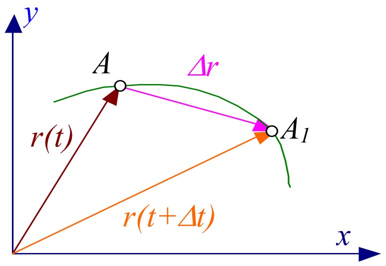
3.0 РАВНИННО ДВИЖЕНИЕ НА ТОЧКА И ТЯЛО. СКОРОСТИ, УСКОРЕНИЯ, СЪБИРАНЕ НА ДВИЖЕНИЯ

3.1 РАВНИННО ДВИЖЕНИЕ НА ТОЧКА В ДЕКАРТОВА КООРДИНАТНА СИСТЕМА

Дадена е точка A (фиг. 3.1), която се движи в равнината Oxy, като в момента t се намира в положение A и в момент $t+\Delta t$ е в положение A_1. Тези положения се дефинират с радиус векторите $\vec{r}(t)$ и $\vec{r}(t+\Delta t)$, чиято разлика е

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t). \tag{3.1}$$

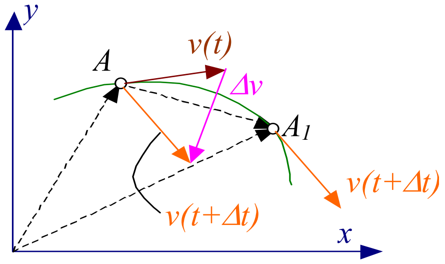


Фиг. 3.1. Скорост на точка

Скорост на точка A се нарича границата на отношението

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{\vec{r}}\,. \tag{3.2}$$

При $\Delta t\to 0$ хордата $\overset{\frown}{AA_1}$ на траекторията клони към тангентата, от което следва, че скоростта $\vec{v}$ на точка A е вектор, лежащ върху тангентата на траекторията и е насочена по посока на движението. Дименсията на скоростта е m/s.



Фиг. 3.2. Ускорение на точка

Нека в момента t скоростта на точка A е $\vec{v}(t)$ (фиг.3.2), а в момента $t+\Delta t$ скоростта е $\vec{v}(t+\Delta t)$. Нарастването на скоростта е

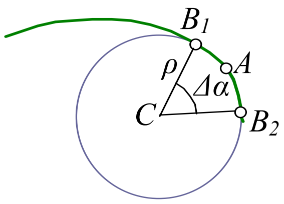
$$\Delta\vec{v}=\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t) \tag{3.3}$$

Ускорението на точка A е границата на отношението

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\dot{\vec{v}}=\ddot{\vec{r}} \tag{3.4}$$

Ускорението е вектор, насочен по безкрайно малкото нарастване на скоростта и има дименсия m/s^2.

3.2 РАВНИННО ДВИЖЕНИЕ НА ТОЧКА В ЕСТЕСТВЕНА КООРДИНАТНА СИСТЕМА



Фиг. 3.3. Оскулачна окръжност

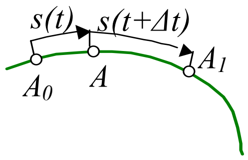
Граничното положение на окръжност минаваща през точка A и други две точки B_1 и B_2 от траекторията (фиг. 3.3) при тяхното безкрайно приближаване към точка A се нарича **оскулачна окръжност**. Центъра на оскулачната окръжност точка C се нарича **център на кривина**. Радиусът ρ на оскулачната окръжност се нарича **радиус на кривина**. Дължината на дъгата между точки B_1 и B_2 е

$$\overset{\frown}{B_1B_2}=\Delta s=\rho\Delta\alpha, \tag{3.5}$$

от където след преминаване към граничен преход е изразен радиусът на кривина на траекторията

$$\rho=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta\alpha}=\frac{ds}{d\alpha}\,. \tag{3.6}$$

В естествена координатна система положението на точката се задава чрез криволинейната абсциса $s=s(t)$, която представлява дължината на кривата, мерена от дадена нейна начална точка A_0 (фиг. 3.4).



