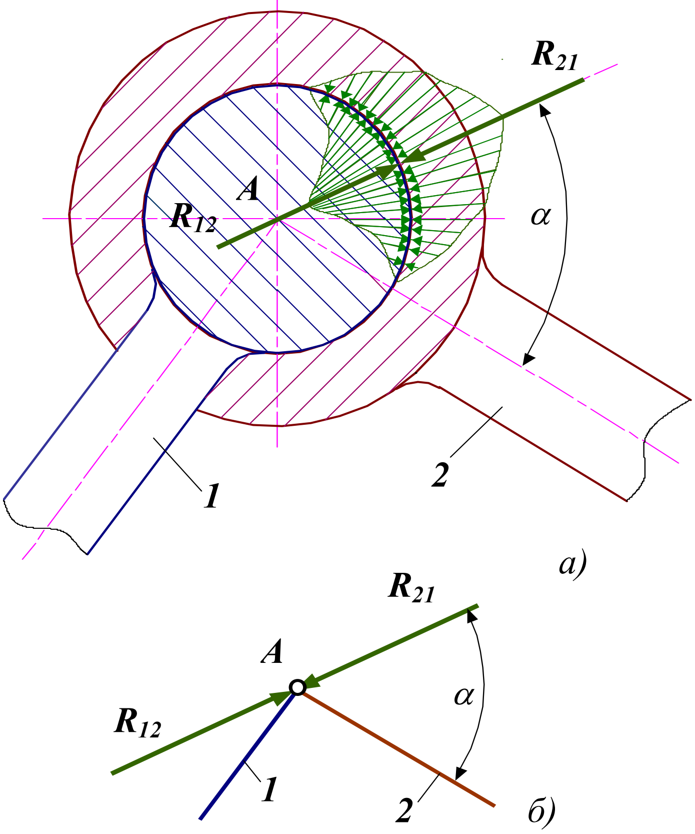
10 ИДЕАЛНИ РЕАКЦИИ Статична определимост, опорни реакции, принцип на *D'Alembert*, идеални реакции при механизми, уравновесяващ момент

10.1.ОСНОВНИ ПРИНЦИПИ И ПОНЯТИЯ

Реакции се наричат силите в кинематичните двоици, чрез които звената си взаимодействат. Ако при изчисленията се пренебрегнат силите на триене, получените реакции се наричат **идеални**. В геометрично неизменяемите конструкции сили на триене няма, защото триенето е следствие на относителното движение. В тези конструкции реакциите са идеални по своята природа. В раздела статика от механиката, където се разглеждат предимно такива конструкции, за този тип механични взаимодействия е прието наименованието **опорни реакции**. В зависимост от вида на натоварването, на което са подложени елементите на неизменяемите конструкции са въведени понятия като: прътове (колони)- елементи натоварени само с осови сили; греди – при сили действащи перпендикулярно на надлъжната ос; валове – при наличие на усукващи сили, оси – поддържат въртящи се елементи, но не предават усукващ момент. Конструкциите със сложни геометрични форми носят названия като рамки, ферми, черупки и др. Практическите задачи са свързани с разнообразни натоварвания, което понякога е причина за смесване на вида на елемента. Например един вал пренася усукващ момент, но може да се разглежда като греда, когато е натоварен и на огъване.

10.2 УСЛОВИЯ ЗА СТАТИЧНА ОПРЕДЕЛИМОСТ НА КИНЕМАТИЧНИ ВЕРИГИ

При **въртяща кинематична двоица** (фиг.10.1 *а*) в идеалния случай, когато се приема, че двете звена са абсолютно твърди, хлабините и силите на триене са пренебрежими, механичното взаимодействие на двете звена се представя с непрекъснато разпределени по някакъв закон елементарни сили, насочени по радиусите на допиращите се цилиндрични повърхнини на звената.



