4.0 РАВНИННО ДВИЖЕНИЕ ПРИ КОНТУРНИ И ЛОСТОВИ МЕХАНИЗМИ, ПЛАНОВЕ НА СКОРОСТИТЕ И УСКОРЕНИЯТА, ПРИМЕРИ

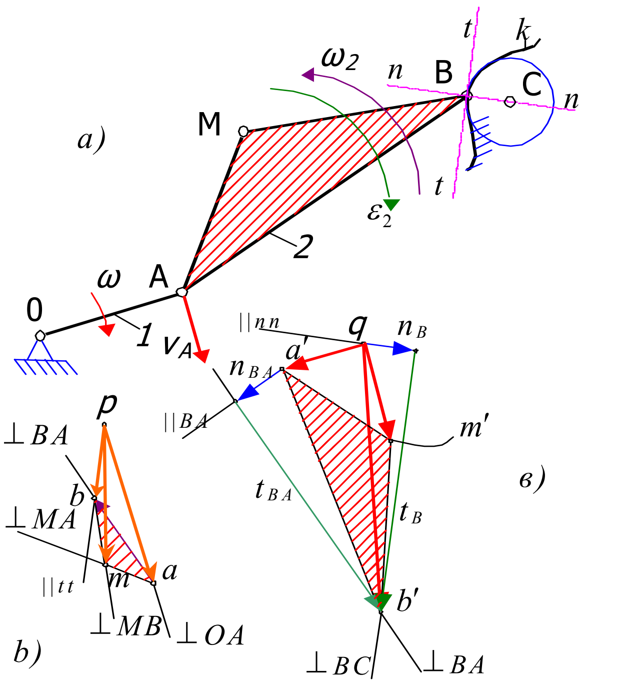
Механизмите са съставени от звена, свързани с кинематични двоици. В зависимост от вида на кинематичните двоици и начина на свързване на звената се създава структура на механизма, която е определяща за кинематичния анализ. При равнинните механизми звената извършват един от разгледаните три вида движения – равнинно и частните му случаи ротация и транслация. Прости движения ротация или транслация притежават съответно звената, свързани със стойката чрез въртяща двоица или плъзгач. Звената, на които всички кинематични двоици са подвижи, извършват равнинно движение. В някои механизми, например кулисния, където има подвижен плъзгач, трябва да се разгледа и относителното движение на плъзгача спрямо звеното, с което е свързан. Такива примери ще бъдат изяснени в следващата тема. Звената, които са свързани само с въртящи подвижни двоици например мотовилките на шарнирния четиризвенник и коляномотовилковия механизъм извършват равнинно движение. Тук ще бъдат разгледани механизми с прости структури, при които звената извършват равнинно движение и не е необходимо да се използват методи за анализ на релативно движение. Въпреки, че в тези механизми няма плъзгач, свързан към подвижно звено (кулиса), може да се постави задачата за кинематиката относителното движение на точка от едно звено спрямо произволно друго звено.

4.1 ПЛАНОВЕ НА СКОРОСТИТЕ И УСКОРЕНИЯТА

План на скоростите (ускоренията) е равнина, в която на всяка точка съответства скорост (ускорение) на точка от звено. Планът на скоростите (ускоренията) е графо-аналитично решение на кинематичните векторни уравнения.

При съставяне на векторните уравнения на скоростите и ускоренията, освен зависимостите от равнинното движение е необходимо да се имат предвид и ограниченията, които налагат двоиците и как се отразява това на скоростите и ускоренията. Във въртяща двоица за двете свързани звена са равни положенията, скоростите и ускоренията за центъра на двоицата. Ако едно от тези звена е стойка, следва, че скоростите и ускоренията на общата въртяща двоица за двете звена са равни на нула. Плъзгащата кинематична двоица налага равни ориентации, ъглови скорости и ъглови ускорения на двете свързани звена. Когато едно звено образува плъзгаща кинематична двоица със стойката, следва, че неговите ъглова скорост и ъглово ускорение са нули. При контурните кинематични двоици скоростта е по направление на тангентата в точката на допиране, а нормалното ускорение може да се изчисли чрез радиуса на кривина на контура по формула (3.16).

