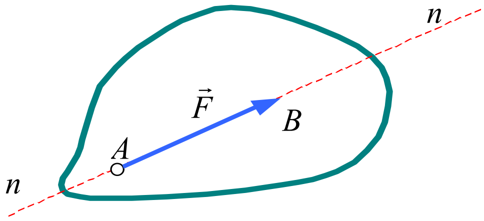
8.0 СИЛИ В МАШИНИТЕ – АКСИОМИ, ВИДОВЕ СИЛИ, МОМЕНТ НА СИЛА, ДВОИЦА СИЛИ, РЕДУКЦИЯ НА СИСТЕМА СИЛИ, УСЛОВИЯ ЗА РАВНОВЕСИЕ

8. 1 ОСНОВНИ ДЕФИНИЦИИ

Механично взаимодействие е такова действие между материални тела в резултат, на което се получава изменение на движението на тези тела или изменение на тяхната форма (деформация). ***Силата*** е величина, приета за основна мярка на механичните взаимодействия. Примери за механични взаимодействия при машините са съпротивлението на околната среда, взаимодействието между звената в механизмите, теглата на звената.

Силата $\vec{F}$ (фиг.8.1) е векторна величина със следните елементи: 1. Приложна точка A; 2. Директриса (права на действие) nn; 3. Посока (от точка A към точка B); 4.Големина (модул) $\left|\vec{F}\right|, F$.



Фиг. 8.1 Елементи на сила

Мерната единица за сила в системата SI е [N] (Нютон). Един N е сила, която съобщава ускорение 1 m/s^2 на тяло с маса 1kg.

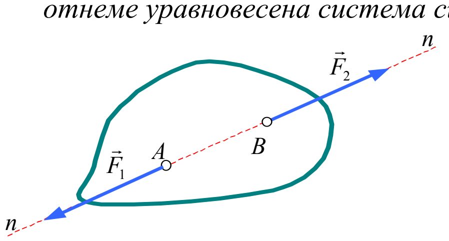
Материална точка или материална система се намира в ***равновесие***, ако точката или всички обекти на материалната система се намират в състояние на покой или се движат равномерно праволинейно с еднаква по големина и направление скорост.

Система от сили се нарича съвкупността от сили действаща на разглежданото тяло. Ако една система от сили действаща на свободно твърдо тяло може да се замени с друга система сили, като не се променя състоянието на покой или движение, в което се намира тялото, то двете системи сили се наричат ***еквивалентни***. ***Равнодействаща*** се нарича силата еквивалентна на дадена система сили.

8.2 АКСИОМИ ЗА СИЛИТЕ

Аксиомите за силите може да се изложат по два начина: 1. Като се изхожда от уравненията на динамиката, които се получават, като следствия на основните закони на механиката; 2) Да се изложи статиката, независимо, изхождайки от някои общи закони на механиката, наричани аксиоми, макар че по същество те не са независими аксиоми, а следствия на тези основни закони на механиката. Тези аксиоми са формулирани в следния вид:

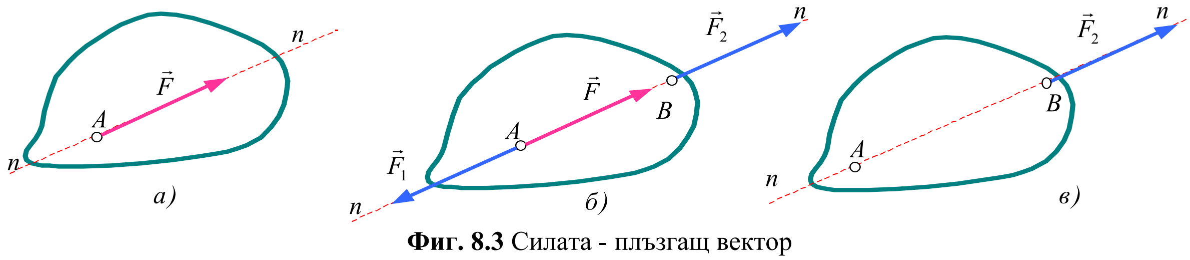
1. *Ако на свободно абсолютно твърдо тяло действат две сили, то тялото се намира в равновесие тогава и само тогава, когато тези сили са равни по модул, имат обща директриса и са с противоположни посоки* (фиг. 8.2).
2. *Действието на система сили върху абсолютно твърдо тяло не се променя, ако се добави или отнеме уравновесена система сили.*