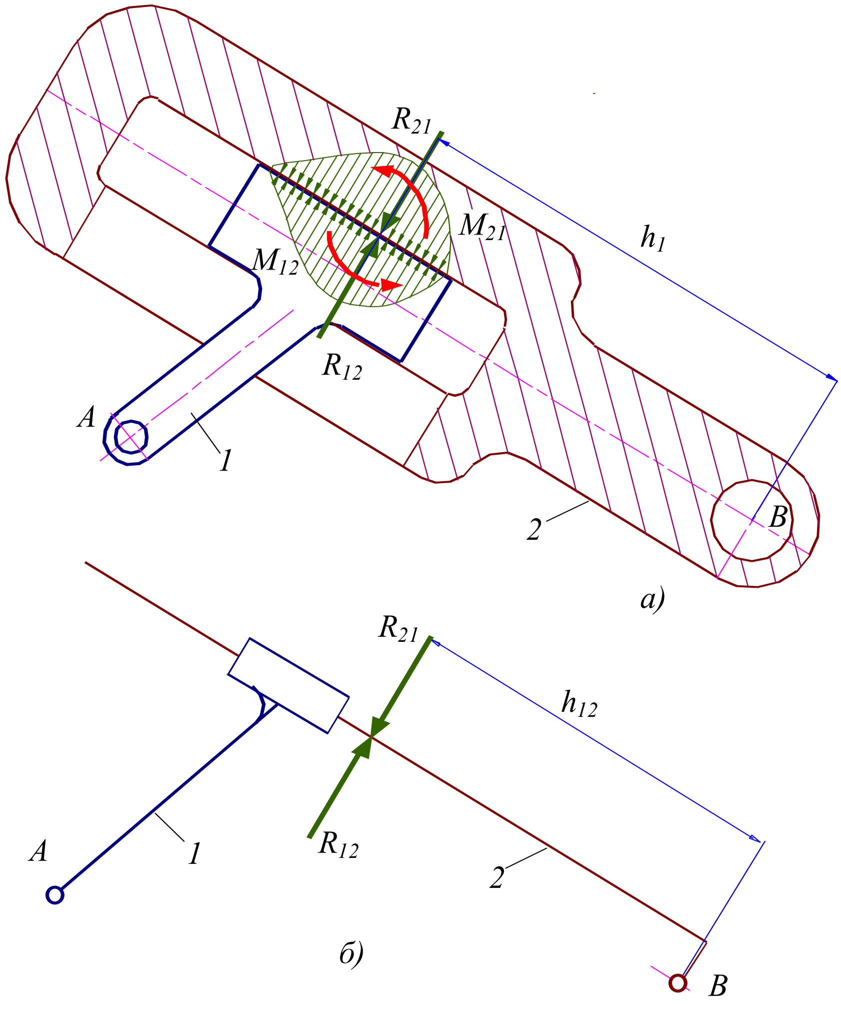
Фиг. 10.1 Идеални реакции при въртяща двоица

Съгласно принципът за равенство на действието и противодействието на всяка елементарна сила от едното звено съответства равна и противоположна по посока елементарна сила от другото звено. Всички елементарни сили са насочени към центъра (точка *A*) на кинематичната двоица, от което следва, че се сумират съгласно правилото на паралелограма и равнодействащите[1] им R_{12} и R_{21} за двете звена също минават през този център и са равно-противоположни. Тези разсъждения дават основание да се приеме, че при въртяща кинематична двоица е известна само приложната точка на идеалната реакция – центъра на кинематичната двоица (фиг.10.2 б), ***неизвестните са две*** **-** големината на реакцията R_{12} (съответно R_{21}) и направлението на директрисата, което може да бъде обозначено например чрез ъгъла α .

При **плъзгаща кинематична двоица**, ако се пренебрегнат хлабините и силите на триене, елементарните сили на взаимодействие в зоната на контакт между двете звена ще бъдат насочени перпендикулярно на допиращите се равнини (фиг. 10.2 *а*). Сумирането на елементарните сили трябва да се извърши съгласно теоремата за успоредно пренасяне на сила. При всяко такова пренасяне ще се добавя и въртящ момент. В крайна сметка системата от елементарни сили се редуцира в дадена точка

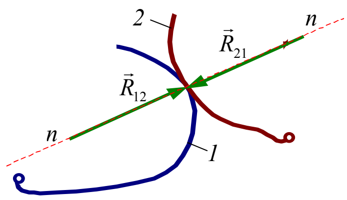
[1] За индексацията на реакциите е възприето първият индекс да означава звеното, което въздейства, а вторият индекс звеното, върху което се въздейства. Например R_{12} е реакцията, с която звено 1 въздейства върху звено 2.

до една равнодействаща сила R_{12} (съответно R_{21}) перпендикулярна на контактните равнини и момент M_{12} (за звено 2 съответно $\vec{M}_{21} = -\vec{M}_{12}$). Така, ако се приеме за известна точката на редуциране, т.е. разстоянието h_1, неизвестните са две - модулите на R_{12} и M_{12}. Може да се намери такава приложна точка на равнодействащата реакция, за която главният момент на елементарните сили е $\vec{M}_{12} = 0$. Това не води до намаляване на броя на неизвестните, защото освен модулът на R_{12} остава неопределена приложната точка на реакцията, означена чрез разстоянието h_{12} (Фиг. 10.2 *б*).