На фиг. 4.1 е показан контурен механизъм с една степен на свобода, съставен от две подвижни звена. Дадени са размерите на звената OA, AB, BM, AC, радиуса на кривина $\rho = BC$ на неподвижен контур k в точката на допиране B. Положенията на неподвижните точки и звената са зададени чрез мащабно начертаната кинематична схема (фиг. 4.1. а), която се нарича **план на положението** на механизма. Отношението $k_l = l_i / \bar{l}_i$ [m/mm] на действителните дължини l_i на звената към техните мащабни образи $\bar{l}_i$ се нарича мащабен модул на дължините. Дадена е ъгловата скорост на звено 1 ω=*const*. Търсят се скоростите и ускоренията на точки B и M, ъгловата скорост и ъгловото ускорение на звено 2.



Фиг. 4.1. Планове на скоростите и ускоренията

Задачата е решена чрез плановете на скоростите и ускоренията. Анализът на кинематичната схема дава следната допълнителна информация: скоростта и ускорението на точка O от звено 1 са съответно $\vec{v}_o = 0$ и $\vec{a}_o = 0$; скоростта на точка A от звено 1 е равна на скоростта на същата точка от звено 2, т.е. $\vec{v}_{A1} = \vec{v}_{A2} = \vec{v}_A$; същото се отнася и за ускоренията в тази точка $\vec{a}_{A1} = \vec{a}_{A2} = \vec{a}_A$;

известно е направлението на скоростта на точка B ($\|tt$); ъгловото ускорение на звено 1 е $\vec{\varepsilon} = 0$, защото $\omega=const$;

Следващият етап от решението на задачата е съставяне на векторните уравнения на скоростите. За така дадената кинематична схема е изведено

$$v_A = \omega.OA\,, \qquad (\perp OA) \tag{4.1}$$

$$\underset{\|tt}{\underline{\vec{v}_B}} = \underline{\underline{\vec{v}_A}} + \underset{\perp BA}{\underline{\vec{v}_{BA}}}\,. \tag{4.2}$$

Първото уравнение може да се запише и като векторно произведение, следващо от формула (3.22). Посоката на $\vec{v}_A$ (фиг. 4.1. а) се определя от посоката на ъгловата скорост $\vec{\omega}$. Във векторното уравнение (4.2) подчертаните с една черта вектори са неизвестни по модул, но с известно направление. Само векторът $\vec{v}_A$ е известен по големина и посока. Прието е известните вектори в тези уравнения да се подчертават с две линии. Понеже векторното уравнение (4.2) има само две неизвестни, то може да бъде решено графично или аналитично.

Построяването на плана на скоростите започва с избор на положение на нулев вектор - точка p, наречена **полюс на скоростите** (фиг.4.1 б). През полюса p се начертава мащабната дължина на скоростта на точка A, ориентирана перпендикулярно на OA. Прието е върхът на вектора на мащабната скорост да се означава със малка буква, съответстваща точката, чиято скорост е намерена, означена със същата главна буква в плана на положенията. Дължината на първия вектор може да се избере произволно, но това дефинира мащаба на скоростите

$$k_v = \frac{v_A}{\overline{pa}}\left[\frac{m}{s.mm}\right]. \tag{4.3}$$

За мащабната скорост на точка B през точка а е построена права, перпендикулярна на AB, а през полюса p е прекарана права успоредна на тангентата tt. Пресечната точка на двете прави е означена с b, като лесно може да се докаже, че

$$\vec{v}_B = k_v\,\overrightarrow{pb}\,. \tag{4.4}$$

Големината на ъгловата скорост на звено 2 следва от

$$\omega_2 = \frac{v_{BA}}{BA} = \frac{ba.k_v}{BA} = \frac{ba.k_v}{\overline{\overline{BA}}k_l}\,. \tag{4.5}$$

