Решени изпитни теми по Висша Математика I за Технически Университет — София

Николай Икономов

15 декември 2010 г.

Съдържание

Темите са взети от форума на ТУ–София (линк, линк) и от студенти. Научните степени на преподавателите са взети от сайта на ФПМИ (линк). За контакти: nike32@abv.bg

- Първа тема (доц. д-р Д. Симеонова, Септември 2009)
- Втора тема (доц. д-р Л. Гърневска, 2008)
- Трета, четвърта, пета тема (доц. д-р Ю. Пешева, 2008)
- Шеста, седма тема (доц. д-р А. Георгиева, 2009, 2010)
- Осма тема (доц. д-р Д. Симеонова, Септември 2010)

Означения: тангенс $\tan(x)$, котангенс $\cot(x)$, аркус тангенс $\arctan(x)$.

Указател

Задачите по категории.

Задачите по теми. Задачите в скоби не са решени.

- Първа тема — 1а, 1б, 2, 3, 4а, 4б, 5а, {5б}, 6а, 6б
- Втора тема — 1а, 1б, 2, 3, {4а}, {4б}, {5}, 6а, {6б}
- Трета тема — 1а, 1б, 1в, 2а, 2б, 2в, 3, {4}, 5, 6
- Четвърта тема — 1а, 1б, 2а, 2б, 3а, 3б, 3в, 4, 5, {6}
- Пета тема — 1а, 1б, 2а, 2б, 3а, 3б, 3в, 4, 5, 6
- Шеста тема — 1а, 1б, 2а, 2б, 3а, 3б, 4а, 4б, 5, 6а, 6б
- Седма тема — 1а, 1б, 2а, 2б, 3а, 3б, 4а, 4б, 5а, 5б, 6а, {6б}
- Осма тема — 1, 2, 3а, 3б, 4, 5, 6а, 6б
- Задачи по алгебра — 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- Задачи по анализ — 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- Задачи по геометрия — 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

1 Първа тема

Задача 1а. Решете системата при $a \in \mathbb{R}$.

$$\left| \begin{array}{l} x + y - az = 0 \\ x - (a+2)y + 3z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{array} \right.$$

Задача 1б. Докажете, че точките $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$ и $D(2,1,3)$ лежат в една равнина. Намерете дължината на ортогоналната проекция на $\overrightarrow{AB}$ върху $\overrightarrow{AC}$.

Задача 2. За триъгълник ABC са дадени: $A(3,-1)$, медиана $m : 6x + 10y - 59 = 0$ и ъглополовяща $l : x - 4y + 10 = 0$ (медианата и ъглополовящата са през различни върхове на триъгълника). Намерете уравненията на страните AB и BC.

Задача 3. Дадени са правите

$$p : \begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0 \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases} , \; q : \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$$

(а) Докажете, че p и q са успоредни.
(б) Намерете разстоянието между тях.

Задача 4а.

$$\lim_{x \to 0} (1 + x^2)^{\cot(x)}$$

Задача 4б.

$$y = x^{\ln(x)}, \; dy = ?$$

Задача 5а. Намерете локалните екстремуми на функцията $y = \dfrac{\ln^2(x)}{x}$

Задача 5б. Докажете необходимите условия за съществуване на локален екстремум на диференцируема функция $y = f(x)$

Задача 6а.

$$\int x \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx$$

Задача 6б.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\sin(x) + \cos(x) + 3}$$

Всяка подточка е по 5 точки.

Задача 1а. Решете системата при $a \in \mathbb{R}$

$$\left| \begin{array}{l} x + y - az = 0 \\ x - (a+2)y + 3z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{array} \right.$$

Решение. Метод на Гаус. Виж Тема 6, Задача 3а. Разменяме първо и трето уравнение.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & -(a+2) & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -a & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{P1 - P3}]{\text{P1 - P2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & a+4 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & a-3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{P2 - (a+4)P3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & a+4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6-(a+4)(a-3) & 0 \end{array} \right)$$

Сега трябва да изследваме третия ред.

$$\begin{aligned} -6 - (a+4)(a-3) &= 0 \ /.(-1) \\ 6 + (a+4)(a-3) &= 0 \\ 6 + a^2 - 3a + 4a - 12 &= 0 \\ a^2 + a - 6 &= 0 \\ a_1 = -3,\ a_2 &= 2 \end{aligned}$$

I случай: $a = -3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \end{array} \right)$$

Имаме два реда с три неизвестни, $3 - 2 = 1$ параметър. Той ще е $z = p$.

$$\left| \begin{array}{l} x + 2y - 3z = 0 \\ y - 6z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x + 2y - 3p = 0 \\ y - 6p = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = -9p \\ y = 6p \end{array} \right.$$

Решението на I случай:

$$\begin{array}{l} x = -9p \\ y = 6p \\ z = p \end{array} ,\ A_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} p$$

II случай: $a = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \end{array} \right)$$

Пак имаме два реда с три неизвестни, $3 - 2 = 1$ параметър, $z = p$.

$$\left| \begin{array}{l} x + 2y - 3z = 0 \\ 6y - 6z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x + 2y - 3p = 0 \\ 6y - 6p = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = p \\ y = p \end{array} \right.$$

Решението на II случай:

$$\begin{array}{l} x = p \\ y = p \\ z = p \end{array}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} p$$

III случай: $a \neq -3, \; a \neq 2$

Този случай е доста завъртян, може и да се прескочи.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & a+4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + a - 6 & 0 \end{array} \right)$$

Разглеждаме третия ред $(a^2 + a - 6)z = 0$. Казали сме, че $a \neq -3, \; a \neq 2$, тогава остава единствено z да е равно на нула, $z = 0$. Сега преписваме матрицата като нулираме z, също така третия ред може да се изтрие (той става изцяло нулев).

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a+4 & 0 \end{array} \right)$$

Получихме нова матрица, чието второ уравнение е с едно ненулево неизвестно, тоест трябва да изследваме втория ред.

$$(a + 4)y = 0$$

1 под-случай: $a = -4$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow (1 \; 2 \mid 0)$$

Имаме един ред с две неизвестни, $2 - 1 = 1$ параметър, $y = p$.

$$x + 2y = 0 \Longrightarrow x + 2p = 0 \Longrightarrow x = -2p$$

Решението на 1 под-случай:

$$\begin{array}{l} x = -2p \\ y = p \\ z = 0 \end{array}, \; A_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} p$$

2 под-случай: $a \neq -4$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a+4 & 0 \end{array} \right)$$

Тогава решението на $(a+4)y = 0$ е $y = 0$. Остава само първото уравнение $x + 2y = 0 \Longrightarrow x + 0 = 0$. Решението на 2 под-случай:

$$\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}, \ A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Получихме нулевото решение, няма нужда да го записваме в отговора.

Отговор:

$$a = -3: \begin{array}{l} x = -9p \\ y = 6p \\ z = p \end{array}, \ A_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} p$$

$$a = 2: \begin{array}{l} x = p \\ y = p \\ z = p \end{array}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} p$$

$$a = -4: \begin{array}{l} x = -2p \\ y = p \\ z = 0 \end{array}, \ A_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} p$$

□

Задача 16. Докажете, че точките $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$ и $D(2, 1, 3)$ лежат в една равнина. Намерете дължината на ортогоналната проекция на $\overrightarrow{AB}$ върху $\overrightarrow{AC}$.

Решение. За да го докажем, трябва да образуваме три вектора. Записваме ги като детерминанта, ако тя е нула, то векторите лежат в една равнина.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0 - 1, 1 - 2, 5 - (-1)) = (-1, -1, 6)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-1 - 1, 2 - 2, 1 - (-1)) = (-2, 0, 2)$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (2 - 1, 1 - 2, 3 - (-1)) = (1, -1, 4)$$

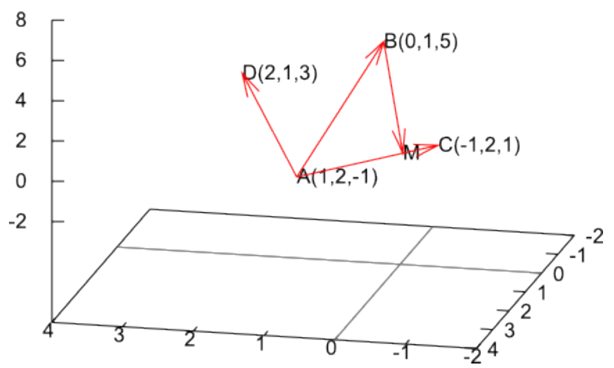
$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

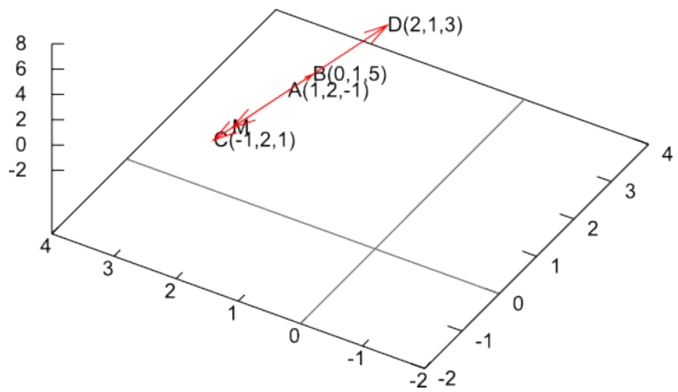
Това се нарича линейна комбинация на вектори. Следователно детерминантата ще е нула. Но нека проверим.

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 12 - 0 - 2 - 8 = 0$$

Сега да намерим дължината на проекцията на $\overrightarrow{AB}$ върху $\overrightarrow{AC}$, тоест търсим дължината на AM. Ще припомним скаларно произведение на два вектора.

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = |a||b|\cos(\varphi), \ \cos(\varphi) = \frac{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}}{|a||b|}$$





Ще са ни необходими $\overrightarrow{AB}(-1,-1,6)$, $\overrightarrow{AC}(-2,0,2)$. Трябва да изчислим косинуса на $\measuredangle CAB$, отбелязваме с $\cos(\varphi)$.

$$\cos(\varphi) = \frac{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}}{|AB||AC|} = \frac{(-1,-1,6)(-2,0,2)}{\sqrt{1+1+36}\sqrt{4+0+4}} = \frac{2+0+12}{\sqrt{38}\sqrt{8}} = \frac{14}{4\sqrt{19}} = \frac{7}{2\sqrt{19}}$$

Триъгълник ABM е правоъгълен, следователно можем да напишем:

$$\cos(\varphi) = \frac{|AM|}{|AB|} \Longrightarrow |AM| = |AB|\cos(\varphi)$$

Пишем модули, за да отбележим, че това е дължината, а не самия вектор.

$$|AM| = \sqrt{1+1+36}\frac{7}{2\sqrt{19}} = \sqrt{38}\frac{7}{2\sqrt{19}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$$

Дължината на ортогоналната проекция е $7/\sqrt{2}$. □

Задача 2. За триъгълник ABC са дадени: $A(3,-1)$, медиана $m: 6x+10y-59=0$ и ъглополовяща $l: x-4y+10=0$ (медианата и ъглополовящата са през различни върхове на триъгълника). Намерете уравненията на страните AB и BC.

Решение. Виж чертежа. За да намерим уравненията на AB и BC ни трябват координатите на $A(3,-1)$, $B(x_1,y_1)$ и $C(x_2,y_2)$. Вече имаме A. В случая нека започнем с B. (Ако медианата е прекарана през B, ще започнем с C.)

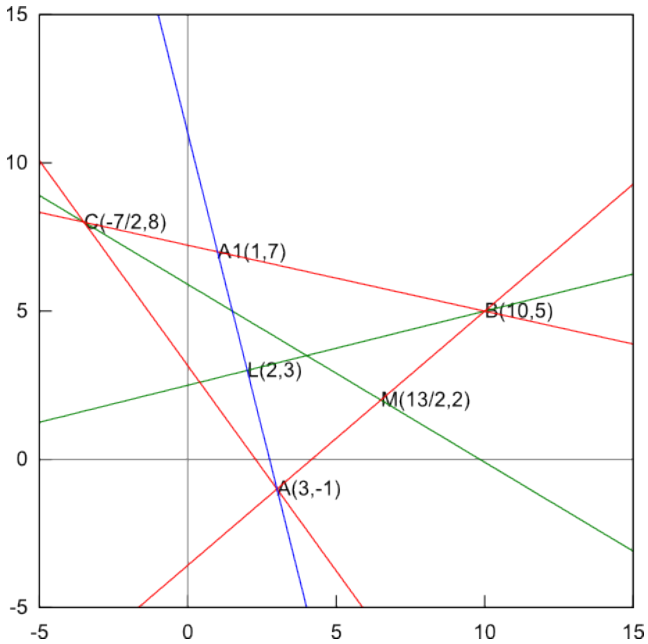
Точката M е с координати $M\left(\dfrac{3+x_1}{2}, \dfrac{-1+y_1}{2}\right)$, тъй като разполовява страната AB. Заместваме M в уравнението на медианата, заместваме B в уравнението на ъглополовящата, за да намерим координатите на точка B.

$$\left|\begin{array}{l} 6\dfrac{3+x_1}{2}+10\dfrac{-1+y_1}{2}-59=0 \\ x_1-4y_1+10=0 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} 9+3x_1+5y_1-5-59=0 \\ x_1=4y_1-10 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} 3x_1+5y_1-55=0 \\ x_1=4y_1-10 \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} 3(4y_1-10)+5y_1-55&=0 \\ 12y_1-30+5y_1-55&=0 \\ 17y_1-85&=0 \\ y_1&=5 \\ x_1&=10 \end{aligned}$$

Следователно имаме $B(10,5)$.



Сега трябва да изчислим уравнението на правата AA_1. Нека да обърнем внимание на следното: за триъгълник AA_1B правата BL се явява височина, тъй като BL е ъглополовяща на $\measuredangle ABC$. Тъй като $\measuredangle ALB = 90°$, то $\overrightarrow{AA_1}\overrightarrow{BL} = 0$ (скаларното произведение е нула).

Въвеждаме понятие нормален вектор, нормалният вектор на BL е $(1,-4)$ (това са коефициентите пред x и y от $x-4y+10=0$). Трябва да намерим нормалния вектор на AA_1. Най-лесно е да разменим тези две цифри и на едната да сменим знака, примерно $(4,1)$. Сега $(1,-4)(4,1)=0$. Следователно $(4,1)$ е нормалният вектор на AA_1.

Образуваме уравнението на AA_1 по следния начин: $4x+y+c=0$. Трябва да намерим c. Точката A принадлежи на правата AA_1, следователно можем да я заместим в нейното уравнение.

$$4.3+1.(-1)+c=0 \Longrightarrow 12-1+c=0 \Longrightarrow c=-11$$

Тогава уравнението на AA_1 е $4x+y-11=0$. Точката L принадлежи и на двете прави, AA_1 и BL. Ако ги пресечем, ще намерим координатите на L.

$$\left|\begin{array}{l} 4x+y-11=0/.(4) \\ x-4y+10=0 \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} 16x+x-44+10&=0 \\ 17x-34&=0 \\ x&=2 \\ y&=3 \end{aligned}$$

Следователно $L(2,3)$. Правата BL се явява и медиана за триъгълник AA_1B, тогава за $A_1(x^*,y^*)$ имаме:

$$\frac{3+x^*}{2}=2,\ \frac{-1+y^*}{2}=3,\ x^*=1,\ y^*=7,\ A_1(1,7).$$

Сега намираме уравнението на A_1B по формулата за уравнение на права по две точки, $A_1(1,7)$, $B(10,5)$:

$$\begin{aligned} &A_1B: \frac{x-1}{10-1}=\frac{y-7}{5-7} \\ &A_1B: \frac{x-1}{9}=\frac{y-7}{-2} \\ &A_1B: -2x+2=9y-63 \\ &A_1B: 2x+9y-65=0 \end{aligned}$$

Най-после можем да намерим координатите на точката C. Това става чрез пресичане на правите A_1B и CM (медианата).

$$\left|\begin{array}{l} 2x+9y-65=0/.(-3) \\ 6x+10y-59=0 \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} -27y+10y+3.65-59&=0 \\ -17y&=-136 \\ y&=8 \\ x&=-\frac{7}{2} \end{aligned}$$

Следователно $C(-7/2, 8)$. Сега намираме уравненията на AB и BC по две точки. $A(3, -1)$, $B(10, 5)$, $C(-7/2, 8)$.

$$\begin{aligned}
AB &: \frac{x-3}{10-3} = \frac{y-(-1)}{5-(-1)} \\
AB &: \frac{x-3}{7} = \frac{y+1}{6} \\
AB &: 6x - 18 = 7y + 7 \\
AB &: 6x - 7y - 25 = 0 \\
BC &: \frac{x-10}{-7/2-10} = \frac{y-5}{8-5} \\
BC &: \frac{x-10}{-27/2} = \frac{y-5}{3} \\
BC &: 3x - 30 = -\frac{27}{2}y + \frac{27}{2}5 \\
BC &: 6x - 60 = -27y + 135 \\
BC &: 6x + 27y - 195 = 0 \\
BC &: 2x + 9y - 65 = 0
\end{aligned}$$

Отговор: $AB : 6x - 7y - 25 = 0$, $BC : 2x + 9y - 65 = 0$. □

Задача 3. Дадени са правите

$$p : \begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0 \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases}, \quad q : \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$$

(а) Докажете, че p и q са успоредни.
(б) Намерете разстоянието между тях.

Решение. Правата q е записана чрез каноничното си уравнение, правата p — като пресечница на две равнини. Трябва да намерим каноничното уравнение на правата p. Разглеждаме системата уравнения.

$$\left| \begin{array}{l} 2x + 2y - z - 10 = 0 \\ x - y - z - 22 = 0 \end{array} \right.$$

Избираме две неизвестни от трите които имаме, x, y, z, и взимаме коефициентите пред тях. В случая x и z. Ако детерминантата е нула, ще трябва да вземем други две.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - (-1) = -1 \neq 0$$

Тези две неизвестни които сме взели остават отляво; другото неизвестно и свободния коефициент отдясно, неизвестното се записва като параметър λ.

$$\left|\begin{array}{l} 2x - z = 10 - 2y \\ x - z = 22 + y \end{array}\right. ,\ y = \lambda$$

$$\left|\begin{array}{l} 2x - z = 10 - 2\lambda \\ x - z = 22 + \lambda \end{array}\right.$$

От второто уравнение изразяваме z и го заместваме в първото.

$$2x + 22 + \lambda - x = 10 - 2\lambda \Longrightarrow x = -3\lambda - 12 \Longrightarrow \lambda = \frac{x+12}{-3}$$

Заместваме x в първото или второто уравнение (в случая във второто).

$$-3\lambda - 12 - z = 22 + \lambda \Longrightarrow z = -4\lambda - 34 \Longrightarrow \lambda = \frac{z+34}{-4}$$

За y имаме

$$y = \lambda \Longrightarrow \lambda = \frac{y-0}{1}$$

Сега приравняваме λ и получаваме каноничното уравнението на правата p.

$$p : \frac{x+12}{-3} = \frac{y-0}{1} = \frac{z+34}{-4}$$

Сравняваме с уравнението на q.

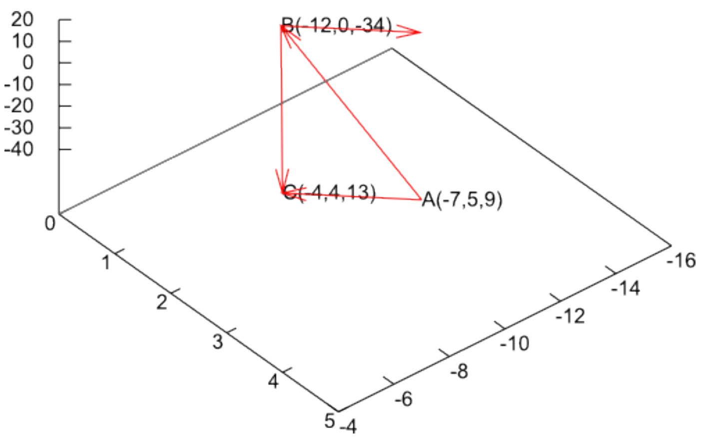
$$q : \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$$

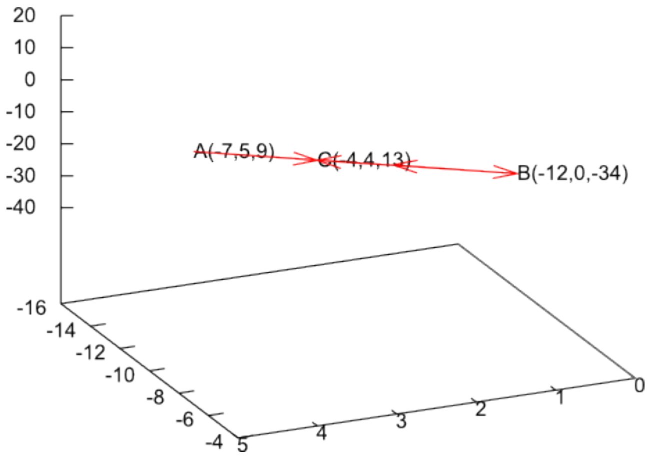
За да са успоредни правите, числата в знаменател (това е вектор) трябва да са равни или да са линейна комбинация.

$$(3, -1, 4) = -1(-3, 1, -4)$$

В случая двата вектора са линейна комбинация, следователно правите са успоредни.

Сега трябва да намерим разстоянието между двете прави. Виждаме, че точка $A(-7, 5, 9)$ принадлежи на правата q, а точка $B(-12, 0, -34)$ принадлежи на p. Това са числата от числителя на правите със знак минус :) Чертежа е подобен на този от задача 1б. Ъгъл $\measuredangle ACB = 90°$.





Образуваме вектор $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-12, 0, -34) - (-7, 5, 9) = (-12 + 7, 0 - 5, -34 - 9) = (-5, -5, -43)$

Вектор $\overrightarrow{a}$ е успореден и на двете прави, p и q (в случая е взет от p).

$$\overrightarrow{a}(-3, 1, -4)$$

Сега намираме косинуса на ъгъла между векторите $\overrightarrow{AB}(-5, -5, -43)$ и $\overrightarrow{a}(-3, 1, -4)$ чрез скаларното им произведение.

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{a} = |AB||a|\cos(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{(-5, -5, -43)(-3, 1, -4)}{\sqrt{25 + 25 + 43^2}\sqrt{9 + 1 + 16}} = \frac{15 - 5 + 172}{\sqrt{1899}\sqrt{26}} = \frac{182}{3\sqrt{211}\sqrt{26}}$$

Нека да отбележим, че $|AB| = 3\sqrt{211}$. Триъгълник ABC е правоъгълен, така че можем да използваме нормалната формула за косинус.

$$\cos(\varphi) = \frac{|AC|}{|AB|} \Longrightarrow |AC| = |AB|\cos(\varphi)$$

$$|AC| = 3\sqrt{211}\frac{182}{3\sqrt{211}\sqrt{26}} = \frac{182}{\sqrt{26}}$$

Прилагаме Питагоровата теорема за триъгълник ABC и намираме дължината на BC, което е разстоянието между правите p и q.

$$|BC|^2 + |AC|^2 = |AB|^2$$

$$|BC|^2 + \frac{182^2}{26} = 9.211$$

$$|BC|^2 = 9.211 - \frac{7^2.26^2}{26}$$

$$|BC|^2 = 9.211 - 49.26$$

$$|BC|^2 = 625$$

$$|BC| = 25$$

Разстоянието между правите е 25. □

Задача 4а.

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\cot(x)}$$

Решение. Правило на Лопитал. Диференцират се числителя и знаменателя поотделно, когато имаме основна неопределена форма.

$$\left[\frac{0}{0}\right],\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Тези две форми се наричат основни неопределени форми и само за тях важи правилото на Лопитал. Другите форми се свеждат до тези.

$$[0.\infty] = \left[\frac{0}{1/\infty}\right] = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$[0.\infty] = \left[\frac{\infty}{1/0}\right] = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Следните форми се свеждат до $[0.\infty]$.

$$[0^0] = e^{[0.(-\infty)]},\ [1^\infty] = e^{[\infty.0]},\ [\infty^0] = e^{[0.\infty]}$$

Забележка: Тези неща се получават щом заместим със стойността към която клони x в границата (нарича се граничен преход). Ако получим нещо от горните видове, трябва да използваме правилото на Лопитал. Ако получим число, нула, безкрайност — задачата е решена.

Тук ще използваме правилото на Лопитал за диференциране на граници.

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\cot(x)} = [1^\infty] \Longrightarrow \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+x^2)^{\cot(x)}} = e^{\lim_{x\to 0}\ln(1+x^2)^{\cot(x)}}$$

Когато имаме 1^∞, се повдига на степен e и се логаритмува. Няма да пишем e-то засега, но не трябва да го забравяме накрая.

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+x^2)^{\cot(x)} = \lim_{x\to 0}\cot(x)\ln(1+x^2) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)\ln(1+x^2)}{\sin(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\tan(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}\,2x}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\cos^2(x)}{1+x^2} = \frac{0\cos(0)}{1+0} = 0$$

Когато имаме нула върху нула, числителя и знаменателя *поотделно* се диференцират. Щом вече нямаме неопределеност, тоест имаме нула върху единица, можем да направим граничен преход като заменим всяка поява на x с границата му, тоест $x = 0$.

Не трябва да забравяме e-то, тъй като цялата граница беше повдигната на степен $e \Longrightarrow e^0 = 1$. Отговорът е единица. $\square$

Задача 4б.

$$y = x^{\ln(x)},\ dy = ?$$

Решение. Функция на степен функция се решава само чрез повдигане на степен e и логаритмуване (тоест за диференциране и търсене на граници). Целта е да диференцираме степента на e-то, самото e ще се върне в оригиналната функция.

$$dy = \left(x^{\ln(x)}\right)' = \left(e^{\ln(x)^{\ln(x)}}\right)' = \left(e^{\ln(x)\ln(x)}\right)' = \left(e^{\ln^2(x)}\right)' = e^{\ln^2(x)}\left(\ln^2(x)\right)'$$

Сега тук има един трик — $e^{\ln^2(x)}$ се връща откъдето е дошло, тоест $e^{\ln^2(x)} = x^{\ln(x)}$. Целта на това беше да диференцираме степента на e-то. Нека да диференцираме отделно $\ln^2(x)$.

$$\left(\ln^2(x)\right)' = 2\ln(x)\,\frac{1}{x}\,1 = \frac{2\ln(x)}{x}$$

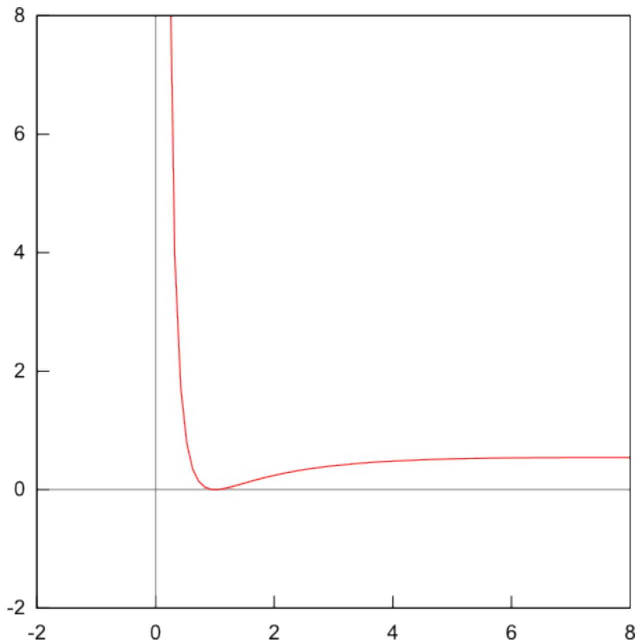
Като комбинираме двете неща получаваме

$$dy = \left(x^{\ln(x)}\right)' = e^{\ln^2(x)}\left(\ln^2(x)\right)' = x^{\ln(x)}\frac{2\ln(x)}{x}$$

и това е отговора на задачата. □

Задача 5а. Намерете локалните екстремуми на функцията $y = \dfrac{\ln^2(x)}{x}$

Решение. Графиката на функцията.



Екстремумите се намират чрез първа производна.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{\ln^2(x)}{x}\right)' = \frac{2\ln(x)\frac{1}{x}x - \ln^2(x)1}{x^2} = \frac{2\ln(x) - \ln^2(x)}{x^2}$$

Задължително $x \neq 0$. Първата производна се приравнява на нула и се намират корените. Тъй като $x \neq 0$, ще изследваме само числителя.

$$2\ln(x) - \ln^2(x) = 0 \Longrightarrow \ln(x)(2 - \ln(x)) = 0$$

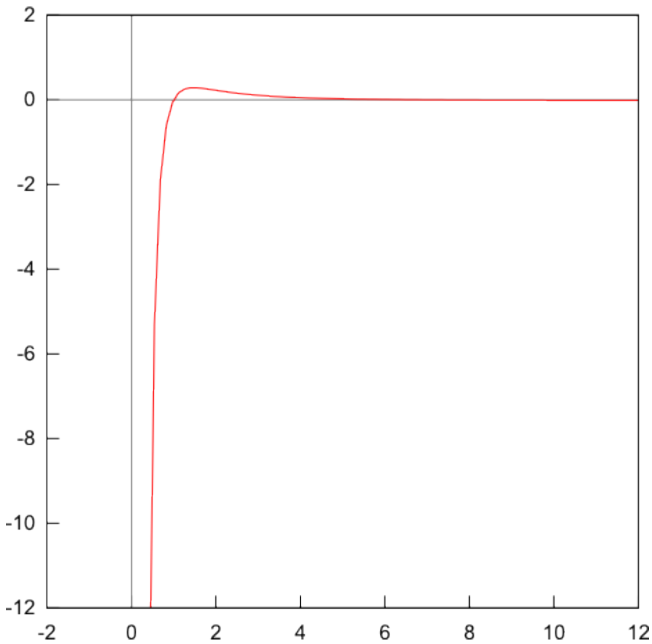
Сега имаме че или $\ln(x) = 0$, или $2 - \ln(x) = 0$.

$$\ln(x) = 0 \Longrightarrow x_1 = e^0 = 1$$
$$\ln(x) = 2 \Longrightarrow x_2 = e^2$$

Трябва да вземем две точки, отляво и отдясно на предполагаемия локален екстремум, и ако знака на първата производна е различен, то имаме екстремум.

$$x = 0.5 : y'(0.5) = \frac{\ln(0.5)(2 - \ln(0.5))}{0.025}, \ \ln(0.5) < 0 \Longrightarrow y'(0.5) < 0$$

$$x = 1.5 : y'(1.5) = \frac{\ln(1.5)(2 - \ln(1.5))}{2.25}, \ \ln(1.5) > 0 \Longrightarrow y'(1.5) > 0$$



Следователно $x_1 = 1$ е локален минимум. Знака на логаритмичната функция се сменя при $x = 1$, а знака на експоненциалната функция се сменя при $x = 0$. Тоест $\ln(e^2) > 0$ в някаква околност на $x = e^2$, следователно при $x_2 = e^2$ няма екстремум (вижда се и на графиката).

Отговор: Локален минимум в $x_1 = 1$. $\square$

Задача 56. Докажете необходимите условия за съществуване на локален екстремум на диференцируема функция $y = f(x)$.

Решение. От лекциите: Необходимо условие — ако $f(x)$ има локален екстремум, то или $f'(x_0) = 0$, или $f'(x_0)$ не съществува.

Доказателствата се прескачат. □

Задача 6а.

$$\int x \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx$$

Решение. Разрешени стойности за x.

$$\frac{1-x}{1+x} > 0 \Longrightarrow x \in (-1, 1)$$

Логаритъм в интеграл има само едно решение: интегриране по части.

$$\begin{aligned}
\int x \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx &= \frac{1}{2}\int \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) d(x^2) = \\
&= \frac{1}{2}\left[x^2 \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \int x^2 d\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right] = \\
&= \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \int \frac{x^2}{2} d\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)
\end{aligned}$$

Няма да записваме първото събираемо, само интеграла. Накрая на задачата ще ги обединим.

$$\begin{aligned}
-\int \frac{x^2}{2} d\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) &= -\int \frac{x^2}{2}\frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}\frac{-1(1+x)-(1-x)1}{(1+x)^2}dx = \\
&= -\int \frac{x^2}{2}\frac{1+x}{1-x}\frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}dx = -\int \frac{x^2}{2}\frac{-2}{(1-x)(1+x)} = \\
&= \int \frac{x^2}{1-x^2}dx = \int \frac{x^2+1-1}{1-x^2}dx = \int \frac{dx}{1-x^2} + \int \frac{x^2-1}{1-x^2}dx = \\
&= \int \frac{dx}{1-x^2} - \int \frac{1-x^2}{1-x^2}dx = \int \frac{dx}{1-x^2} - \int dx = \int \frac{dx}{1-x^2} - x
\end{aligned}$$

Относно интеграла. Разлагаме $1 - x^2$ на $(1-x)(1+x)$, корените са 1, -1.