Фиг. 10.2. Идеални реакции при плъзгаща двоица

Двата вида двоици, разгледани до тук са от 5-ти клас. Видно е, че по отношение на идеалните реакции този вид кинематични двоици имат обща характеристика, изразяваща се в това, че **броят на неизвестните параметри на реакциите са два**. При въртящата кинематична двоица тези параметри са модул и ъгъл (ориентация), т.е. R_{12} и α , а при плъзгащата кинематична двоица неизвестен е пак модулът на реакцията R_{12} и линеен параметър h_{12}, чрез който се намира приложната й точка.



Фиг. 10.3 Идеални реакции при контурна двоица

При идеална **контурна кинематична двоица**, са пренебрегнати силите на триене и деформациите на звената в зоната на допиране (фиг. 10.3). В този случай би следвало двете реакции на звената да са равно-противоположно насочени по направление на общата нормала, приложени в точката (линията) на допиране, защото това е направлението на ограничение на движението. Следователно при контурните кинематични двоици, които са от 4-ти клас, за идеалните реакции има само **един неизвестен параметър** – големината на реакцията R_{12}. Приложната точка и направлението на общата нормала са известни от геометрията на профилите.

За равнинна група от n звена свързани с p_5 на брой кинематични двоици от 5-ти клас и p_4 броя контурни кинематични двоици, броят на неизвестните параметри на идеалните реакции ще бъде

$$S=2\,p_5+p_4. \qquad (10.1)$$

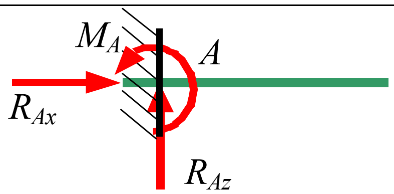
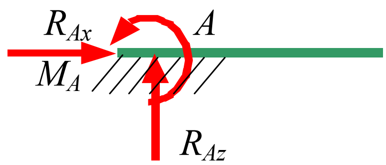
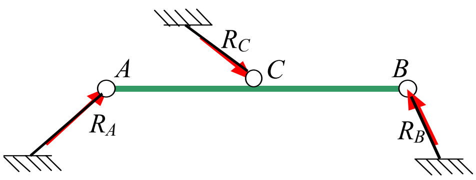
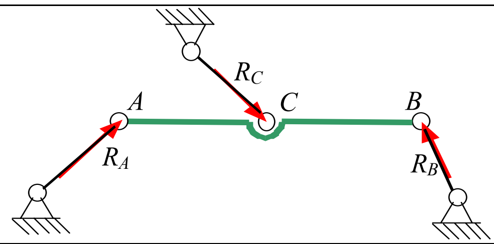
От друга страна, съгласно &8.6 и формула (8.16) за да бъдат в равновесие n звена е необходимо да бъде решена система от $3n$ броя уравнения. Тази система ще бъде определена, ако $3n=S$ или

$$3n-2\,p_5-p_4=0. \qquad (10.2)$$

Условието (10.2), чрез което се установява дали задачата за определяне на реакциите има решение се нарича **условие за статична определимост**. Понеже дясната страна на уравнението (10.2) е познатата вече формула за степените на свобода на равнинен механизъм (вж. &2 формула (2.6), следва твърдението: ***За да бъде една група от** n **звена статично определима, е необходимо, тя да бъде с нулева степен на свобода.***

Статиката разглежда равновесието на едно звено (най-често греда), свързано неподвижно към стойката чрез кинематични двоици. От структурна гледна точка на механизмите и определението за звено, такъв вид връзки изглеждат привидно безсмислени, защото цялата конструкция се превръща в едно звено стойка. За техниката обаче начинът, по който се свързва неподвижното звено има голямо значение, защото от него зависи дали е възможно осъществяването на малки придвижвания породени от деформации – температурни, силови, електромагнитни и др. В *таблица 10.1* са дадени някои от най-честите случаи на използвани означения в статиката, които се различават от приетите условни символи в кинематичните схеми, техните кинематични еквиваленти и вида на опорните реакции.