Посоката на ω_2 може да се определи, като векторът $\overrightarrow{ab}$ се пренесе успоредно в точка B. От посоката му се вижда как точка B се завърта спрямо A. За конкретния случай се установява, че ω_2 е положителна, т.е. звено 3 се върти обратно на часовата стрелка. Скоростта на точка M от звено 2, следва от системата уравнения

$$\vec{v}_M = \underline{\underline{\vec{v}_A}} + \underset{\perp MA}{\underline{\underline{\vec{v}_{MA}}}}\,, \tag{4.6}$$

$$\vec{v}_M = \underline{\underline{\vec{v}_B}} + \underset{\perp MB}{\underline{\underline{\vec{v}_{MB}}}}\,, \tag{4.7}$$

графичното решение, на която е аналогично на построяването на подобните триъгълници $\Delta ABM \infty \Delta abm$. Двата триъгълника са завъртени на 90˚. Скоростта на точката M е

$$\vec{v}_M = k_v\,\overrightarrow{pm} \tag{4.8}$$

Планът на ускоренията (фиг. 4.1. в) се построява на базата на векторните уравнения на ускоренията. Понеже ъгловото ускорение $\vec{\varepsilon}_1$ на звеното 1 по условие е нула, следва, че точка A притежава само нормално ускорение насочено към точка O

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n = \omega^2 OA \qquad (\| OA). \tag{4.9}$$

Ускорението на точка B следва от векторните уравнения

$$\vec{a}_B = \underline{\underline{\vec{a}_A}} + \underset{\substack{\| BA \\ \frac{v_{BA}^2}{BA}}}{\underline{\vec{a}_{BA}^{\,n}}} + \underset{\perp BA}{\underline{\vec{a}_{BA}^{\,t}}} \tag{4.10}$$

$$\vec{a}_B = \underset{\substack{\| nn \\ \frac{v_B^2}{BC}}}{\underline{\vec{a}_B^{\,n}}} + \underset{\| tt}{\underline{\vec{a}_B^{\,\tau}}} \,. \tag{4.11}$$

Уравнение (4.10) описва зависимостите за ускоренията при равнинно движение на звено 2. Векторът на релативното нормално ускорение $\vec{a}_{BA}^{\,n}$ е прието да се подчертава с една цяла и една прекъсната линия, ако големината му се определя чрез изчисление, както е в случая

$$\vec{a}_{BA}^{\,n} = \frac{v_{BA}^2}{BA} \,. \tag{4.12}$$

Този вектор е напълно определен, след като са известни скоростите и за него се знае, че е насочен от точка B към A. За релативното тангенциално ускорение a_{BA}^t се знае само направлението – перпендикулярно на BA, но големината му е неизвестна, защото все още е неизвестна посоката и големината на ъгловото ускорение $\vec{\varepsilon}_2$ на звено 2. Неизвестните в уравнение (4.10) са три – големината и посоката на $\vec{a}_B$ и големината на $\vec{a}_{BA}^{\;t}$. Понеже едно векторно уравнение е еквивалентно на две алгебрични, броят на неизвестните е по-голям от броя на уравненията, от което следва, че уравнение (4.10) няма определено на решение.

Второто векторно уравнение (4.11) за ускорението на точка B следва от определеността на траекторията й, която внася контурната двоица. Модулът на нормалната компонента a_B^n при известна скорост $\vec{v}_B$ се изчислява по формулата

$$a_B^n = \frac{v_B^2}{\rho} \,. \tag{4.13}$$

За това ускорение е известно още, че е насочено от точката на допиране B към центъра на кривина точка C ($\vec{a}_B^{\,n} \| BC$). За тангенциалното ускорение $\vec{a}_B^{\,\tau}$ на точка B е известно само направлението – насочено е по тангентата tt ($\vec{a}_B^{\,\tau} \| tt$). Приравняването на двете десни страни на уравнения (4.10) и (4.11) елиминира неопределеността на решението и води до едно векторно уравнение с две неизвестни.

