

## 11.0 ВЪТРЕШНИ УСИЛИЯ В ЗВЕНАТА – якостни хипотези, разрезни усилия и диаграми, вътрешни напрежения

### 11.1 Якостни хипотези

1) Материалът на елементите е *хомогенен* и *изотропен*. Свойството хомогенност означава, че материалът има еднаква плътност  $\rho = \frac{dm}{dV}$  [kg/m<sup>3</sup>] във всяка точка, а изотропност притежават материалите, чийто физико-механични свойства са еднакви по всички направления. *Анизотропни* материали са тези, които в различните посоки имат различни физико-механични свойства например дърво, изкуствени кристали, пластмаси, стъклени влакна.

2) Материалът е с *непрекъсната среда* и *запълва целия обем*. Тази хипотеза се приема, тъй като размерите на между-атомните пространства са несъизмеримо малки в сравнение с реалните размери на звената.

3) Материалите са с *идеална еластичност*. Тук се приема, че в определени граници на натоварване звената напълно възстановяват формата и размерите си след премахване на натоварването.

4) *Деформациите са пренебрежимо малки* по отношение на първоначалните размери на звената, поради което не се променят положенията на силите и моментите, с които е натоварено звеното.

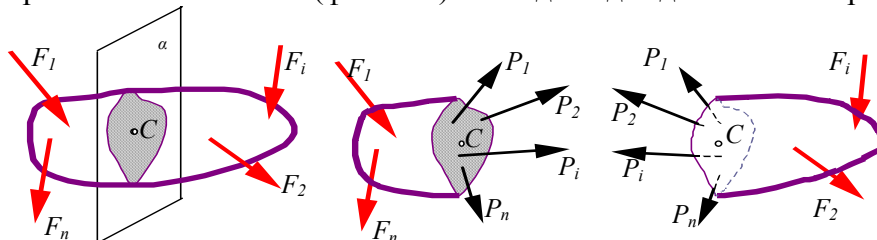
5) *Деформациите от действието на система сили* е равна на сумата от деформациите получени от действието на всяка сила поотделно. Тази хипотеза е приложение на *принципът на суперпозицията* за деформациите.

6) *Направените мислени равнинни сечения* във звеното преди деформацията остават равнинни и след деформацията и са успоредни сами на себе си (Хипотеза на Бернулий).

### 11.2 Вътрешни (разрезни) усилия

Силите възникващи вътре в тялото, които се противопоставят на деформациите и се стремят да върнат частиците на материала в състоянието преди натоварването се наричат *вътрешни (разрезни) сили*. Тези сили се съпротивляват на външните, запазвайки формата и целостта на звената. Това означава, че вътрешните сили са функция на външното натоварване и би следвало с увеличаване на натоварването да се увеличават и вътрешните сили. Ако едно натоварено тяло се намира в равновесие, това състояние се нарича *напрегнато равновесие*. Граничното натоварване, при което настъпва разрушаване се нарича *якост на материала*.

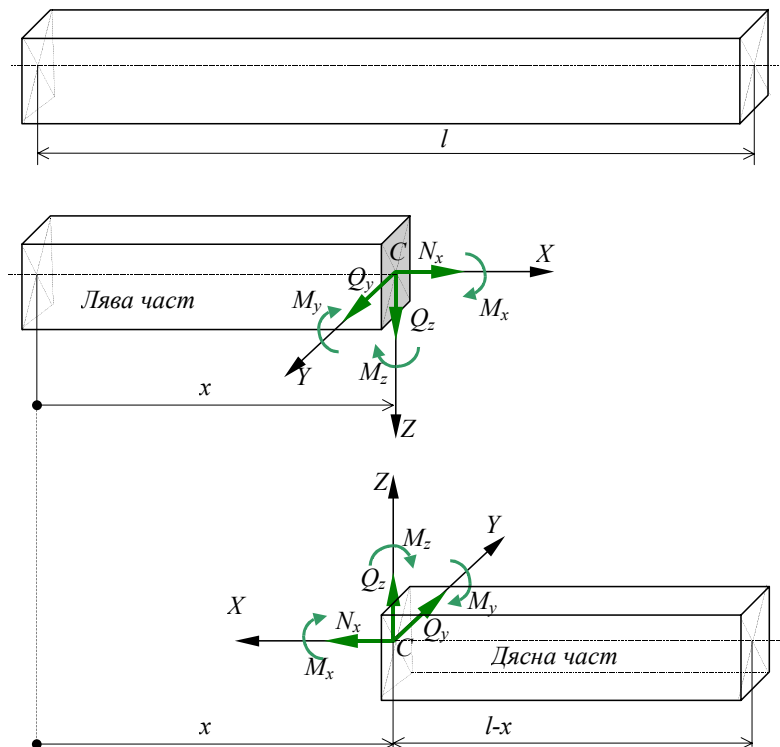
Вътрешните усилия се определят чрез *метода на сечението*. Последователността на работа при този метод е следната: 1. Натовареното тяло мислено се разделя на две части в произволно сечение  $\alpha$  (фиг.11.1). 2. За да бъдат двете части в равновесие под действието на