Фиг. 3.4. Естествени координати на точка в равнината

Скоростта на точката в естествена координатна система се получава, след като се вземе предвид, че радиус векторът $\vec{r}$ е функция на естествената координата *s*, т. е.

$$\vec{r} = \vec{r}\left[s(t)\right], \qquad (3.7)$$

От правилото за диференциране на сложна функция и формула (3.2) следва

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt}. \qquad (3.8)$$

Векторната производна по естествената координата *s* на радиус вектора $\vec{r}$ е граница на отношението

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \vec{\tau} \qquad (3.9)$$

представлява **единичен вектор на тангентата** и дефинира посоката на скоростта. Така от израза (3.8) е получено

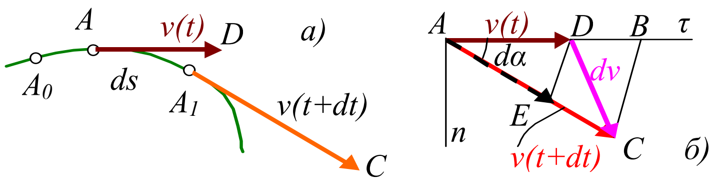
$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} = \dot{s}\vec{\tau}\,. \qquad (3.10)$$

Числената стойност на скоростта в даден момент от времето следва от израза (3.10)

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}\,, \qquad (3.11)$$

от където се вижда, че е равна на първата производна на криволинейната координата *s* на точката спрямо времето.

Ускорението в естествена координатна система се представя чрез две компоненти – тангенциална и нормална. Разглеждат се две безкрайно близки точки *A* и A_1 (фиг. 3.5), съответстващи на моментите от време *t* и *t+dt*. Векторът $d\vec{v} = \vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)$ е безкрайно малкото нарастване на скоростта между двете съседни точки. На фиг. 3.5 *б*) векторите $\vec{v}(t) = \overrightarrow{AD}$ и $\vec{v}(t+dt) = \overrightarrow{A_1C}$ са изобразени с общо начало. Тогава $d\vec{v} = \overrightarrow{DC}$, фигурата *BCDE* при безкрайно малък ъгъл $d\alpha$ може да се разглежда като правоъгълник. От тук



Фиг. 3.5. Тангенциално и нормално ускорение

$$\left|d\vec{v}_\tau\right| = EC = DB = AC - AD = dv\,, \qquad (3.12)$$

където *dv* е елементарното нарастване на числената стойност на скоростта. Понеже границата на дъгата към хордата е равна на единица, *ED* може да се разглежда като елементарна дъга с радиус *AD* дължината, на която се определя като произведение от радиуса и централния ъгъл. Нормалната компонента на нарастването на скоростта е

$$\left|dv_n\right| = DE = BC = AD.d\alpha = v d\alpha\,. \qquad (3.13)$$

С помощта на формула (3.6) изразът (3.13) се преобразува в

$$\left|dv_n\right| = v d\alpha = v\frac{ds}{\rho}\,. \qquad (3.14)$$

Тангенциалната и нормална компонента на ускорението се получават от изразите (3.12) и (3.14) след деление на *dt*:

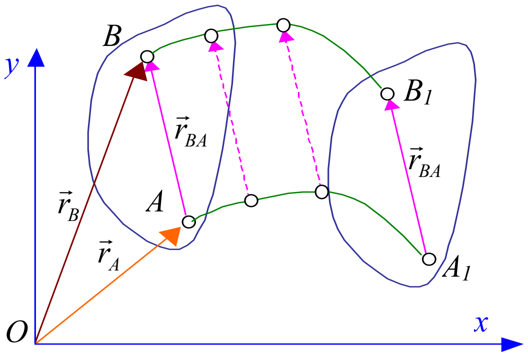
$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}\,; \qquad (3.15)$$

$$a_n = v\frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt} = \frac{v^2}{\rho}\,. \qquad (3.16)$$

Така се доказа, че компонентата на ускорението по тангентата наречено **тангенциално ускорение** е равна на първата производна на числената стойност на скоростта (втората производна на естествената координата) спрямо времето, а нормалната компонента наречена **нормално ускорение** е равна на квадрата на скоростта разделена на радиуса на кривина на траекторията в дадената точка от кривата.