Планът на ускоренията е построен на фиг. 4.1 в). Нулевият вектор или полюсът при плана на ускоренията се бележи с буква q. Тази точка е образ на всички ускорения с големина нула. Първото построение е векторът $\overrightarrow{qa'} \| OA$, чрез който се изобразява мащабно ускорението на точка A. Дължината на този вектор определя мащабния модул на ускоренията

$$k_a = \frac{a_A}{qa} = \frac{\omega^2 OA}{qa} \left[\frac{m}{s^2 mm} \right]. \tag{4.14}$$

Пресметнати са големините на нормалните ускорения в съответствие с формули (4.12) и (4.13) и след това са изчислени техните мащабни дължини в милиметри

$$n_{BA} = \frac{a_{BA}^n}{k_a} \,, \tag{4.15}$$

$$n_B = \frac{a_B^n}{k_a} \,. \tag{4.16}$$

На плана на ускоренията мащабното релативно нормално ускорение $\vec{n}_{BA}$ е начертано с начало точка a', успоредно на BA, с посока от B към A. Образът на пълното нормално ускорение $\vec{n}_B$ е начертан с начало полюса q, успоредно на BC, насочен от B към C. Пресечната точка b' на двете тангенциални направления, построени от върховете на нормалните ускорения дава решението на системата (4.10), (4.11). Ускорението на точка B е

$$\vec{a}_B = k_a \overrightarrow{qb'} . \tag{4.17}$$

Тангенциалните ускорения се пресмятат чрез изразите

$$\vec{a}_{BA}^{t} = k_a \vec{t}_{BA} , \tag{4.18}$$

$$\vec{a}_B^{\tau} = k_a \vec{t}_B . \tag{4.19}$$

Модулът на ъгловото ускорение $\vec{\varepsilon}_2$ на звеното 2 се определя чрез

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^{t}}{BA} . \tag{4.20}$$

Посоката на $\vec{\varepsilon}_2$ зависи от посоката на вектора $\vec{t}_{BA}$, който пренесен успоредно в точка B, условно завърта звено 2 около точка A по посока на $\vec{\varepsilon}_2$. В случая ъгловото ускорение $\vec{\varepsilon}_2$ е отрицателно (по посока на часовата стрелка).

Ускорението на точка M може да бъде намерено след диференциране на системата векторни уравнения (4.6), (4.7), от което следва

$$\vec{a}_M = \underline{\underline{\vec{a}_A}} + \underset{\substack{\| MA \\ \frac{v_{MA}^2}{MA}}}{\underline{\vec{a}_{MA}^{n}}} + \underset{\perp MA}{\underline{\vec{a}_{MA}^{t}}} , \tag{4.21}$$

$$\vec{a}_M = \underline{\underline{\vec{a}_B}} + \underset{\substack{\| MB \\ \frac{v_{MB}^2}{MB}}}{\underline{\vec{a}_{MB}^{n}}} + \underset{\perp MB}{\underline{\vec{a}_{MB}^{t}}} . \tag{4.22}$$