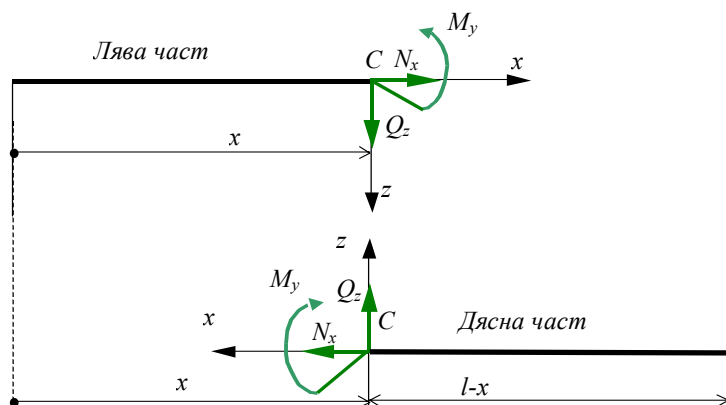
Фиг. 11.1 Метод на сечението

приложените външни сили  $F_i$ , действието на отрязаната част се заменя със система от вътрешни сили  $P_i$ . За двете сечения те са сили на взаимодействие на двете части и са

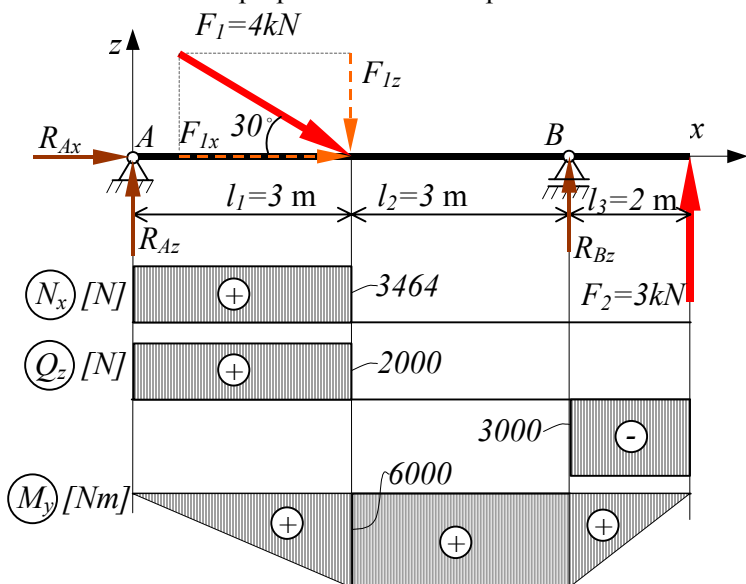
равни по големина и противоположни по посока. 3. Вътрешните сили се редуцират за точка  $C$ , която е център на тежестта на сечението (фиг. 11.2) и се проектират по координатна система с начало центъра на тежестта с хоризонтална ос  $y$ , вертикална ос  $z$ , лежащи в равнината на сечението и ос  $z$  перпендикулярна на него (фиг. 11.2). Главният вектор и



Фиг. 11.2 Компоненти на вътрешните усилия



Фиг. 11.3 Компоненти на вътрешните усилия при равнинно натоварване



Фиг. 11.4 Пример за диаграми на вътрешните усилия

главният момент на вътрешните усилия се проектират по главните централни оси на тялото до:

$N_x$  - надлъжна осова сила;

$\left. \begin{matrix} Q_z \\ Q_y \end{matrix} \right\}$  - напречни срязващи сили;

$\left. \begin{matrix} M_y \\ M_z \end{matrix} \right\}$  - огъващи моменти;

$M_x$  - усукващ момент.