Таблица 10.1

Наименование	Използвани означения в статиката	Еквивалентно означение в кинематичните схеми
1. Конзолно запъната греда		
2. Греда на две опори едната от които плъзгаща		
3. Греда на две опори едната от които контурна		
4. Греда на пръти (нишки)		

При първия случай на конзолно запъната греда двете звена се сливат в едно в неподвижния си край точка A. Отнетата възможност на гредата да се завърта около точката A, поражда опорна реакция момент M_A. При всички случаи на окачване на гредите, от *таблица 10.1* броят на неизвестните е 3, n=1, p_5=1 и p_4=1, което удовлетворява тъждествено формула (10.2) и следва, че конструкциите са статично определими.

Решенията на диофантовото[2] уравнение (2) до брой на звената n=4 са показани в *таблица 10.2*. При лостовите механизми без контурни кинематични двоици p_4=0 са валидни случаите при n=2 и n=4. Този вид групи с нулева степен на свобода, съдържащи само кинематични двоици от 5 клас се наричат ***асурови***[3] ***групи,*** които имат важно значение за класификацията на механизмите.

Таблица 10.2

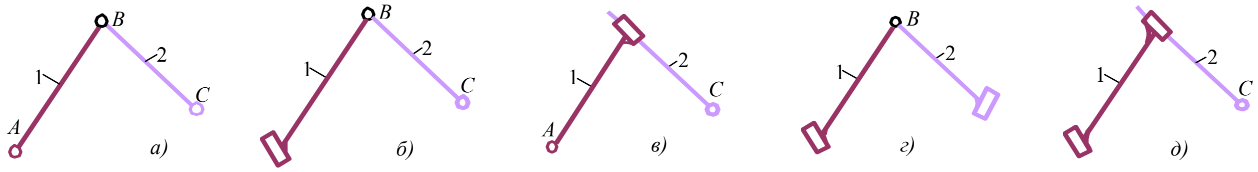
n	1		2				3					4						
p_5	0	1	0	1	2	3	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	5	6
p_4	3	1	6	4	2	0	9	7	5	3	1	12	10	8	6	4	2	0

Асуровите групи се подразделят на класове, като тези с две звена n=2 са от 2-ри клас. За асурова група от първи клас се приема стойката и водещото (водещите) звено (звена). С помощта на теорията

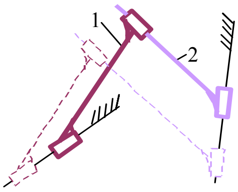
[2] Диофантово уравнение се нарича алгебрично уравнение с цели числа, на което се търсят решения цели рационални числа. Диофант (*Διοφαντοζ*) – древногръцки математик от Александрия.

[3] Асур Леонид Владимирович (1878-1920) – руски учен работил в областта на Теорията на механизмите и машините.

на Асур може да се състави произволен механизъм, като към групата на водещите звена последователно и (или) паралелно се добавят различни видове асурови групи. Определянето и избора на вида на звената и свързващите ги двоици се нарича структурен синтез на механизмите. Възможните варианти на асурови групи от 2-ри клас са показани на фиг. 10.4. Тъй като всички те удовлетворяват уравнението (2), следва, че са статично определими. Асуровите групи от фиг.10 *б*) до 10 *д*) се получават от фиг. 10 *а*), като шарнирите се заменят с плъзгачи. Асурова група, съставена от



Фиг. 10.4 Асурови групи от втори клас



Фиг. 10.5 Клинов механизъм

две звена и три плъзгащи кинематични двоици няма, защото в равнината съществуват само две ограничения по линейно независими направления, които се осъществяват чрез два плъзгача с неуспоредни оси. Третата плъзгаща двоица не въвежда ново ограничение, защото то е линейно зависимо от другите две. Всяка асурова група от фиг. 10.4, свързана чрез външните кинематични двоици към стойката образува геометрично неизменяема конструкция. Групата от 2 звена и три плъзгащи двоици, присъединена към стойката образува механизъм наречен клинов (фиг. 10.5). Пример за асурова група от 3-ти клас е еквивалентната кинематична схема на греда, окачена на три пръта (*таблица 10.1*). В този случай трите пръта (нишки) и гредата се разглеждат като отделни звена, чиито брой е n=4, а броят на кинематичните двоици от 5-ти клас е p_5=6. Чрез формула (2.6) се доказва, че такава група свързана към стойката с външните си двоици (както е показано в таблицата) има степен на свобода h=0.

10.3 ПРИНЦИП НА Д'АЛАМБЕР (*D'ALEMBERT*[4]).