Фиг. 8.2 Първа аксиома за силите

Следствие: *Силата е плъзгащ вектор, т.е. действието ѝ не се изменя, ако силата си премести приложната точка по направление на директрисата.*

Нека върху тяло в точка A действа силата $\vec{F}$ (фиг. 8.3 *а*). В точки A и B лежащи на директрисата на силата $\vec{F}$ е добавена уравновесената система сили $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ (фиг. 8.3 *б*). Понеже $\vec{F}_1$

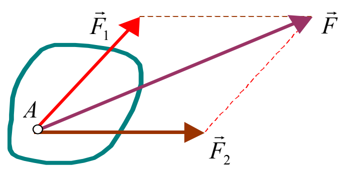


Фиг. 8.3 Силата - плъзгащ вектор

и $\vec{F}$ образуват уравновесена система сили, съгласно втората аксиома може да бъдат отнети заедно без да се промени състоянието на движение на тялото. След отнемането на тези две сили, върху тялото остава да действа само силата $\vec{F}_2$, която е равна на $\vec{F}$, но с приложна точка B (фиг. 8.3 *в*).

Следователно плъзгането на силата по нейната директриса не променя състоянието на покой или движение на тялото.

***3.Правило на паралелограма** – две сили, приложени в една точка на тяло имат равнодействаща, приложена в същата точка и големина равна на диагонала на успоредника, образуван от двете сили и успоредното им пренасяне (фиг. 4).*

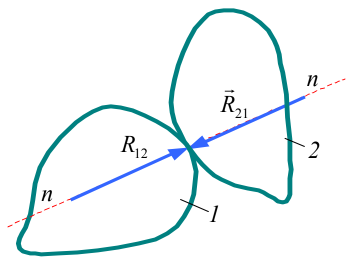


Фиг. 8.4 Правило на паралелограма

Векторът $\vec{F}$, който е равен на диагонала на паралелограма се нарича геометрична сума на векторите $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$: $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$.

*3. **Принцип за равенство на действието и противодействието.** Две тела (звена) си взаимодействат с равно-противоположни сили (фиг.8.5).*

Звено 1 действа върху звено 2 в зоната на контакт със силата $\vec{R}_{12}$.Със същата по големина сила $\vec{R}_{21}$, но обратна по посока, звено 2 действа върху звено 1. Двете сили са равни по големина, противоположни по посоки и имат обща директриса, но в случая не образуват уравновесена система сили, както е на фиг.8.1, защото тук силите са приложени върху две различни звена.



Фиг. 8.5 Принцип за равенство на действието и противодействието

*4. **Принцип на втвърдяването**. Равновесието на деформируемо звено под действието на дадена система сили не се нарушава, ако тялото се приеме за абсолютно твърдо.*

Принципът касае гъвкави звена, като нишки, вериги, ленти ремъци. Това са необходими, но не и достатъчни условия. Например за равновесието на гъвкава нишка под действие на две сили, приложени в краищата ѝ, както при твърдо тяло силите трябва да са равни по големина и противоположни. Тези условия не са достатъчни. За равновесието на нишката е необходимо да се постави допълнително условие за опъващо действие на силите.

8.3 ВИДОВЕ СИЛИ В МАШИНИТЕ

В зависимост решаваните задачи, съществуват различни класификации за видовете сили в машините. Тези класификации са условни и зависят от това каква механична система се разглежда.

Активни сили са тези, които произхождат от околната среда и въздействат на машините. Такива са силите, с които електромагнитното поле въздейства на ротора на двигателя, газовите сили в двигателите с вътрешно горене. Тези сили се подразделят на двигателни и съпротивителни. Съпротивителните са полезни (технологични) или вредни. Действието на вредните сили не се оползотворява и те предизвикват само загуби на енергия.

Реакции в кинематичните двоици – силите, чрез които звената си взаимодействат в зоните на контакт в кинематичните двоици. Условно, реакциите се разделят на идеални и реални. ***Идеални реакции*** се наричат тези които се изчисляват, след като се пренебрегнат силите на триене. Идеалните реакции дават приблизителна информация за силите в кинематичните двоици на механизмите, особено при големи натоварвания на звената. ***Реалните реакции*** се пресмятат с отчитане на силите на триене и реалните конструктивни параметри на кинематичните двоици. При неподвижните конструкции, връзките между отделните елементи се осъществяват чрез комбинации от кинематични двоици, така че да бъдат отнети всички степени на свобода. Силите, с които неподвижната конструкция въздейства на фундамента (стойката) се наричат ***опорни реакции***. При опорните реакции няма сили на триене, защото при връзките на неподвижните конструкции няма относително движение.