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}$$

$$1 = A(1+x) + B(1-x)$$

Заместваме с $x = 1$.

$$1 = A(1+1) \Longrightarrow A = \frac{1}{2}$$

Сега с $x = -1$.

$$1 = B(1-(-1)) \Longrightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \int \frac{1/2dx}{1-x} + \int \frac{1/2dx}{1+x} = \frac{1}{2}\left(-\int \frac{d(1-x)}{1-x} + \int \frac{d(1+x)}{1+x}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}(-\ln|1-x| + \ln|1+x|) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Защото имаме $x \in (-1, 1)$. Записваме решението.

$$\int x\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x + C =$$
$$= \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x + C =$$
$$= -\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x + C =$$
$$= \frac{1-x^2}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x + C$$

Интегралът е неопределен, затова се добавя константа накрая (защото това са семейство интегрални криви). □

Задача 6б.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\sin x + \cos x + 3}$$

Решение. Щом интеграла има само синуси и косинуси, най-лесно е да се направи универсалната субституция $\tan(x/2)$.

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t,\ x = 2\arctan(t),\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$
$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$x = 0 \Longrightarrow t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \tan(0) = 0$$
$$x = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Сега като сме изчислили границите, можем да заместим всичко. Привеждаме знаменателя под общ знаменател $1+t^2$, което се съкращава с $1+t^2$ от dx.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\sin x + \cos x + 3} = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3} =$$
$$= \int_0^1 \frac{2dt}{4t + 1 - t^2 + 3 + 3t^2} = \int_0^1 \frac{2dt}{2t^2 + 4t + 4} = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 2t + 2} =$$
$$= \int_0^1 \frac{dt}{1 + (t^2 + 2t + 1)} = \int_0^1 \frac{d(t+1)}{1 + (t+1)^2} =$$
$$= \arctan(t+1)\Big|_0^1 = \arctan(2) - \arctan(1) = 1.107 - 0.785 = 0.322$$

Това е в радиани. В градуси: $\arctan(2) - \arctan(1) = 63.43 - 45 = 18.43^\circ$. Можем да добавяме константи към диференциала, тъй като тяхната производна е нула.

Отговор: $0.322,\ 18.43^\circ$ $\square$

2 Втора тема

Задача 1а. Да се намери стойността на детерминантата при $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z^3 & z^6 \\ 1 & z^6 & z^3 \end{vmatrix}$$

Задача 1б. Да се реши матричното уравнение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Задача 2. Да се изследва и да се построи графиката на функцията.

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(x) - 1}$$

Задача 3. Да се реши интегралът.

$$\int_0^1 \frac{xe^{\arctan(x)}dx}{(1+x^2)^{3/2}}$$

Задача 4а. Докажете необходимото и достатъчно условие за съществуване на обратна матрица.

Задача 4б. Докажете, че всяка непрекъсната функция в затворен интервал е равномерно непрекъсната.

Задача 5. Докажете, че ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$ и $x \in (a, b]$, то функцията

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

е непрекъсната в точката x.

Задача 6а. Напишете различните видове уравнения на права в равнината.

Задача 6б. На правата

$$g : \frac{x+25}{9} = \frac{y}{-1} = \frac{z-26}{-7}$$

да се намери точката P, намираща се на равни разстояния от две дадени точки $A(3, 11, 4)$ и $B(-5, -13, -2)$.

Всяка подточка е по 5 точки.

Задача 1а. Да се намери стойността на детерминантата при $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z^3 & z^6 \\ 1 & z^6 & z^3 \end{vmatrix}$$

Решение. Лесният начин.

$$z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$$

Тогава да видим колко е z^3.

$$\begin{aligned}
&z^3 = \left(-\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})\right)^3 = -\frac{1}{8}(1 + i\sqrt{3})^3 \\
&(1 + i\sqrt{3})^3 = (1 + i\sqrt{3})^2(1 + i\sqrt{3}) = \\
&= (1 + 2i\sqrt{3} + 3i^2)(1 + i\sqrt{3}) = (2i\sqrt{3} - 2)(i\sqrt{3} + 1) = \\
&= 2(i\sqrt{3} - 1)(i\sqrt{3} + 1) = 2(3i^2 - 1^2) = 2(-3 - 1) = -8 \\
&z^3 = -\frac{1}{8}(-8) = 1 \\
&z^6 = (z^3)^2 = 1^2 = 1 \\
&D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 = 0
\end{aligned}$$

Детерминанта с два еднакви реда е равна на нула.

Трудният начин.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z^3 & z^6 \\ 1 & z^6 & z^3 \end{vmatrix} = z^6 + z^6 + z^6 - z^3 - z^3 - z^{12} = -z^{12} + 3z^6 - 2z^3$$

Сега трябва да намерим тригонометричния вид на z.

$$z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},\ |z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

Да припомним.

$$z = a + ib,\ \cos(\varphi) = \frac{a}{|z|},\ \sin(\varphi) = \frac{b}{|z|},\ z = |z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$

Тогава намираме ъгъла φ.

$$\cos(\varphi) = -\frac{1}{2},\ \sin(\varphi) = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \varphi = \frac{4\pi}{3} = 240^\circ$$

Сега записваме z в тригонометричен вид.

$$z = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

Припомняме формулата за тригонометричен вид на комплексно число z на степен n: $z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$.

$$z^3 = \cos\left(3\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(3\frac{4\pi}{3}\right) = \cos(4\pi) + i\sin(4\pi) = 1$$
$$z^6 = \cos\left(6\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(6\frac{4\pi}{3}\right) = \cos(8\pi) + i\sin(8\pi) = 1$$
$$z^{12} = \cos\left(12\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(12\frac{4\pi}{3}\right) = \cos(16\pi) + i\sin(16\pi) = 1$$

Това е така, защото $\cos(n\pi) = (-1)^n$, $\sin(n\pi) = 0$.

$$D = -z^{12} + 3z^6 - 2z^3 = -1 + 3 - 2 = 0$$

Отговорът е нула. $\square$

Задача 1б. Да се реши матричното уравнение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение. Това е матрично уравнение от вида $A.X = B$, умножаваме отляво с обратаната матрица на A, решението е:

$$/.(A^{-1})\ A.X = B \Longrightarrow A^{-1}.A.X = A^{-1}.B \Longrightarrow X = A^{-1}.B$$

Обратната матрица на A — изчисляваме детерминантата на A и адюнгираните количества на всеки елемент.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 6 - 0 - 0 - 0 = 6 \neq 0$$

Адюнгирано количество — задраскваме стълба и реда на който сме в момента, това което остава записваме като детерминанта. Също така умножаваме по -1 на степен индекса на стълба плюс индекса на реда.

Изчисляваме адюнгираните количества.

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-3) = 3$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-6) = 6$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)1 = -1$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Тогава записваме матрицата от адюнгираните количества и я транспонираме.

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A_{ij}^t = A_{ji} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Формулата за обратна матрица е: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A_{ji}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Сега изчисляваме X.

$$X = A^{-1}.B = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Матрици се умножават по следния начин: от лявата се взима ред, от дясната стълб, и се умножават поелементно.

$$\begin{aligned}
c_{11} &= [A1row \times B1column] = 0.2 + 0.(-1) + 2.6 = 12 \\
c_{12} &= [A1row \times B2column] = 0.(-1) + 0.(-1) + 2.3 = 6 \\
c_{13} &= [A1row \times B3column] = 0.3 + 0.1 + 2.3 = 6 \\
c_{21} &= [A2row \times B1column] = 3.2 + 0.(-1) + (-1).6 = 6 - 6 = 0 \\
c_{22} &= [A2row \times B2column] = 3.(-1) + 0.(-1) + (-1).3 = -3 - 3 = -6 \\
c_{23} &= [A2row \times B3column] = 3.3 + 0.1 + (-1).3 = 9 - 3 = 6 \\
c_{31} &= [A3row \times B1column] = (-3).2 + 6.(-1) + 3.6 = -6 - 6 + 18 = 6 \\
c_{32} &= [A3row \times B2column] = (-3).(-1) + 6.(-1) + 3.3 = 3 - 6 + 9 = 6 \\
c_{33} &= [A3row \times B3column] = (-3).3 + 6.1 + 3.3 = -9 + 6 + 9 = 6
\end{aligned}$$

Записваме отговора.

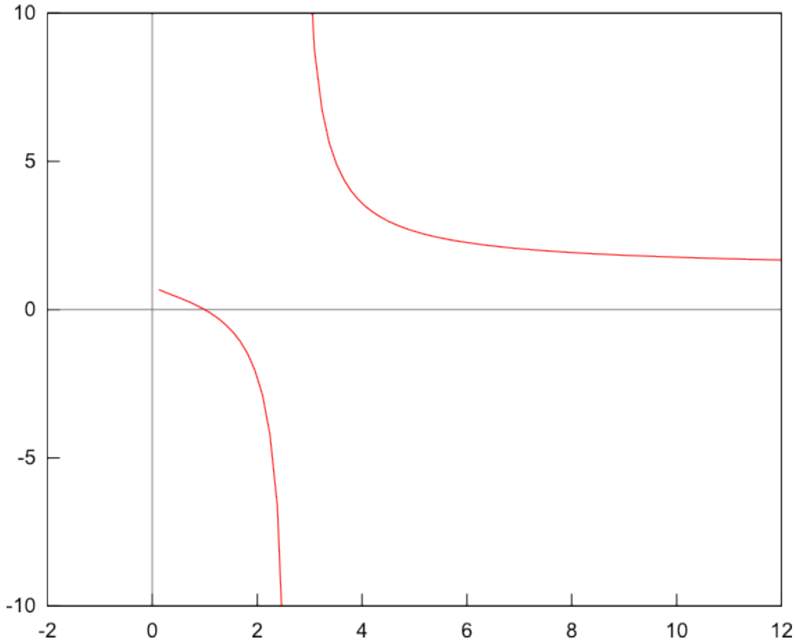
$$X = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 12 & 6 & 6 \\ 0 & -6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Задача 2. Да се изследва и да се построи графиката на функцията.

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(x) - 1}$$

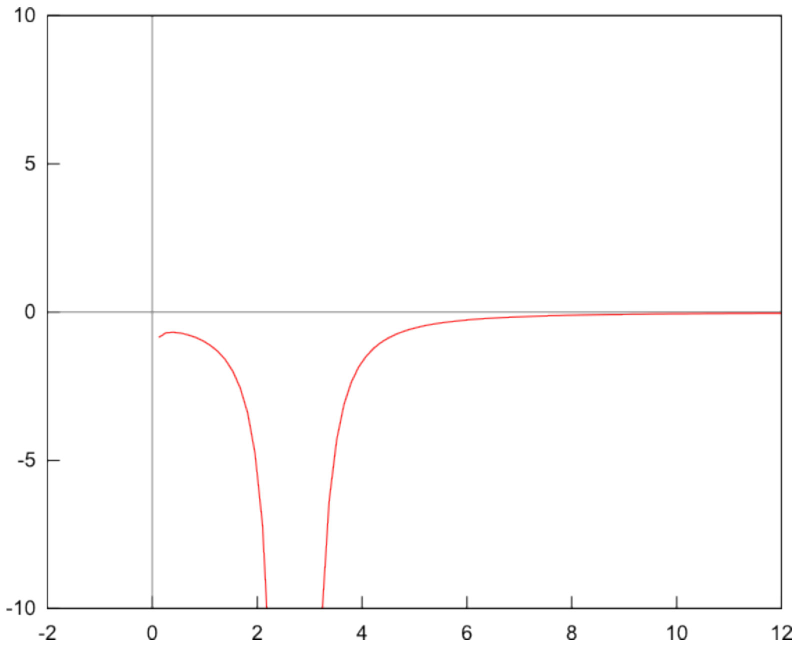
Решение. Графиката на функцията.



Първо знаменателя: $\ln(x) - 1 \neq 0 \to \ln(x) \neq 1 \to x \neq e$. Вижда се, че $x = 1$ е корен, при $\ln(x) = 0$. Изчисляваме първата производна.

$$f'(x) = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(x) - 1}\right)' = \frac{\frac{1}{x}(\ln(x) - 1) - \ln(x)\frac{1}{x}}{(\ln(x) - 1)^2} =$$
$$= \frac{\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x}}{(\ln(x) - 1)^2} = -\frac{1}{x(\ln(x) - 1)^2}$$

Ограниченията са $x \neq 0$, Първата производна няма корени, т.е няма екстремуми, защото знаменателя не може да е равен на нула.

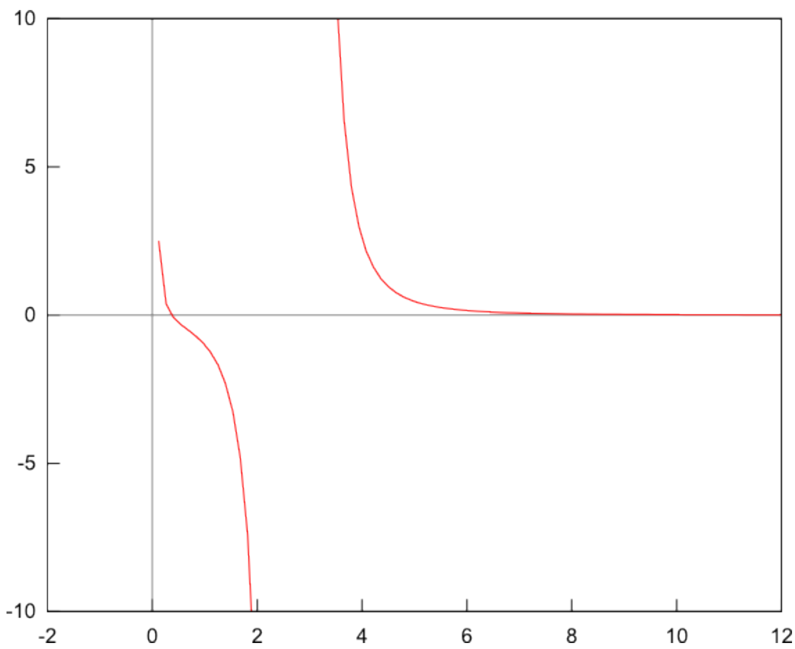


Намираме и втората производна.

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{x(\ln(x)-1)^2}\right)' = -\frac{0-((\ln(x)-1)^2 + x2(\ln(x)-1)\frac{1}{x})}{x^2(\ln(x)-1)^4} =$$
$$= \frac{(\ln(x)-1)^2 + 2(\ln(x)-1)}{x^2(\ln(x)-1)^4} = \frac{\ln(x)-1+2}{x^2(\ln(x)-1)^3} = \frac{\ln(x)+1}{x^2(\ln(x)-1)^3}$$

Знаменателя не може да е равен на нула, следователно $\ln(x)+1=0$.

$$\ln(x) = -1 \Longrightarrow x = e^{-1}$$



Проверява се знака на втората производна в околност на $x = e^{-1}$, за изпъкналост и вдлъбнатост. Отляво на точката $x = e^{-1}$ знака на втората производна е положителен, тоест там функцията е изпъкнала, отдясно знака е отрицателен, функцията е вдлъбната, и точката се нарича инфлексна.

Проверката за асимптоти се извършва в ограниченията, т.е за $x = 0$ и $x = e$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{\ln(x)-1} = \frac{\infty}{\infty} = \infty$$

$$\lim_{x\to e} \frac{\ln(x)}{\ln(x)-1} = \frac{1}{0} = \infty$$

Имаме вертикални асимптоти в $x = 0$ и $x = e$ □

Задача 3. Да се реши интегралът.

$$\int_0^1 \frac{xe^{\arctan(x)}dx}{(1+x^2)^{3/2}}$$

Решение.

$$I = \int_0^1 \frac{xe^{\arctan(x)}dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \int_0^1 \frac{xe^{\arctan(x)}dx}{(1+x^2)^{1/2}(1+x^2)}$$

$(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2} \Longrightarrow \arctan(x)$ влиза под диференциала

$$I = \int_0^1 \frac{xe^{\arctan(x)}d(\arctan(x))}{(1+x^2)^{1/2}}$$

$(e^{\arctan(x)})' = e^{\arctan(x)}(\arctan(x))' = e^{\arctan(x)}\dfrac{1}{1+x^2} \Longrightarrow e^{\arctan(x)}$ влиза под диференциала

$$I = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}} d(e^{\arctan(x)})$$

Сега вече интегрираме по части.

$$I = \left.\frac{xe^{\arctan(x)}}{(1+x^2)^{1/2}}\right|_0^1 - \int_0^1 e^{\arctan(x)} d\left(\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}\right)$$

Нека да сметнем нещата поотделно.

$$\left.\frac{xe^{\arctan(x)}}{(1+x^2)^{1/2}}\right|_0^1 = \frac{1e^{\arctan(1)}}{(1+1^2)^{1/2}} - \frac{0e^{\arctan(0)}}{(1+0^2)^{1/2}} = \frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} d\left(\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}\right) &= \frac{1(1+x^2)^{1/2} - x\frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2}2x}{((1+x^2)^{1/2})^2}dx = \\ &= \frac{(1+x^2)^{1/2} - x^2(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2}dx = \left(\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right)\frac{dx}{1+x^2} = \\ &= \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Сега обединяваме тези неща.

$$I = \frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}} - \int_0^1 e^{\arctan(x)} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$$

Сега пак $e^{\arctan(x)}$ влиза под диференциала

$$I = \frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}} - \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{1/2}} d(e^{\arctan(x)})$$

И интегрираме по части.

$$I = \frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}} - \left(\frac{e^{\arctan(x)}}{(1+x^2)^{1/2}} \bigg|_0^1 - \int_0^1 e^{\arctan(x)} d\left(\frac{1}{(1+x^2)^{1/2}}\right)\right)$$

Нека пак да сметнем нещата поотделно.

$$\frac{e^{\arctan(x)}}{(1+x^2)^{1/2}} \bigg|_0^1 = \frac{e^{\arctan(1)}}{(1+1^2)^{1/2}} - \frac{e^{\arctan(0)}}{(1+0^2)^{1/2}} = \frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}} - \frac{e^0}{1} = \frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}} - 1$$

$$d\left(\frac{1}{(1+x^2)^{1/2}}\right) = d\left((1+x^2)^{-1/2}\right) = -\frac{1}{2}(1+x^2)^{-3/2}2xdx = \frac{-xdx}{(1+x^2)^{3/2}}$$

Сега ги обединяваме.

$$I = \frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}} - \left(\frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}} - 1 - \int_0^1 e^{\arctan(x)} \frac{-xdx}{(1+x^2)^{3/2}}\right)$$

$$I = \frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}} - \frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}} + 1 - \int_0^1 \frac{xe^{\arctan(x)}dx}{(1+x^2)^{3/2}}$$

Тъй като получихме началния интеграл, можем да напишем следното:

$$I = 1 - I \Longrightarrow 2I = 1 \Longrightarrow I = \frac{1}{2}$$

И отговора е:

$$I = \int_0^1 \frac{xe^{\arctan(x)}dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}$$

□

Задача 4а. Докажете необходимото и достатъчно условие за съществуване на обратна матрица.

Решение. Необходимото и достатъчно условие квадратната матрица A да има обратна, е детерминантата на A да е различна от нула.

Доказателствата се прескачат. □

Задача 4б. Докажете, че всяка непрекъсната функция в затворен интервал е равномерно непрекъсната.

Решение. Теорема на Кантор: ако $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$, то тя е равномерно непрекъсната в $[a, b]$.

Доказателствата се прескачат. □

Задача 5. Докажете, че ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$ и $x \in (a, b]$, то функцията

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

е непрекъсната в точката x.

Решение. Трябва да се докаже, че $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta F = 0$.

Доказателствата се прескачат. □

Задача 6а. Напишете различните видове уравнения на права в равнината.

Решение. Уравнение на права през две точки, $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$, образуваме правата AB:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

Канонично уравнение на права, чрез точка $A(x_0, y_0)$ и успореден вектор $\overrightarrow{v}(\alpha, \beta)$:

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}$$

Общото уравнение на права, получава се като се умножи на кръст каноничното уравнение:

$$ax + by + c = 0$$

Пример: $A(1, 2)$, $B(-3, 4)$. Да се напишат и трите уравнения на правата AB. Уравнение през две точки:

$$\frac{x - 1}{-3 - 1} = \frac{y - 2}{4 - 2}$$

Канонично уравнение:

$$\frac{x - 1}{-4} = \frac{y - 2}{2}$$

Това означава, че успоредния на правата вектор е $(-4, 2)$.

$$2(x - 1) = -4(y - 2)$$

$$2x - 2 = -4y + 8$$

$$2x + 4y - 10 = 0$$

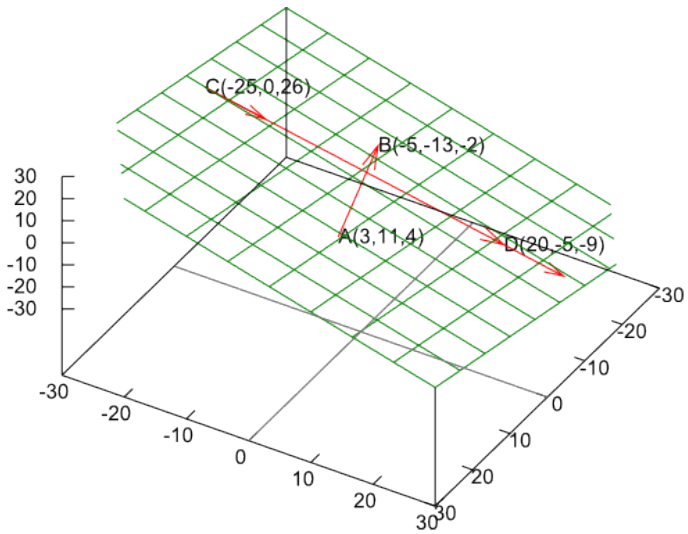
Общото уравнение е $2x + 4y - 10 = 0$. □

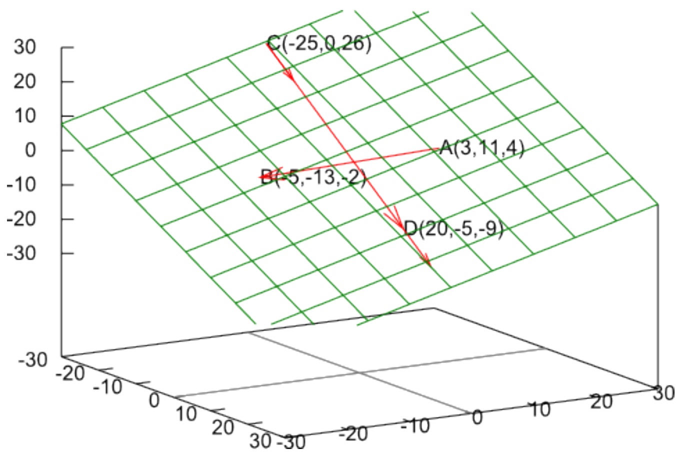
Задача 6б. На правата

$$g: \frac{x+25}{9} = \frac{y}{-1} = \frac{z-26}{-7}$$

да се намери точката P, намираща се на равни разстояния от две дадени точки $A(3,11,4)$ и $B(-5,-13,-2)$.

Решение. Равнината α е успоредна на g и минава през $\overrightarrow{AB}$. $\alpha: 81x-55y+112z-86=0$, $D(20,-5,-9)\in g$.





Без решение. □

3 Трета тема

Задача 1а.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right)$$

Задача 1б.

$$y=\tan\left(\frac{1}{2x-1}\right)+e^{\arctan(\sqrt{2x+3})},\ y'=?$$

Задача 1в.

$$y=(1+x)^{\frac{1}{\cos(x)}},\ y'=?$$

Задача 2а.

$$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}}dx$$

Задача 2б.

$$I=\int e^{5x-1}\cos(2-3x)dx$$

Задача 2в.

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin(x)-\cos(x)+1}$$

Задача 3. Намерете интервалите на растене и намаляване, интервалите на вдлъбнатост и изпъкналост, локалните екстремуми и инфлексните точки на функцията.

$$y=x^2e^{\frac{1}{x}}$$

Задача 4. Докажете теоремата: Нека функциите $f(x)$ и $\varphi(x)$ са непрекъснати в $[a,b]$, диференцируеми в (a,b) и $\varphi'(x)\neq 0$, $\forall x\in(a,b)$. Тогава съществува точка $\xi\in(a,b)$, в която $\dfrac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$.

Задача 5. Решете матричното уравнение.

$$X\begin{pmatrix}5&3&1\\1&-3&-2\\-5&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&3&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

Задача 6. Напишете уравнението на равнина, минаваща по правата g и успоредна на правата p.

$$g:\begin{cases}2x-y+3z-5=0\\x+2y-z+2=0\end{cases},\ p:\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z}{-2}$$

Точки: 1: 4+4+3т, 2: 6+7+6т, 3: 7т, 4: 6т, 5: 9т, 6: 8т.

Задача 1а.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right)$$

Решение. Привежда се под общ знаменател и се прилага два пъти правилото на Лопитал.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x\sin(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]\Longrightarrow\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)+x\cos(x)}=$$
$$=\left[\frac{0}{0}\right]\Longrightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\cos(x)+\cos(x)-x\sin(x)}=\frac{0}{1+1-0}=0$$

□

Задача 1б.

$$y=\tan\left(\frac{1}{2x-1}\right)+e^{\arctan(\sqrt{2x+3})},\ y'=?$$

Решение.

$$y'=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{2x-1}\right)}\frac{-2}{(2x-1)^2}+e^{\arctan(\sqrt{2x+3})}\frac{2}{1+(2x+3)}=$$
$$=\frac{-2}{(2x-1)^2\cos^2\left(\frac{1}{2x-1}\right)}+\frac{e^{\arctan(\sqrt{2x+3})}}{x+2}$$

□

Задача 1в.

$$y=(1+x)^{\frac{1}{\cos(x)}},\ y'=?$$

Решение. (1в, 3т) Функция на степен функция се решава само чрез повдигане на степен e и логаритмуване (тоест за диференциране и търсене на граници). Целта е да диференцираме степента на e-то, самото e ще се върне в оригиналната функция.

$$y=(1+x)^{\frac{1}{\cos(x)}},\ y'=?$$
$$y'=\left(e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{\cos(x)}}}\right)'=\left(e^{\frac{\ln(1+x)}{\cos(x)}}\right)'=e^{\frac{\ln(1+x)}{\cos(x)}}\left(\frac{\ln(1+x)}{\cos(x)}\right)'=$$
$$=(1+x)^{\frac{1}{\cos(x)}}\left(\frac{\ln(1+x)}{\cos(x)}\right)'=(1+x)^{\frac{1}{\cos(x)}}\frac{\frac{1}{1+x}\cos(x)-\ln(1+x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)}=$$
$$=(1+x)^{\frac{1}{\cos(x)}}\frac{\frac{\cos(x)}{1+x}+\sin(x)\ln(1+x)}{\cos^2(x)}$$

□

Задача 2а.

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}}dx$$

Решение. При такива интеграли целия корен се полага на t. И се определя dx.

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}}dx,\ \sqrt{\frac{x-2}{x}} = t,\ x \neq 0,\ t \neq 1$$

$$\frac{x-2}{x} = t^2 \Longrightarrow x-2 = xt^2 \Longrightarrow x = \frac{2}{1-t^2}$$

$$dx = d\left(\frac{2}{1-t^2}\right) = d(2(1-t^2)^{-1}) = 2(-1)(1-t^2)^{-2}(-2t)dt = \frac{4tdt}{(1-t^2)^2}$$

Заместваме в интеграла.

$$\int \frac{1}{\frac{2}{1-t^2}}t\frac{4tdt}{(1-t^2)^2} = \int \frac{4t^2(1-t^2)dt}{2(1-t^2)^2} = \int \frac{2t^2dt}{1-t^2} = 2\int \frac{1-1+t^2dt}{1-t^2} =$$

$$= 2\left(\int \frac{dt}{1-t^2} + \int \frac{-1+t^2}{1-t^2}dt\right) = 2\left(\int \frac{dt}{1-t^2} - \int \frac{1-t^2}{1-t^2}dt\right) =$$

$$= 2\left(\int \frac{dt}{1-t^2} - \int dt\right) = 2\left(\int \frac{dt}{1-t^2} - t\right)$$

Относно интеграла. Разлагаме $1-t^2$ на $(1-t)(1+t)$, корените са 1, -1.

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t}$$

$$1 = A(1+t) + B(1-t)$$

Заместваме с $t = 1$.

$$1 = A(1+1) \Longrightarrow A = \frac{1}{2}$$

Сега с $t = -1$.

$$1 = B(1-(-1)) \Longrightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{dt}{1-t^2} = \int \frac{1/2dt}{1-t} + \int \frac{1/2dt}{1+t} = \frac{1}{2}\left(-\int \frac{d(1-t)}{1-t} + \int \frac{d(1+t)}{1+t}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(-\ln|1-t| + \ln|1+t|) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|$$

Записваме отговора.

$$I = 2\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - t\right) + C = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - 2t + C$$

□

Задача 2б.

$$I = \int e^{5x-1}\cos(2-3x)dx$$

Решение. Интеграл от експоненциална функция и тригонометрична функция е изключително тежък за решаване.

Решава се чрез два пъти интегриране по части, няма значение коя функция ще вкараме под диференциала, след втория път ще получим началния интеграл и ще намерим стойността му. Тези интеграли, като са неопределени стоят на функции, определените стават на число.

$$\begin{aligned}
I &= \int e^{5x-1}\cos(2-3x)dx = \frac{1}{5}\int \cos(2-3x)d\left(e^{5x-1}\right) = \\
&= \frac{1}{5}\left(e^{5x-1}\cos(2-3x) - \int e^{5x-1}d(\cos(2-3x))\right) = \\
&= \frac{1}{5}\left(C_1 - \int e^{5x-1}(-\sin(2-3x))(-3)dx\right) = \\
&= \frac{1}{5}\left(C_1 - \frac{3}{5}\int \sin(2-3x)d\left(e^{5x-1}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{5}\left(C_1 - \frac{3}{5}\left(e^{5x-1}\sin(2-3x) - \int e^{5x-1}d(\sin(2-3x))\right)\right) = \\
&= \frac{1}{5}\left(C_1 - \frac{3}{5}C_2 + \frac{3}{5}\int e^{5x-1}\cos(2-3x)(-3)dx\right) = \\
&= \frac{1}{5}\left(C_1 - \frac{3}{5}C_2 - \frac{9}{5}\int e^{5x-1}\cos(2-3x)dx\right) \\
I &= \frac{1}{5}\left(C_1 - \frac{3}{5}C_2 - \frac{9}{5}I\right) \\
I &= \frac{1}{5}C_1 - \frac{3}{25}C_2 - \frac{9}{25}I \Longrightarrow I + \frac{9}{25}I = \frac{1}{5}C_1 - \frac{3}{25}C_2 \\
\frac{34}{25}I &= \frac{5}{25}C_1 - \frac{3}{25}C_2 \Longrightarrow I = \frac{1}{34}\left(5C_1 - 3C_2\right) \\
I &= \frac{1}{34}\left(5e^{5x-1}\cos(2-3x) - 3e^{5x-1}\sin(2-3x)\right)
\end{aligned}$$

□

Задача 2в.

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin(x) - \cos(x) + 1}$$

Решение. Интеграл от само синуси и косинуси се решава чрез универсална субституция за този тип интеграли. Изчисляват се dx и границите на t.