Елементите на геометрично неизменяемите конструкции са неподвижни, което означава, че те се намират в равновесие. От това следва, че при наличие на статична определимост в тези конструкции реакциите може да се изчисляват от условията за равновесие на механична система. Същото важи и за звена или кинематични вериги с равномерно праволинейно движение, при които няма ускорения. В механизмите безинерционните движения (движения без ускорения) се срещат рядко. Обикновено звената се движат с променливи скорости, от което следва, че съществуват ускорения, пораждащи инерционни сили. Това означава, че тези механични системи не се намират в равновесие и определянето на реакциите в кинематичните двоици не може да се извърши директно чрез условията за равновесие. Определянето на реакциите в кинематичните двоици е важна задача за механизмите, защото на базата на тези реакции се правят якостни изчисления – определяне на реалните форми на звената, избор на материалите, от които се изработват и изчисляване на геометричните им параметри така, че да са способни да понесат натоварването без да се разрушат или деформират в недопустими граници.

Проблемът за изчисляване на реакциите в кинематичните двоици на звената с инерционно движение се решава с помощта на принципът на Д'Аламбер, който гласи: ***Всяка механична система може да бъде представена в равновесие, ако за всяко звено към действащото външно натоварване се добавят и инерционните сили и моменти***. Съгласно този принцип инерционната динама се приема за зададено външно натоварване и уравненията за равновесие на равнинна система придобиват вида

$$\left|\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{m} X_i + \sum_{i=1}^{n} \Phi_{x_i} = 0 \\ \sum_{i=1}^{m} Y_i + \sum_{i=1}^{n} \Phi_{y_i} = 0 \\ \sum_{i=1}^{m} M_i + \sum_{i=1}^{n} M_i^{\phi} = 0. \end{array}\right. \qquad (10.3)$$

Тук $\Phi_{x_i} = -m_i a_{sx_i}$ и $\Phi_{y_i} = -m_i a_{sy_i}$ са компонентите на инерционните сили по осите x и y, $M_i^{\phi} = -J_{S_i}\varepsilon$ са моментите на инерционните сили, m е броят на силите, а n – броят на звената.

[4] *D'Alembert Jean Le Rond* (1717-1783) – френски математик и философ

Системата уравнения (10.3) е условие за динамично равновесие на механична система. Такъв вид равновесие се нарича кинетостатично, а задачите, които се решават с помощта на принципа на Д'Аламбер се разглеждат в раздел на механиката наречен кинетостатика.

За да се приложи принципът на Д'Аламбер е необходимо да са известни инерционните сили, от което следва, че трябва да се знаят ускоренията на масовите центрове и ъгловите ускорения на звената. Това е възможно, ако е дефиниран законът за движение на началното звено и са известни масовите параметри на всички звена. Задачата на кинетостатиката е достатъчно сложна, защото преди да се стигне до определянето на реакциите е необходимо да се извърши кинематичен анализ и да се определят масовите параметри на звената. Кинематичния анализ се извършва, като се приеме за известен законът за движение на началното звено (например, ако е коляно обикновено се приема, че се върти с постоянна ъглова скорост). Ако масите в механизма са малки и звената се движат с ниски и монотонно променливи скорости, е възможно инерционните сили да се пренебрегнат.