Както при скоростите и тук може да се докаже, че графичното решение на системата векторни уравнения (4.21), (4.22) е аналогично на построяване на триъгълник в плана на ускоренията, подобен на съответния от плана на положенията. За разликата от плана на скоростите в общия случай при плана на ускоренията подобните триъгълници са завъртени на ъгъл различен от 90˚. За да се избегне двузначността на решението двата триъгълника трябва да са еднакво ориентирани. За конкретния случай вместо системата (4.21), (4.22) може да се запише

$$\vec{a}_M \Rightarrow \Delta ABM \infty \Delta a'b'm' . \tag{4.23}$$

За построяване на подобните триъгълници са използвани пропорциите

$$\frac{AB}{a'b'} = \frac{AM}{a'm'} = \frac{BM}{b'm'} , \tag{4.24}$$

чрез които са изчислени

$$a'm' = \frac{a'b'}{AB} AM , \tag{4.25}$$

$$m'b' = \frac{a'b'}{AB} MB . \tag{4.26}$$

Ускорението $\vec{a}_M$ се получава, след като точка m' се свърже полюса q и се вземе предвид зависимостта

$$\vec{a}_M = k_a \overrightarrow{qm'} . \tag{4.27}$$

Разгледаният механизъм е кинематично еквивалентен на четиришарнирен механизъм с променлива дължина на звеното BC. Ако криволинейния контур е дъга от окръжност $BC=const,$ механизмът ще притежава същите свойства, като тези на шарнирен четиризвенник.

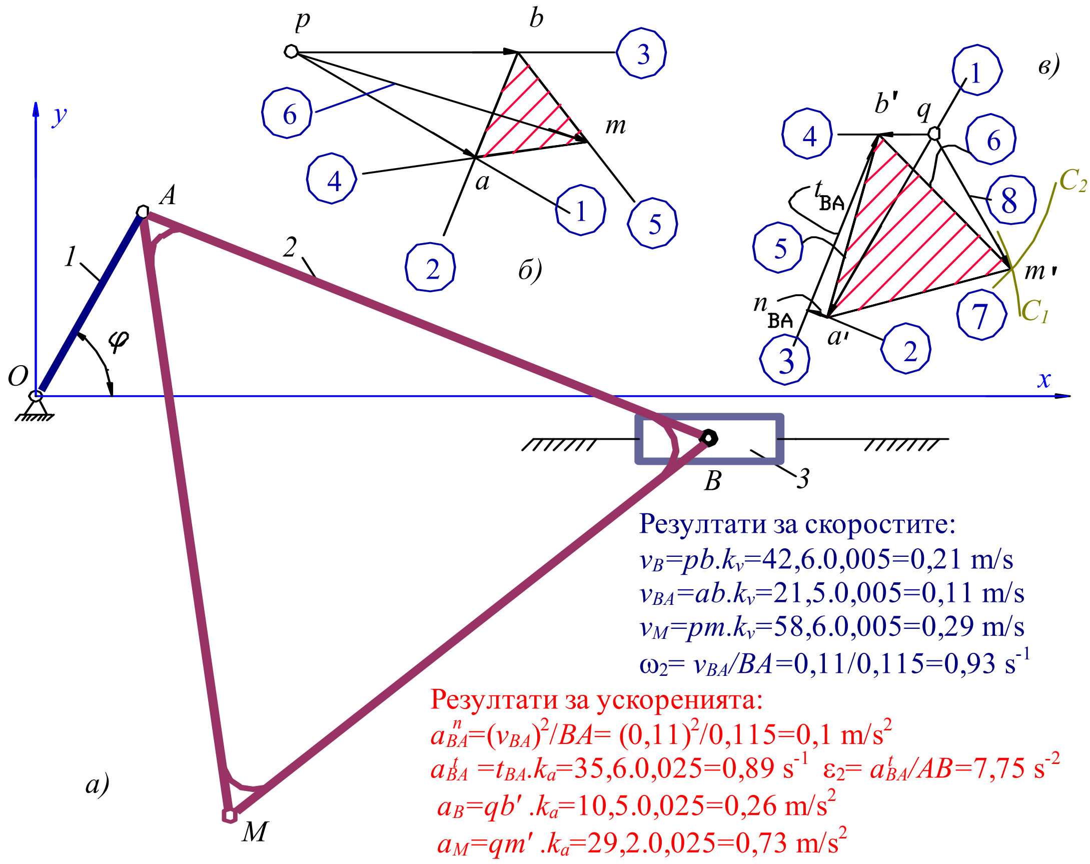
Пример 4.1. Коляномотовилков механизъм. На фиг. 4.2 *а*) е даден план на положението, ъгълът и ъгловата скорост на коляното. Търсят се скоростите и ускоренията на точки B и M, ъгловата скорост ω_2 и ъгловото ускорение ε_2 на мотовилката 2. Векторните уравнения и алгоритъмът на графичните построения е описан в таблицата, а плановете на скоростите и ускоренията са дадени съответно на фиг. 4.2 *б*) и *в*).