3.3 ТРАНСЛАЦИОННО ДВИЖЕНИЕ НА ТЯЛО

Транслационно се нарича такова **движение** на твърдо тяло, при което произволна права, построена в това тяло се премества, оставайки успоредна на първоначалното си положение. При транслационното движение всички точки на тялото описват еднакви траектории и имат във всеки момент от времето еднакви по модул и направление скорости и ускорения. Това движение е частен случай на равнинното движение.



Фиг. 3.6. Транслационно движение

От фиг. 3.6 следва

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{BA}\,, \qquad (3.17)$$

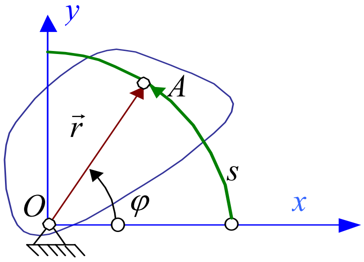
където съгласно определението за транслационно движение $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_{BA}$ е постоянен вектор. След диференциране на (3.17) спрямо времето се получава:

$$\dot{\vec{r}}_A = \dot{\vec{r}}_B\,;\ \vec{v}_A = \vec{v}_B\,; \qquad (3.18)$$

$$\ddot{\vec{r}}_A = \ddot{\vec{r}}_B\,;\ \vec{a}_A = \vec{a}_B\,. \qquad (3.19)$$

3.4. РОТАЦИОННО ДВИЖЕНИЕ НА ТЯЛО ОКОЛО НЕПОДВИЖНА ОС

Ротационното движение около неподвижна ос е вторият частен случай на равнинно движение. При него две произволни точки, принадлежащи на тялото остават неподвижни по време на движението. Минаващата през двете неподвижни точки ос се нарича ос на въртене (ротация). В произволна перпендикулярна на оста на ротация равнина това движение може да се разглежда като ротация на сечение от тялото около неподвижна точка *O* (фиг. 3.7).



Фиг. 3.7. Ротационно движение

Положението на тялото се определя от обобщената координата φ. Траекторията на точка *A* е окръжност с радиус $r = OA$. Естествената й координата е $s = r\varphi$, а скоростта е

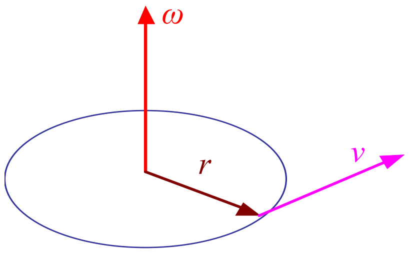
$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt} = r\omega\,. \qquad (3.20)$$

Тук $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}\left[\dfrac{rad}{s}\right]$ се нарича ъглова скорост на звеното.

В техниката за ъгловата скорост се използва и мярката честота на въртене *n* (обороти за минута) с дименсия [*rpm*] или [min^{-1}]. Връзката между двете е

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \qquad (3.21)$$

Ъгловата скорост притежава характеристики, които са основание да бъде представена като вектор. **Векторът ъглова скорост** има модул равен на числената стойност на ω. По направление е перпендикулярен на равнината на ротация и посоката е такава, че погледнато



Фиг. 3.8. Вектор ъглова скорост

от върха на вектора, въртенето да е по посока обратна на часовата стрелка. Като се ползва векторното представяне на ъгловата скорост, формула (3.20) придобива вида

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \,. \tag{3.22}$$

От формула (3.22) се вижда, че трите вектора $\vec{r}$, $\vec{v}$ и $\vec{\omega}$ образуват дясно ориентирана координатна система (фиг. 3.8), което може да се ползва като правило за определяне на посоката на вектора на ъгловата скорост.

Ускорението на произволна точка A от разглежданото сечение на тялото се намира след диференциране на скоростта (3.22) спрямо времето

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \,. \tag{3.23}$$

Първият член на горния израз е тангенциалното ускорение на точката

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \,, \tag{3.24}$$

където

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{3.25}$$

се нарича **ъглово ускорение** на тялото. Това е вектор, който има свойства аналогични на вектора $\vec{\omega}$. Дименсията на ъгловото ускорение е [s^{-2}].