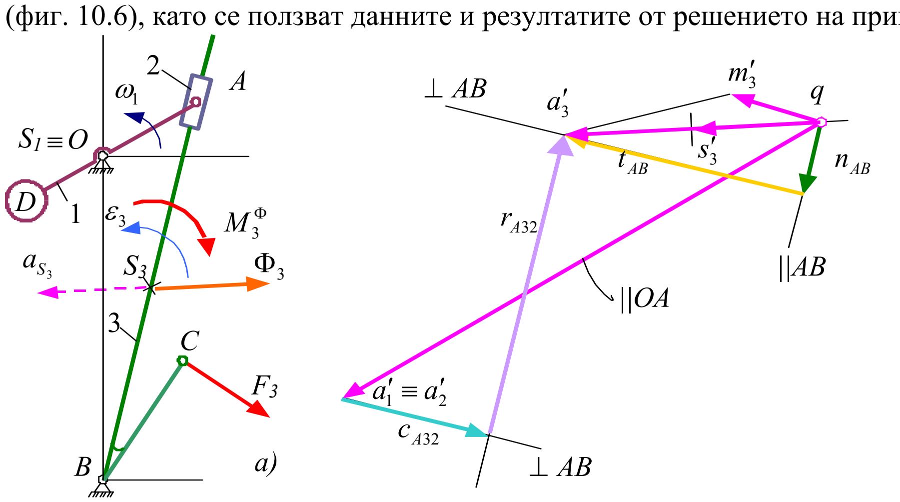
10.4 ИДЕАЛНИ РЕАКЦИИ И УРАВНОВЕСЯВАЩ МОМЕНТ НА НАЧАЛНОТО ЗВЕНО

Силовите взаимодействия в кинематичните двоици, получени след пренебрегване на триенето се наричат **идеални реакции**. Изчисляването на реакциите в механизмите се основава на принципа на Д'Аламбер, което налага първо да се определят на инерционните сили и да се добавят към зададеното външно натоварване. Механизмът се разделя на асурови групи, след което последователно се разглежда равновесието на всяка една от тях. Основание за това е, че асуровите групи удовлетворяват условието за статична определимост. След прилагането на принципа на Д'Аламбер следва, че всяко едно звено се намира в равновесие. За всяка асурова група от 2-ри клас и звената ѝ се получават по 3 системи от вида (10.3) или общо 9 уравнения. Поради съществуващите съвпадения в общата кинематична двоица, произтичащи от принципа за равенството на действието и противодействието, при подходящ подбор на уравненията, броят им може да бъде сведен до 6, а останалите 3 да се използват за проверка. При отделното разглеждане на равновесието на асуровите групи и звената им се прилага ***принципът за освобождаване от връзките,*** който гласи: ***Динамичното състояние на отделна кинематична верига (асурова група или звено) не се променя, ако условно се приеме, че двоиците, с които са били свързани към другите звена не съществуват, но на тяхно място се поставят съответните реакции.***

Кинетостатичният анализ на сложните механизми се извършва последователно за всяка асурова група, като се започне от най-отдалечената от началното звено. Последният етап на задачата разглежда равновесието на началното звено, откъдето се определя външна сила или момент (***уравновесяваща сила или момент***), които трябва да се приложат към това звено, за да се получи предписаният закон за движение и да приведе звеното в равновесие.

Горните разяснения ще бъдат подкрепени с решението на следната задача:

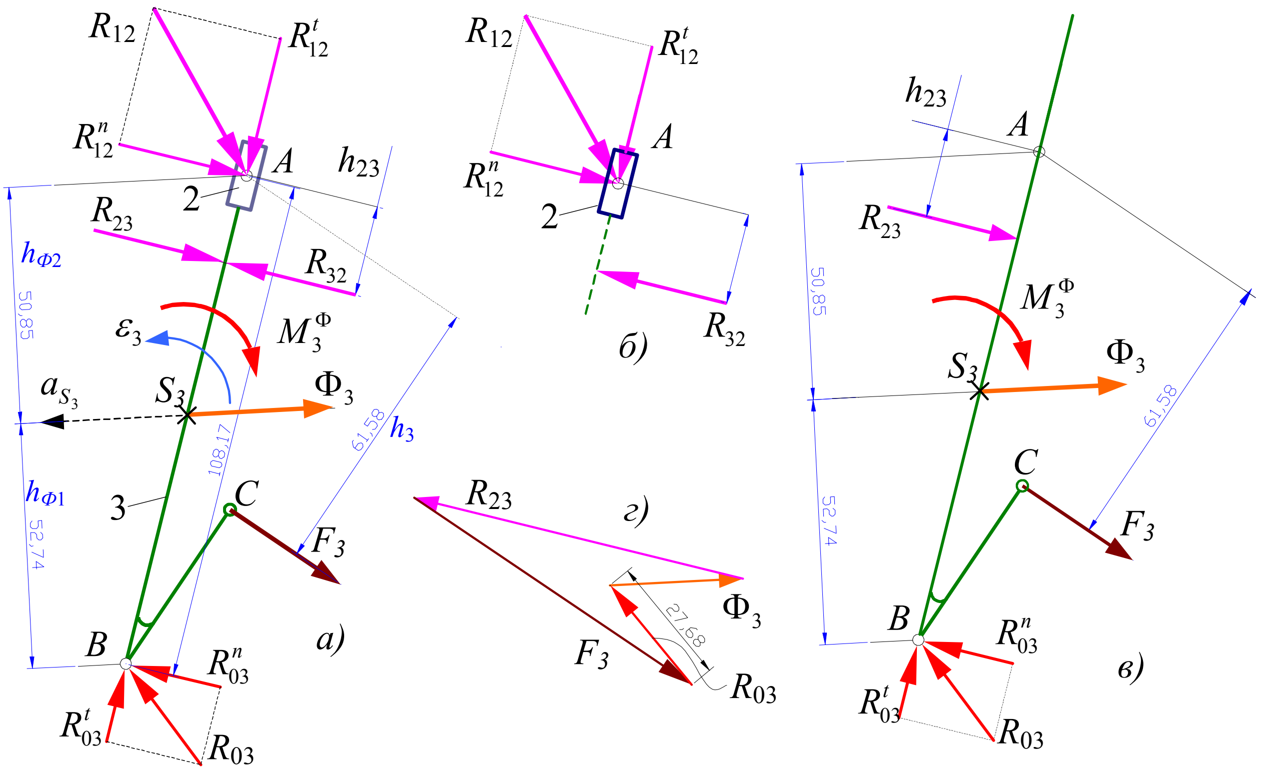
Пример 10.1. Да се изчислят идеалните реакции и уравновесяващият момент на кулисния механизъм (фиг. 10.6), като се ползват данните и резултатите от решението на пример 5.1 и при допълнително зададени: маса $m_3 = 20$ kg и масов инерционен момент $J_3 = 0{,}14$ kg.m^2 на кулисата 3, външна сила $F_3 = 720\,\text{N}$, приложена в точка *C*, перпендикулярно на *BC*. Масата на плъзгача 2 да се пренебрегне. Масовият център S_1 на коляното 1 съвпада с центъра на ротация точка *O*, поради наличието на противотежестта *D*. Механизмът притежава равнина на материална и силова симетрия успоредна на равнината на движение.