Скорости				**Ускорения**			
Векторни уравнения	Графичен алгоритъм			Векторни уравнения	Графичен алгоритъм		
$v_A = \omega.OA$	1	$pa \perp OA \Rightarrow k_V$		$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n = \omega^2 OA$	1	$qa' \parallel OA \Rightarrow k_a$	
$\underset{\parallel Ox}{\vec{v}_B} = \underline{\underline{\vec{v}_A}} + \underset{\perp BA}{\vec{v}_{BA}}$	2 3	$\perp BA$ $\parallel Ox$	$\Rightarrow b;$ $\vec{v}_B = k_v \overrightarrow{pb}$	$\vec{a}_B = \underline{\underline{\vec{a}_A}} + \underset{\parallel BA}{\vec{a}_{BA}^n} + \underset{\perp BA}{\vec{a}_{BA}^t}$	2 3 4	$n_{BA} \parallel BA$ $\perp BA$ $\parallel Ox$	$\Rightarrow b', \vec{t}_{BA}$ $\vec{a}_B = k_a \overrightarrow{qb'}$ $\vec{a}_{BA}^t = k_a \vec{t}_{BA}$
$\Delta ABM \infty \Delta abm$	4 5	$\perp AM$ $\perp BM$	$\Rightarrow m$	$\Delta ABM \infty \Delta a'b'm'$	5 6 7	$a'b'$ $C_1(a', a'b')$ $C_2(b', a'b')$	$\Rightarrow m'$
$\vec{v}_M = k_v \overrightarrow{pm}$	6	pm		$\vec{a}_M = k_a \overrightarrow{qm'}$	8	$q\,m'$	

Начални данни
OA=40 mm
AB=AM=BM =115 mm
y_B=-8 mm
$\varphi = 60^\circ$
$\omega = -5$ s^{-1}

Данни от плана на скоростите
pa =40 mm
k_v= 0,005 m/(s.mm)
pb =42,63 mm
ab=21,54 mm
pm =58,45 mm

Данни от плана на ускоренията
qa'=40 mm
k_a=0,025 m/(s .mm)
qb'=10,51 mm
t_{BA} = 35,68 mm
qm'=29,22 mm



Резултати за скоростите:
$v_B = pb.k_v$=42,6.0,005=0,21 m/s
$v_{BA} = ab.k_v$=21,5.0,005=0,11 m/s
$v_M = pm.k_v$=58,6.0,005=0,29 m/s
$\omega_2 = v_{BA}/BA$=0,11/0,115=0,93 s^{-1}

Резултати за ускоренията:
$a_{BA}^n = (v_{BA})^2/BA$= (0,11)^2/0,115=0,1 m/s^2
$a_{BA}^t = t_{BA}.k_a$=35,6.0,025=0,89 s^{-1} $\varepsilon_2 = a_{BA}^t/AB$=7,75 s^{-2}
$a_B = qb'.k_a$=10,5.0,025=0,26 m/s^2
$a_M = qm'.k_a$=29,2.0,025=0,73 m/s^2

Фиг. 4.2 Планове на скоростите и ускоренията на коляномотовилков механизъм: а) план на положението; б) план на скоростите; в) план на ускоренията

Какви са посоките на векторите ъглова скорост ω_2 и ъглово ускорение ε_2?