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin(x)-\cos(x)+1},\ \tan\left(\frac{x}{2}\right)=t,\ \sin(x)=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x=2\arctan(t),\ dx=d(2\arctan(t))=\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$x=\frac{\pi}{3}:\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=t\Longrightarrow t=\frac{\sqrt{3}}{3};\ x=\frac{\pi}{2}:\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)=t\Longrightarrow t=1$$

$$\int_{\sqrt{3}/3}^{1} \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}\frac{2dt}{1+t^2}=\int_{\sqrt{3}/3}^{1}\frac{2dt}{2t-1+t^2+1+t^2}=$$

$$=\int_{\sqrt{3}/3}^{1}\frac{2dt}{2t+2t^2}=\int_{\sqrt{3}/3}^{1}\frac{dt}{t+t^2}$$

Сега обаче трябва да разложим полинома $t+t^2$. Корените му са 0 и -1. Разлага се на $t(1+t)$. Трябва да разложим и цялата дроб. Ето как.

$$\frac{1}{t(1+t)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{1+t}$$

Полиномите в числител, A и B, трябва да са със степен една по-ниска от знаменателя, в случая знаменателите са от първа степен, t и $1+t$, така че полиномите в числител са константи. (Ако в знаменател имаме примерно t^2+1, в числител ще стои $Ax+B$.) Сега просто привеждаме под общ знаменател и заместваме с корените на полинома $t+t^2$.

$$\frac{1}{t(1+t)}=\frac{A(1+t)}{t(1+t)}+\frac{Bt}{t(1+t)}$$

$$1=A(1+t)+Bt$$

$$t=0:1=A(1+0)+0\Longrightarrow A=1$$

$$t=-1:1=0+B(-1)\Longrightarrow B=-1$$

Това означава, че дробта се разлага така:

$$\frac{1}{t(1+t)}=\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}$$

Методът важи за всички случаи. Интегралът добива следния вид.

$$\int_{\sqrt{3}/3}^{1}\frac{dt}{t+t^2}=\int_{\sqrt{3}/3}^{1}\frac{dt}{t}-\int_{\sqrt{3}/3}^{1}\frac{dt}{1+t}=\ln(t)\big|_{\sqrt{3}/3}^{1}-\ln(1+t)\big|_{\sqrt{3}/3}^{1}=$$

$$=\ln(1)-\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-\ln(2)+\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=0-\ln\left(2+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=$$

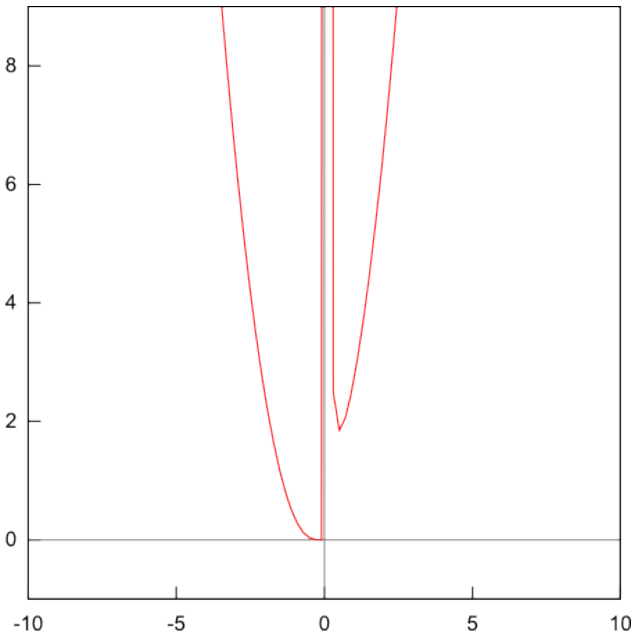
$$=\ln\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)-\ln\left(\frac{6+\sqrt{3}}{3}\right)=\ln\left(\frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{6+\sqrt{3}}{3}}\right)=\ln\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6+\sqrt{3}}\right)$$

□

Задача 3. Намерете интервалите на растене и намаляване, интервалите на вдлъбнатост и изпъкналост, локалните екстремуми и инфлексните точки на функцията.

$$y = x^2 e^{\frac{1}{x}},\ x \neq 0$$

Решение. Графиката на функцията.



Това означава да изчислим първа и втора производна, и корените им. Първата производна е за локалните екстремуми и интервалите на растене и намаляване, втората — за инфлексните точки и интервалите на вдлъбнатост и изпъкналост.

Ограничението е $x \neq 0$. Функцията има вертикална асимптота при $x = 0$.

$$y' = \left(x^2 e^{1/x}\right)' = 2xe^{1/x} + x^2 e^{1/x}\left(\frac{1}{x}\right)' = 2xe^{1/x} + x^2 e^{1/x}\frac{-1}{x^2} = 2xe^{1/x} - e^{1/x}$$

Намираме корените на y'.

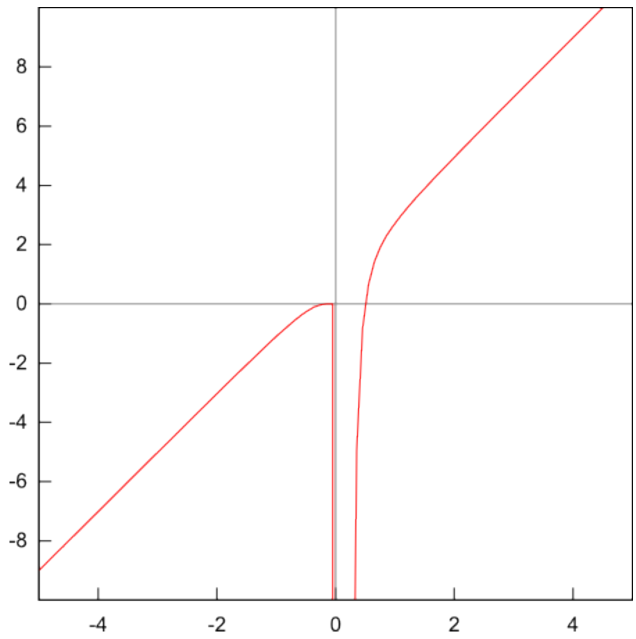
$$e^{1/x}(2x-1) = 0 \Longrightarrow e^{1/x} \neq 0 \Longrightarrow 2x - 1 = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$$

За да е екстремум точката $x = 1/2$, трябва знакът на първата производна отляво и отдясно да е различен.

$$x = 0.3 : y'(0.3) = e^{3.33}(2(0.3) - 1) = -11.21$$

$$x = 0.8 : y'(0.8) = e^{1.25}(2(0.8) - 1) = 2.09$$

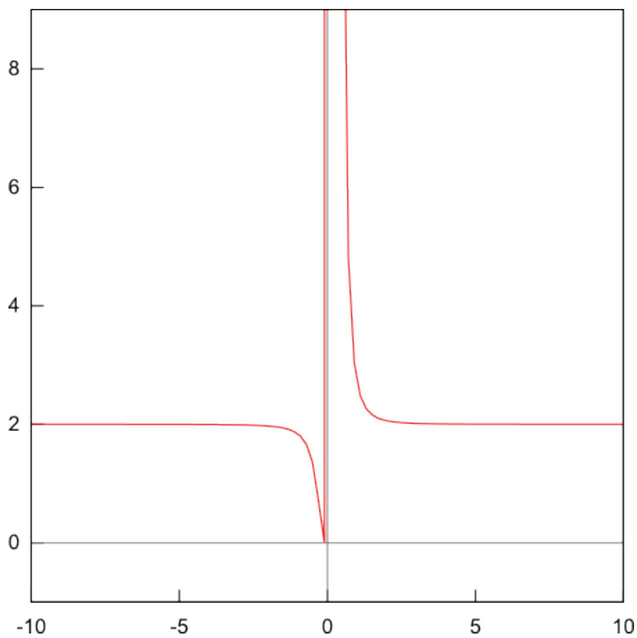
Следователно $x = 1/2$ е локален минимум. Функцията расте в $x \in (1/2, +\infty)$ и намалява в $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1/2)$ (прекъсване в нулата).



Сега втора производна.

$$y'' = (2xe^{1/x} - e^{1/x})' = 2e^{1/x} + 2xe^{1/x}\left(\frac{-1}{x^2}\right) - e^{1/x}\left(\frac{-1}{x^2}\right) =$$
$$= 2e^{1/x} - \frac{2}{x}e^{1/x} + \frac{1}{x^2}e^{1/x} = \frac{e^{1/x}}{x^2}(2x^2 - 2x + 1)$$

Корените на втората производна са комплексни числа: $1 \pm i$. Не ни вършат работа. Няма инфлексни точки.



Отговор: Локален минимум в $x = 1/2$. Функцията расте в $x \in (1/2, +\infty)$ и намалява в $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1/2)$. □

Задача 4. Докажете теоремата: Нека функциите $f(x)$ и $\varphi(x)$ са непрекъснати в $[a, b]$, диференцируеми в (a, b) и $\varphi'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$. Тогава съществува точка $\xi \in (a, b)$, в която $\dfrac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}$.

Решение. Това е една от основните теореми на Коши.

Доказателствата се прескачат. □

Задача 5. Решете матричното уравнение.

$$X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Това е матрично уравнение от вида $X.A = B$, чието решение е

$$X.A = B/.(A^{-1}) \Longrightarrow X.A.A^{-1} = B.A^{-1} \Longrightarrow X = B.A^{-1}$$

Трябва да намерим обратната матрица на A, това става чрез намирането на нейната детерминанта и адюнгираните количества на всеки елемент.

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -15 + 30 + 2 - 15 + 20 - 3 = 19 \neq 0$$

Сега адюнгираните количества.

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(1 - 10) = 9$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 15 = -13$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(3 - 2) = -1$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 5 = 10$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(10 + 15) = -25$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 3 = -3$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-10 - 1) = 11$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15 - 3 = -18$$

Тогава записваме матрицата от адюнгираните количества и я транспонираме.

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -13 \\ -1 & 10 & -25 \\ -3 & 11 & -18 \end{pmatrix} \Longrightarrow A_{ij}^t = A_{ji} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix}$$

Формулата за обратна матрица е: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A_{ji}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix}$$

Сега изчисляваме X.

$$X = B.A^{-1} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix}$$

Матрици се умножават по следния начин: от лявата се взима ред, от дясната стълб, и се умножават поелементно.

$$\begin{aligned}
c_{11} &= [B1row \times A1column] = 1.1 + (-1).9 + 0.(-13) = -8 \\
c_{12} &= [B1row \times A2column] = 1.(-1) + (-1).10 + 0.25 = -11 \\
c_{13} &= [B1row \times A3column] = 1.(-3) + (-1).11 + 0.(-18) = -14 \\
c_{21} &= [B2row \times A1column] = 2.1 + 3.9 + 0.(-13) = 29 \\
c_{22} &= [B2row \times A2column] = 2.(-1) + 3.10 + 0.(-25) = 28 \\
c_{23} &= [B2row \times A3column] = 2.(-3) + 3.11 + 0.(-18) = 27 \\
c_{31} &= [B3row \times A1column] = (-1).1 + 0.9 + 1.(-13) = -14 \\
c_{32} &= [B3row \times A2column] = (-1).(-1) + 0.10 + 1.(-25) = -24 \\
c_{33} &= [B3row \times A3column] = (-1).(-3) + 0.11 + 1.(-18) = -15
\end{aligned}$$

Записваме отговора.

$$X = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} -8 & -11 & -14 \\ 29 & 28 & 27 \\ -14 & -24 & -15 \end{pmatrix}$$

$\square$

Задача 6. Напишете уравнението на равнина, минаваща по правата g и успоредна на правата p.

$$g : \begin{cases} 2x - y + 3z - 5 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases} , \; p : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{-2}$$

Решение. Правата p е записана чрез каноничното си уравнение, правата g — като пресечница на две равнини. Трябва да намерим каноничното уравнение на правата g. Разглеждаме системата уравнения.

$$\left| \begin{array}{l} 2x - y + 3z - 5 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{array} \right.$$

Избираме две неизвестни от трите които имаме, x, y, z, и взимаме коефициентите пред тях. В случая x и y. Ако детерминантата е нула, ще трябва да вземем други две.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5 \neq 0$$

Тези две неизвестни които сме взели остават отляво; другото неизвестно и свободния коефициент отдясно, неизвестното се записва като параметър λ.

$$\left| \begin{array}{l} 2x - y = 5 - 3z \\ x + 2y = z - 2 \end{array} \right. , \ z = \lambda$$

$$\left| \begin{array}{l} 2x - y = 5 - 3\lambda \\ x + 2y = \lambda - 2 \end{array} \right.$$

От второто уравнение изразяваме x и го заместваме в първото.

$$2(\lambda - 2 - 2y) - y = 5 - 3\lambda \Longrightarrow -5y = -5\lambda + 9 \Longrightarrow y = \lambda - \frac{9}{5} \Longrightarrow \lambda = \frac{y + 9/5}{1}$$

Заместваме y в първото или второто уравнение (в случая във второто).

$$x + 2\lambda - \frac{18}{5} = \lambda - 2 \Longrightarrow x = -\lambda + \frac{8}{5} \Longrightarrow \lambda = \frac{x - 8/5}{-1}$$

За z имаме

$$z = \lambda \Longrightarrow \lambda = \frac{z - 0}{1}$$

Сега приравняваме λ и получаваме каноничното уравнението на правата g.

$$g : \frac{x - 8/5}{-1} = \frac{y + 9/5}{1} = \frac{z - 0}{1}$$

Уравнение на равнина се намира чрез точка и два вектора (записани като детерминанта). Точката $A(8/5, -9/5, 0)$ принадлежи на правата g (в числител), вектора $(-1, 1, 1)$ е успореден на g (в знаменател). Трябва ни още един вектор.

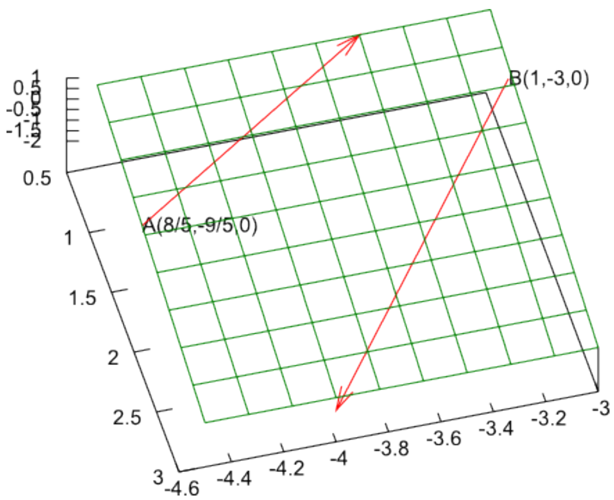
$$p : \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 3}{-1} = \frac{z}{-2}$$

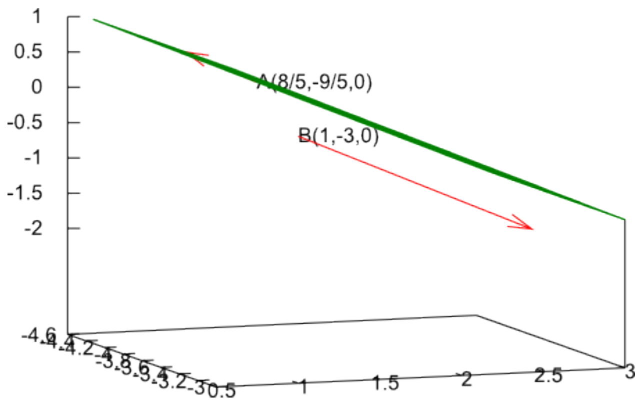
По условие искаме равнината да е успоредна на правата p. Ще вземем нейния вектор, който е $(2, -1, -2)$. Този вектор е успореден на p, като го включим в детерминантата ще е успореден и на равнината.

Записваме детерминантата и я развиваме по първи ред.

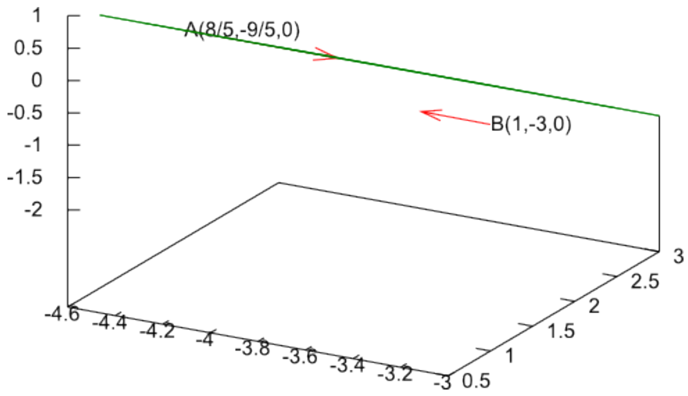
$$\begin{vmatrix} x-8/5 & y+9/5 & z-0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (x-8/5)(-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} +$$
$$+ (y+9/5)(-1)^3\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + z(-1)^4\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$
$$= (x-8/5).(-1) + (y+9/5).0 + z.(-1) = -x + 8/5 - z$$

Уравнението на равнината е: $-x + 0y - z + 8/5 = 0$.





Не е казано, че правите g и p са успоредни, само че равнината и правата p са успоредни. $A(8/5, -9/5, 0) \in g$, $B(1, -3, 0) \in p$.



Отговор: Равнината е с уравнение $x + z - 8/5 = 0$. $\square$

4 Четвърта тема

Задача 1а.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$$

Задача 1б.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$$

Задача 2а.

$$y=(1+x)^{\frac{1}{\sin(x)}},\ y'=?$$

Задача 2б. Интервали?

$$y=(x^2+1)e^x$$

Задача 3а.

$$\int_0^{1/2}\arcsin(x)dx$$

Задача 3б.

$$\int_0^1\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+1}+x+1}$$

Задача 3в.

$$I=\int e^{3x-1}\cos(2x+1)dx$$

Задача 4. Намерете ранга на матрицата.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5\\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4\\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7\\ 7 & -5 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

Задача 5. Дадена е права g.

$$g:\begin{cases}2x-y+3z-5=0\\ x+2y-z+2=0\end{cases}$$

(а) Намерете точка $M_0\in g$ и запишете g в канонична форма.

(б) Намерете уравнението на равнината α минаваща през правата g и успоредна на правата p.

$$p:\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z}{-2}$$

Задача 6. Докажете, че ако $f(x)$ е интегруема в $[a,b]$, то функцията

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt,\ x\in(a,b],$$

е непрекъсната в $[a,b]$.

Точки: 1: 4+4+3т, 2: 3+7+5т, 4: 8т, 5: 5+3т, 6: 5т.

Задача 1а.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$$

Решение. За да решим това, ще ни трябват малко пояснения.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+x}{n}\right)^{n}=\exp(x)=e^{x}$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1+2}{n-1}\right)^{n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n-1}=\exp(2)=e^{2}$$

Тогава, нека да разгледаме степените.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n+3-1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n+3}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{-1}$$

Разделяме границите. Лявата ще стане експоненциална функция.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n+3}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3-4}{n+3}\right)^{n+3}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4}{n+3}\right)^{n+3}=\exp(-4)=e^{-4}$$

Дясната граница — ако $n\to\infty$ изнасяме най-високата степен на n, ако $n\to 0$, изнасяме най-ниската степен на n.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(1+3/n)}{n(1-1/n)}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

Това е така, защото $3/\infty=0$ (число върху безкрайност е нула). Сега умножаваме двете граници и получаваме отговора.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}=1e^{-4}=e^{-4}=\frac{1}{e^{4}}$$

□

Задача 1б.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^{x}-1}\right)$$

Решение. Привежда се под общ знаменател и се прилага два пъти правилото на Лопитал.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^{x}-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1-x}{x(e^{x}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1-x}{xe^{x}-x}=\left[\frac{0}{0}\right]\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{e^{x}+xe^{x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]\Longrightarrow\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}}{e^{x}+e^{x}+xe^{x}}=\frac{1}{1+1+0}=\frac{1}{2}$$

□

Задача 2а.

$$y = (1+x)^{\frac{1}{\sin(x)}},\ y' =?$$

Решение. Функция на степен функция се решава само чрез повдигане на степен e и логаритмуване (тоест за диференциране и търсене на граници). Целта е да диференцираме степента на e-то, самото e ще се върне в оригиналната функция.

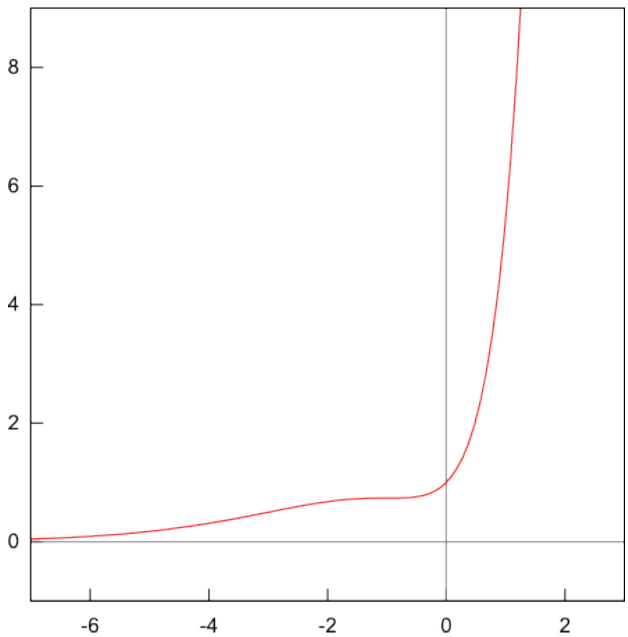
$$y' = \left((1+x)^{\frac{1}{\sin(x)}}\right)' = \left(e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{\sin(x)}}}\right)' = e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{\sin(x)}}}\left(\ln(1+x)^{\frac{1}{\sin(x)}}\right)' =$$
$$= (1+x)^{\frac{1}{\sin(x)}}\left(\frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}\right)' = (1+x)^{\frac{1}{\sin(x)}}\left(\frac{\frac{\sin(x)}{1+x} - \cos(x)\ln(1+x)}{\sin^2(x)}\right)$$

□

Задача 2б. Интервали?

$$y = (x^2+1)e^x$$

Решение. Трябва да се намерят интервалите на растене и намаляване, и знака на функцията в тези интервали.



Функцията няма корени, $y > 0$ за $x \in (-\infty, +\infty)$. Проверяваме за някои стойности около $x = 0$.

$$x = -2 : y = (4+1)e^{-2} = \frac{1}{4e^2} < 1$$
$$x = -1 : y = (1+1)e^{-1} = \frac{1}{2e} < 1$$
$$x = 0 : y = (0+1)e^{0} = 1$$
$$x = 1 : y = (1+1)e^{1} = 2e > 1$$
$$x = 2 : y = (4+1)e^{2} = 5e^2 > 1$$

Което означава, че $y \in (0,1)$ за $x \in (-\infty,0)$ и $y \in (1,+\infty)$ за $x \in (0,+\infty)$. Функцията е растяща в $(-\infty,+\infty)$. □

Задача 3а.

$$\int_0^{1/2} \arcsin(x)dx$$

Решение. Функция, която не може да бъде получена чрез производна, се интегрира само чрез интегриране по части.

$$\begin{aligned}
&\int_0^{1/2} \arcsin(x)dx = x\arcsin(x)|_0^{1/2} - \int_0^{1/2} xd(\arcsin(x)) = \\
&= \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \int_0^{1/2} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{d(x^2)}{(1-x^2)^{1/2}} = \\
&= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\int_0^{1/2} (1-x^2)^{-1/2}d(-x^2) = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\int_0^{1/2} (1-x^2)^{-1/2}d(1-x^2) = \\
&= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}(1-x^2)^{1/2}|_0^{1/2} = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)^{1/2} - (1-0)^{1/2}\right] = \\
&= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

□

Задача 3б.

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+1}+x+1}$$

Решение.

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+1}+x+1}, \ \sqrt{x+1} = t, \ x = t^2-1, \ dx = 2tdt \\
&x = 0 : t = \sqrt{1+0} = 1, \ x = 1 : t = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\
&\int_1^{\sqrt{2}} \frac{2tdt}{(t^2-1+1)t+t^2-1+1} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2tdt}{t^3+t^2} = 2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2+t}
\end{aligned}$$

Сега обаче трябва да разложим полинома $t+t^2$. Корените му са 0 и -1. Разлага се на $t(1+t)$. Трябва да разложим и цялата дроб. Ето как.

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t}$$

Полиномите в числител, A и B, трябва да са със степен една по-ниска от знаменателя, в случая знаменателите са от първа степен, t и $1+t$, така че полиномите в числител са константи. (Ако в знаменател имаме примерно t^2+1, в числител ще стои $Ax+B$.) Сега просто привеждаме под общ знаменател и заместваме с корените на полинома $t+t^2$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{t(1+t)} &= \frac{A(1+t)}{t(1+t)} + \frac{Bt}{t(1+t)}\\ 1 &= A(1+t)+Bt\\ t &= 0 : 1 = A(1+0)+0 \Longrightarrow A = 1\\ t &= -1 : 1 = 0 + B(-1) \Longrightarrow B = -1\end{aligned}$$

Това означава, че дробта се разлага така:

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$$

Тогава интеграла добива следния вид.

$$\begin{aligned}&2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2+t} = 2\int_1^{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)dt = 2\left(\int_1^{\sqrt{2}}\frac{dt}{t} - \int_1^{\sqrt{2}}\frac{dt}{t+1}\right) =\\ &= 2\left(\ln(t)|_1^{\sqrt{2}} - \ln(t+1)|_1^{\sqrt{2}}\right) = 2\left(\ln(\sqrt{2}) - \ln(1) - \ln(\sqrt{2}+1) + \ln(2)\right) =\\ &= 2\left(\ln(2^{1/2}) + \ln(2) - \ln(\sqrt{2}+1)\right) = 2\left(\frac{1}{2}\ln(2) + \ln(2) - \ln(\sqrt{2}+1)\right) =\\ &= 2\left(\frac{3}{2}\ln(2) - \ln(\sqrt{2}+1)\right) = 2\left(\ln(2^{3/2}) - \ln(\sqrt{2}+1)\right) = 2\ln\left(\frac{2^{3/2}}{\sqrt{2}+1}\right) =\\ &= \ln\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\right)^2 = \ln\frac{8}{(\sqrt{2}+1)^2}\end{aligned}$$

□

Задача 3в.

$$I = \int e^{3x-1}\cos(2x+1)dx$$

Решение. Интеграл от експоненциална функция и тригонометрична функция е изключително тежък за решаване. Решава се чрез два пъти интегриране по части, няма значение коя функция ще вкараме под диференциала, след втория път ще получим началния интеграл и ще намерим на колко е равен.

$$\begin{aligned}
I &= \int e^{3x-1}\cos(2x+1)dx = \frac{1}{3}\int \cos(2x+1)d\left(e^{3x-1}\right) = \\
&= \frac{1}{3}\left(e^{3x-1}\cos(2x+1) - \int e^{3x-1}d(\cos(2x+1))\right) = \\
&= \frac{1}{3}\left(C_1 - \int e^{3x-1}(-\sin(2x+1))2dx\right) = \\
&= \frac{1}{3}\left(C_1 + \frac{2}{3}\int \sin(2x+1)d\left(e^{3x-1}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{3}\left(C_1 + \frac{2}{3}\left(e^{3x-1}\sin(2x+1) - \int e^{3x-1}d(\sin(2x+1))\right)\right) = \\
&= \frac{1}{3}\left(C_1 + \frac{2}{3}C_2 - \frac{2}{3}\int e^{3x-1}\cos(2x+1)2dx\right) = \\
&= \frac{1}{3}\left(C_1 + \frac{2}{3}C_2 - \frac{4}{3}\int e^{3x-1}\cos(2x+1)dx\right) \\
I &= \frac{1}{3}\left(C_1 + \frac{2}{3}C_2 - \frac{4}{3}I\right) \\
I &= \frac{1}{3}C_1 + \frac{2}{9}C_2 - \frac{4}{9}I \Longrightarrow I + \frac{4}{9}I = \frac{1}{3}C_1 + \frac{2}{9}C_2 \\
\frac{13}{9}I &= \frac{3}{9}C_1 + \frac{2}{9}C_2 \Longrightarrow I = \frac{1}{13}\left(3C_1 + 2C_2\right) \\
I &= \frac{1}{13}\left(3e^{3x-1}\cos(2x+1) + 2e^{3x-1}\sin(2x+1)\right)
\end{aligned}$$

□

Задача 4. Намерете ранга на матрицата.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение. Изчисляваме минорите (детерминанти от горния ляв ъгъл).

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= 3 \neq 0 \\
\Delta_2 &= \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -9 - (-5) = 4 \neq 0 \\
\Delta_3 &= \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 45 - 2 - 45 + 9 + 18 - 25 = 27 - 27 = 0
\end{aligned}$$

Докато стигнем до детерминанта равна на нула. Това означава, че ранга на матрицата е равен на размера на предишната детерминанта, тоест ранга е равен на две, $r(A) = 2$.

Тези детерминанти се наричат минори, рангът е ненулев минор от най-висок ред. Рангът има смисъл да се търси само на не-квадратни матрици, тъй като на квадратните директно можем да намерим детерминантата. □

Задача 5. Дадена е права g.

$$g : \begin{cases} 2x - y + 3z - 5 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

(а) Намерете точка $M_0 \in g$ и запишете g в канонична форма.

(б) Намерете уравнението на равнината α минаваща през правата g и успоредна на правата p.

$$p : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{-2}$$

Решение. Виж Тема 3, Задача 6 (задачата е същата). □

Задача 6. Докажете, че ако $f(x)$ е интегруема в $[a, b]$, то функцията

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \; x \in (a, b],$$

е непрекъсната в $[a, b]$.

Решение. Доказателствата се прескачат. □

5 Пета тема

Задача 1а.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-2}{2n+1}\right)^{4n+2}$$

Задача 1б.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right)$$

Задача 2а.

$$y = x^{\sqrt{x}},\ x>0,\ y' =?$$

Задача 2б. Интервали?

$$y=(x-2)e^{1/x}$$

Задача 3а.

$$\int_{1/2}^{1}(x^2e^{-2x}+\tan(x))dx$$

Задача 3б.

$$I=\int_1^e \sin(\ln(x))dx$$

Задача 3в.

$$I=\int e^{4x-1}\sin(3x-1)dx$$

Задача 4. Решете матричното уравнение.

$$X\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 5. В правоъгълен триъгълник са дадени координатите на един от острите върхове $A(5,7)$ и уравнението на противоположния катет $BC : 6x+4y-9=0$. Да се намери общото уравнение на катета AC и дължината му. Направете чертеж.

Задача 6. Изведете формула за редукция по n за интеграл

$$I_n=\int \sin^n(x)dx$$

Точки: 1: 4+4+3т, 2: 3+7т, 3: 9+6+8т, 4: 9т, 5: 5т, 6: 5т.

Задача 1а.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-2}{2n+1}\right)^{4n+2}$$

Решение. За да решим това, ще ни трябват малко пояснения.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+x}{n}\right)^{n}=\exp(x)=e^{x}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1+2}{n-1}\right)^{n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n-1}=\exp(2)=e^{2}$$

Тогава, нека да разгледаме степените.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-2}{2n+1}\right)^{4n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-2}{2n+1}\right)^{2(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{2n-2}{2n+1}\right)^{2n+1}\right)^{2}=$$
$$=\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1-3}{2n+1}\right)^{2n+1}\right)^{2}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3}{2n+1}\right)^{2n+1}\right)^{2}=$$
$$=(\exp(-3))^{2}=\left(e^{-3}\right)^{2}=e^{-6}$$

□

Задача 1б.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right)$$

Решение. Привежда се под общ знаменател и се прилага два пъти правилото на Лопитал.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x\sin(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]\Longrightarrow\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{1\sin(x)+x\cos(x)}=$$
$$=\left[\frac{0}{0}\right]\Longrightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\cos(x)+\cos(x)-x\sin(x)}=\frac{0}{1+1-0}=0$$

□

Задача 2а.

$$y=x^{\sqrt{x}},\ x>0,\ y'=?$$

Решение. Функция на степен функция се решава само чрез повдигане на степен e и логаритмуване (тоест за диференциране и търсене на граници). Целта е да диференцираме степента на e-то, самото e ще се върне в оригиналната функция.