Фиг. 10.6 Към пример 10.1 *а*) кинематична схема, *б*) план на ускоренията

Решение:

Задачата може да се реши графо-аналитично, или само с аналитични методи. Понеже в примера се използва плана на ускоренията, тук ще бъде изложен графо-аналитичния метод. От мащабно начертаната кинематична схема (плана на положението) след успоредно пренасяне на директрисата на ускорението a_{S_3} на масовия център на кулисата в точка S_3 (фиг. 10.7), се измерват



Фиг. 10.7 Равновесие на асурова група 2-3, *а*) натоварване на двете звена, *б*) натоварване на плъзгача 2, *в*) натоварване на кулисата 3, *г*) силов многоъгълник

следните разстояния: $h_{\Phi 1}$=52,74 mm – рамо на инерционната сила Φ_3 спрямо точка B; $h_{\Phi 2}$=50,85 mm - рамо на инерционната сила Φ_3 спрямо точка A; h_3=61,58 mm – рамо на технологичната сила F_3 спрямо точка A; разстоянието AB=108,17 mm. От кинематичния анализ извършен в пример 5.1 се вземат модулите на ускорението на масовия център a_{S_3}=14,3 m/s^2 и ъгловото ускорение на кулисата ε_3=249 s^{-2} и се пресмятат модулите на инерционната динама: $\Phi_3 = a_{S_3}\ m_3$=14,3.20=286 N; $M_3^{\Phi} = \varepsilon_3\ J_{S_3}$=249.0,14=34.86 Nm.

От кулисния механизъм може да се отдели само една асурова група, съставена от звена 2 и 3. Добавя се инерционната динама Φ_3 и M_3^{Φ}. Посоката на инерционния момент $\vec{M}_3^{\Phi}$ е обратна на ъгловото ускорение $\vec{\varepsilon}_3$. Равновесието на групата като цяло се разглежда на фиг. 10.7 *а*). Съгласно принципът за освобождаване от връзките, в точки A и B се прилагат реакциите на звената, които са премахнати – съответно R_{12} и R_{03}, като направленията и посоките им са произволни. Тези реакции се разлагат по две перпендикулярни направления, едното от които е насочено по правата AB, както е показано на фигурата. Съставя се уравнението $\sum M_{B_{i(2,3)}} = 0$ за сумата от моментите на силите спрямо точка B, за цялата група, от което следва

$$-R_{12}^n.AB - M_3^{\Phi} - \Phi_3 h_{\Phi 1} - F_3.BC = 0$$

и се пресмята

$$R_{12}^n = -\frac{1}{AB}\left(M_3^{\Phi} + \Phi_3 h_{\Phi 1} + F_3.BC\right) = -\frac{1}{0{,}108}\left(34{,}86 + 286.0{,}52 + 720.0{,}40\right) = -727{,}96\,\text{N}.$$

Знакът минус тук показва, че първоначално приетата посока на компонентата R_{12}^n не съвпада с действителната т.е. посоката на R_{12}^n е обратна на тази от фигурата.