Масови сили – обемно разпределени сили дължащи се на ускоренията на елементарните маси на звената. Такива са: ***инерционните сили***, които са следствие на движенията звената с ускорения; ***тегловни сили*** произтичат от действието на гравитационното земно поле.

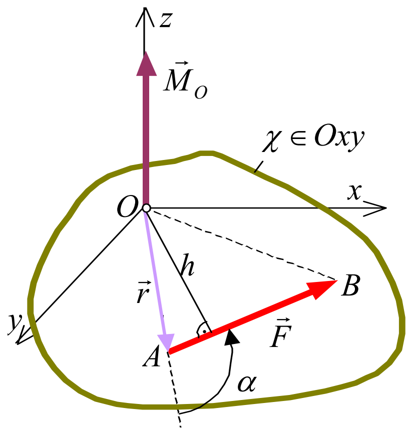
8.4 МОМЕНТ НА СИЛА СПРЯМО ТОЧКА, ДВОИЦА СИЛИ

Ако под действие на приложена сила, едно звено се завърта около неподвижна точка, то момента на силата около тази точка характеризира въртеливия ефект на тази сила.

***Моментът на силата** $\vec{F}$ **спрямо точка** O* (фиг. 8.6) се нарича, вектора равен на векторното произведение на радиус-вектора $\vec{r}$, построен от точка O до точка A, в която е приложена силата $\vec{F}$:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} \tag{8.1}$$

Ако силата $\vec{F}$ и точка O принадлежат на равнината Oxy, то моментът $\vec{M}_O$ на силата $\vec{F}$, спрямо точка O ще бъде насочен по оста Oz. Съгласно правилото за векторно произведение, ако погледнато от върха на ос z силата $\vec{F}$ се стреми да завърти тялото около точка O в посока, обратна на въртенето на часовата стрелка, то посоката на момента $\vec{M}_O$ ще е съвпада с тази на Oz, т.е. ще бъде положителна.



Фиг. 8.6 Момент на сила спрямо точка

Големината (модулът) на момента се изчислява с израза

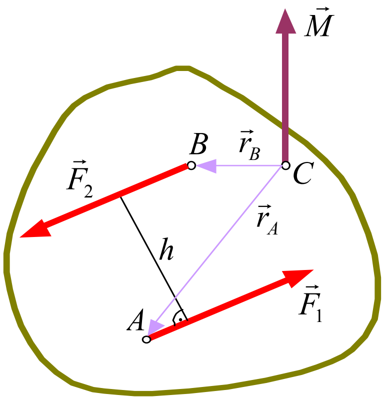
$$\left|\vec{M}_O\right| = M_O = rF\sin\alpha = Fh, \tag{8.2}$$

където α е насоченият ъгъл между векторите $\vec{r}$ и $\vec{F}$, h се нарича ***рамо на силата*** и е разстоянието (дължината на перпендикуляра) от точка O до силата $\vec{F}$. Мерната единица за момент на сила в системата SI е [Nm].

От определението за момент на сила спрямо точка следват следните свойства:

1. Ако се премести приложната точка на силата по направление на линията й на действие, то моментът на силата спрямо точка не се променя.
2. Моментът на силата спрямо точка е равен на нула, когато линията на действие минава през тази точка (т.е. рамото $h=0$), или ако $\vec{F}=0$.
3. Модулът на момента на сила спрямо точка е равен на удвоената площ на триъгълника OAB, със страна силата $\vec{F}$ (AB) и връх точка O.

Двоица сили образуват две еднакви по големина и противоположни по посока сили, които нямат обща директриса и действат върху едно тяло (Фиг. 8.7).



Фиг. 8.7 Двоица сили

Равнината минаваща през директрисите на силите се нарича ***равнина на действие*** на двоицата.

Действието на двоицата сили върху твърдото тяло се изразява във въртящ ефект, характеризиращ се с момент на двоицата

$$M = F_1 h, \tag{8.3}$$

където h се нарича ***рамо на двоицата***. Моментът на двоицата се дефинира с:

1. Модул равен на произведението $F_1 h$.
2. Положение в равнината на действие на двоицата.
3. Направление на завъртането на двоицата в равнината на действие.

Тези свойства показват, че както моментът на сила спрямо точка така и моментът на двоицата сили също е векторна величина.