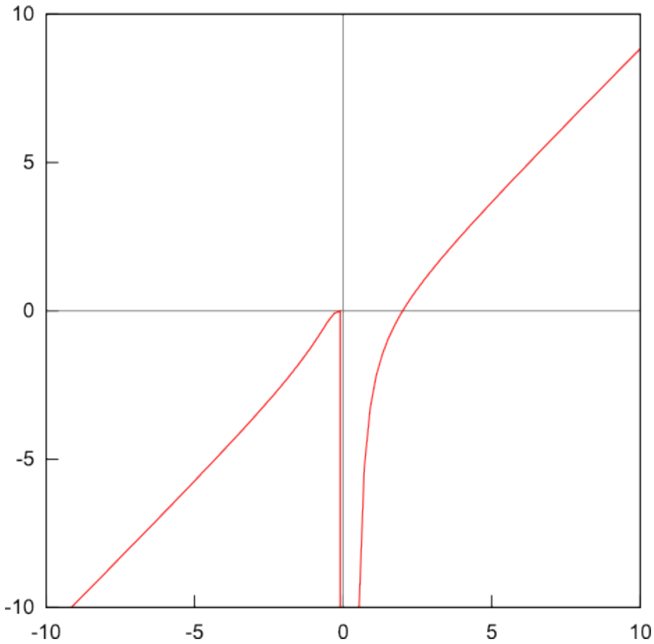
$$y'=\left(x^{\sqrt{x}}\right)'=\left(e^{\ln\left(x^{\sqrt{x}}\right)}\right)'=e^{\ln\left(x^{\sqrt{x}}\right)}\left(\ln\left(x^{\sqrt{x}}\right)\right)'=x^{\sqrt{x}}\left(\ln\left(x^{\sqrt{x}}\right)\right)'=$$
$$=x^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}\ln(x)\right)'=x^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\ln(x)+\sqrt{x}\frac{1}{x}\right)=x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=$$
$$=x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln(x)+2}{2\sqrt{x}}\right)$$

□

Задача 2б. Интервали?

$$y = (x-2)e^{1/x}$$

Решение. Трябва да се намерят интервалите на растене и намаляване, и знака на функцията в тези интервали.



Ограничението е $x \neq 0$. Функцията има вертикална асимптота (прекъсване) в $x = 0$. Вижда се, че $x = 2$ е корен на функцията, разглеждаме стойностите на функцията около $x = 2$.

$$x = 1 : y = (1-2)e^1 = -e < 0$$
$$x = 3 : y = (3-2)e^{1/3} = e^{1/3} > 0$$

Което значи, че при $x = 2$ функцията сменя знака си, тоест $y < 0$ за $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2)$ и $y > 0$ за $x \in (2, +\infty)$. Функцията е растяща в $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, с прекъсване в нулата. □

Задача 3а.

$$\int_{1/2}^{1} (x^2 e^{-2x} + \tan(x))dx$$

Решение.

$$\int_{1/2}^{1} (x^2 e^{-2x} + \tan(x))dx = \int_{1/2}^{1} x^2 e^{-2x} dx + \int_{1/2}^{1} \tan(x)dx$$

Първият интеграл се решава чрез два пъти интегриране по части. При такива интеграли под диференциала се вкарва експоненциалната функция (синусова, косинусова, каквато има), иначе ще се увеличи степента на x.

$$\int_{1/2}^{1} x^2e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}\int_{1/2}^{1} x^2d(e^{-2x}) = -\frac{1}{2}\left(x^2e^{-2x}|_{1/2}^{1} - \int_{1/2}^{1} e^{-2x}d(x^2)\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(1e^{-2} - \frac{1}{4}e^{-1}\right) + \frac{1}{2}\int_{1/2}^{1} 2xe^{-2x}dx = -\frac{1}{2e^2} + \frac{1}{8e} + \int_{1/2}^{1} xe^{-2x}dx =$$
$$= \frac{e-4}{8e^2} - \frac{1}{2}\int_{1/2}^{1} xd(e^{-2x}) = \frac{e-4}{8e^2} - \frac{1}{2}\left(xe^{-2x}|_{1/2}^{1} - \int_{1/2}^{1} e^{-2x}dx\right) =$$
$$= \frac{e-4}{8e^2} - \frac{1}{2}\left(1e^{-2} - \frac{1}{2}e^{-1}\right) + \frac{1}{2}\int_{1/2}^{1} e^{-2x}dx =$$
$$= \frac{e-4}{8e^2} - \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{4e} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\int_{1/2}^{1} d(e^{-2x}) = \frac{e-4-4+2e}{8e^2} - \frac{1}{4}e^{-2x}|_{1/2}^{1} =$$
$$= \frac{3e-8}{8e^2} - \frac{1}{4}\left(e^{-2} - e^{-1}\right) = \frac{3e-8}{8e^2} - \frac{1}{4e^2} + \frac{1}{4e} = \frac{5e-10}{8e^2} = 0.06$$

Вторият интеграл се решава чрез разлагане на функцията $\tan(x)$.

$$\int_{1/2}^{1} \tan(x)dx = \int_{1/2}^{1} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = -\int_{1/2}^{1} \frac{d(\cos(x))}{\cos(x)} = -\ln|\cos(x)|_{1/2}^{1} =$$
$$= -(\ln|\cos(1)| - \ln|\cos 1/2|) = -\ln|0.540| + \ln|0.877| = 0.616 - 0.130 = 0.486$$

Отговор: $0.06 + 0.486 = 0.546$. □

Задача 3б.

$$I = \int_{1}^{e} \sin(\ln(x))dx$$

Решение. Решава се чрез два пъти интегриране по части.

$$I = \int_{1}^{e} \sin(\ln(x))dx = x\sin(\ln(x))|_1^e - \int_{1}^{e} xd(\sin(\ln(x))) =$$
$$= e\sin(1) - 1\sin(0) - \int_{1}^{e} x\cos(\ln(x))\frac{1}{x}dx = e\sin(1) - \int_{1}^{e} \cos(\ln(x))dx =$$
$$= e\sin(1) - x\cos(\ln(x))|_1^e + \int_{1}^{e} xd(\cos(\ln(x))) =$$
$$= e\sin(1) - e\cos(1) + 1\cos(0) + \int_{1}^{e} x(-\sin(\ln(x)))\frac{1}{x}dx =$$
$$= e(\sin(1) - \cos(1)) + 1 - \int_{1}^{e} \sin(\ln(x))dx =$$
$$= e(\sin(1) - \cos(1)) + 1 - I$$
$$I = e(\sin(1) - \cos(1)) + 1 - I \Longrightarrow 2I = e(\sin(1) - \cos(1)) + 1$$
$$I = \frac{e}{2}(\sin(1) - \cos(1)) + \frac{1}{2} \Longrightarrow I \sim 0.909$$

□

Задача 3в.

$$I = \int e^{4x-1} \sin(3x-1) dx$$

Решение. Интеграл от експоненциална функция и тригонометрична функция е изключително тежък за решаване. Решава се чрез два пъти интегриране по части, няма значение коя функция ще вкараме под диференциала, след втория път ще получим началния интеграл и ще намерим на колко е равен.

$$\begin{aligned}
I &= \int e^{4x-1} \sin(3x-1) dx = \frac{1}{4} \int \sin(3x-1) d\left(e^{4x-1}\right) = \\
&= \frac{1}{4} \left(e^{4x-1} \sin(3x-1) - \int e^{4x-1} d(\sin(3x-1)) \right) = \\
&= \frac{1}{4} \left(C_1 - \int e^{4x-1} \cos(3x-1) 3dx \right) = \\
&= \frac{1}{4} \left(C_1 - \frac{3}{4} \int \cos(3x-1) d\left(e^{4x-1}\right) \right) = \\
&= \frac{1}{4} \left(C_1 - \frac{3}{4} \left(e^{4x-1} \cos(3x-1) - \int e^{4x-1} d(\cos(3x-1)) \right) \right) = \\
&= \frac{1}{4} \left(C_1 - \frac{3}{4} C_2 + \frac{3}{4} \int e^{4x-1} (-\sin(3x-1)) 3dx \right) = \\
&= \frac{1}{4} \left(C_1 - \frac{3}{4} C_2 - \frac{9}{4} \int e^{4x-1} \sin(3x-1) dx \right) = \frac{1}{4} \left(C_1 - \frac{3}{4} C_2 - \frac{9}{4} I \right) \\
I &= \frac{1}{4} C_1 - \frac{3}{16} C_2 - \frac{9}{16} I \Longrightarrow I + \frac{9}{16} I = \frac{1}{4} C_1 - \frac{3}{16} C_2 \\
\frac{25}{16} I &= \frac{4}{16} C_1 - \frac{3}{16} C_2 \Longrightarrow I = \frac{1}{25} \left(4C_1 - 3C_2 \right) \\
I &= \frac{1}{25} \left(4e^{4x-1} \sin(3x-1) - 3e^{4x-1} \cos(3x-1) \right)
\end{aligned}$$

□

Задача 4. Решете матричното уравнение.

$$X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. Това е матрично уравнение от вида $X.A = B$. Матрицата B има нулев стълб (от матрица стълб/ред не се маха), ето защо е там:

$$X_{3\times3}.A_{3\times3} = B_{3\times3}$$

Решението на матричното уравнение е:

$$X.A = B \ /.(A^{-1}) \implies X.A.A^{-1} = B.A^{-1} \implies X = B.A^{-1}$$

Трябва да намерим обратната матрица на A, това става чрез намирането на нейната детерминанта и адюнгираните количества на всеки елемент.

Изчисляваме детерминантата на A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -15 + 30 + 2 - 15 - 3 + 20 = 19 \neq 0$$

Изчисляваме адюнгираните количества:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -1(1 - 10) = 9$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 15 = -13$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1(3 - 2) = -1$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 5 = 10$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -1(10 + 15) = -25$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 3 = -3$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1(-10 - 1) = 11$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15 - 3 = -18$$

Записваме матрицата от адюнгираните количества и я транспонираме:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -13 \\ -1 & 10 & -25 \\ -3 & 11 & -18 \end{pmatrix} \implies A_{ij}^t = A_{ji} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix}$$

Формулата за обратна матрица: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A_{ji}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix}$$

Ред от лявата матрица се умножава поелементно по стълб от дясната матрица. Решението е:

$$X = B.A^{-1} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 19 & 38 & 57 \\ 76 & 95 & 114 \\ 133 & 152 & 171 \end{pmatrix}$$

Можем да разделим на 19:

$$X = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 19 & 38 & 57 \\ 76 & 95 & 114 \\ 133 & 152 & 171 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

□

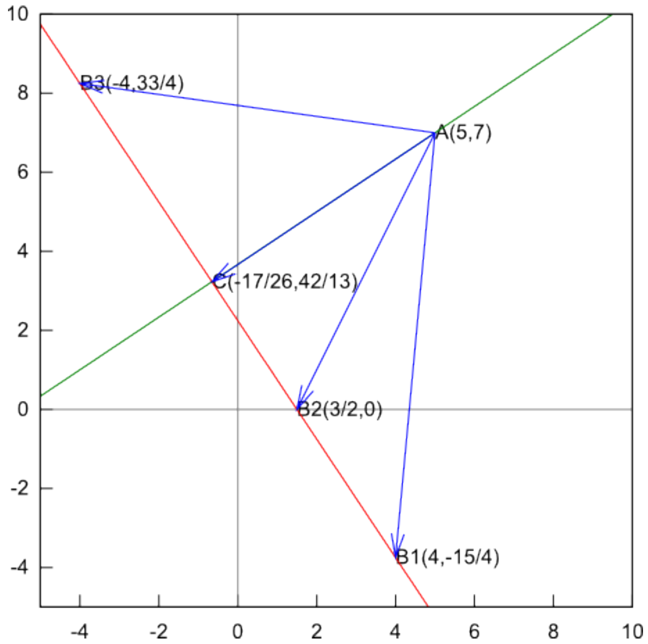
Задача 5. В правоъгълен триъгълник са дадени координатите на един от острите върхове $A(5,7)$ и уравнението на противоположния катет $BC : 6x + 4y - 9 = 0$. Да се намери общото уравнение на катета AC и дължината му. Направете чертеж.

Решение. Правите AC и BC са катети, тоест скаларното им произведение е нула. Взимаме нормалния вектор на BC, който е $\overrightarrow{v}(6,4)$, и записваме нормалния вектор на AC. Избираме си да е $\overrightarrow{w}(4,-6)$, тъй като $(6,4)(4,-6) = 0$.

Тогава уравнението на правата AC ще е $4x - 6y + c = 0$. Точката $A(5,7)$ принадлежи на AC, можем да я заместим в уравнението.

$$4(5) - 6(7) + c = 0 \Longrightarrow 20 - 42 + c = 0 \Longrightarrow c = 22$$

Уравнението на AC е $4x - 6y + 22 = 0$, тоест $AC : 2x - 3y + 11 = 0$.



Нямаме координатите на точката B, тоест тази точка може да е навсякъде по правата $BC : 6x + 4y - 9 = 0$. Задачата ще е валидна където и на правата да се намира B (ако не съвпада с точка C разбира се).

За да намерим дължината на AC са ни необходими координатите на точка C. Пресичаме правите AC и BC за да я намерим.

$$\left|\begin{array}{l} 6x+4y-9=0 \\ 2x-3y+11=0/.(-3) \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} 4y+9y-9-33&=0 \\ 13y&=42 \\ y&=\frac{42}{13} \\ x&=-\frac{17}{26} \end{aligned}$$

Точка $C(-17/26, 42/13)$. Намираме координатите на вектора $\overrightarrow{AC}$ като извадим координатите на началната точка A от координатите на крайната точка C.

$$\overrightarrow{AC}\left(-\frac{17}{26}-5, \frac{42}{13}-7\right) \Longrightarrow \overrightarrow{AC}\left(-\frac{147}{26}, -\frac{49}{13}\right)$$

Сега намираме дължината на AC.

$$|AC| = \sqrt{\frac{147^2}{26^2}+\frac{49^2}{13^2}} = \sqrt{\frac{9.49^2}{26^2}+\frac{4.49^2}{26^2}} = \frac{\sqrt{13.49^2}}{26} = \frac{49\sqrt{13}}{26}$$

Отговор: $AC : 2x-3y+11=0$, $|AC| = (49\sqrt{13})/26$. □

Задача 6. Изведете формула за редукция по n за интеграл

$$I_n = \int \sin^n(x)dx$$

Решение. Вкарваме един $\sin(x)$ под диференциала, интегрираме по части, и после внимаваме за степените на синуса.

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int \sin^n(x)dx = \int \sin^{n-1}(x)\sin(x)dx = -\int \sin^{n-1}(x)d(\cos(x)) = \\
&= -\left(\cos(x)\sin^{n-1}(x) - \int \cos(x)d(\sin^{n-1}(x))\right) = \\
&= -\cos(x)\sin^{n-1}(x) + \int \cos(x)(n-1)\sin^{n-2}(x)\cos(x)dx = \\
&= -\cos(x)\sin^{n-1}(x) + (n-1)\int \sin^{n-2}(x)\cos^2(x)dx = \\
&= -\cos(x)\sin^{n-1}(x) + (n-1)\int \sin^{n-2}(x)(1-\sin^2(x))dx = \\
&= -\cos(x)\sin^{n-1}(x) + (n-1)\left(\int \sin^{n-2}(x)dx - \int \sin^n(x)dx\right) = \\
&= -\cos(x)\sin^{n-1}(x) + (n-1)\left(I_{n-2} - I_n\right) \\
I_n &= -\cos(x)\sin^{n-1}(x) + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \\
nI_n &= -\cos(x)\sin^{n-1}(x) + (n-1)I_{n-2} \\
I_n &= \frac{1}{n}\left(-\cos(x)\sin^{n-1}(x) + (n-1)I_{n-2}\right)
\end{aligned}
$$

$\square$

6 Шеста тема

Задача 1а. Да се пресметне стойността на комплексното число z и $|z|$.

$$z = \frac{(1+i)(2i+3)}{1-i} + i^6 + (2-i)^3$$

Задача 1б. Като се използва правилото на Хорнер, да се намери каноничният вид на полинома: $P(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$.

Задача 2а. Да се изследва ранга на матрицата A в зависимост от стойността на параметъра λ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & \lambda \end{pmatrix}$$

Задача 2б. Да се определи кога матричното уравнение $A.B.X = C$ има решение и да се изрази решението, ако матриците A, B и C са дадени.

Задача 3а. (3а, 7т) Да се реши системата по метода на Гаус.

$$\left| \begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{array} \right.$$

Задача 3б. Да се определят ранговете на основната и разширената матрица от (3а).

Задача 4а. Да се изведе формулата за ъгъл между две прави в равнината: $g_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $g_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Да се разгледат всички случаи на взаимно положение на двете прави g_1 и g_2.

Задача 4б. Точките $A(1,2)$, $B(-1,-1)$ и $C(2,1)$ са върхове на триъгълник. Да се намерят уравненията на трите страни на триъгълник ABC и на височината от върха B към страната AC.

Задача 5. В пространството са дадени точката $P(4,3,10)$ и правите

$$p : \begin{cases} x = 1 + 4k \\ y = 1 + 8k \\ z = 1 + 10k \end{cases} , \ g : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$$

(а) Да се определи взаимното положение на правите p и g и да се провери дали те лежат в една равнина.

(б) Да се намерят координатите на симетричната точка P' на точката P спрямо правата g.

Задача 6а. Каква повърхнина е представена с уравнението $x^2 = -6y$. Да се опишат основните характеристики на съответната крива в равнината, която представя същото уравнение.

Задача 6б. Да се намери областта на решенията на системата неравенства.

$$\left| \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 2 \end{array} \right.$$

Да се определи какво множество представлява областта на решенията и коя е опорната права.

Всяка подточка е по 5 точки, освен задача 3: 7+3т.

Задача 1а. Да се пресметне стойността на комплексното число z и $|z|$.

$$z = \frac{(1+i)(2i+3)}{1-i} + i^6 + (2-i)^3$$

Решение. Ако $z = a + ib$, то $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$i^2 = -1,\ i^3 = i^2 i = -i,\ i^4 = i^2 i^2 = 1,\ i^5 = i^4 i = -1$$

$$i^6 = -1,\ i^7 = -i,\ i^8 = 1,\ i^9 = -1,\ \ldots$$

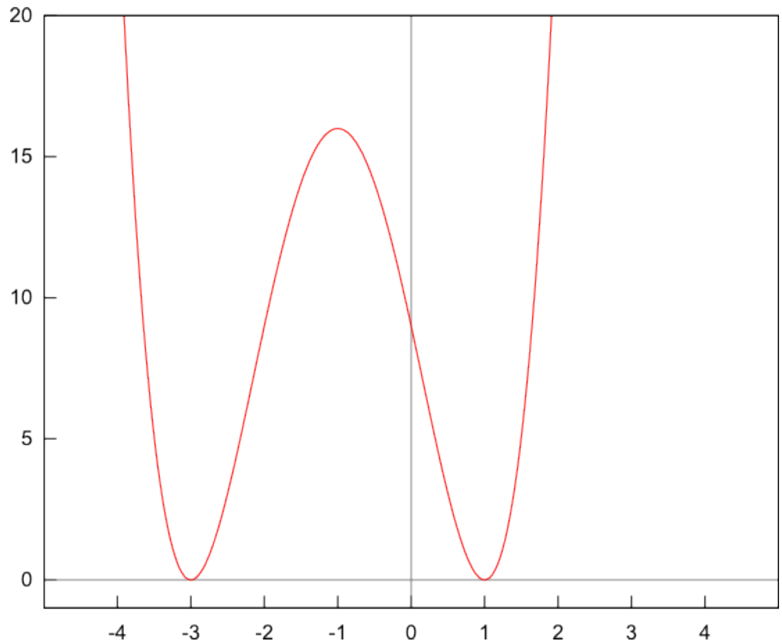
Трябва да отстраним комплексното число в знаменател, рационализираме (умножаваме горе и долу с комплексно спрегнатото число).

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1+i)(2i+3)}{1-i} + i^6 + (2-i)^3 = \\ &= \frac{(2i+3+2i^2+3i)}{1-i}\frac{1+i}{1+i} + (-1) + (2-i)(2-i)^2 = \\ &= \frac{(1+5i)(1+i)}{1^2 - i^2} - 1 + (2-i)(4-4i+i^2) = \\ &= \frac{1+5i+i+5i^2}{1+1} - 1 + (2-i)(3-4i) = \\ &= \frac{1}{2}(1+6i-5) - 1 + 6 - 8i - 3i + 4i^2 = \\ &= \frac{1}{2}(-4+6i) + 5 - 11i - 4 = \\ &= -2 + 3i + 1 - 11i = \\ &= -1 - 8i \\ |z| &= \sqrt{(-1)^2 + (-8)^2} = \sqrt{1+64} = \sqrt{65} \end{aligned}$$

Отговор: $z = -1 - 8i$, $|z| = \sqrt{65}$. □

Задача 16. Като се използва правилото на Хорнер, да се намери каноничният вид на полинома: $P(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$.

Решение. Графиката на функцията.



Каноничен вид. Ако $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са коефициентите пред степените, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са корените на $P(x)$, то $a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ е каноничният вид на полинома.

В задачата $a_n = 1$. Трябва да намерим корените, за да намерим каноничния вид. Прилагаме правилото на Хорнер.

Правило на Хорнер. Взимаме само коефициентите. Всички степени трябва да присъстват, ако някоя липсва, се записва нула (примерно $x^2 + 1 \to$ липсва първа степен $\to 1x^2 + 0x + 1$). Корените са делителите на свободния член (някои от тях). Свободният член е $a_0 = 9$, неговите делители са $1, -1, 3, -3$.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 4 & -2 & -12 & 9 \\ \hline & & & & & \end{array}$$

Да пробваме с 3 (на втория ред). Най високата степен се преписва, това е 1 (отдясно на вертикалната черта). Тогава: $3.1 + 4 = 7$.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 4 & -2 & -12 & 9 \\ \hline 3 & 1 & 7 & & & \end{array} \Longrightarrow 3.7 + (-2) = 19$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 4 & -2 & -12 & 9 \\ \hline 3 & 1 & 7 & 19 & & \end{array} \Longrightarrow 3.19 + (-12) = 45$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 4 & -2 & -12 & 9 \\ \hline 3 & 1 & 7 & 19 & 45 & \end{array} \Longrightarrow 3.45 + 9 = 144$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 4 & -2 & -12 & 9 \\ \hline 3 & 1 & 7 & 19 & 45 & 144 \end{array}$$

Тъй като $144 \neq 0$, то 3 не е корен. Ако ще пробваме с друг корен, добре е да започнем на чисто, за да не се объркаме.

Нека да пробваме с 1. Щом намерим корен, следващите ще са делители на новият свободен член.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 4 & -2 & -12 & 9 \\ \hline 1 & 1 & 5 & 3 & -9 & 0 \end{array}$$

$$1.1+4=5,\ 1.5-2=3,\ 1.3-12=-9,\ 1.(-9)+9=0$$

Следователно 1 е корен. Нека да проверим дали е двоен корен (правим същото нещо като по-горе, но със втория ред).

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 4 & -2 & -12 & 9 \\ \hline 1 & 1 & 5 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 9 & 0 & \end{array}$$

$$1.1+5=6,\ 1.6+3=9,\ 1.9-9=0$$

Вижда се, че 1 е двоен корен. Това което остава, може да се запише така: $1x^2+6x+9$, което е $(x+3)^2$, значи и -3 е двоен корен. Но нека проверим с Хорнер.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 4 & -2 & -12 & 9 \\ \hline 1 & 1 & 5 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 9 & 0 & \\ -3 & 1 & 3 & 0 & & \end{array}$$

$$-3.1+6=3,\ -3.3+9=0$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 4 & -2 & -12 & 9 \\ \hline 1 & 1 & 5 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 9 & 0 & \\ -3 & 1 & 3 & 0 & & \\ -3 & 1 & 0 & & & \end{array}$$

$$-3.1+3=0$$

Което е еквивалентно на следното:

$$\begin{array}{r|l} & 1x^4+4x^3-2x^2-12x+9 \\ \hline (x-1) & 1x^3+5x^2+3x-9 \\ (x-1) & 1x^2+6x+9 \\ (x-(-3)) & 1x+3 \\ (x-(-3)) & 1 \end{array}$$

При прилагане на правилото на Хорнер намаляваме степента на полинома с единица, докато стигнем до полином от нулева степен (последният ред).

Нашият полином се разлага на: $1(x-1)(x-1)(x+3)(x+3)$. Записваме:

$$P(x)=(x-1)^2(x+3)^2$$

Нека проверим.

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)^2(x+3)^2 = (x^2-2x+1)(x^2+6x+9) = \\ &= x^4+6x^3+9x^2-2x^3-12x^2-18x+x^2+6x+9 = \\ &= x^4+4x^3-3x^2-12x+9 \end{aligned}$$

□

Задача 2а. Да се изследва ранга на матрицата A в зависимост от стойността на параметъра λ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & \lambda \end{pmatrix}$$

Решение. Изчисляваме детерминанти от горния ляв ъгъл, като увеличаваме размера (тези детерминанти се наричат минори).

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 1 \neq 0 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2-6 = -4 \neq 0 \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda+27+40-24-15-6\lambda = 28-4\lambda \end{aligned}$$

$$\lambda = 7 \Longrightarrow \Delta_3 = 0 \Longrightarrow r(A) = 2$$

$$\lambda \neq 7 \Longrightarrow \Delta_3 \neq 0 \Longrightarrow r(A) = 3$$

Рангът на матрицата е най-големият ненулев минор. Ако $\lambda = 7$, третият минор става нула, следователно рангът е предишният минор — вторият. □

Задача 2б. Да се определи кога матричното уравнение $A.B.X = C$ има решение и да се изрази решението, ако матриците A, B и C са дадени.

Решение. Трябва да направим така, че отляво да остане само X. Първо умножаваме отляво с обратната на A.

$$\begin{aligned} /.A^{-1} \; A.B.X &= C \\ A^{-1}.A.B.X &= A^{-1}.C \\ I.B.X &= A^{-1}.C \\ B.X &= A^{-1}.C \end{aligned}$$

Единичната матрица I е еквивалентна на единица при матриците: $A.A^{-1} = I$, $B.B^{-1} = I$. Сега умножаваме с обратната матрица на B.

$$\begin{aligned} /.B^{-1} \; B.X &= A^{-1}.C \\ B^{-1}.B.X &= B^{-1}.A^{-1}.C \\ I.X &= B^{-1}.A^{-1}.C \\ X &= B^{-1}.A^{-1}.C \end{aligned}$$

Това е решението. Сега трябва да го докажем като проверим размерностите на матриците.

Матриците имат размерност редове по стълбове. При умножение на матрици броят на стълбовете на лявата матрица трябва да съвпада с броя редове на дясната матрица (само матрици с такива размерности могат да бъдат умножавани). Резултатът ще е матрица с размерност броя редове на лявата по броя стълбове на дясната. Ето така:

$$A_{a\times b}.B_{b\times c} = Y_{a\times c}$$

В момента ние определяме размерностите на условието за да докажем, че изчисленията с обратните матрици са верни. Засега имаме:

$$A_{a\times b}.B_{b\times c}.X = C$$

Следователно X трябва да има c реда и — нека да е — d реда.

$$A_{a\times b}.B_{b\times c}.X_{c\times d} = C$$

Тогава за C имаме размерност a реда по d стълба.

$$A_{a\times b}.B_{b\times c}.X_{c\times d} = C_{a\times d}$$

При изчисляването на обратната матрица оригиналната матрица се транспонира, което означава че се разменят редовете и стълбовете:

$$A_{a\times b} \Longrightarrow A^{-1}_{b\times a}$$

Същото важи и за B (в задачата обръщаме само тези две матрици, правилото важи за всички матрици):

$$B_{b\times c} \Longrightarrow B^{-1}_{c\times b}$$

Нека да заместим в решението:

$$X_{c\times d} = B^{-1}_{c\times b}.A^{-1}_{b\times a}.C_{a\times d}$$

Изглежда всичко е точно. Доказателството е завършено. □

Задача 3а. Да се реши системата по метода на Гаус.

$$\left|\begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{array}\right.$$

Решение. Метод на Гаус. Взимат се коефициентите и се записват като матрица. Слага се вертикална черта между коефициентите пред неизвестните и свободните членове отдясно. Матрицата отляво на чертата се нарича основна (от коефициентите пред неизвестните). Цялата матрица се нарича разширена. Ако ранговете на основната и разширената матрица са различни, задачата няма решение (почти винаги дават задачи, които имат решение). Трябва всички елементи под главния диагонал (това са елементите с равни индекси, тоест a_{11}, a_{22}, …) да станат нула. Тогава рангът е равен на броя на елементите по главния диагонал, тоест на броя редове. Останалите редове се връщат в уравнения и се решават чрез заместване.

Нека да запишем матрицата.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -3 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & -4 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

В случая елементите 6, 9 и -4 трябва да станат нула. Как се прави това? Като се изваждат редовете един от друг. Нека да погледнем 6-та: $3.(-2)+6=0$. Ще умножим целия първи ред по -2 (но само наум, няма нужда да го записваме, ще си утежним сметките) и ще го съберем с втория ред. На мястото на втория ред ще запишем резултата от тези сметки (елемент по елемент). Имаме ред1.(-2) + ред2 и се записва където е ред2.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -3 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & -4 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$3.(-2)+6=0$$

$$(-2).(-2)+(-3)=1$$

$$5.(-2)+4=-6$$

$$4.(-2)+3=-5$$

$$2.(-2)+3=-1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -5 & -1 \\ 9 & -4 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Сега за 9-та, пак с първия ред: $3.(-3)+9=0$. Ред1.(-3) + Ред3 и се записва на мястото на Ред3.

$$3.(-3)+9=0,\ (-2).(-3)+(-4)=2$$

$$5.(-3)+3=-12,\ 4.(-3)+2=-10,\ 2.(-3)+4=-2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & -12 & -10 & -2 \end{array}\right)$$

(Както се вижда 2.Ред2 = Ред3. Това означава, че двата реда са линейно зависими, тоест единия може да се махне. Но нека проверим с метода на Гаус.) Сега 2-та под 1-та трябва да стане нула: Ред2.(-2) + Ред3 и се записва на мястото на Ред3.

$$1.(-2)+2=0,\ (-6).(-2)+(-12)=0$$

$$(-5).(-2)+(-10)=0,\ (-1).(-2)+(-2)=0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Можем да махнем нулев ред, тоест остават два реда. Рангът на матрицата е 2 (на основната и разширената ранговете са равни).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Сега записваме матрицата като система уравнения.

$$\left| \begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_2 - 6x_3 - 5x_4 = -1 \end{array} \right.$$

Имаме 2 уравнения с 4 неизвестни. Което означава, че ще имаме параметри. Броя на параметрите е разликата между уравненията (рангът) и неизвестните: 2 параметъра. Избираме си две неизвестни, които участват и в двете уравнения. Примерно x_3 и x_4. Нека $x_3 = p$, $x_4 = q$.

$$\left| \begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 + 5p + 4q = 2 \\ x_2 - 6p - 5q = -1 \end{array} \right.$$

От второто уравнение: $x_2 = 6p + 5q - 1$. Заместваме x_2 в първото уравнение:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2(6p + 5q - 1) + 5p + 4q &= 2 \\ 3x_1 - 12p - 10p + 2 + 5p + 4q &= 2 \\ 3x_1 &= 7p + 6q \\ x_1 &= (7/3)p + 2q \end{aligned}$$

Записваме отговора:

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = (7/3)p + 2q \\ x_2 = 6p + 5q - 1 \\ x_3 = p \\ x_4 = q \end{array} \right.$$

□

Задача 3б. Да се определят ранговете на основната и разширената матрица от (3а).

Решение. Рангът е 2. $r(A) = r(\widetilde{A}) = 2$. Виж по-горе. □

Задача 4а. Да се изведе формулата за ъгъл между две прави в равнината: $g_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $g_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Да се разгледат всички случаи на взаимно положение на двете прави g_1 и g_2.

Решение. Взаимно положение на две прави в равнината: успоредни, пресичат се, сливат се.

Другото се прескача. □

Задача 46. Точките $A(1,2)$, $B(-1,-1)$ и $C(2,1)$ са върхове на триъгълник. Да се намерят уравненията на трите страни на триъгълник ABC и на височината от върха B към страната AC.