Вторият член на формула (3.23) се преобразува, като се вземе предвид, че $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, което след заместване води до двойното векторно произведение

$$\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) = \vec{\omega}.\left(\vec{\omega}.\vec{r}\right) - \vec{r}.\left(\vec{\omega}.\vec{\omega}\right) = -\omega^2 \vec{r} \,, \tag{3.26}$$

което е нормалното ускорение

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r} \tag{3.27}$$

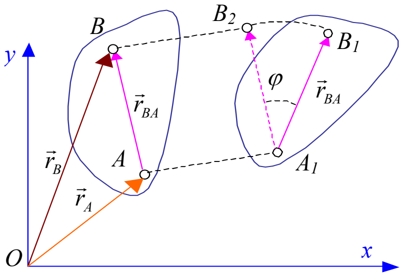
на точката. Окончателно за ускорението на точка A се получава

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r} \,. \tag{3.28}$$

Тангенциалното ускорение показва как скоростта се изменя по модул. Насочено е по тангентата (перпендикулярно на радиуса) и може да бъде нула, ако ротацията е равномерна ($\omega = const$). Нормалното ускорение е насочено винаги към центъра на ротация точка O. Това ускорение дава информация за изменението на скоростта на точката по посока.

3.5 РАВНИННО ДВИЖЕНИЕ НА ТЯЛО

Общо равнинно движение извършва звено, което се движи успоредно на дадена неподвижна равнина, няма неподвижна точка и всяка произволна отсечка от него променя направлението си. На фиг. 3.9 са показани две положения на звено, извършващо общо равнинно движение. Неподвижно свързаната със звеното отсечка $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_{BA}$ преминава от положение AB в положение A_1B_1. Това движение може да се представи като сума от две прости движения. Първото е транслационно, при което отсечката AB се премества успоредно на себе си в положение A_1B_2. Второто движение е ротация около точката A_1, при



Фиг. 3.9. Транслационно движение

което отсечката се завърта на ъгъл φ от положение A_1B_2 до A_1B_1. За разлика от транслационното движение тук векторът $\vec{r}_{BA}$ променя посоката си. След диференциране спрямо времето на векторното равенство

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{BA}\,, \tag{3.29}$$

са получени изразите за скоростта на точка B

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}\,, \tag{3.30}$$

където

$$\vec{v}_{BA} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}\,. \tag{3.31}$$

Скоростта $v_A = \dot{\vec{r}}_A$ се нарича **преносна скорост**. Скоростта $v_{BA} = \dot{\vec{r}}_{BA}$ се нарича **релативна скорост**. Релативната скорост на точка B спрямо A не може да има компонента по отсечката AB, защото звеното е абсолютно твърдо. От тук следва, че релативната скорост е перпендикулярна на AB. След още едно диференциране се получава ускорението на точка B

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}\,, \tag{3.32}$$

където $\vec{a}_A$ се нарича **преносно ускорение**, а $\vec{a}_{BA}$ - **релативно**. Тъй като релативното движение на точка B спрямо A е по окръжност, то

$$\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^{\,n} + \vec{a}_{BA}^{\,t}\,. \tag{3.33}$$

Големината на нормалната компонента следва от израза

$$a_{BA}^{n} = \omega^2 r_{BA} = \frac{v_{BA}^2}{r_{BA}}\,, \tag{3.34}$$

което следва от векторната релация

$$\vec{a}_{BA}^{\,n} = -\omega^2 \vec{r}_{BA}\,. \tag{3.35}$$

Модулът на тангенциалното релативно ускорение е

$$a_{BA}^{t} = \varepsilon\, r_{BA}\,. \tag{3.36}$$

Тангенциалното ускорение като вектор се получава от израза

$$\vec{a}_{BA}^{\,t} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{BA}\,. \tag{3.37}$$

Тук $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ са съответно ъгловата скорост и ъгловото ускорение на звеното.

По направление нормалната компонента $\vec{a}_{BA}^{\,n}$ е винаги успоредна на AB и е насочена от точка B към точка **А**. Тангенциалното ускорение $\vec{a}_{BA}^{\,t}$ е перпендикулярно на AB, а посоката му зависи от посоката на ъгловото ускорение $\vec{\varepsilon}$. От формула (3.37) е видно, че трите вектора $\vec{r}$, $\vec{a}_{BA}^{\,t}$ и $\vec{\varepsilon}$ трябва да образуват дясно ориентирана координатна система.