Моментите на силите $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ спрямо произволна точка C се изразяват със зависимостите

$$\vec{M}_C\left(\vec{F}_1\right) = \overrightarrow{CA} \times \vec{F}_1 = \vec{r}_A \times \vec{F}_1 \tag{8.4}$$

$$\vec{M}_C\left(\vec{F}_2\right) = \overrightarrow{CB} \times \vec{F}_2 = \vec{r}_B \times \vec{F}_2 \tag{8.5}$$

Сумата от двата момента

$$\vec{M} = \vec{r}_A \times \vec{F}_1 + \vec{r}_B \times \vec{F}_2 = \vec{r}_A \times (-\vec{F}_2) + \vec{r}_B \times \vec{F}_2 = \left(\vec{r}_B - \vec{r}_A\right) \times \vec{F}_2 = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}_2 \tag{8.6}$$

не зависи от положението на точка ***C*** и по модул може да бъде представена с израза

$$M = AB.F_2 \sin(\widehat{\overrightarrow{AB}, \vec{F}_2}) = F_2 h = F_1 h \tag{8.7}$$

Полученият резултат показва, че: 1) векторно моментът на двоицата се изразява чрез формула (8.6); 2) моментът на двоица сили е свободен вектор[4] – може да бъде приложен в произволна точка на

[4] Векторите са три типа: ***свързани*** – физически приложени в определена точка от пространството; ***плъзгащи***, които може да се преместват по направление на някаква права (линия на действие, директриса); ***свободни*** – физически не свързани с определена точка от пространството.

равнината на действие 3) моментът на двоицата сили е перпендикулярен на равнината на действие и е насочен съгласно правилото за векторно произведение, следващо от формула 8.6.

8.5 РЕДУКЦИЯ НА РАВНИННА СИСТЕМА СИЛИ

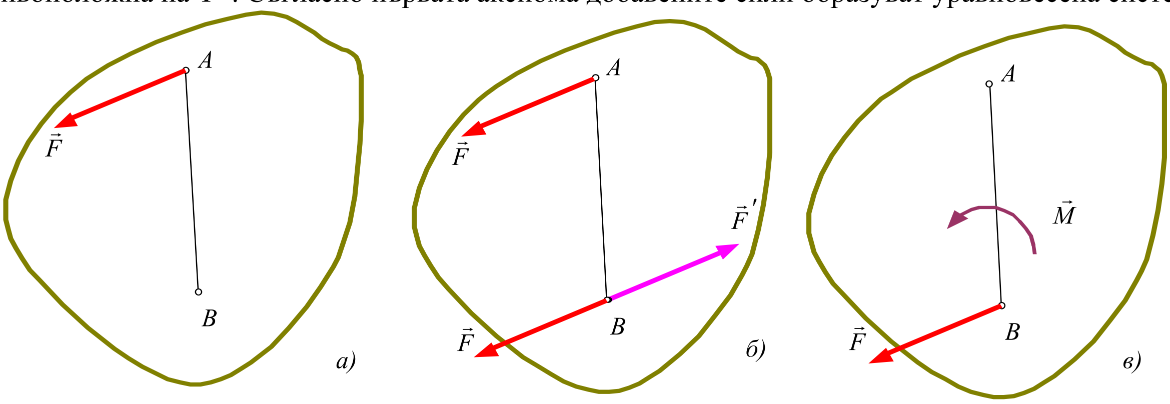
Равнинна система сили се нарича такава система от сили, при която всички сили лежат в една единствена равнина.

Редукция на система от сили е привеждане на системата до една сила и един момент в произволна точка от равнината на твърдото тяло.

Като се използва правилото на паралелограма може да се намери равнодействащата на система от сили, ако е възможно всички сили да се пренесат в една точка. Успоредното пренасяне на сили от една точка на звено в друга се дава със следната ***теорема***:

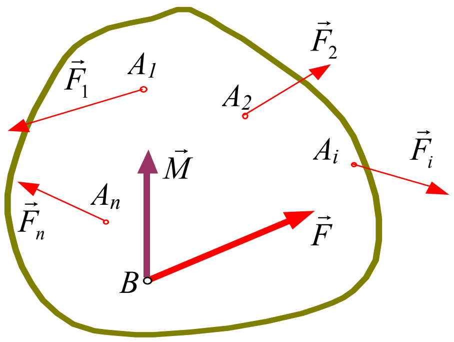
Една сила приложена в точка от абсолютно твърдо тяло се редуцира в друга точка от това тяло, като се пренесе успоредно и се добави момент на двоица сили равен на момента на тази сила спрямо точката, в която се редуцира.