Решение. Нека имаме права AB, с начална точка $A(x_0, y_0)$ и крайна точка $B(x_1, y_1)$. Тогава уравнението на правата AB се намира по следната формула:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

По тази формула ще намерим уравненията на страните. Нека да започнем с AB, $A(1,2)$, $B(-1,-1)$.

$$\frac{x - 1}{-1 - 1} = \frac{y - 2}{-1 - 2}$$

Умножаваме на кръст и се получава:

$$-3(x - 1) = -2(y - 2)$$

$$AB : 3x - 2y + 1 = 0$$

Сега за BC, $B(-1,-1)$, $C(2,1)$.

$$\frac{x - (-1)}{2 - (-1)} = \frac{y - (-1)}{1 - (-1)}$$

$$2(x + 1) = 3(y + 1)$$

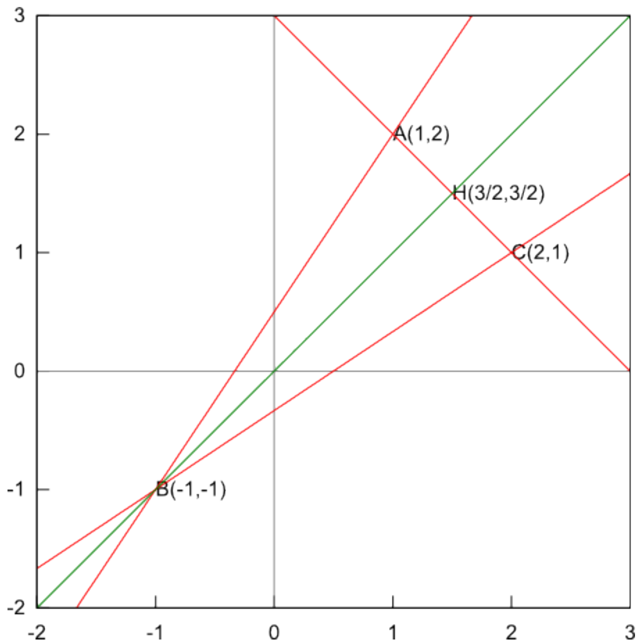
$$BC : 2x - 3y - 1 = 0$$

И за AC, $A(1,2)$, $C(2,1)$.

$$\frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{y - 2}{1 - 2}$$

$$-(x - 1) = y - 2$$

$$AC : x + y - 3 = 0$$



Нека BH е височината към AC. Тогава $BH.AC = 0$ (скаларно произведение). Взимаме нормалният вектор на AC: $(1, 1)$ (това са коефициентите пред x и y). Трябва да измислим такъв вектор за BC, че скаларното произведение с $(1, 1)$ да даде нула. Принципно се разменят числата и се сменя знака. Тогава нормалният вектор на BH ще е $(1, -1)$.

Сега образуваме уравнението на BC: $1x - 1y + c = 0$. Трябва да намерим c. Точката B принадлежи на правата BH, следователно можем да я заместим.

$$1.(-1) - 1.(-1) + c = 0 \Longrightarrow c = 0$$

Уравнението на BH е $x - y = 0$.

Отговор: AB: $3x - 2y + 1 = 0$, BC: $2x - 3y - 1 = 0$, AC: $x + y - 3 = 0$, BH: $x - y = 0$. □

Задача 5. В пространството са дадени точката $P(4, 3, 10)$ и правите

$$p : \begin{cases} x = 1 + 4k \\ y = 1 + 8k \\ z = 1 + 10k \end{cases} , g : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$$

(а) Да се определи взаимното положение на правите p и g и да се провери дали те лежат в една равнина.

(б) Да се намерят координатите на симетричната точка P' на точката P спрямо правата g.

Решение. Правата g е в каноничен вид, правата p е зададена параметрично. Трябва да намерим каноничното ѝ уравнение. От трите уравнения за p изразяваме k и се получава:

$$p : \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-1}{10}$$

Сравняваме с g:

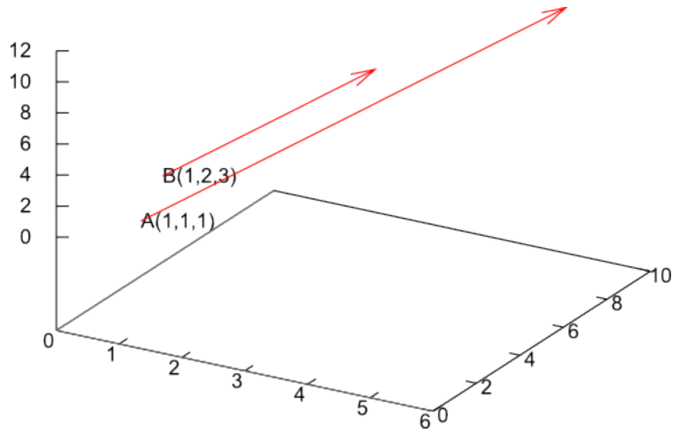
$$g : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$$

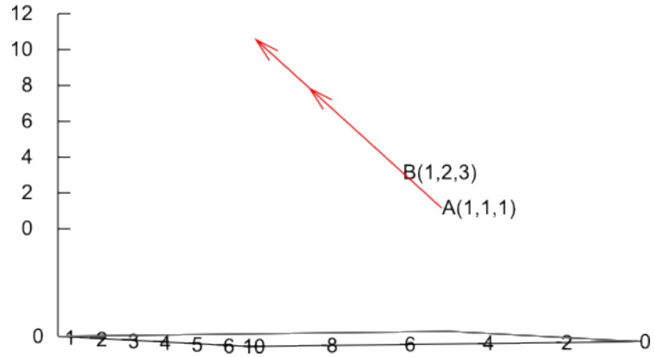
Разглеждаме векторите (числата в знаменател):

$$(4, 8, 10) = 2(2, 4, 5)$$

Това се нарича линейна комбинация на вектори, тоест векторите са успоредни, следователно правите са успоредни и лежат в една равнина.

Точката $A(1, 1, 1) \in p$ (числата в числител със знак минус, тоест ако я заместим трябва числителите да станат нула), $B(1, 2, 3) \in g$.





Търсим симетрична точка P' на точката P спрямо правата g. Нека да означим отсечката PP' като права v. Симетрична точка означава, че спускаме перперндикуляр от точка P до правата g, тоест правите g и v сключват прав ъгъл и скаларното им произведение на техните определящи вектори е нула.

Векторът на g: $\overrightarrow{a}(2,4,5)$. Това са числата от знаменателя.

Имаме $P(4,3,10)$. Нека $Q(x^*,y^*,z^*)$ е пресечната точка на правите g и v. Ще образуваме вектора на v чрез крайна точка Q минус начална точка P: $\overrightarrow{PQ}(x^*-4,y^*-3,z^*-10)$. Означаваме с $\overrightarrow{b}$.

Векторът на v: $\overrightarrow{b}(x^*-4,y^*-3,z^*-10)$. Тогава $\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}=0$. Вектори се умножават поелементно, ето така:

$$2(x^*-4)+4(y^*-3)+5(z^*-10)=0$$

Параметризираме уравнението на правата g:

$$g:\left|\begin{array}{l} x=2t+1 \\ y=4t+2 \\ z=5t+3 \end{array}\right.$$

Ако заместим тази параметризация в скаларното произведение, което всъщност обозначава пресичането на двете прави, то ще намерим координатите на пресечната им точка — точка Q. Заместваме:

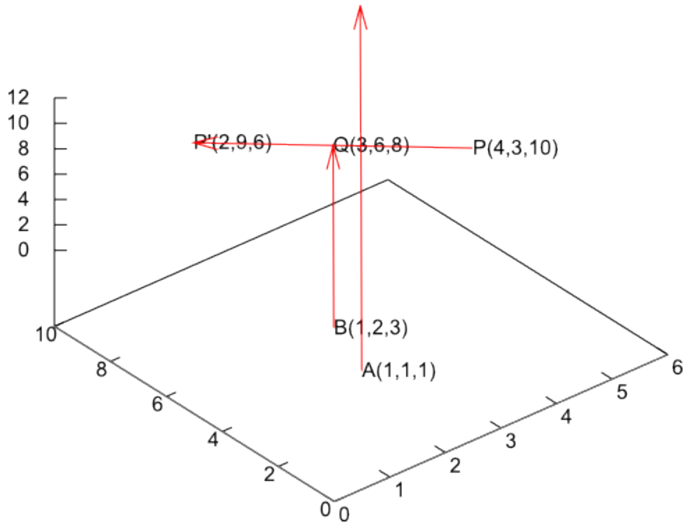
$$2(2t+1-4)+4(4t+2-3)+5(5t+3-10)=0$$

$$4t - 6 + 16t - 4 + 25t - 35 = 0$$

$$45t - 45 = 0 \implies t = 1$$

Заместваме t в параметризацията и получаваме координатите на точка Q:

$$Q(2+1, 4+2, 5+3) \implies Q(3,6,8)$$



На отсечката PP' точка Q се явява среда. Нека $P'(x', y', z')$. Тогава:

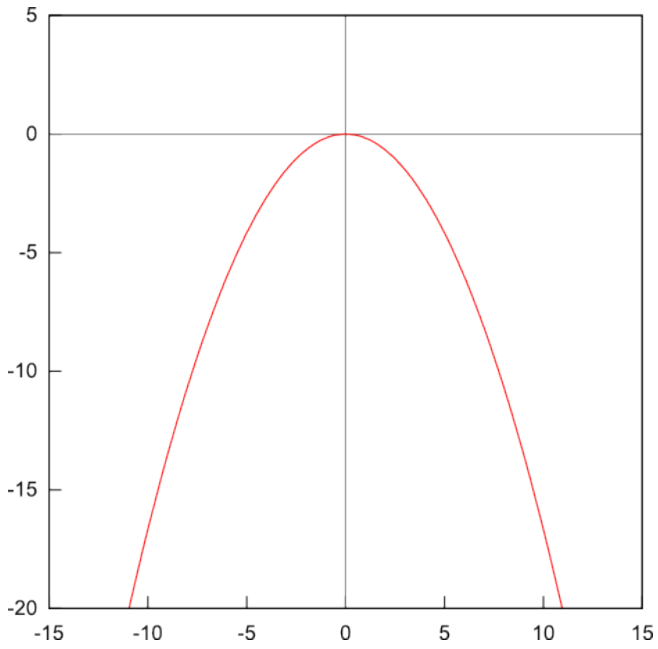
$$Q\left(\frac{4+x'}{2} = 3, \frac{3+y'}{2} = 6, \frac{10+z'}{2} = 8\right) \implies x' = 2,\ y' = 9,\ z' = 6$$

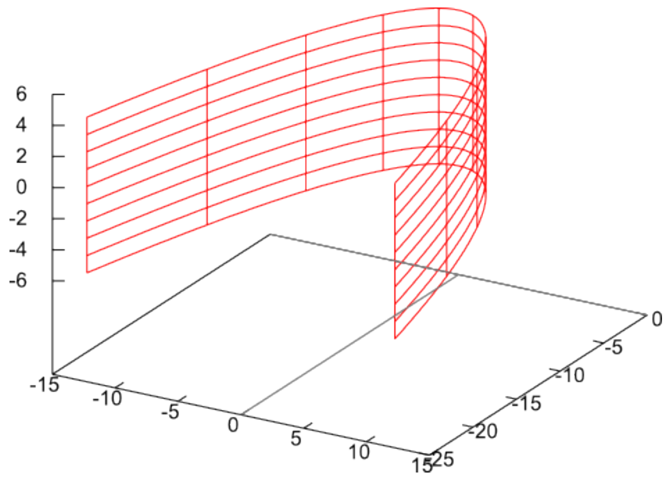
Координатите на точка P' са $P'(2,9,6)$. □

Задача 6а. Каква повърхнина е представена с уравнението $x^2 = -6y$. Да се опишат основните характеристики на съответната крива в равнината, която представя същото уравнение.

Решение. В равнината това е парабола, в пространството — параболичен цилиндър. Параметризация:

$$x = \sqrt{6}\,t,\ y = -t^2$$





$\square$

Задача 6б. Да се намери областта на решенията на системата неравенства.

$$\left| \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 2 \end{array} \right.$$

Да се определи какво множество представлява областта на решенията и коя е опорната права.

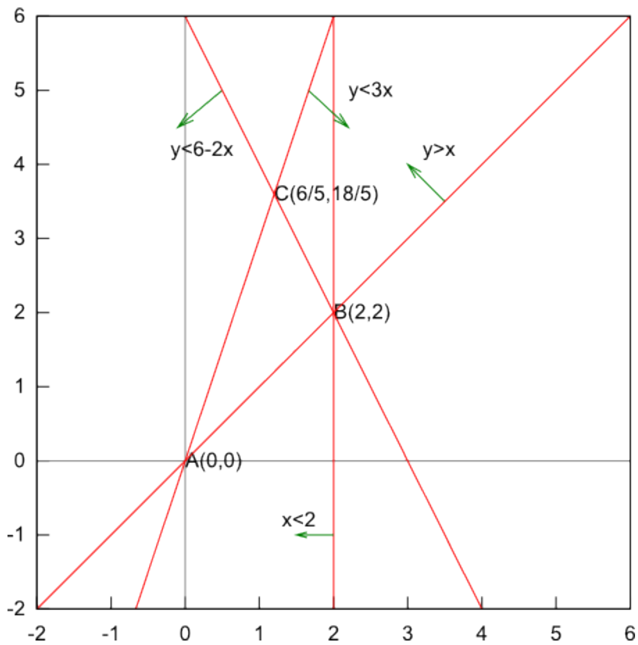
Решение. Имаме x_1 и x_2, които определят координатна система. Сменяме ги на x

и y за по-лесно представяне.

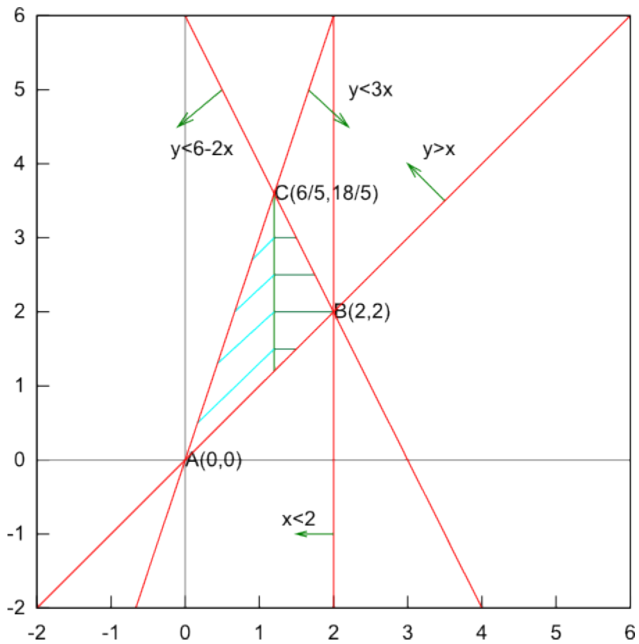
$$\left|\begin{array}{l}3x - y \geq 0\\ x - y \leq 0\\ 2x + y \leq 6\\ x \leq 2\end{array}\right.$$

Оставяме y отляво, всичко друго отдясно (за да представим неравенствата като функции).

$$\left|\begin{array}{l}y \leq 3x\\ y \geq x\\ y \leq 6 - 2x\\ x \leq 2\end{array}\right.$$

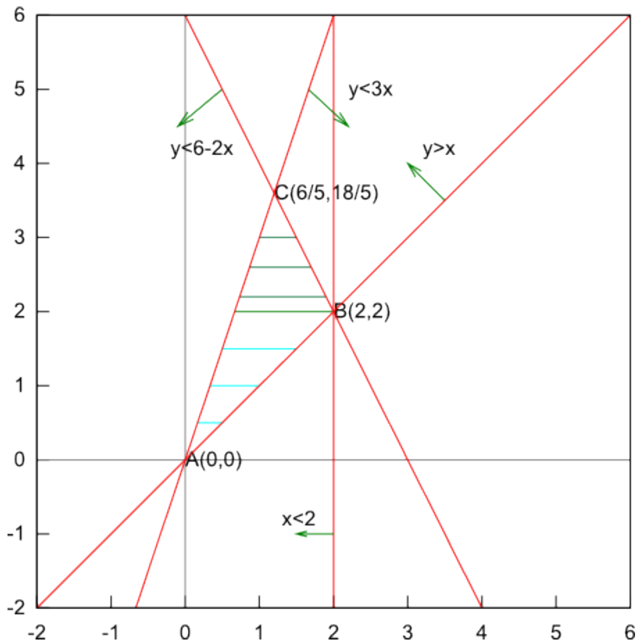


Това би трябвало да е решението, триъгълник ABC. Опорната ни права може да е x, може да е y. Взимаме първо x да е в числови граници, y във функционални.



Вертикалната зелена линия разделя двете области. Това е областта в лилаво: $x \in [0, 6/5]$, $y \in [x, 3x]$, а това е областта в светлосиньо: $x \in [6/5, 2]$, $y \in [x, 6 - 2x]$. Двете заедно описват целия триъгълник ABC.

Сега нека y да е в числови граници, а x във функционални.



Областта в лилаво: $y \in [0, 2]$, $x \in [y/3, y]$, областта в светлосиньо: $y \in [2, 18/5]$, $x \in [y/3, (6 - y)/2]$. $\square$

7 Седма тема

Задача 1а. Даден е полином $P(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6$. Да се намерят всички решения на уравнението $P(x) = 0$ и ако има комплексни корени, да се преведат в тригонометричен вид.

Задача 1б. Да се определи ранга на матрицата A в зависимост от стойността на параметъра λ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & \lambda+1 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

Задача 2а. Да се намери общото решение на системата линейни уравнения по метода на Гаус.

$$\left| \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{array} \right.$$

Задача 2б. Да се определи при какви условия матричното уравнение $A.X.B.C = D$ има решение и да се изрази решението, ако матриците A, B, C и D са дадени.

Задача 3а. Даден е триъгълник ABC с върхове $A(-4,-5)$, $B(4,1)$ и $C(-1,7)$. Да се намерят уравненията на страната AB, височината CH и медианата CM ($H \in AB$, $M \in AB$).

Задача 3б. В пространството са дадени точката $D(7,8,-5)$, правата g и равнината α.

$$g : \frac{x-3}{-2} = \frac{y-6}{2} = \frac{z}{1}, \;\; \alpha : 2x + y + 2z = 0$$

Да се определи общото уравнение на равнината β, определена от точка D и правата g. Да се докаже, че α и β са успоредни.

Задача 4а. Да се определи границата.

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$$

Задача 4б. Да се определят екстремумите и инфлексните точки на функцията.

$$y = \frac{x}{1 - \ln x}$$

Задача 5а. С помощта на дадената субституция да се реши интегралът.

$$\int \frac{dx}{\cos^3(x)}, \;\; t = \sin(x)$$

Задача 5б. Да се реши интегралът.

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2(1+x^2)}$$

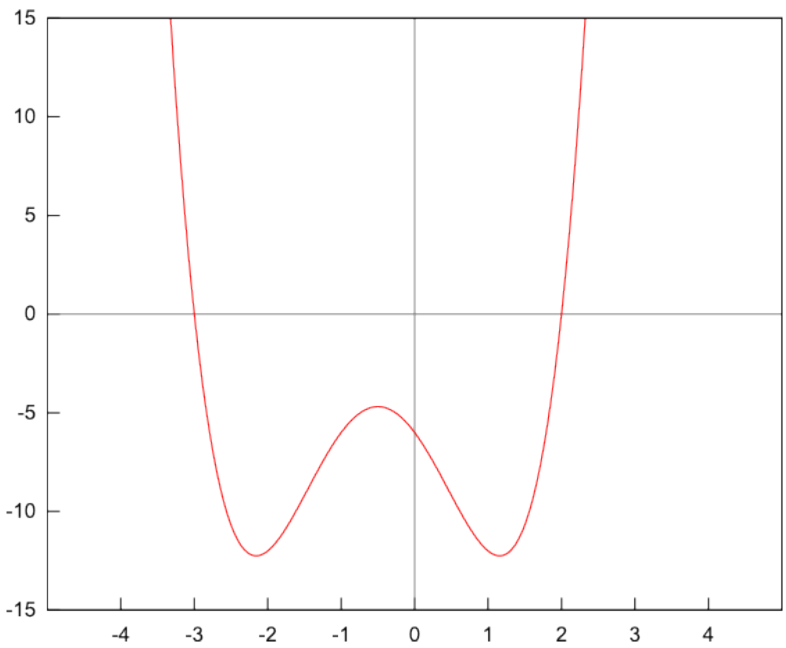
Задача 6а. Да се определи видът на повърхнината, представена с уравнението $x^2 - y^2 = 4$. Да се опишат основните характеристики на съответната крива в равнината, която се представя със същото уравнение.

Задача 6б. Малки и големи суми на Дарбу и теорема на Дарбу. Теорема за средните стойности. Общ критерий за интегруемост. Основни класове интегруеми функции.

Всяка подточка е по 5 точки.

Задача 1а. Даден е полином $P(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6$. Да се намерят всички решения на уравнението $P(x) = 0$ и ако има комплексни корени, да се преведат в тригонометричен вид.

Решение. Графиката на функцията.



Ще използваме правилото на Хорнер за да намерим корените.

	1	2	−4	−5	−6
2	1	4	4	3	0
−3	1	1	1	0	

Реалните корени са $x_1 = 2$ и $x_2 = -3$. Квадратното уравнение, което остава, е с комплексни корени.

$$x^2 + x + 1 = 0,\ D = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3$$

$$x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Нека да припомним тригонометричен вид на комплексно число.

$$z = a + ib,\ |z| = \sqrt{a^2 + b^2},\ \cos(\varphi) = \frac{a}{|z|},\ \sin(\varphi) = \frac{b}{|z|}$$

$$z = |z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$

Сега трябва да ги преведем в тригонометричен вид. Нека започнем с x_3.

$$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ |z_1| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$\cos(\varphi) = -\frac{1}{2},\ \sin(\varphi) = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \varphi = \frac{4\pi}{3}$$

$$z_1 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

Сега за x_4.

$$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ |z_1| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$\cos(\varphi) = -\frac{1}{2},\ \sin(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

□

Задача 1б. Да се определи ранга на матрицата A в зависимост от стойността на параметъра λ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & \lambda + 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Изчисляваме минорите (детерминанти от горния ляв ъгъл).

$$\Delta_1 = 1 \neq 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -5 - 4 - 4 + 2 + 4 + 8 = 1 \neq 0$$

Привеждаме детерминантата на матрицата в триъгълен вид (всичко под главния диагонал да стане нула) като използваме метода на Гаус.

Метод на Гаус за детерминанти. Ако умножваме с чило реда на който ще запишем резултата, трябва да разделим детерминантата на това число. Умножението на друг ред с число не променя детерминантата.

А може и така да го кажем: Можем да умножаваме само по горен ред с число, тоест ако записваме на втори ред, можем да умножаваме първи ред с число, но не и втори. Ако сме на трети ред, можем да умножаваме първи и втори, но не и трети. (Ако все пак го направим, трябва да разделим детерминантата на числото с което сме умножили.)

Можем да разменяме редове, тогава детерминантата сменя знака си.

Можем да събираме редове, не променя детерминанатата.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & \lambda+1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

Ред1 $\times(-2)$ + Ред2 и записваме на мястото на Ред2.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & \lambda+1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

Ред1 $\times(-1)$ + Ред3 и записваме на мястото на Ред3.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & \lambda+1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

Сега събираме Ред1 с Ред4 и записваме на мястото на Ред4.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda+3 & \lambda \end{vmatrix}$$

Ред3 $\times\left(-\dfrac{\lambda+3}{3}\right)$ + Ред4 и записваме на мястото на Ред4.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda-6}{3} \end{vmatrix} = 3\frac{\lambda-6}{3} = \lambda - 6$$

Стойността на детерминантата е умножението на елементите по главния диагонал.

Всичко под главния диагонал е нула, тоест ранга е равен на броя редове (броя на елементите по главния диагонал). Рангът е равен на 4, ако $\lambda \neq 6$.

Ако $\lambda = 6$, то детерминантата на A е нула. Тогава рангът се изчислява чрез минори, и той е 3. □

Задача 2а. Да се намери общото решение на системата линейни уравнения по метода на Гаус.

$$\left| \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{array} \right.$$

Решение. Метод на Гаус. Виж Тема 6, Задача 3а. Прилагаме метода на Гаус.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{array} \right)$$

Ред1.(-1) + Ред2 и записваме на мястото на Ред2.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{array} \right)$$

Ред1.(-1) + Ред3 и записваме на мястото на Ред3.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right)$$

(Ред2.(+2) + Ред3 = 0 — линейна зависимост) Ред2.(+2) + Ред3 и записваме на мястото на Ред3.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ранга на матрицата е 2. Имаме два реда с 4 неизвестни, тоест ще имаме 2 параметъра. Нека са x_2 и x_3, защото във второто уравнение имаме само x_4, по-лесно ще е така. Тогава $x_2 = p$, $x_3 = q$. Преминаваме обратно в система.

$$\left| \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -2x_4 = -2 \end{array} \right.$$

Следва, че $x_4 = 1$. Заместваме в първото уравнение: $x_1 - 2p + q + 1 = 1$. Тогава $x_1 = 2p - q$.

Отговор:

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = 2p - q \\ x_2 = p \\ x_3 = q \\ x_4 = 1 \end{array} \right.$$

□

Задача 2б. Да се определи при какви условия матричното уравнение $A.X.B.C = D$ има решение и да се изрази решението, ако матриците A, B, C и D са дадени.

Решение. Умножаваме с A^{-1} отляво и с C^{-1} отдясно, после с B^{-1} отдясно.

$$\begin{aligned} A.X.B.C &= D \\ /.A^{-1}\ A.X.B.C &= D \\ A^{-1}.A.X.B.C &= A^{-1}.D \\ X.B.C &= A^{-1}.D \\ X.B.C &= A^{-1}.D\ /.C^{-1} \\ X.B.C.C^{-1} &= A^{-1}.D.C^{-1} \\ X.B &= A^{-1}.D.C^{-1} \\ X.B &= A^{-1}.D.C^{-1}\ /.B^{-1} \\ X.B.B^{-1} &= A^{-1}.D.C^{-1}.B^{-1} \\ X &= A^{-1}.D.C^{-1}.B^{-1} \end{aligned}$$

Сега определяме размерностите на матриците от условието, за да проверим дали X е с вярна размерност.

$$A_{a\times b}.X_{b\times c}.B_{c\times d}.C_{d\times e} = D_{a\times e}$$

Обратните матрици са транспонирани, т.е редовете и стълбовете разменени.

$$X_{b\times c} = A^{-1}_{b\times a}.D_{a\times e}.C^{-1}_{e\times d}.B^{-1}_{d\times c}$$

Всичко е точно. □

Задача 3а. Даден е триъгълник ABC с върхове $A(-4,-5)$, $B(4,1)$ и $C(-1,7)$. Да се намерят уравненията на страната AB, височината CH и медианата CM ($H \in AB$, $M \in AB$).

Решение. Нека имаме права AB, с начална точка $A(x_0, y_0)$ и крайна точка$B(x_1, y_1)$. Тогава уравнението на правата AB се намира по следната формула:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

За правата AB, $A(-4,-5)$, $B(4,1)$.

$$\frac{x-(-4)}{4-(-4)} = \frac{y-(-5)}{1-(-5)}$$

$$6(x+4) = 8(y+5)$$

$$6x - 8y - 16 = 0$$

$$AB : 3x - 4y - 8 = 0$$

Сега за правата CM. Точка M разполовява страната AB, можем да я намерим по следната формула (чрез координатите на A и B):

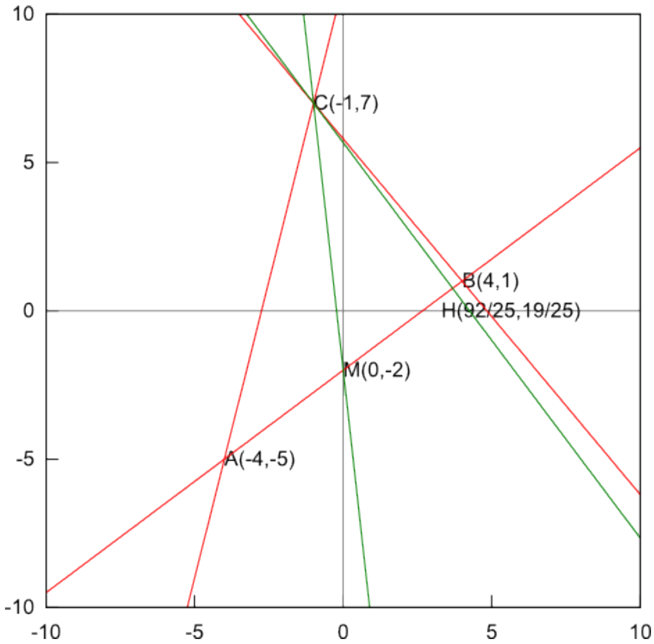
$$M\left(\frac{-4+4}{2}, \frac{-5+1}{2}\right) \Longrightarrow M(0,-2)$$

Уравнението на CM, $C(-1,7)$, $M(0,-2)$.

$$\frac{x-(-1)}{0-(-1)} = \frac{y-7}{-2-7}$$

$$-9(x+1) = y-7$$

$$CM : 9x + y + 2 = 0$$



За правата CH: тя е перпендикулярна на AB (височина). Скаларното произведение е нула: $AB.CH = 0$. Взимаме коефициентите пред x и y от AB, това е вектора $(3,-4)$. Разменяме числата, едното с минус: $(4,3)$ (сега скаларното произведение на тези два вектора ще е нула). Това са нормалните вектори на двете прави.

Образуваме уравнението на CH: $4x + 3y + c = 0$. Трябва да намерим c. Точка $C(-1,7)$ принадлежи на CH, можем да я заместим в уравнението.

$$4(-1) + 3.7 + c = 0 \Longrightarrow c = -17$$

Уравнението на CH: $4x + 3y - 17 = 0$.

Отговор: AB: $3x - 4y - 8 = 0$, CM: $9x + y + 2 = 0$, CH: $4x + 3y - 17 = 0$. $\square$

Задача 3б. В пространството са дадени точката $D(7,8,-5)$, правата g и равнината α.

$$g: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-6}{2} = \frac{z}{1}, \ \ \alpha : 2x + y + 2z = 0$$

Да се определи общото уравнение на равнината β, определена от точка D и правата g. Да се докаже, че α и β са успоредни.

Решение. Уравнение на равнина се намира чрез детерминанта, образувана от два вектора и точка. Имаме точка $D(7,8,-5)$. Имаме вектор $(-2,2,1)$, от знаменателя на правата g. Точка $A(3,6,0)$ принадлежи на g, това са числата от числителя със знак минус (ако заместим точката, трябва да получим нула).

Можем да образуваме вектора $\overrightarrow{AD}$, като извадим началните координати от крайните:

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (7,8,-5) - (3,6,0) = (4,2,-5)$$

Сега записваме детерминантата.

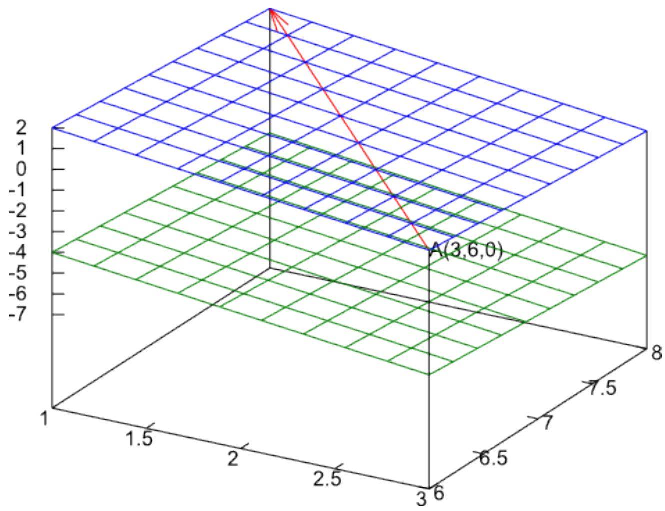
$$\begin{vmatrix} x-3 & y-6 & z-0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

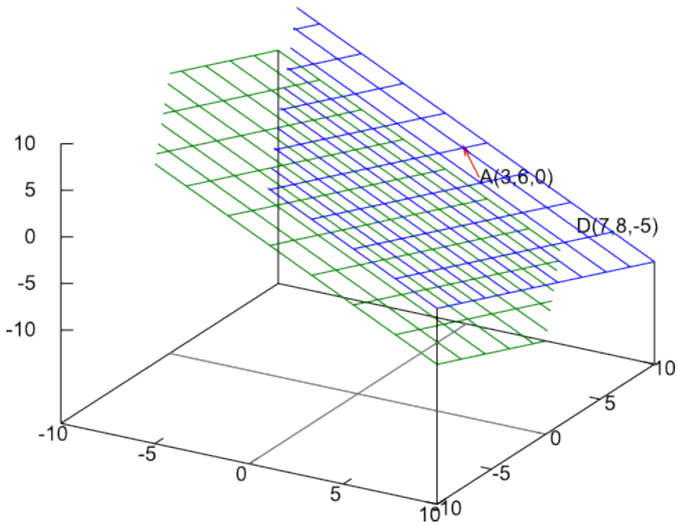
И я развиваме по първи ред.