При равнинно натоварване, ако силите действат в равнина  $Sxz$ , вътрешните усилия се представят така както е показано на фиг. 11.3. Вътрешните усилия се определят в следната последователност: 1. Изчисляват се опорните реакции; 2. Определя се броя на **силовите участъци**. **Силов**

**участък** се нарича интервала на координатата, в който вътрешните усилия не променят аналитичния си вид. За целта първо се определят границите на тези участъци. Те се дефинират чрез координатите, в които има промяна на силовото натоварване. В това натоварване се включват и опорните реакции. 3. За всеки силов участък се прилага методът на сечението. Неизвестните вътрешни усилия се определят от условията за равновесие, като началото на координатата  $x$  е едно и също за всеки участък. Моментовите уравнения по правило се съставят за центъра на тежестта на сечението, в което е направен разрезът. Определянето на вътрешните усилия е илюстрирано с примера на фиг. 11.4. Съгласно указания порядък е намерено:

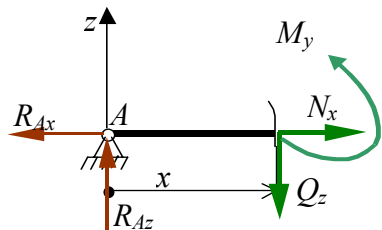
1. **Изчисляване на опорните реакции.** Силата  $F_1$  е разложена на две компоненти  $F_{1x} = F_1 \cos 30^\circ = 4000 \cdot \cos 30^\circ = 3464$  N и  $F_{1z} = F_1 \sin 30^\circ = 4000 \cdot \sin 30^\circ = 2000$  N. Съставени са уравненията за равновесие на гредата:  $\sum F_{x_i} = 0$ ,

$R_{Ax} + F_{1x} = 0$ ,  $R_{Ax} = -F_{1x} = -3464$  N. Знакът минус тук показва, че първоначално приетата посока на  $R_{Ax}$  е обратна на действителната;  $\sum M_{Ay} = 0$   $-l_1 F_{1z} + (l_1 + l_2) R_{Bz} + (l_1 + l_2 + l_3) F_2 = 0$ ,  $R_{Bz} = (3F_{1z} - 8F_2) / 6 = (3 \cdot 2000 - 8 \cdot 3000) / 6 = -3000$  N. И в този случай знакът минус показва, че  $R_{Bz}$  трябва да се обърне в противоположна посока първоначално избраната;  $\sum F_{z_i} = 0$ ,  $R_{Az} - R_{Bz} - F_{1z} + F_2 = 0$ .  $R_{Az} = R_{Bz} + F_{1z} - F_2 = 3000 + 2000 - 3000 = 2000$  N. Проверка се прави с уравнението  $\sum M_{Bz} = 0$ .

2. **Силови участъци.** Натоварването се променя при  $x = \{3m, 6m\}$ , което води до разделяне на гредата на 3 силови участъка:  $0 \leq x \leq 3$ ;  $3 \leq x \leq 6$ ;  $6 \leq x \leq 8$ .