Нека на тяло в точка A е приложена сила $\vec{F}$ (фиг. 8.8 а). Същата по големина и посока сила $\vec{F}$, се прилага в точка B и се уравновесява със силата $\vec{F}'$ (фиг. 8.8 *б*), която е равна по големина и противоположна на $\vec{F}$. Съгласно първата аксиома добавените сили образуват уравновесена система



Фиг. 8.8 Успоредно пренасяне на сила

от сили и новополучената система е еквивалентна на първоначално зададената. Силата $\vec{F}$ приложена в точка А и силата $\vec{F}'$ образуват двоица, поради което тяхното действие може да бъде заменено с момента на тази двоица $\vec{M}_B = \overrightarrow{BA} \times \vec{F}$. Така отпада силата $\vec{F}$ от точка А и силата $\vec{F}'$, като действието им се заменя с това на момента на двоицата им (фиг. 8.8 *в*).Доказа се, че силата $\vec{F}$ може да се пренесе успоредно от точка A в точка B, като се добави моментът на двоица сили равен на момента на силата спрямо точката, в която точката се премества.



Фиг. 8.9 Редуциране на равнинна система сили

От теоремата за успоредно пренасяне на сила следва, че произволна равнинна система от сили може да бъде редуцирана в точка до една сила и един вектор. Равнинната система от сили $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_n$, с приложни точки A_1, A_2, A_n се редуцира в точка B до една сила $\vec{F}$, която се получава след успоредно пренасяне на силите в точка В и прилагане правилото на паралелограма

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \,. \tag{8.8}$$

Съгласно теоремата за успоредно пренасяне на сила за всяка успоредно пренесена сила се добавя и момент

$$\vec{M}_i = \overrightarrow{BA_i} \times \vec{F}_i \,. \tag{8.9}$$

Понеже системата от сили е равнинна, тези моменти са перпендикулярни на равнината на действие на силите. Освен това моментите са свободни колинеарни вектори и може да се приеме че действат в точка B. Следователно тези моменти може да се сумират и да бъдат заменени с един момент

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} M_i = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{BA_i} \times \vec{F}_i . \tag{8.10}$$

Силата $\vec{F}$ се нарича ***главна сила***, а моментът $\vec{M}$ - ***главен момент***. Силата $\vec{F}$ и момента $\vec{M}$, до която се редуцира системата сили, е прието да се наричат ***динама***.

8.6 УСЛОВИЯ ЗА РАВНОВЕСИЕ НА СИСТЕМА ОТ СИЛИ

Една система от сили се намира в равновесие, ако главния момент и главната сила с която се редуцира са равни на нула

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = 0 \tag{8.11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0 . \tag{8.12}$$

За равнинна система сили главната сила се представя, като сума от проекциите й по координатните оси *x* и *y*

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} = \sum_{i=1}^{n} X_i . \vec{i} + \sum_{i=1}^{n} Y_i . \vec{j} , \tag{8.13}$$

където $\vec{i}$, $\vec{j}$ са съответно единичните вектори на координатните оси *Ox* и *Oy*, F_x, F_y са проекциите на главния вектор съответно по оси *Ox* и *Oy,* X_i, Y_i са проекциите на силите съответно по оси *Ox* и *Oy*.

Като се вземе предвид формула (8.13), условията за равновесие на равнинна система придобиват вида

$$\left| \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \\ &\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \\ &\sum_{i=1}^{n} M_i = 0 \end{aligned} \right. \tag{8.14}$$

Чрез аналогични разсъждения може да се изведат и условията за равновесие на пространствена система от сили

$$\left| \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \\ &\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \\ &\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0 \end{aligned} \right. \qquad \left| \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} M_{xi} = 0 \\ &\sum_{i=1}^{n} M_{y_i} = 0 \\ &\sum_{i=1}^{n} M_{zi} = 0 \end{aligned} \right. \tag{8.15}$$

където Z_i е проекцията на силата с индекс *i* върху ос *Oz*, M_{x_i} M_{y_i} M_{z_i} - проекциите на моментите, с които се привежда сила с индекс *i* съответно по оси *Ox*, *Oy* и *Oz*.

Освен уравненията (8.14) равновесието на равнина система сили може да бъде изразено чрез: 1) суми от моменти за две точки равни на нула и сума от проекциите на силите по права равна на нула, ако правата не е перпендикулярна на отсечката, свързваща точките, за които са съставени моментовите уравнения; 2) суми от моменти за три точки равни на нула, ако тези точки не лежат на една права.