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} x-3 & y-6 & z-0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= (x-3)(-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + (y-6)(-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} + z(-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= -12(x-3) - 6(y-6) - 12z = 2x + y + 2z - 12 \end{aligned}$$

Уравнението на равнината β е $2x + y + 2z - 12 = 0$.

Как се сравняват уравнения на равнини? Гледат се само коефициентите пред x, y и z. Уравнението на α е $2x+y+2z = 0$. Следователно равнините α и β са успоредни.





□

Задача 4а. Да се определи границата.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$$

Решение.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

Ако заместим с четворката, се получава нула върху нула. Това се нарича неопределеност. Прилагаме правилото на Лопитал. Диференцираме поотделно числителя и знаменателя.

$$((1+2x)^{1/2}-3)'=(1+2x)^{-1/2}\frac{1}{2}2=\frac{1}{\sqrt{1+2x}}$$

$$(x^{1/2}-2)'=x^{-1/2}\frac{1}{2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Заместваме в границата.

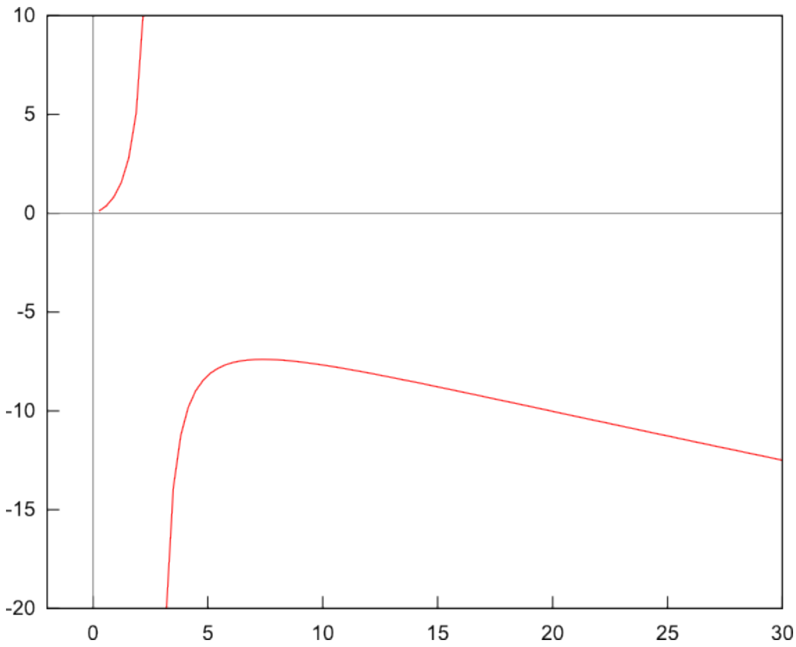
$$\lim_{x\to 4}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1+2x}}=\frac{2\sqrt{4}}{\sqrt{1+8}}=\frac{4}{3}$$

□

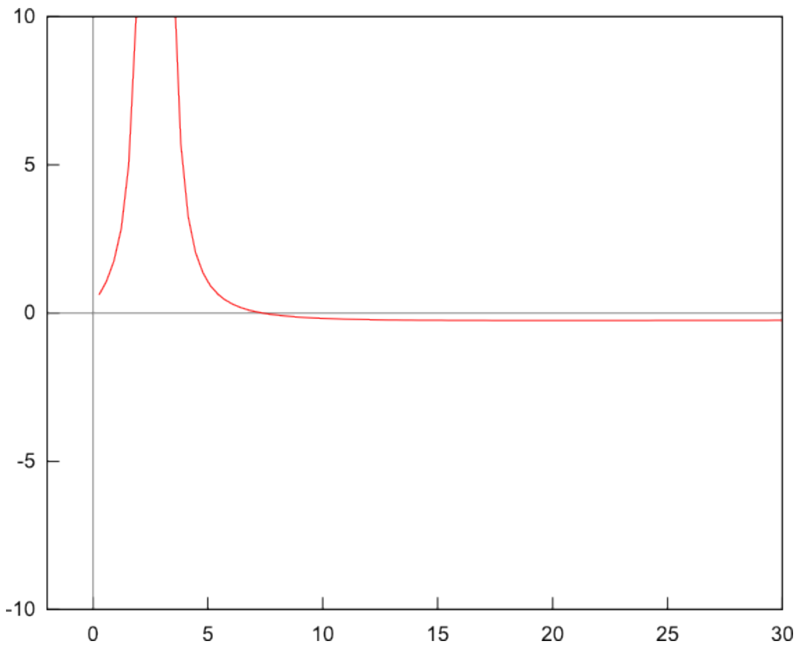
Задача 4б. Да се определят екстремумите и инфлексните точки на функцията.

$$y=\frac{x}{1-\ln x}$$

Решение. Графиката на функцията.



Ограниченията са $x > 0$ и $x \neq e$. Функцията няма корени. Първа производна.



$$y' = \frac{1(1 - \ln(x)) - x(0 - 1/x)}{(1 - \ln(x))^2} = \frac{2 - \ln(x)}{(1 - \ln(x))^2}$$

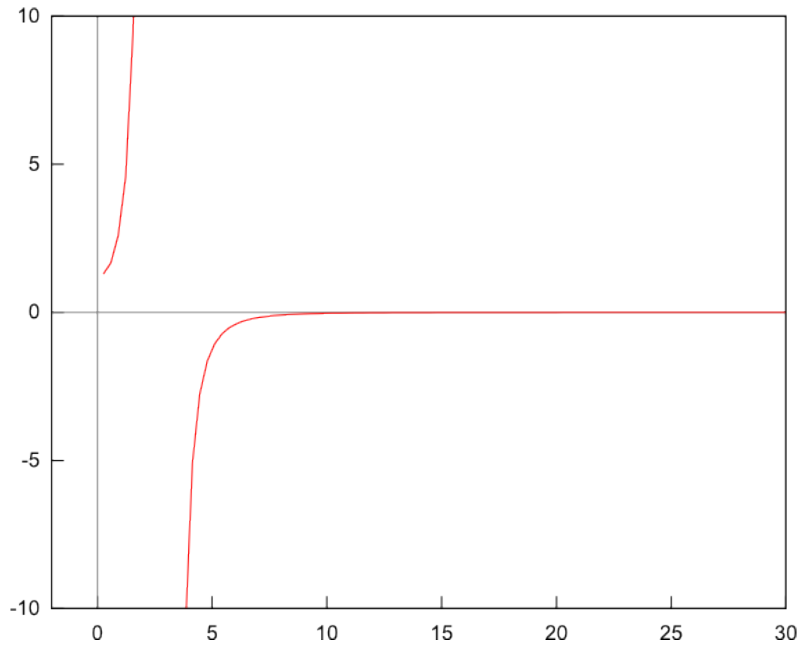
$$2 - \ln(x) = 0 \Longrightarrow \ln(x) = 2 \Longrightarrow x = e^2 \sim 7.389$$

Изчисляваме стойности около предполагаемата екстремална точка.

$$x = e^{1.5} : y'(e^{1.5}) = \frac{2 - \ln(e^{1.5})}{(1 - \ln(e^{1.5}))^2} = \frac{2 - 1.5}{(1 - 1.5)^2} = \frac{0.5}{(-0.5)^2} = \frac{1}{0.5} = 2$$
$$x = e^{2.5} : y'(e^{2.5}) = \frac{2 - \ln(e^{2.5})}{(1 - \ln(e^{2.5}))^2} = \frac{2 - 2.5}{(1 - 2.5)^2} = \frac{-0.5}{(-1.5)^2} = \frac{-0.5}{2.25} = -0.2(2)$$

Знакът отляво на $x = e^2$ е положителен (функцията расте), отдясно — отрицателен (функцията намалява), тоест функцията има локален максимум в $x = e^2$.

Втора производна.



$$y'' = \frac{(0 - 1/x)(1 - \ln(x))^2 - (2 - \ln(x))2(1 - \ln(x))(-1/x)}{(1 - \ln(x))^4} =$$
$$= \frac{-(1 - \ln(x))[1 - \ln(x) - 2(2 - \ln(x))]}{x(1 - \ln(x))^4} = \frac{-(\ln(x) - 3)}{x(1 - \ln(x))^3} = \frac{3 - \ln(x)}{x(1 - \ln(x))^3}$$

$$3 - \ln(x) = 0 \Longrightarrow \ln(x) = 3 \Longrightarrow x = e^3 \sim 20.085$$

Изчисляваме стойности около $x = e^3$.

$$x = e^{2.5} : y''(e^{2.5}) = \frac{3 - \ln(e^{2.5})}{e^{2.5}(1 - \ln(e^{2.5}))^3} = \frac{3 - 2.5}{e^{2.5}(1 - 2.5)^3} = \frac{0.5}{e^{2.5}(-1.5)^3} < 0$$
$$x = e^{3.5} : y''(e^{3.5}) = \frac{3 - \ln(e^{3.5})}{e^{3.5}(1 - \ln(e^{3.5}))^3} = \frac{3 - 3.5}{e^{3.5}(1 - 3.5)^3} = \frac{-0.5}{e^{3.5}(-2.5)^3} > 0$$

Знакът отляво на $x = e^3$ е отрицателен — функцията е вдлъбната, вдясно е положителен — функцията е изпъкнала, тоест $x = e^3$ е инфлексна точка.

Отговор: Локален максимум в $x = e^2$, инфлексна точка в $x = e^3$. □

Задача 5а. С помощта на дадената субституция да се реши интегралът.

$$\int \frac{dx}{\cos^3(x)},\ t = \sin(x)$$

Решение. Субституцията е:

$$x = \arcsin(t),\ \cos(x) = \sqrt{1-t^2},\ dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Заместваме:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \frac{1}{(\sqrt{1-t^2})^3} = \int \frac{dt}{(1-t^2)^2} = \int \frac{(1-t^2+t^2)dt}{(1-t^2)^2} =$$
$$= \int \frac{(1-t^2)dt}{(1-t^2)^2} + \int \frac{t^2dt}{(1-t^2)^2} = \int \frac{dt}{1-t^2} + \int \frac{t^2dt}{(1-t^2)^2}$$

Относно първия интеграл. Трябва да разложим $1-t^2$. Тоест $(1-t)(1+t)$, корените са 1, -1.

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t}$$
$$1 = A(1+t) + B(1-t)$$

Заместваме с $t = 1$.

$$1 = A(1+1) \Longrightarrow A = \frac{1}{2}$$

Сега с $t = -1$.

$$1 = B(1-(-1)) \Longrightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{dt}{1-t^2} = \int \frac{1/2dt}{1-t} + \int \frac{1/2dt}{1+t} = \frac{1}{2}\left(-\int \frac{d(1-t)}{1-t} + \int \frac{d(1+t)}{1+t}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}(-\ln|1-t| + \ln|1+t|) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|$$

Сега втория интеграл. Вкарваме t под диференциала, после целия знаменател под диференциала, и интегрираме по части. Взимаме под внимание, че $(x^{-1})' = -x^{-2}$

$$\int \frac{t^2dt}{(1-t^2)^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{td(-t^2)}{(1-t^2)^2} = -\frac{1}{2}\int t(1-t^2)^{-2}d(1-t^2) = \frac{1}{2}\int td(1-t^2)^{-1} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(t(1-t^2)^{-1} - \int (1-t^2)^{-1}dt\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{1-t^2} - \int \frac{dt}{1-t^2}\right)$$

Вече сметнахме този интеграл, записваме отговора.

$$I = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{1-t^2} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right) + C =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \frac{t}{2(1-t^2)} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C =$$
$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \frac{t}{2(1-t^2)} + C$$

□

Задача 5б. Да се реши интегралът.

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2(1+x^2)}$$

Решение. Трябва да се разложи полинома $(1+x)^2(1+x^2)$. Корените на $(1+x)^2$ са -1, -1, а на $(1+x^2)$ са i, $-i$. Полинома се разлага на $(1+x)(1+x)(x+i)(x-i)$. Това се нарича каноничен вид. Щом търсим реални и комплексни корени, тоест всички корени, полинома *винаги* се разлага до каноничен вид.

Нека сега да разложим дробта на сума от елементарни дроби. Полинома в числител *винаги ще е константа* (за полином в каноничен вид). Дробта ще изглежда така:

$$\frac{1}{(1+x)^2(1+x^2)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{(1+x)^2} + \frac{C}{x-i} + \frac{D}{x+i}$$

Привеждаме под общ знаменател.

$$1 = A(1+x)(x-i)(x+i) + B(x-i)(x+i) + C(1+x)^2(x+i) + D(1+x)^2(x-i)$$

Сега заместваме с корените. Започваме с $x = -1$.

$$\begin{aligned} 1 &= B(-1-i)(-1+i) \\ 1 &= B(1-i+i-i^2) \\ 1 &= B(1+1) \\ B &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Сега с $x = i$.

$$\begin{aligned} 1 &= C(1+i)^2(i+i) \\ 1 &= C(1+2i+i^2)2i \\ 1 &= C(1+2i-1)2i \\ 1 &= C4i^2 \\ 1 &= C(-4) \\ C &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Остана и с $x = -i$.

$$\begin{aligned} 1 &= D(1-i)^2(-i-i) \\ 1 &= -2iD(1-2i+i^2) \\ 1 &= -2iD(1-2i-1) \\ 1 &= 4i^2D \\ 1 &= -4D \\ D &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Трябва да намерим и A. Заместваме с $x = 0$.

$$\begin{aligned}
1 &= A(-i)(+i) + B(-i)(+i) + C(+i) + D(-i)\\
1 &= -i^2A - i^2B + iC - iD\\
1 &= A + B + i(C - D)\\
1 &= A + \frac{1}{2} + i\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)\\
A &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Тогава:

$$\frac{1}{(1+x)^2(1+x^2)} = \frac{1/2}{1+x} + \frac{1/2}{(1+x)^2} + \frac{-1/4}{x-i} + \frac{-1/4}{x+i}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2(1+x^2)} = \int_0^1 \frac{1/2dx}{1+x} + \int_0^1 \frac{1/2dx}{(1+x)^2} + \int_0^1 \frac{-1/4dx}{x-i} + \int_0^1 \frac{-1/4dx}{x+i}$$

Нека да ги сметнем поотделно.

$$\int_0^1 \frac{1/2dx}{1+x} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(1+x)}{1+x} = \frac{1}{2}\ln(1+x)|_0^1 = \frac{1}{2}(\ln(2) - \ln(1)) = \frac{\ln(2)}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{1/2dx}{(1+x)^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 (1+x)^{-2}dx = -\frac{1}{2}(1+x)^{-1}|_0^1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^1 \frac{-1/4dx}{x-i} = -\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{d(x-i)}{x-i} = -\frac{1}{4}\ln|x-i||_0^1 = -\frac{1}{4}(\ln|1-i| - \ln|-i|) = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-i}{-i}\right|$$

$$\int_0^1 \frac{-1/4dx}{x+i} = -\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{d(x+i)}{x+i} = -\frac{1}{4}\ln|x+i||_0^1 = -\frac{1}{4}(\ln|1+i| - \ln|i|) = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+i}{i}\right|$$

Третия и четвъртия интеграл събрани:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-i}{-i}\right| - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+i}{i}\right| &= -\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{1-i}{-i}\right| + \ln\left|\frac{1+i}{i}\right|\right) =\\
&= -\frac{1}{4}\ln\left(\left|\frac{1+i}{i}\right|\left|\frac{1-i}{-i}\right|\right) = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-i^2}{-i^2}\right| = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2}{1}\right| = -\frac{\ln(2)}{4}
\end{aligned}$$

Събираме всичко:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2(1+x^2)} = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\ln(2)}{4} = \frac{\ln(2)+1}{4}$$

Забележка: Ако търсим само реални корени, без комплексни, важи следното: Полинома в числител трябва да е с една степен по-ниска от полинома в знаменател. Както се вижда навсякъде имаме константи (полином от нулева степен) в числител, тъй като в знаменател имаме полиноми от първа степен. Ако целия знаменател е на степен, степента не е от значение, тъй като тя обозначава двукратен, трикатен, т.н. корен. Тоест за $(1+x)^2$, имаме $1+x$, което е на първа степен. □

Задача 6а. Да се определи видът на повърхнината, представена с уравнението $x^2 - y^2 = 4$. Да се опишат основните характеристики на съответната крива в равнината, която се представя със същото уравнение.

Решение. В равнината това е хипербола, в пространството — хиперболичен цилиндър. За да параметризираме хиперболата отдясно трябва да е единица, и взимаме числата в знаменател.

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Хипербола се параметризира с $1/\cos(t)$, $\tan(t)$ или $\cosh(t)$, $\sinh(t)$ (това са косинус и синус хиперболичен, трябва да се вземат с положителен и отрицателен знак). Първия вариант (основна формула: $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$):

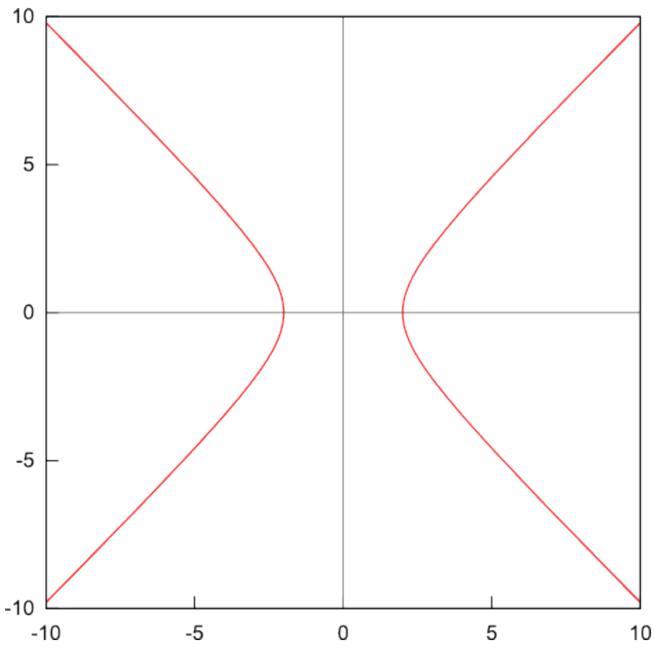
$$x = \frac{2}{\cos(t)}, \ y = 2\tan(t)$$

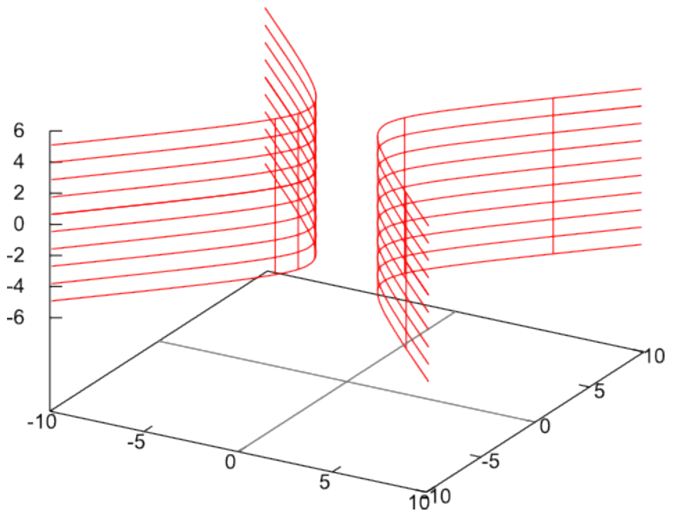
Проверяваме:

$$\frac{4}{4\cos^2(t)} - \frac{4\tan^2(t)}{4} = 1 \implies \frac{1}{\cos^2(t)} - \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)} = 1 \implies 1 - \sin^2(t) = \cos^2(t)$$

Втория вариант (основна формула: $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$):

$$x = 2\cosh(t), \ y = 2\sinh(t) \qquad x = -2\cosh(t), \ y = -2\sinh(t)$$





□

Задача 6б. Малки и големи суми на Дарбу и теорема на Дарбу. Теорема за средните стойности. Общ критерий за интегруемост. Основни класове интегруеми функции.

Решение. Доказателствата се прескачат. □

8 Осма тема

Задача 1. Намерете границата.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x)}{1 + 2\ln(x)}$$

Задача 2. Да се изследва и начертае графиката на функцията.

$$f(x) = \frac{\ln(x) - 2}{x}$$

Задача 3. Да се пресметнат интегралите.

$$\int_1^e x^2 e^x dx, \ \int \frac{\sin(x) dx}{1 + \sin^2(x)}$$

Задача 4. Да се реши матричното уравнение $AX = B$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Задача 5. Да се реши системата.

$$\left| \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ x - 3y + 3z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{array} \right.$$

Задача 6а. За триъгълник ABC са дадени точка $A(2, -1)$, височина $h : 7x - 10y + 1 = 0$ и ъглополовяща $l : 3x - 2y + 5 = 0$, височината и ъглополовящата са през един и същи връх. Намерете уравненията на страните на триъгълника.

Задача 6б. Докажете, че правите са успоредни:

$$p : \begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0 \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases}, \ q : \frac{x + 7}{3} = \frac{y - 5}{-1} = \frac{z - 9}{4}$$

Точки: 1: 5т, 2: 15т, 3: 5+10т, 4: 10т, 5: 10т, 6: 5+5т.

Задача 1. Намерете границата.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{1+2\ln(x)}$$

Решение. Прилагаме правилото на Лопитал.

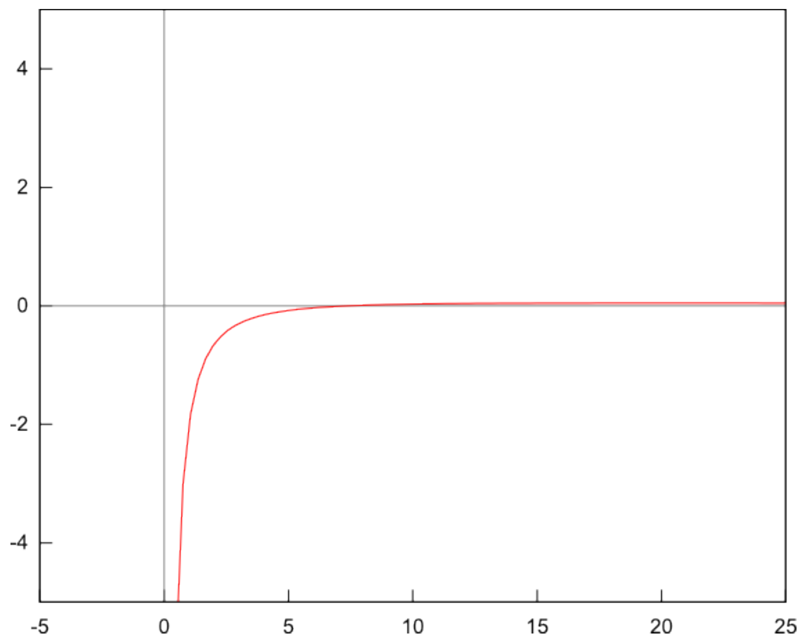
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{1+2\ln(x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{1+2(1/x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(x+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}$$

□

Задача 2. Да се изследва и начертае графиката на функцията.

$$f(x)=\frac{\ln(x)-2}{x}$$

Решение. Графика на функцията. Ограничения: $x\neq 0$, корени: $x=e^2$.



Първа производна.

$$y'=\frac{(1/x)x-(\ln(x)-2)1}{x^2}=\frac{1-\ln(x)+2}{x^2}=\frac{3-\ln(x)}{x^2}$$

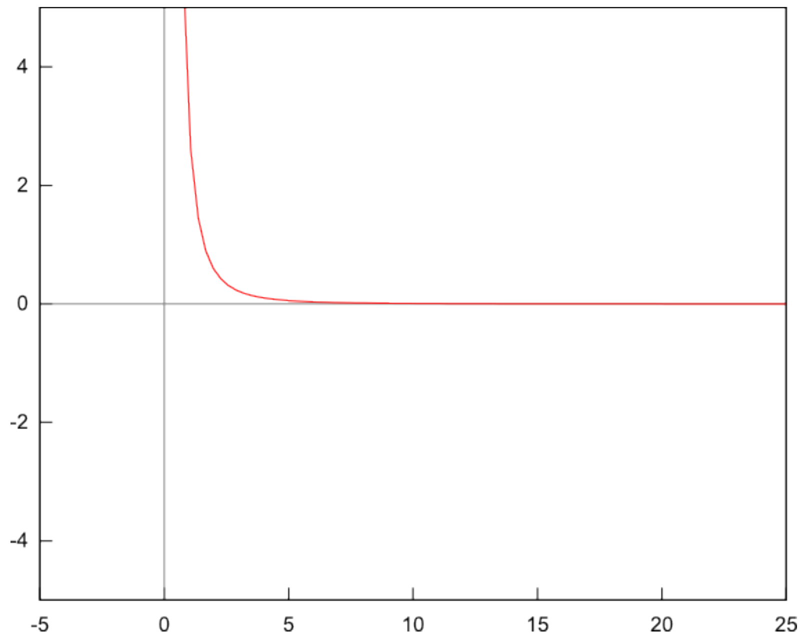
Предполагаеми екстремални точки:

$$3=\ln(x)\implies x=e^3$$

$$x=e^{2.5}:\frac{3-2.5}{e^5}>0$$

$$x=e^{3.5}:\frac{3-3.5}{e^5}<0$$

Локален максимум в $x=e^3$.

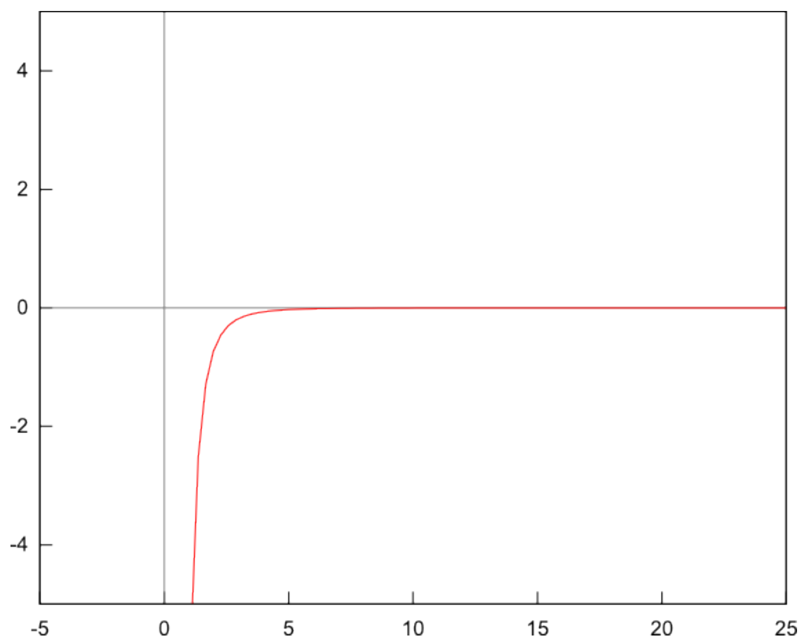


Втора производна.

$$y'' = \frac{(-1/x)x^2 - (3 - \ln(x))2x}{x^4} = \frac{-x - 6x + 2x\ln(x)}{x^4} = \frac{2\ln(x) - 7}{x^3}$$

Инфлексни точки:

$$2\ln(x) = 7 \implies x = e^{7/2}$$



Вертикална асимптота в $x = 0$. $\square$

Задача 3а. Да се пресметне интеграла.

$$\int_1^e x^2 e^x dx$$

Решение. Вкарваме e^x под диференцала и интегрираме по части.

$$\begin{aligned}\int_1^e x^2 e^x dx = \int_1^e x^2 de^x = x^2 e^x|_1^e - \int_1^e e^x d(2x) = e^2 e^e - 1e - 2\int_1^e e^x dx = \\ = e^{e+2} - e - 2e^x|_1^e = e^{e+2} - e - 2(e^e - e) = \\ = e^{e+2} - e - 2e^e + 2e = e^{e+2} - 2e^e + e\end{aligned}$$

□

Задача 3б. Да се пресметне интеграла.

$$\int \frac{\sin(x)dx}{1+\sin^2(x)}$$

Решение.

$$\int \frac{\sin(x)dx}{1+\sin^2(x)} = -\int \frac{d(\cos(x))}{1+1-\cos^2(x)} = -\int \frac{d\cos(x)}{2-\cos^2(x)} \implies -\int \frac{dt}{2-t^2}$$

Полагаме $\cos(x) = t$ и директно сменяме в интеграла (това е така, защото функцията спрямо която диференцираме е $\cos(x)$ — просто заменяме $\cos(x)$ с t). Пълната субституция е:

$$t = \cos(x),\ x = \arccos(t),\ dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\ \sin(x) = \sqrt{1-t^2}$$

$$\int \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+(\sqrt{1-t^2})^2}\left(-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right) = -\int \frac{dt}{1+1-t^2} = -\int \frac{dt}{2-t^2}$$

Който и начин да изберем, крайният резулатат е:

$$\int \frac{\sin(x)dx}{1+\sin^2(x)} \implies -\int \frac{dt}{2-t^2}$$

Знаменателя е $(2-t^2) = (\sqrt{2}-t)(\sqrt{2}+t)$. Трябва да разложим подинтегралната функция ето така:

$$\frac{1}{2-t^2} = \frac{A}{\sqrt{2}-t} + \frac{B}{\sqrt{2}+t}$$

$$1 = A(\sqrt{2}+t) + B(\sqrt{2}-t)$$

$$t = \sqrt{2}:\ 1 = A(2\sqrt{2}) + B(0) \implies A = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$t = -\sqrt{2}: \ 1 = A(0) + B(2\sqrt{2}) \implies B = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Сега заместваме обратно в интеграла:

$$-\int \frac{dt}{2-t^2} = -\left(\int \frac{(1/2\sqrt{2})dt}{\sqrt{2}-t} + \int \frac{(1/2\sqrt{2})dt}{\sqrt{2}+t}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\int \frac{dt}{\sqrt{2}-t} + \int \frac{dt}{\sqrt{2}+t}\right)$$

Трябва да уеднаквим функцията под дифереациала, ще използваме минуса за първия интеграл и ще добавим $\sqrt{2}$ към двата:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\int \frac{d(\sqrt{2}-t)}{\sqrt{2}-t} - \int \frac{d(\sqrt{2}+t)}{\sqrt{2}+t}\right)$$

Това са натурални логаритми, изваждат се, можем да разделим аргументите им:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln|\sqrt{2}-t| - \ln|\sqrt{2}+t| = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}-t}{\sqrt{2}+t}\right|$$

Връщаме полагането $\cos(x) = t$:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}-\cos(x)}{\sqrt{2}+\cos(x)}\right|$$

□

Задача 4. Да се реши матричното уравнение $AX = B$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение. Решението е $X = A^{-1}B$. Трябва да намерим обратната матрица на A. Изчисляваме детерминантата.

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 10 = 2 \neq 0$$

Сега адюнгираните количества.

$$A_{11} = (-1)^2 4 = 4, \ A_{12} = (-1)^3 2 = -2$$

$$A_{21} = (-1)^3 5 = -5, \ A_{22} = (-1)^4 3 = 3$$

Записваме матрицата и я транспонираме.

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \implies A_{ji} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Формулата за обратна матрица е: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A_{ji}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Изчисляваме X:

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

□

Задача 5. Да се реши системата.

$$\left|\begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ x - 3y + 3z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{array}\right.$$

Решение. Метод на Гаус.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ред 1 по (-1) + Ред 2. Също така Ред 1 по (-1) + Ред 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Остана Ред 3 по 4 + Ред 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Записваме като уравнения:

$$\left|\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ -4y + 4z = 0 \\ 4z = 0 \end{array}\right.$$

Решаваме отдолу нагоре:

$$z = 0,\ y = 0,\ x = 0$$

□

Задача 6а. За триъгълник ABC са дадени точка $A(2, -1)$, височина $h : 7x - 10y + 1 = 0$ и ъглополовяща $l : 3x - 2y + 5 = 0$, височината и ъглополовящата са през един и същи връх. Намерете уравненията на страните на триъгълника.