### 3. Вътрешни усилия.

- **за първия участък**, където  $0 \leq x \leq 3$  се съставя схемата от фиг. 11.5. Следват



уравненията за равновесие на разглежданата част от гредата:

$$\sum X_i = 0; N_x - R_{Ax} = 0; \Rightarrow N_x = R_{Ax} = 3464 \text{ N} = \text{const};$$

$$\sum Z_i = 0; R_{Az} - Q_z = 0; \Rightarrow Q_z = R_{Az} = 2000 \text{ N} = \text{const};$$

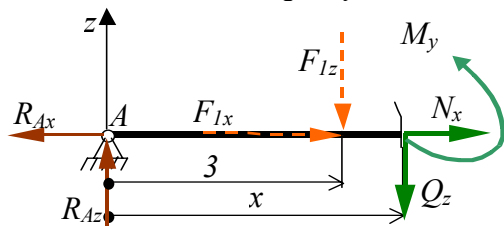
$$\sum M_i = 0; -R_{Az} x + M_y = 0 \Rightarrow M_y = R_{Az} x = 2000 \cdot x \text{ [Nm]}.$$

Фиг. 11.5 Метод на сечението за  $0 \leq x \leq 3$

Първите две вътрешни усилия са константи и се построяват лесно (фиг. 11.4). За да се начертае диаграмата на огъващия момент се изчисляват две точки: за  $x=0$ ,  $M_y = R_{Az} \cdot 0 = 0$ ; за  $x=3$ ,

$M_y = R_{Az} \cdot 3 = 2000 \cdot 3 = 6000$  Nm. По стара традиция е прието положителната посока на огъващия момент да се нанася обратно както е на (фиг. 11.4).

- **за втория участък**  $3 \leq x \leq 6$  схемата на натоварването е показано на фиг. 11.6.



Фиг. 11.6 Метод на сечението за  $3 \leq x \leq 6$

$$\sum X_i = 0; N_x - R_{Ax} + F_{1x} = 0 \Rightarrow N_x = 0;$$

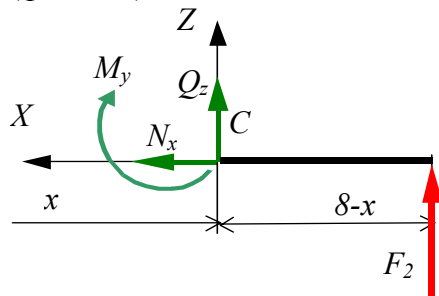
$$\sum Z_i = 0; R_{Az} - Q_z - F_{1z} = 0 \Rightarrow Q_z = 0;$$

$$\sum M_i = 0; -R_{Az} x + F_{1z} (x - 3) + M_y = 0 \Rightarrow$$

$$M_y = -F_{1z} (x - 3) + R_{Az} x = (R_{Az} - F_{1z}) x + F_{1z} \cdot 3 = (2000 - 2000) x + 2000 \cdot 3 = 6000 \text{ Nm} = \text{const}.$$

Анализът на решението за този участък показва, че тук действа само огъващ момент  $M_y$ . Напречни и надлъжни вътрешни усилия в този участък няма.

- **за третия участък**  $6 \leq x \leq 8$  е по-удачно да се разгледа дясната част на гредата (фиг. 11.7), защото е по-малко натоварена от лявата. Отново са съставени уравненията за



Фиг. 11.7 Метод на сечението за  $6 \leq x \leq 8$

равновесие:

$$\sum X_i = 0; N_x = 0;$$

$$\sum Z_i = 0; Q_z + F_2 = 0 \Rightarrow Q_z = -F_2 = 3000 \text{ N} = \text{const}$$

$$\sum M_i = 0; -M_y + F_2 (8 - x) = 0 \Rightarrow M_y = F_2 (8 - x) \text{ [Nm]}$$

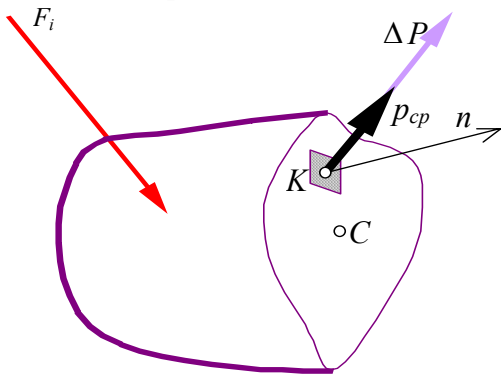
За да се начертае диаграмата на огъващия момент, се изчисляват стойностите му в краищата на участъка:

$$M_y (6) = 3000(8 - 6) = 6000 \text{ Nm}; M_y (8) = 3000(8 - 8) = 0.$$

Получените резултати са отразени на диаграмите на фиг. 11.4, с което задачата е решена.