От условието за равновесие на силите $\sum \vec{F}_{i(2)} = 0$ действащи само върху звено 2 (фиг. 10.7 *б*) се намира

$$\underset{\perp AB}{\underline{\underline{\vec{R}^{n}_{12}}}}+\underset{\parallel AB}{\underline{\vec{R}^{t}_{12}}}+\underset{\perp AB}{\underline{\vec{R}_{32}}}=0\,. \tag{10.4}$$

Тъй като $\vec{R}_{32}$ е с известно направление ($\perp AB$), от уравнение (10.4) следва, че $\vec{R}_{12}$ трябва да има същото направление и да е с противоположна на $\vec{R}_{32}$ посока. От тук следва, че $\vec{R}^{t}_{12}$=0. От моментовото уравнение $\sum M_{A_{i(2)}}=0$ само за звено 2 се получава $R_{32}.h_{23}=0$. Следователно $h_{23}=0$, или приложната точка на реакцията $\vec{R}_{32}$ е точка *A,* като R_{32}=R_{12}=727,96 N.

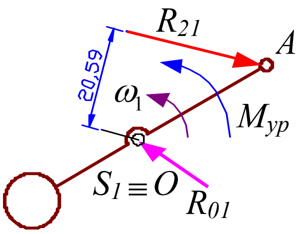
Тук трябва да се има предвид, че поради отрицателната стойност на $\vec{R}_{12}$, действителните посоки на силите са обратни на показаните на тези от фиг. 10.7 *б*).

Чрез силово уравнение $\sum\vec{F}_{i(3)}=0$ само за звено 3 (фиг. 10.7 *в*) се извежда векторната зависимост

$$\underline{\underline{\vec{\Phi}_3}}+\underline{\underline{\vec{R}_{23}}}+\underline{\underline{\vec{F}_3}}+\vec{R}_{03}=0\,. \tag{10.5}$$

В уравнение (10.5) $\vec{R}_{23}=-\vec{R}_{32}$, следователно има само две неизвестни – модулът и направлението на реакцията $\vec{R}_{03}$, което означава, че решение съществува. Това решение е получено графично (фиг. 10.7 *г*), като е построен многоъгълник на силите. Построението е извършено след избор на мащабен модул на силите $k_F=\dfrac{F}{\overline{F}}$ [N/mm], където F е действителната големина в [N], а $\overline{F}$ мащабната дължина на силата в [mm]. При мащабен модул k_F =10 N/mm от многоъгълника на силите е измерено $\overline{R}_{03}=27{,}68$ mm, от където $R_{03}=\overline{R}_{03}k_F$ =27,68.10=276,8 N. С това се изчерпва задачата за равновесието на асуровата група съставена от звената 2 и 3.

Остава да се разгледа равновесието на началното звено – коляното 1 (фиг.10.8). Прилага се принципът за освобождаване от връзките, като в точка *O*, се поставя реакцията R_{01}, с която стойката действа на коляното 1, а в точка *A* се прилага реакцията R_{21}, която е известна сила от анализа на асуровата група, тъй като съгласно принципът за равенство на действието и противодействието $\vec{R}_{21}=-\vec{R}_{12}$. За да бъде в равновесие към коляното се прилага и уравновесяващ момент $M_{ур}$, който може да се разглежда като задвижващ (двигателен) момент, защото посоката му съвпада стази на ъгловата скорост ω_1. Измерва се рамото h_{21}=20,59 mm на реакцията R_{21} спрямо точка *O*. Чрез силовото уравнение $\sum\vec{F}_{i(1)}=0$ се определя реакцията R_{01}=R_{21}=727,96 N. Двете реакции са равни по големина и противоположни по посока. Уравновесяващият момент следва от $\sum M_{O_{i(1)}}=0$, от където $M_{ур}$=R_{21}.h_{21}=727,96.0,02059=15 Nm. Защо към звено 1 не е добавена инерционна динама?



Фиг. 10.8 Равновесие на коляното

Освен якостни задачи с помощта на идеалните реакции се решават и други важи задачи, като например тези за загубите от триене и за коефициента на полезно действие. Ако получения резултат за $M_{ур}$ е близък до реалния, може да се пресметне мощността на двигателя за това положение на звеното $P_Д=\omega_1.M_{ур}$ = 45.15=675 W.

Функцията $M_{ур}=M_{ур}(\varphi)$ може да бъде намерена графично за определен брой положения на коляното по показания начин, или да бъде изведена с аналитична зависимост. На базата на получените данни се поставя задачата за такова електронно управление на момента двигателя, чрез което да се постигне зададената постоянна ъглова скорост ω_1, въпреки променливият вид на натоварването.