Решение. Височината и ъглополяващата са през един и същи връх. Пресичаме ги.

$$h, l: \ \frac{7x+1}{10} = \frac{3x+5}{2} \implies x = -3$$

Заместваме в едното от уравненията и намираме и другата координата.

$$h: \ -21 - 10y + 1 = 0 \implies y = -2$$

Нека това да е точка $B(-3,-2)$. Намираме уравнението на правата AB.

$$AB: \ \frac{x-2}{-3-2} = \frac{y-(-1)}{-2-(-1)} \implies x - 5y - 7 = 0$$

Тогава височината h е спусната към AC, h е перпендикулярна на AC. Трябва скаларното произведение (от коефициентите пред x и y от двете прави) да е нула. Нека $(7,-10)(10,7) = 0$. Уравнението на AC е:

$$10x + 7y + n = 0$$

Заместваме точка $A(2,-1)$ в AC:

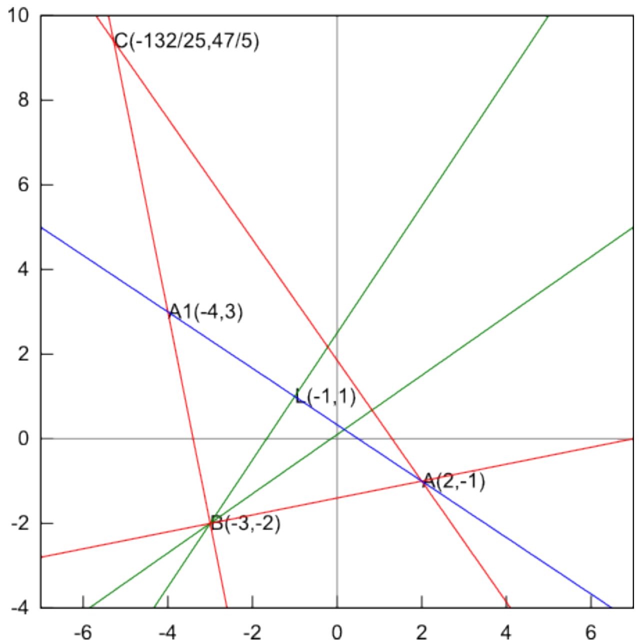
$$AC: \ 20 - 7 + n = 0 \implies n = -13 \implies 10x + 7y - 13 = 0$$

Нека прекараме права AA_1, перпендикулярна на ъглополовящата l (BL). Тогава триъгълник AA_1B е рабнобедрен, като BL се явява височина, ъглополовяща и медиана. Трябва да намерим уравнението на AA_1. Скаларното произведение на векторите от коефициентите пред x и y от AA_1 и BL е нула: $(3,-2)(2,3) = 0$. Уравнението на AA_1 е:

$$2x + 3y + n = 0$$

Заместваме точка $A(2,-1)$ в AA_1:

$$AA_1: \ 4 - 3 + n = 0 \implies n = -1 \implies 2x + 3y - 1 = 0$$



Пресичаме правите AA_1 и BL за да намерим точка L:

$$AA_1, BL: \ \frac{1-2x}{3} = \frac{3x+5}{2} \implies x = -1$$

$$AA_1: \ -2+3y-1 = 0 \implies y = 1$$

Точка $L(-1,1)$. BL е и медиана, намираме координатите на $A_1(x^*, y^*)$.

$$L\left(\frac{2+x^*}{2} = -1, \frac{-1+y^*}{2} = 1\right) \implies x^* = -4, \ y^* = 3$$

Точка $A_1(-4,3)$. Намираме уравнението на A_1B по две точки:

$$A_1B: \ \frac{x-(-4)}{-3-(-4)} = \frac{y-3}{-2-3} \implies 5x+y+17 = 0$$

Пресичаме правите A_1B и AC за да намерим точка C:

$$A_1B, AC: \ -17-5x = \frac{13-10x}{7} \implies x = -\frac{132}{25} = -5.28$$

Пак ги пресичаме, спрямо y:

$$A_1B, AC: \ \frac{-17-y}{5} = \frac{13-7y}{10} \implies y = \frac{47}{5} = 9.4$$

Точка $C(-132/25, 47/5)$. Намираме уравнението на BC по две точки:

$$BC: \ \frac{x-(-3)}{(-132/25)-(-3)} = \frac{y-(-2)}{(47/5)-(-2)} \implies 5x+y+17 = 0$$

$\square$

Задача 6б. Докажете, че правите са успоредни:

$$p: \begin{cases} 2x+2y-z-10 = 0 \\ x-y-z-22 = 0 \end{cases}, \ q: \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$$

Решение. Виж Тема 1, Задача 3 (задачата е същата). $\square$

9 Задачи по алгебра

Задача 1. Пресметнете.

$$\left(\frac{2+2i}{\sqrt{3}-i}\right)^{11}$$

Решение.

$$z=\frac{2+2i}{\sqrt{3}-i}=\frac{(2+2i)(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}=\frac{2\sqrt{3}+2i+2i\sqrt{3}+2i^2}{3-i^2}=\frac{2\sqrt{3}+2i+2i\sqrt{3}-2)}{3+1}=$$
$$=\frac{2(\sqrt{3}-1)+2i(\sqrt{3}+1)}{4}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

Привеждаме z в тригонометричен вид.

$$z=a+ib=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}+1}{2},\ |z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

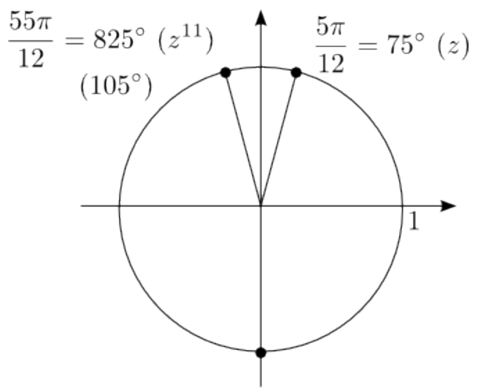
$$|z|=\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{4}+\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{4}}=\sqrt{\frac{3-2\sqrt{3}+1+3+2\sqrt{3}+1}{4}}=\sqrt{\frac{8}{4}}=\sqrt{2}$$

$$\cos(\varphi)=\frac{a}{|z|}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},\ \sin(\varphi)=\frac{b}{|z|}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},\ \varphi=\frac{5\pi}{12}=75^\circ$$

$$z=|z|(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right]$$

Формулата за комплексно число на степен n: $z^n=|z|^n(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi))$

$$z^{11}=\sqrt{2}\left[\cos\left(11\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(11\frac{5\pi}{12}\right)\right]=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{55\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{55\pi}{12}\right)\right]=$$
$$=\sqrt{2}\left[-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right]$$



Ъгълът е 825° градуса: $z^{11}=\sqrt{2}(-0.258819+i0.965925)$. □

Задача 2. Решете уравнението.

$$x^3 - 3i = 0$$

Решение.

$$x^3 = 3i,\ z = 3i,\ x^3 = z \implies x = \sqrt[3]{z}$$

Привеждаме z в тригонометричен вид.

$$z = a + ib = 0 + i3,\ |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$$

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{|z|} = \frac{0}{3} = 0,\ \sin(\varphi) = \frac{b}{|z|} = \frac{3}{3} = 1,\ \varphi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

$$z = |z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

За n-ти корен z има специална формула: формула на Моавър.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right],\ k = 0, \ldots, n-1$$

$$x = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{3}\left[\cos\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right)\right]$$

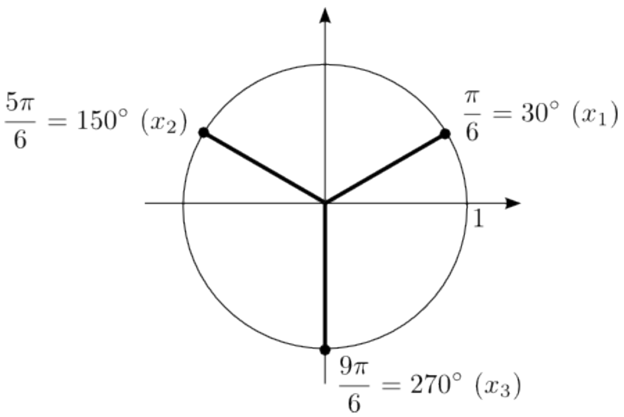
Трябва да вземем няколко на стойности на k, така че да направим пълен кръг върху единичната окръжност. В случая ще вземем $k = 0, 1, 2$, принципно се взимат $k = 0, 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} k = 0:\ x_1 &= \sqrt[3]{3}\left[\cos\left(\frac{\pi/2 + 0}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/2 + 0}{3}\right)\right] = \\ &= \sqrt[3]{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = \sqrt[3]{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right] = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}(\sqrt{3} + i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 1:\ x_2 &= \sqrt[3]{3}\left[\cos\left(\frac{\pi/2 + 2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/2 + 2\pi}{3}\right)\right] = \\ &= \sqrt[3]{3}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right] = \sqrt[3]{3}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right] = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}(-\sqrt{3} + i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 2:\ x_3 &= \sqrt[3]{3}\left[\cos\left(\frac{\pi/2 + 4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/2 + 4\pi}{3}\right)\right] = \\ &= \sqrt[3]{3}\left[\cos\left(\frac{9\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{6}\right)\right] = \sqrt[3]{3}[0 - i] = -i\sqrt[3]{3} \end{aligned}$$

При $k = 3$: $x_4 = x_1$. Имаме само три различни стойности.



□

Задача 3. Решете системата.

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 10 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0 \end{array}\right.$$

Решение. Разменяме второ и трето уравнение.

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 10 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 10 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0 \end{array}\right.$$

Записваме матрицата от коефициентите.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Първи стълб, всичко под първия елемент трябва да стане нула. Ред 3 + (−1) по Ред 1. Ред 4 + (−1) по Ред 1.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -10 \end{array}\right)$$

Втори стълб, всичко под втория елемент трябва да стане нула. Ред 3 + 3 по Ред 2. Ред 4 + 2 по Ред 2.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

Всички елементи под главния диагонал са нула. Връщаме се обратно към система.

$$\left|\begin{array}{r} x_1+2x_2+3x_3-x_4=10 \\ x_2+x_3+x_4=9 \\ x_3+6x_4=27 \\ 2x_4=8 \end{array}\right.$$

Решаваме отгоре надолу: $x_4=4$, $x_3=3$, $x_2=2$, $x_1=1$. □

Задача 4. Решете системата с Крамер.

$$\left|\begin{array}{l} 3x_1+x_3=-3 \\ x_2+x_4=4 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=6 \\ x_3+x_4=1 \end{array}\right.$$

Решение. Метод на Крамер. Метода работи само при равен брой неизвестни и уравнения (трябва ни квадратна детерминанта, само такива могат да се изчислят). Образуваме детерминанта от коефициентите пред неизвестните. Изчисляваме я, после заместваме всеки стълб със свободните членове. В случая трябва да изчислим пет детерминанти от четвърти ред.

Разменяме уравненията ето така (за да имаме единица като първи елемент):

$$\left|\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3+x_4=6 \\ x_2+x_4=4 \\ x_3+x_4=1 \\ 3x_1+x_3=-3 \end{array}\right.$$

Записваме детерминанта от коефициентите пред неизвестните и я развиваме по втори стълб:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=1(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}+1(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2$$

Сменяме първия стълб със свободните членове, развиваме по втори стълб:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=1(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}+1(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-5$$

Сменяме втория стълб със свободните членове, развиваме по първи стълб:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}+3(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=15$$

Сменяме третия стълб със свободните членове, развиваме по втори стълб:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 9$$

Сменяме четвъртия стълб със свободните членове, развиваме по втори стълб:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 1(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -7$$

Тогава корените са:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-5}{2},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{15}{2},\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{9}{2},\ x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{-7}{2}$$

□

Задача 5. Разделете с частно и остатък полиномите.

$$P(x) = 2x^4 - x^3 + 3x - 1, \quad Q(x) = 7x^2 + 1$$

Решение. Разделяме полиномите непосредствено. Умножаваме $Q(x)$ с нещо, така че най-високите степени да съвпаднат. Това е $(2/7)x^2$.

$$R(x) = P(x) - \frac{2}{7}x^2 Q(x) = 2x^4 - x^3 + 3x - 1 - \frac{2}{7}7x^4 - \frac{2}{7}x^2 = -x^3 - \frac{2}{7}x^2 + 3x - 1$$

Сега умножаваме $Q(x)$ с $(-1/7)x$, за се извадят най-високите степени.

$$R(x) - \left(-\frac{1}{7}x\right) Q(x) = -x^3 - \frac{2}{7}x^2 + 3x - 1 + \frac{1}{7}7x^3 + \frac{1}{7}x = -\frac{2}{7}x^2 + 3x + \frac{1}{7}x - 1$$

Умножаваме $Q(x)$ с $(-2/49)$, за да се извади степента на квадрат.

$$R(x) - \left(-\frac{2}{49}\right) Q(x) = -\frac{2}{7}x^2 + 3x + \frac{1}{7}x - 1 + \frac{2}{49}7x^2 + \frac{2}{49} = 3x + \frac{1}{7}x - 1 + \frac{2}{49}$$

Остатъка е (трябва да е с една степен по-нисък от $Q(x)$):

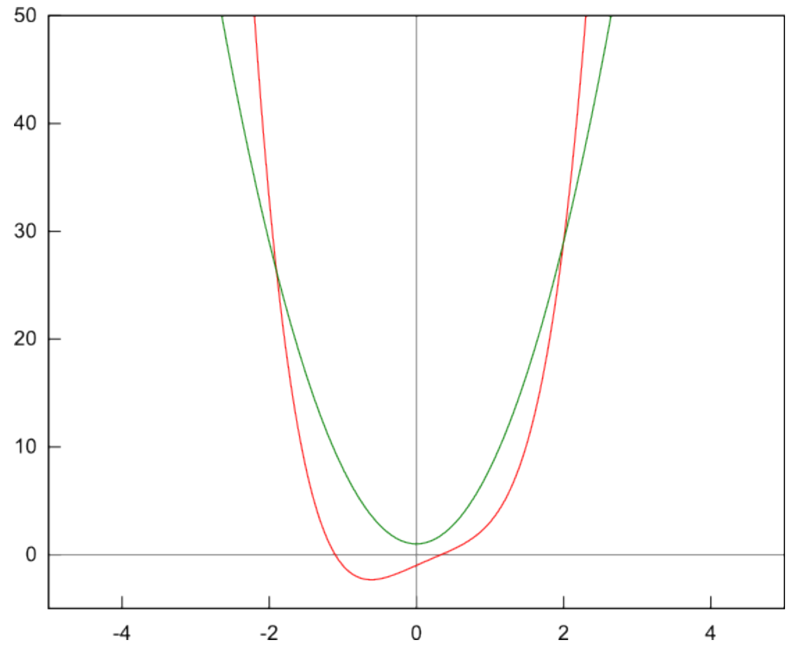
$$R(x) = Residue(x) = 3x + \frac{1}{7}x - \frac{47}{49}$$

Решението е сбора на нещата с които умножавахме:

$$S(x) = Solution(x) = \frac{2}{7}x^2 - \frac{1}{7}x - \frac{2}{49}$$

Пълното решение е: $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$

$$2x^4 - x^3 + 3x - 1 = \left(\frac{2}{7}x^2 - \frac{1}{7}x - \frac{2}{49}\right)(7x^2 + 1) + 3x + \frac{1}{7}x - \frac{47}{49}$$



□

Задача 6. Разложете в произведение от линейни множители полинома.

$$P(x) = 12x^5 + 56x^4 + 79x^3 + 27x^2 - 8x - 4$$

Решение. Ще използваме правилото на Хорнер. Записваме коефициентите.

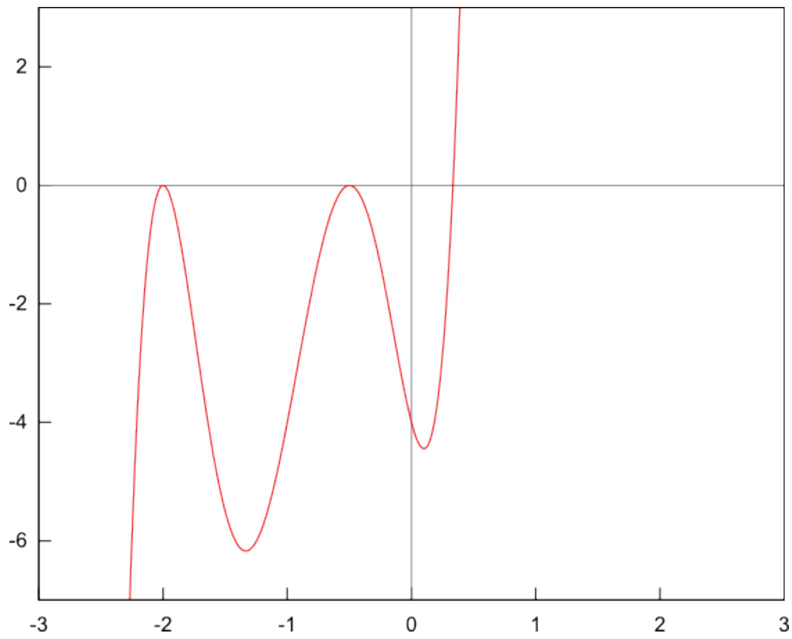
	12	56	79	27	−8	−4
1/3	12	60	99	60	12	0

Този корен го намерих като начертах графиката. Другите четири корена са две двойки комплексни числа, не мога да ги изчисля.

$$P(x) = 12x^4 + 60x^3 + 99x^2 + 60x + 12$$

$$P(x) = 4x^4 + 20x^3 + 33x^2 + 20x + 4$$

$$P(x) = x^2(4x^2 + 33) + 20x(x^2 + 1) + 4$$



□

Задача 7. Намерете собствен вектор, съответстващ на най-малкото собствено значение на оператора, зададен с матрицата.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

Решение. Собствено значение означава да се намерят собствените стойности на матрицата, това става като се извади λ от елементите по главния диагонал.

$$A = \begin{pmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{pmatrix}$$

Привеждаме детерминантата на матрицата в триъгълен вид (всичко под главния диагонал да стане нула) като използваме метода на Гаус.

Метод на Гаус за детерминанти. Ако умножваме с чило реда на който ще запишем резултата, трябва да разделим детерминантата на това число. Умножението на друг ред с число не променя детерминантата.

А може и така да го кажем: Можем да умножаваме само по горен ред с число, тоест ако записваме на втори ред, можем да умножаваме първи ред с число, но не и втори. Ако сме на трети ред, можем да умножаваме първи и втори, но не и трети. (Ако все пак го направим, трябва да разделим детерминантата на числото с което сме умножили.)

Можем да разменяме редове, тогава детерминантата сменя знака си.

Можем да събираме редове, не променя детерминанатата.

$$\det A = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{vmatrix}$$

Разменяме първи и трети ред. Детерминантата сменя знака си.

$$\det A = -\begin{vmatrix} 12 & -24 & 13-\lambda \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 7-\lambda & -12 & 6 \end{vmatrix}$$

Ред1 $\times(-5)$ + Ред2 $\times 6$. На втория ред сме, затова разделяме детерминантата на 6.

$$\det A = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 12 & -24 & 13-\lambda \\ 0 & 6(1-\lambda) & -5(1-\lambda) \\ 7-\lambda & -12 & 6 \end{vmatrix}$$

Ред1 $\times(-(7-\lambda))$ + Ред3 $\times 12$. На третия ред сме, разделяме детерминантата на 12.

$$\det A = -\frac{1}{6.12}\begin{vmatrix} 12 & -24 & 13-\lambda \\ 0 & 6(1-\lambda) & -5(1-\lambda) \\ 0 & 24(1-\lambda) & -19+20\lambda-\lambda^2 \end{vmatrix}$$

Ред2 $\times(-4)$ + Ред3. На третия ред сме, събирането на третия ред с друг ред не променя детерминантата.

$$\det A = -\frac{1}{72}\begin{vmatrix} 12 & -24 & 13-\lambda \\ 0 & 6(1-\lambda) & -5(1-\lambda) \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 \end{vmatrix}$$

Стойността на детерминантата е умножението на елементите по главния диагонал.

$$\det A = -\frac{1}{72}12.6(1-\lambda)(1-\lambda^2) = -(1-\lambda)(1-\lambda^2) = -\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1$$

Така ще е по лесно:

$$\det A = -(1-\lambda)(1-\lambda^2) = -(1-\lambda)(1-\lambda)(1+\lambda) = -(1-\lambda)^2(1+\lambda)$$

Приравняваме детерминантата на нула и намираме собствените стойности на матрицата.

$$\det A = 0 \implies -(1-\lambda)^2(1+\lambda) = 0$$

Корените са: 1, 1 и -1. Най-малката собствена стойност е -1. Записваме матрицата, като заместваме $\lambda = -1$.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -12 & 6 \\ 10 & -18 & 10 \\ 12 & -24 & 14 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix}$$

Прилагаме метода на Гаус (нормалния вариант — можем да умножаваме всеки ред с число, както и да разменяме редове, без това да променя крайния резултат).

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix}$$

Ред1 $\times(-5)$ + Ред2 $\times 4$. Също така и Ред1 $\times(-6)$ + Ред3 $\times 4$.

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 0 & -6 & 5 \\ 0 & -12 & 10 \end{pmatrix}$$

Ред2 $\times(-2)$ + Ред3. (Вторият ред умножен по 2 дава третия ред.)

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рангът на матрицата е 2, три неизвестни, тоест имаме един параметър: $x_3 = p$. Записваме матрицата като система:

$$\left| \begin{array}{l} 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ -6x_2 + 5x_3 = 0 \end{array} \right.$$

Намираме x_2 от второто уравнение:

$$-6x_2 + 5p = 0 \implies x_2 = \frac{5}{6}p$$

Намираме x_1 от първото уравнение:

$$4x_1 - 6\frac{5}{6}p + 3p \implies 4x_1 - 5p + 3p = 0 \implies x_1 = \frac{1}{2}p$$

Решението е:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p \\ \frac{5}{6}p \\ p \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

Задача 8. Решете матричното уравнение $AX = B$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение. Умножаваме с обратната матрица на A отляво. Решението е $X = A^{-1}B$.

$$A_{3\times3}X_{3\times2} = B_{3\times2}$$

$$X_{3\times2} = A^{-1}_{3\times3}B_{3\times2}$$

Изчисляваме детерминантата на A:

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 6+6-5+4-3-15 = -7 \neq 0$$

Изчисляваме адюнгираните количества:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -6+15 = 9$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1(-3-5) = 8$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 3+2 = 5$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -1(-3+6) = -3$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3-2 = -5$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -1(3+1) = -4$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -5+4 = -1$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -1(-5+2) = 3$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2-1 = 1$$

Записваме матрицата от адюнгираните количества и я транспонираме:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 5 \\ -3 & -5 & -4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \implies A^t_{ij} = A_{ji} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -1 \\ 8 & -5 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Формулата за обратна матрица: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}A_{ji}$. Обратната матрица на A е:

$$A^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} 9 & -3 & -1 \\ 8 & -5 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Решението е:

$$X = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} 9 & -3 & -1 \\ 8 & -5 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} 11 & -14 \\ 16 & -7 \\ 10 & -7 \end{pmatrix}$$

Ред от лявата матрица се умножава поелементо по стълб от дясната: $9.1+(-3)(-1)+(-1)1 = 11$, $9(-1)+(-3)1+(-1)2 = -14$. И така за останалите. □

Задача 9. Да се намери ранга на матрицата A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение. Изчисляваме минорите (детерминанти от горния ляв ъгъл).

$$\Delta_1 = 1 \neq 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 12 + 0 - 9 - 4 + 2 = 7$$

Привеждаме детерминантата на матрицата в триъгълен вид (всичко под главния диагонал да стане нула) като използваме метода на Гаус.

Метод на Гаус за детерминанти. Ако умножваме с чило реда на който ще запишем резултата, трябва да разделим детерминантата на това число. Умножението на друг ред с число не променя детерминантата.

А може и така да го кажем: Можем да умножаваме само по горен ред с число, тоест ако записваме на втори ред, можем да умножаваме първи ред с число, но не и втори. Ако сме на трети ред, можем да умножаваме първи и втори, но не и трети. (Ако все пак го направим, трябва да разделим детерминантата на числото с което сме умножили.)

Можем да разменяме редове, тогава детерминантата сменя знака си.

Можем да събираме редове, не променя детерминанатата.

$$\Delta_4 = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Първи стълб — всичко под единицата нула: Ред1 $\times(-1)$ + Ред2, Ред1 $\times(-3)$ + Ред3, Ред1 $\times 2$ + Ред4.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -7 & 2 & -10 \\ 0 & 7 & 1 & 13 \end{vmatrix}$$

Втори стълб — всичко под единицата нула: Ред2 $\times 7$ + Ред3, Ред3 + Ред4.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 16 & -31 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

Трети стълб — тройката да стане нула: Ред3 $\times \left(-\dfrac{3}{16}\right)$ + Ред4.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 16 & -31 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{141}{16} \end{vmatrix} = 16\frac{141}{16} = 141 \neq 0$$

Стойността на детерминантата е умножението на елементите по главния диагонал. Рангът на матрицата е четири (всички детерминанти са различни от нула). $\square$

10 Задачи по анализ

Задача 1.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx$$

Решение.

$$\begin{aligned}\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+2}} &= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{2}\int (x^2+2)^{-1/2}d(x^2+2) = \\ &= (x^2+2)^{1/2}+C = \sqrt{x^2+2}+C\end{aligned}$$

Това е така, защото:

$$(\sqrt{t})' = (t^{1/2})' = \frac{1}{2}t^{-1/2}$$

Можем да проверим, като диференцираме отговора:

$$(\sqrt{x^2+2})' = ((x^2+2)^{1/2})' = \frac{1}{2}(x^2+2)^{-1/2}2x = x(x^2+2)^{-1/2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$$

Няма ограничения за реални стойности на x, но за комплексни има: $x \neq i\sqrt{2}$ (знаменателя не може да е нула). $\square$

Задача 2.

$$\int \cos(2x)e^{x/2}dx$$

Решение. Решава се чрез два пъти интегриране по части, докато стигнем до началния инеграл. Няма значение коя функция ще вкараме под диференциала.

$$\begin{aligned}\int \cos(2x)e^{x/2}dx &= 2\int \cos(2x)e^{x/2}d(x/2) = 2\int \cos(2x)d(e^{x/2}) = \\ &= 2\left(\cos(2x)e^{x/2} - \int e^{x/2}d(\cos(2x))\right) = 2\left(\cos(2x)e^{x/2} + 2\int \sin(2x)e^{x/2}dx\right) = \\ &= 2\left(\cos(2x)e^{x/2} + 4\int \sin(2x)e^{x/2}d(x/2)\right) = \\ &= 2\cos(2x)e^{x/2} + 8\left(\sin(2x)e^{x/2} - \int e^{x/2}d\sin(2x)\right) = \\ &= 2\cos(2x)e^{x/2} + 8\sin(2x)e^{x/2} - 16\int \cos(2x)e^{x/2}dx\end{aligned}$$

Стигнахме до началния интеграл.

$$I = 2\cos(2x)e^{x/2} + 8\sin(2x)e^{x/2} - 16I$$

$$17I = e^{x/2}(2\cos(2x) + 8\sin(2x))$$

$$I = \frac{e^{x/2}}{17}(2\cos(2x) + 8\sin(2x))$$

$\square$

Задача 3.

$$\int \frac{\arctan(x)}{x^2}dx$$

Решение.

$$\int \frac{\arctan(x)}{x^2}dx = \int \arctan(x)x^{-2}dx$$

Трябва да вкараме знаменателя под диференциала и интегрираме по части. Малко пояснения:

$$(x^{-1})' = -x^{-2}$$

$$\begin{aligned}
\int \arctan(x)x^{-2}dx &= -\int \arctan(x)d(x^{-1}) = \\
&= -\left(\arctan(x)x^{-1} - \int x^{-1}d\arctan(x)\right) = \\
&= -\frac{\arctan(x)}{x} + \int x^{-1}\frac{1}{1+x^2}dx = \\
&= -\frac{\arctan(x)}{x} + \int \frac{1}{x(1+x^2)}dx =
\end{aligned}$$

Добавяме и вадим x^2 в числител.

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\arctan(x)}{x} + \int \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)}dx = \\
&= -\frac{\arctan(x)}{x} + \int \frac{1+x^2}{x(1+x^2)}dx - \int \frac{x^2}{x(1+x^2)}dx = \\
&= -\frac{\arctan(x)}{x} + \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{1+x^2}dx = \\
&= -\frac{\arctan(x)}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{1+x^2} = \\
&= -\frac{\arctan(x)}{x} + \ln|x| - \ln|1+x^2| + C
\end{aligned}$$

Ограничения: $x \neq 0$, $x \neq i$. □

Задача 4.

$$\int \frac{x^2-x-2}{x(x^2+2)}dx$$

Решение.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2-x-2}{x(x^2+2)}dx &= \int \frac{x^2+2-x-4}{x(x^2+2)}dx = \\
&= \int \frac{x^2+2}{x(x^2+2)}dx - \int \frac{x}{x(x^2+2)}dx - \int \frac{4}{x(x^2+2)}dx
\end{aligned}$$

Решаваме всеки интеграл поотделно.

$$I_1 = \int \frac{x^2+2}{x(x^2+2)}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x|$$

$$\begin{aligned} I_2 &= -\int \frac{x}{x(x^2+2)}dx = -\int \frac{dx}{x^2+2} = -\int \frac{dx}{2(\frac{x^2}{2}+1)} = \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= -\int \frac{4}{x(x^2+2)}dx = -2\int \frac{2+x^2-x^2}{x(x^2+2)}dx = \\ &= -2\left(\int \frac{2+x^2}{x(x^2+2)}dx - \int \frac{x^2}{x(x^2+2)}dx\right) = \\ &= -2\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{x}{x^2+2}dx = \\ &= -2\ln|x| + \int \frac{d(x^2)}{x^2+2} = \\ &= -2\ln|x| + \ln|x^2+2| \end{aligned}$$

Решението е:

$$I = \ln|x| - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - 2\ln|x| + \ln|x^2+2| + C$$

Ограничения: $x \neq 0$, $x \neq i\sqrt{2}$. □

Задача 5.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-2x} - \sqrt[4]{1-2x}}dx$$

Решение.

$$\int \frac{1}{(1-2x)^{1/2} - (1-2x)^{1/4}}dx = \int \frac{1}{(1-2x)^{2/4} - (1-2x)^{1/4}}dx$$

Сега полагаме:

$$t = \sqrt[4]{1-2x} = (1-2x)^{1/4}$$

$$x = \frac{1-t^4}{2},\ dx = -2t^3dt$$

Заместваме:

$$\int \frac{1}{t^2-t}(-2t^3)dt = -2\int \frac{t^3}{t(t-1)}dt = -2\int \frac{t^2}{t-1}dt$$

Сега добавяме и изваждаме единица:

$$\begin{aligned}
-2\int\frac{t^2-1+1}{t-1}dt &= -2\int\frac{t^2-1}{t-1}dt-2\int\frac{1}{t-1}dt= \\
&= -2\int\frac{(t-1)(t+1)}{t-1}dt-2\ln|t-1| = -2\int(t+1)dt-2\ln|t-1|= \\
&= -2\int tdt-2\int dt-2\ln|t-1| = -t^2-2t-2\ln|t-1|+C
\end{aligned}$$

Отговорът е:

$$I=-(1-2x)^{2/4}-2(1-2x)^{1/4}-2\ln|(1-2x)^{1/4}-1|+C$$

Ограничения: $t\neq 1$, $x\neq 0$. □

Задача 6.

$$\int\frac{1}{2\sin(x)-\cos(x)+1}dx$$

Решение. Използваме универсална субституция:

$$t=\tan\left(\frac{x}{2}\right),\ x=2\arctan(t),\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\sin(x)=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Заместваме:

$$\int\frac{1}{2\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{1+t^2}{4t-(1-t^2)+1+t^2}\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{2dt}{4t+2t^2}=\int\frac{dt}{t(2+t)}$$

Трябва да разложим подинтегралната функция. Корените на знаменателя са 0 и -2. Разлагането е:

$$\frac{1}{t(2+t)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{2+t}$$

$$1=A(2+t)+Bt$$

$$t=0:\ 1=A(2+0)+0\implies A=\frac{1}{2}$$

$$t=-2:\ 1=0-2B\implies B=-\frac{1}{2}$$

$$\int\frac{dt}{t(2+t)}=\int\frac{1/2}{t}dt-\int\frac{1/2}{2+t}dt=\frac{1}{2}(\ln|t|-\ln|2+t|)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t}{t+2}\right|+C$$

Отговорът е:

$$I=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tan(x/2)}{\tan(x/2)+2}\right|+C$$

Ограничения: $t\neq -2$, $x\neq 2\arctan(-2)$. □

Задача 7. Намерете производната на функцията.

$$y = \ln(\cos(x)) - \frac{1}{3}\cos^2(x)$$

Решение.

$$y' = \left(\ln(\cos(x)) - \frac{1}{3}\cos^2(x)\right)' = \frac{1}{\cos(x)}(-\sin(x)) - \frac{1}{3}2\cos(x)(-\sin(x)) =$$
$$= -\tan(x) + \frac{2}{3}\sin(x)\cos(x) = -\tan(x) + \frac{1}{3}\sin(2x)$$

□

Задача 8. Намерете границата.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{4}{x^4-1} - \frac{9}{x^9-1}\right)$$

Решение. Това е $\infty - \infty$, трябва да го сведем до друго. Привеждаме под общ знаменател.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{4}{x^4-1} - \frac{9}{x^9-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{4x^9 - 4 - 9x^4 + 9}{(x^4-1)(x^9-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{4x^9 - 9x^4 + 5}{x^{13} - x^9 - x^4 + 1} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Вече можем да приложим правилото на Лопитал: диференцираме числителя и знаменателя поотделно.

$$\lim_{x\to 1}\frac{36x^8 - 36x^3}{13x^{12} - 9x^8 - 4x^3} = \lim_{x\to 1}\frac{36x^3(x^5-1)}{x^3(13x^9 - 9x^5 - 4)} = 36\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{13x^9 - 9x^5 - 4} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Пак получихме неопределеност, прилагаме правилото още веднъж.