### 10.3 Напряжения

В границите на цялото сечение вътрешните сили могат да бъдат разпределени неравномерно и познаването на редуциращата сила за центъра на тежестта може да се окаже недостатъчно. Необходимо е да се познава и величина, която характеризира интензивността на силите в различните точки на сечението.



Фиг. 11.8 Напряжение в произволна площадка

В произволна точка  $K$  от сечението се разглежда една много макар площадка с лице  $\Delta S$ . Ориентацията на площадката се определя чрез нейната нормала  $n$ . Разреznите сили действащи в областта на площадката са редуцирани за точка  $K$  до един главен вектор  $\Delta \vec{P}$  и един главен момент  $\Delta \vec{M}$  за който се доказва, че е пренебрежимо малък. Отношението

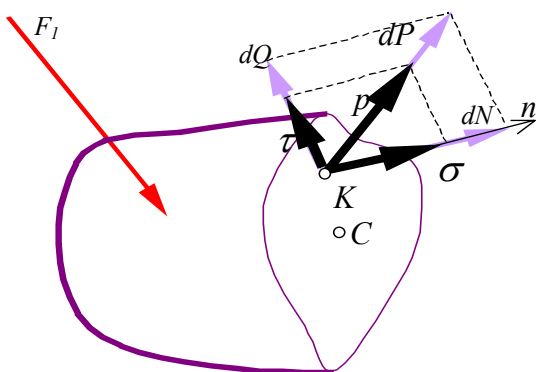
$$\vec{p}_{cp} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta S} \quad (11.1)$$

се нарича средно напрежение върху площадката  $\Delta S$ . След преминаване към граничен преход е получено

$$\vec{p} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta S} = \frac{d\vec{P}}{dS}, \quad (11.2)$$

което се нарича **напряжение** в точката  $K$ . Дименсията на напрежението е [Pa] ( $1\text{Pa}=1\text{N/m}^2$ ). В науката “Съпротивление на материалите” напрежението (силата) се разлага на две взаимно перпендикулярни компоненти (фиг. 11.9). Първата от тях

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{N}}{dS} \quad (11.3)$$



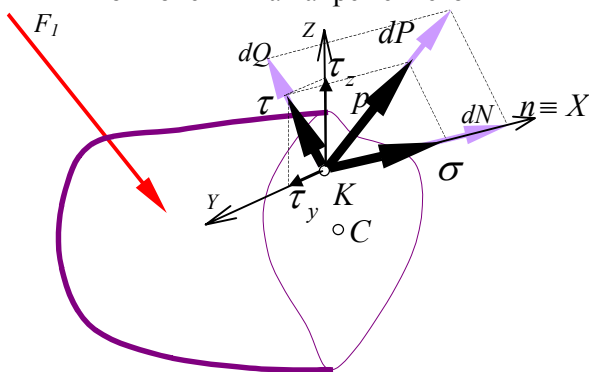
Фиг. 11.9 Нормална и тангенциална компоненти на напрежението

лежи върху нормалата  $n$  се нарича **нормално напрежение**, а втората

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{Q}}{dS} \quad (11.4)$$

лежи в равнината на сечението и се нарича **тангенциално напрежение**. След избор на координатна система (фиг. 11.10), при която абсцисата  $x \equiv n$ , а ординатата  $y$  и апликатата  $z$ , лежат в равнината на сечението, тангенциалното напрежение се разлага на две взаимно перпендикулярни компоненти  $\vec{\tau}_z$  и  $\vec{\tau}_y$  като

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_z + \vec{\tau}_y. \quad (11.5)$$



Фиг. 11.10 Разлагане на тангенциалните напрежения

**Напрегнато състояние** се нарича безкрайното множество от вектори  $\vec{\sigma}$  и  $\vec{\tau}$ , действащи по различните площадки, прекарани през дадена точка.