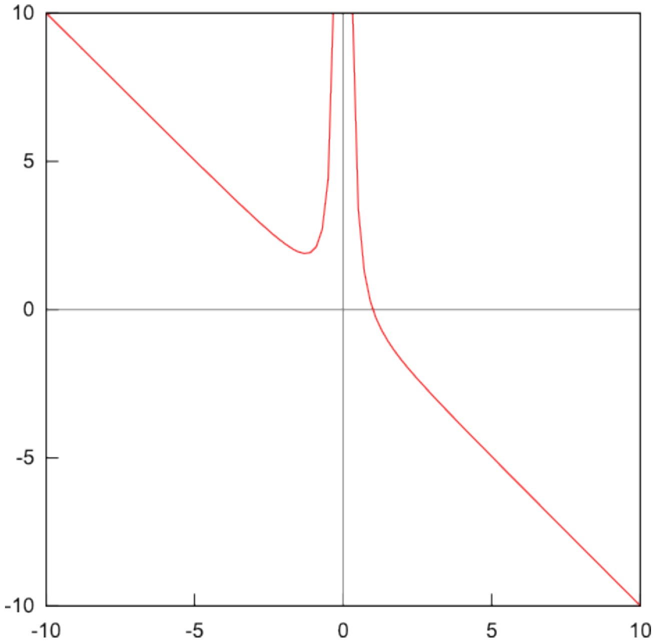
$$36\lim_{x\to 1}\frac{5x^4}{13.9x^8 - 9.5x^4} = 36\lim_{x\to 1}\frac{5x^4}{9x^4(13x^4-5)} = \frac{36}{9}\lim_{x\to 1}\frac{5}{13x^4-5} = 4\frac{5}{13-5} = 4\frac{5}{8} = \frac{5}{2}$$

□

Задача 9. Направете пълно изследване на функцията и начертайте графиката ѝ.

$$y = \frac{1-x^3}{x^2}$$

Решение. Ограничения: $x \neq 0$, корени: $x = 1$.



Първа производна.

$$y' = \frac{(0-3x^2)x^2 - (1-x^3)2x}{x^4} = \frac{-3x^4 - 2x + 2x^4}{x^4} = \frac{-x^4 - 2x}{x^4} = \frac{-x^3 - 2}{x^3}$$

Предполагаеми екстремални точки:

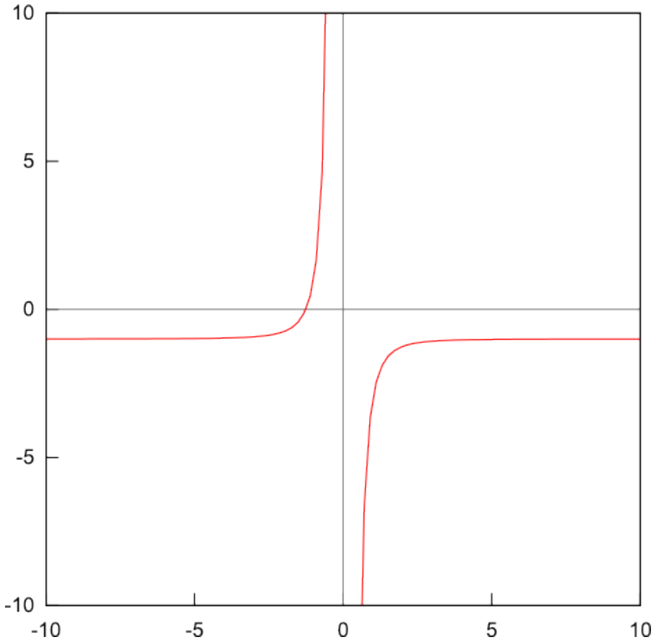
$$-x^3 - 2 = 0 \Longrightarrow x^3 = -2 \Longrightarrow x = -\sqrt[3]{2}$$

Изчисляваме стойности около точката:

$$x = -\sqrt[3]{2.5} : \frac{2.5 - 2}{-2.5} < 0$$

$$x = -\sqrt[3]{1.5} : \frac{1.5 - 2}{-2.5} > 0$$

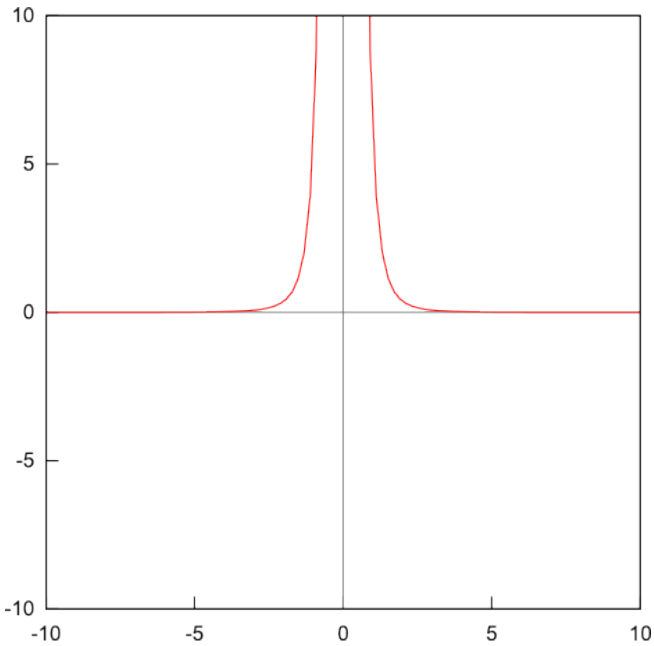
Точката $x = -\sqrt[3]{2}$ е локален минимум, първата производна сменя знака си, функцията се сменя от намаляваща на растяща.



Втора производна.

$$y'' = \frac{(-3x^2 - 0)x^3 - (-x^3 - 2)3x^2}{x^6} = \frac{-3x^5 + 3x^5 + 6x^2}{x^6} = \frac{6}{x^4}$$

Няма инфлексни точки.



Асимптоти: изчисляват се за ограниченията и се проверява за наклонена.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1/x^2 - x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - x\right) = \infty$$

Вертикална асимптота в нулата. Има наклонена асимптота, ако съществува границата $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(kx+n)]=0$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^3}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3}-1\right)=0-1=-1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-x^3}{x^2}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^3+x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

Наклонена асимптота: $y=-1x+0$, тоест $y=-x$. $\square$

11 Задачи по геометрия

Задача 1. Намерете уравнението на допирателната към елипсата $x^2 + 4y^2 = 20$, успоредна на правата $2x - 2y - 13 = 0$.

Решение. Намиране на допирателна към функция от втора степен. Формулата е:

$$ax + by + n = 0$$

Търсят се a, b и n. Допирателната се намира само като успоредна на даден вектор. Нека имаме функцията x^2. Да намерим допирателна, успоредна на вектора $(2, -1)$, тоест успоредна на правата $y = 2x$.

Коефициентите a и b са равни на коефициентите на вектора: $a = 2$, $b = -1$.

$$2x - y + n = 0 \implies y = 2x + n$$

Остава да намерим n. Изразяваме формулата за допирателна спрямо y и я приравняваме на дадената функция: $y = x^2$.

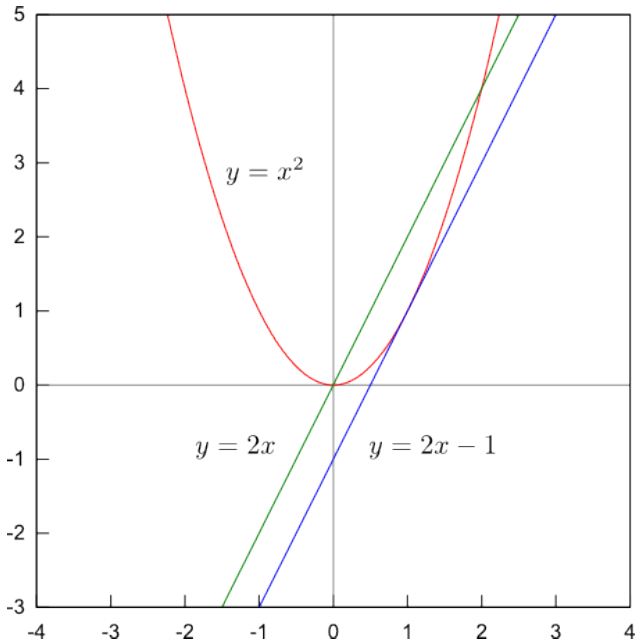
$$x^2 = 2x + n \implies x^2 - 2x - n = 0$$

За да имаме само една обща точка между функцията и допирателната, това трябва да е точен квадрат, тоест дискриминантата трябва да е нула.

$$D = 4 + 4n = 0 \implies 4(1 + n) = 0 \implies n = -1$$

Допирателната е:

$$y = 2x - 1$$



Нека да се върнем към задачата. За да намерим допирателната, параметризация не ни трябва, но за да начертаем графиката е необходимо. Ето все пак:

$$x^2 + 4y^2 = 20 \implies \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1 \implies \frac{x^2}{(2\sqrt{5})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1 \implies \left| \begin{array}{l} x = 2\sqrt{5}\cos(t) \\ y = \sqrt{5}\sin(t) \end{array} \right.$$

Трябва ни уравнението на елипсата, изразено спрямо y:

$$y = \pm\sqrt{\frac{20 - x^2}{4}} \implies y = \pm\frac{\sqrt{20 - x^2}}{2}$$

Уравнението на правата: $2x - 2y - 13 = 0$, вектора е $(2, -2)$ (коефициентите пред x и y). Допирателната е:

$$ax + by + n = 0 \implies 2x - 2y + n = 0 \implies y = \frac{2x + n}{2}$$

Приравняваме уравненията:

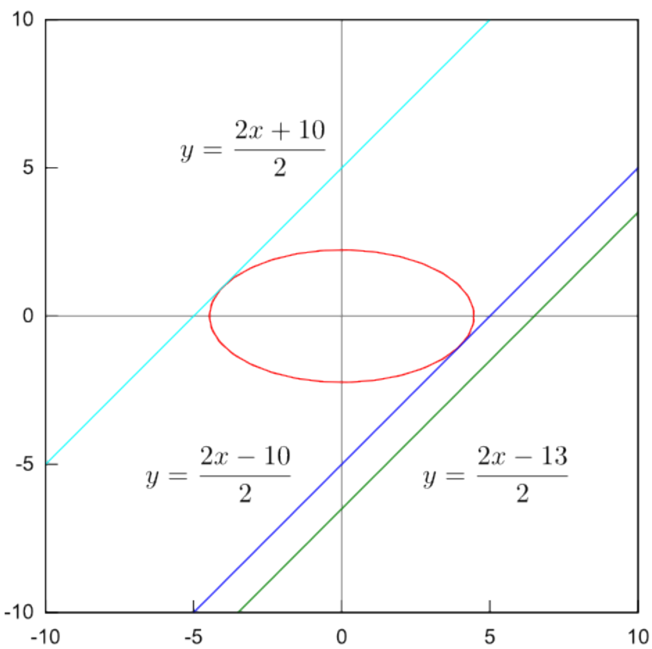
$$\frac{\sqrt{20 - x^2}}{2} = \frac{2x + n}{2} \implies \sqrt{20 - x^2} = 2x + n$$

$$20 - x^2 = (2x + n)^2 \implies 20 - x^2 = 4x^2 + 4xn + n^2$$

$$5x^2 + 4xn + n^2 - 20 = 0$$

Дискриминантата трябва да е нула, за да намерим n:

$$D = 16n^2 - 20(n^2 - 20) = 0 \implies 16n^2 - 20n^2 + 400 = 0 \implies 400 - 4n^2 = 0 \implies n = 10$$



Общата точка на допирателната и елипсата може да е под или над оста Ox, тоест $n = \pm 10$.

$$2x - 2y \pm 10 = 0 \implies y = \frac{2x \pm 10}{2}$$

Ако бяхме взели за елипсата уравнението с минус, минуса щеше да се изгуби при повдигането на квадрат. Затова го добавихме след изчислението на n. □

Задача 2. Да се определи вида и да се начертаят повърхнините.

- $x^2 - 4y^2 = 4z$
- $y = x^2 + 4z^2$

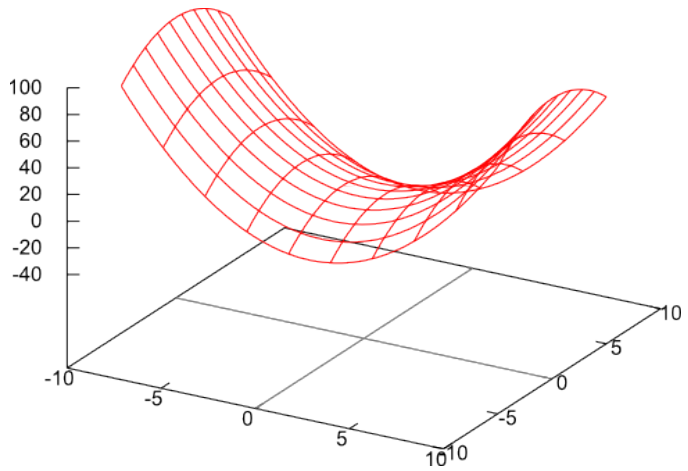
Решение. За да намерим вида на повърхнината, трябва да нулираме всяка от променливите.

$$x^2 - 4y^2 = 4z \implies \frac{x^2}{2^2} - y^2 = z$$

Нулираме z: $x^2 - 4y^2 = 0$ е хипребола (когато е равно на число, различно от нула; числото се мени по цялата ос Oz). Нулираме y: $x^2 = 4z$ е парабола, параметризацията е: $x = 2u$, $z = 4u^2$. Нулираме x: $-4y^2 = 4z$ е парабола, параметризацията е: $y = v$, $z = -v^2$. Повърхнината е хиперболичен параболоид (седло), повърхнината е:

$$\left| \begin{array}{l} x = 2u \\ y = v \\ z = 4u^2 - v^2 \end{array} \right.$$

Командата за плотиране на gnuplot: splot 2u, v, 4*u**2 - v**2.



Другата повърхнина:

$$y = x^2 + 4z^2$$

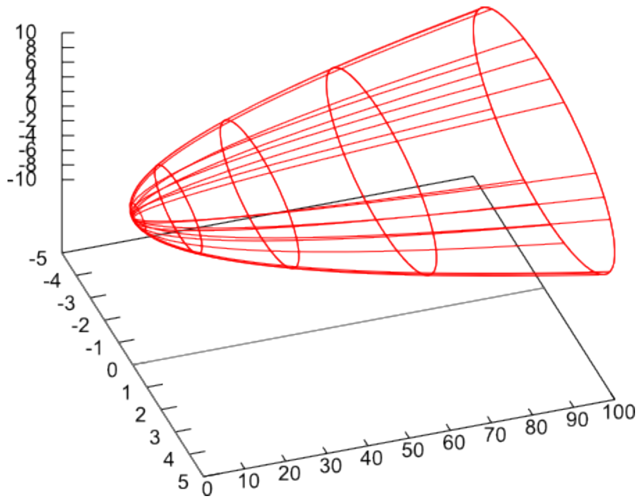
Нулираме y: $x^2 + 4z^2 = 0$ е елипса (когато е равно на число, различно от нула; числото се мени по оста Oy). Параметризацията е:

$$\left| \begin{array}{l} x = \cos(u) \\ z = 2\sin(u) \end{array} \right.$$

Нулираме x: $y = 4z^2$ е парабола, параметризацията е: $z = v$, $y = 4v^2$. Нулираме z: $y = x^2$ е парабола, параметризацията е: $x = v$, $y = v^2$. Повърхнината е параболоид, параметризацията е:

$$\left| \begin{array}{l} x = v\cos(u) \\ y = 4v^2 \\ z = 2v\sin(u) \end{array} \right.$$

Командата за плотиране на gnuplot: splot cos(u)*v, 4*v**2, 2*sin(u)*v.



□

Задача 3. Дадени са върховете на триъгълник: $A(1,-6)$, $B(-9,10)$, $C(5,-4)$. Пресметнете лицето на триъгълника и намерете радиуса R на описаната около него окръжност.

Решение. Първо намираме уравненията на страните по две точки:

$$AB: \frac{x-1}{-9-1} = \frac{y-(-6)}{10-(-6)} \implies 8x + 5y + 22 = 0$$

$$BC: \frac{x-(-9)}{5-(-9)} = \frac{y-10}{-4-10} \implies x + y - 1 = 0$$

$$AC: \frac{x-1}{5-1} = \frac{y-(-6)}{-4-(-6)} \implies x - 2y - 13 = 0$$

За да намерим центъра на окръжността, трябва да прекараме перпендикулярни прави през средата на всяка страна. Пресечната им точка ще даде центъра на описаната около триъгълника окръжност.

Намираме точките, разполовяващи всяка страна:

$$AB: M_1\left(\frac{1-9}{2}, \frac{-6+10}{2}\right) \implies M_1(-4,2)$$

$$BC: \; M_2\left(\frac{-9+5}{2}, \frac{10-4}{2}\right) \implies M_2(-2,3)$$

$$AC: \; M_3\left(\frac{1+5}{2}, \frac{-6-4}{2}\right) \implies M_3(3,-5)$$

За да намерим правата, перпендикулярна на страната, трябва да вземем коефициентите пред x и y, да ги разменим и да сменим знака на едното (за да стане скаларното произведение нула). За AB: $(8,5)$, перпендикулярния вектор ще е $(5,-8)$. Тогава за M_1R имаме:

$$M_1R: \; 5x - 8y + n = 0$$

Заместваме с точка $M_1(-4,2)$ в уравнението на правата M_1R и намираме n:

$$M_1R: \; -20 - 16 + n = 0 \implies n = 36 \implies 5x - 8y + 36 = 0$$

По същия начин и за дугите две страни.

$$M_2R: \; x - y + n = 0$$

$$M_2R: \; -2 - 3 + n = 0 \implies n = 5 \implies x - y + 5 = 0$$

$$M_3R: \; 2x + y + n = 0$$

$$M_3R: \; 6 - 5 + n = 0 \implies n = -1 \implies 2x + y - 1 = 0$$

Сега пресичаме две от тези три прави и намираме координатите на точка R:

$$M_2R, M_3R: \; x + 5 = 1 - 2x \implies x = -\frac{4}{3}$$

Заместваме в уравнението на M_2R (може и някое от другите две):

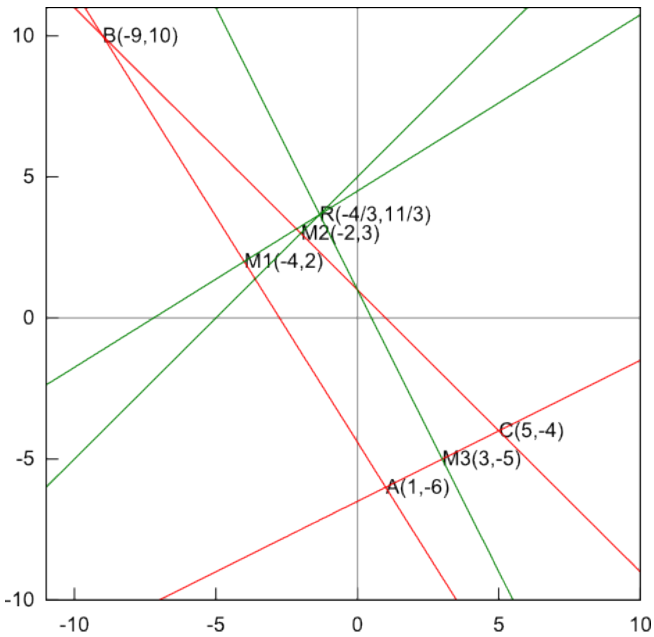
$$M_2R: \; x - y + 5 = 0 \implies -\frac{4}{3} - y + 5 = 0 \implies y = \frac{11}{3}$$

Точка $R(-4/3, 11/3)$. Сега трябва да намерим дължината на радиус-вектора, можем да го намерим като $\overrightarrow{AR}$, $\overrightarrow{BR}$ или $\overrightarrow{CR}$ (крайна точка минус начална точка). Нека да е $\overrightarrow{AR}$.

$$\overrightarrow{AR}\left(-\frac{4}{3} - 1, \frac{11}{3} - (-6)\right) = \overrightarrow{AR}\left(-\frac{7}{3}, \frac{29}{3}\right)$$

Намираме дължината на вектора, коред квадратен от сбора на координатите на квадрат:

$$|\overrightarrow{AR}| = \sqrt{\left(-\frac{7}{3}\right)^2 + \left(\frac{29}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{49+841}{9}} = \frac{\sqrt{890}}{3} = 9.944$$



Ще използваме следната формула за вписан триъгълник, за да намерим лицето на триъгълника:

$$S = \frac{abc}{4r}$$

Записваме страните като вектори: крайна точка минус начална точка:

$$\overrightarrow{AB}(-9-1, 10+6) = \overrightarrow{AB}(-10, 16)$$

И намираме дължината на вектора:

$$a = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{10^2 + 16^2} = 2\sqrt{89}$$

Намираме дължината и на другите две страни:

$$\overrightarrow{BC}(5+9, -4-10) = \overrightarrow{BC}(14, -14),\ b = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{14^2 + 14^2} = 14\sqrt{2}$$

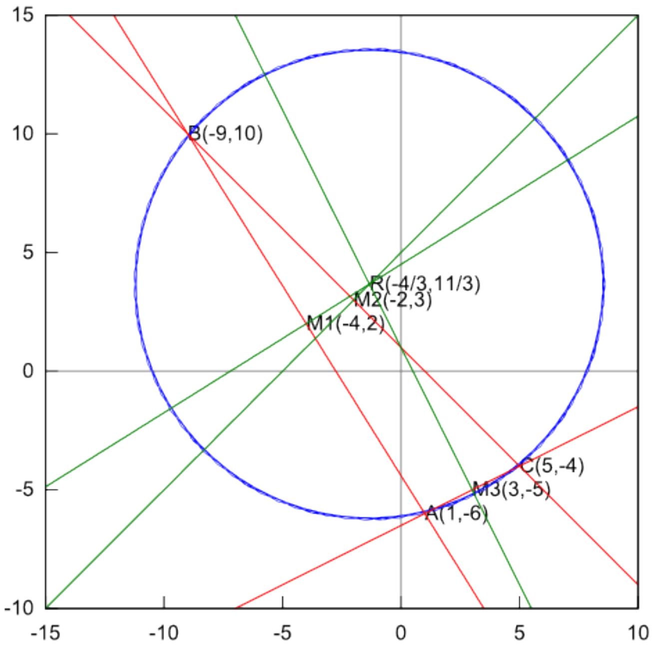
$$\overrightarrow{AC}(5-1, -4+6) = \overrightarrow{BC}(4, 2),\ c = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

Тогава лицето е:

$$S = \frac{2\sqrt{89}\ 14\sqrt{2}\ 2\sqrt{5}}{4\sqrt{890}/3} = \frac{42\sqrt{89}\sqrt{2}\sqrt{5}}{\sqrt{890}} = 42$$

Можем да намерим лицето и като прекараме височина към AC, лицето тогава е $\overrightarrow{AC}\overrightarrow{BH}/2$. Накратко:

$$H\left(-\frac{3}{5}, -\frac{34}{5}\right),\ \overrightarrow{BH}\left(\frac{42}{5}, -\frac{84}{5}\right),\ |\overrightarrow{BH}| = \frac{42\sqrt{5}}{5},\ S = \frac{2\sqrt{5}}{2}\frac{42\sqrt{5}}{5} = 42$$



□

Задача 4. В успоредника $ABCD$ са дадени уравненията на две от страните му: $AB : 2x+y-7=0$ и $AD : x-2y+4=0$, както и пресечната точка на диагоналите му: $M(1,0)$. Намерете уравненията на другите две страни.

Решение. Пресичаме AB и AD за да намерим точка A:

$$AB, AD: \; 7-2x = \frac{x+4}{2} \implies x = 2$$

$$AB: \; 2x+y-7=0 \implies 4+y-7=0 \implies y=3$$

Точка $A(2,3)$. Пресечната точка на диагоналите разполовява самите диагонали, можем да намерим точка $C(x^*, y^*)$:

$$M\left(\frac{x^*+2}{2}=1, \frac{y^*+3}{2}=0\right) \implies C(0,-3)$$

Страната CD е успоредна на AB, взимаме коефициентите пред x и y:

$$CD: \; 2x+y+n=0$$

За да намерим n трябва да заместим в правата с точка C:

$$CD: \; 0-3+n=0 \implies n=3 \implies 2x+y+3=0$$

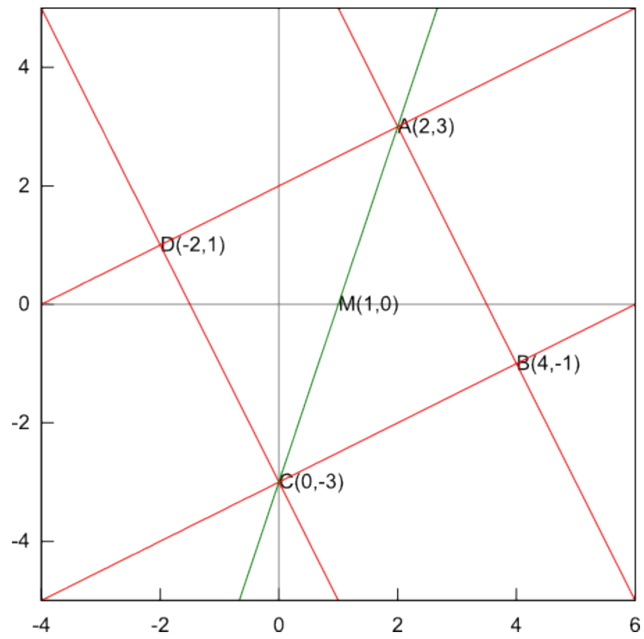
Страната BC е успоредна на AD, взимаме коефициентите пред x и y:

$$BC: \; x-2y+n=0$$

За да намерим n трябва да заместим в правата с точка C:

$$BC: \ 0 + 6 + n = 0 \implies n = -6 \implies x - 2y - 6 = 0$$

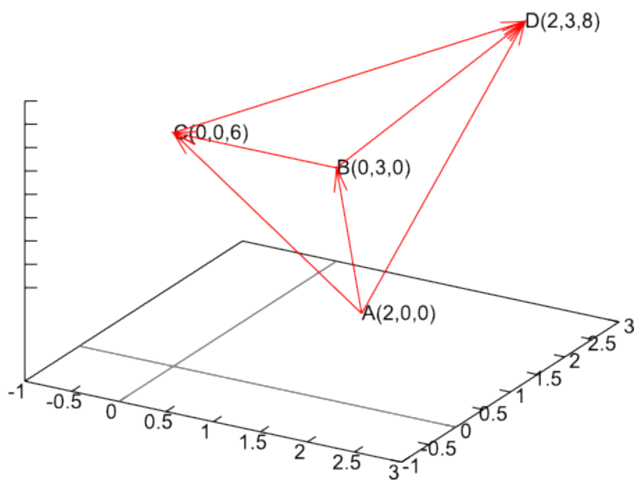
Точки B и D се намират като се пресекат AB и BC, и съответно AD и DC.



□

Задача 5. Дадени са точките $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,6)$ и $D(2,3,8)$. Да се намери обема на пирамидата $ABCD$ и дължината на височината, спусната от върха A към равнината BCD.

Решение. Графика на пирамидата.



Скаларно произведение — вектор по вектор дава число:

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = number$$

Векторно произведение — вектор по вектор дава вектор:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \overrightarrow{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \overrightarrow{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = vector$$

Смесено произведение — векторно произведение по вектор дава вектор по вектор, което е скаларно произведение, дава число:

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})\overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = number$$

Обемът на пирамидата е лицето на основата умножено по височината върху три:

$$V = \frac{1}{3}hS_{BCD}$$

Обемът може да бъде пресметнат чрез смесено произведение на трите страни:

$$V = \frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}|$$

Лицето може да бъде пресметнато чрез векторно произведение:

$$S_{BCD} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}|$$

Тогава височината е:

$$h = \frac{3V}{S_{BCD}}$$

Записваме векторите като крайна минус начална точка, ето точките: $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,6)$, $D(2,3,8)$:

$$\overrightarrow{AB}(-2,3,0),\ \overrightarrow{AC}(-2,0,6),\ \overrightarrow{AD}(0,3,8)$$

Обемът е модул от смесеното произведение, не може да е отрицателен:

$$V = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}|0+0+0-0+36+48| = 288$$

За да намерим лицето ни трябват следните два вектора:

$$\overrightarrow{BC}(0,-3,6),\ \overrightarrow{BD}(2,0,8)$$

Пресмятаме векторното произведение (развиваме детерминантата по първи ред):

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -3 & 6 \\ 2 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} - \overrightarrow{j}\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + \overrightarrow{k}\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \overrightarrow{i}(-24-0) - \overrightarrow{j}(0-12) + \overrightarrow{k}(0+6) = -24\overrightarrow{i} + 12\overrightarrow{j} + 6\overrightarrow{k}$$

Изчисляваме дължината на вектора:

$$|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}| = \sqrt{24^2 + 12^2 + 6^2} = 6\sqrt{4^2 + 2^2 + 1} = 6\sqrt{21}$$

Лицето е дължината на вектора, получен от векторното прозведение, разделен на две (защото основата е триъгълник, векторното произведение пресмята лицето на успоредника образуван от двата вектора):

$$S_{BCD} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}| = \frac{1}{2}6\sqrt{21} = 3\sqrt{21}$$

Височината е:

$$h = \frac{3V}{S_{BCD}} = \frac{3.288}{3\sqrt{21}} = \frac{288}{\sqrt{21}}$$

□

Задача 6. Векторът $\overrightarrow{m}$ е перпендикулярен на $\overrightarrow{a}(3,2,2)$ и $\overrightarrow{b}(18,-22,-5)$, образува остър ъгъл с оста Oy и има дължина 14 единици. Да се намерят координатите на вектора $\overrightarrow{m}$.

Решение. Векторът $\overrightarrow{m}$ е перпендикулярен на $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, тогава скаларното му произведение с тези два вектора е нула:

$$\overrightarrow{m}\,\overrightarrow{a} = 0,\ \overrightarrow{m}\,\overrightarrow{b} = 0$$

Нека $\overrightarrow{m}(m_1, m_2, m_3)$. Тогава разписваме скаларните произведения и получаваме:

$$\overrightarrow{m}\,\overrightarrow{a} = 3m_1 + 2m_2 + 2m_3$$

$$\overrightarrow{m}\,\overrightarrow{b} = 18m_1 - 22m_2 - 5m_3$$

Записваме като система:

$$\left| \begin{array}{l} 3m_1 + 2m_2 + 2m_3 = 0 \\ 18m_1 - 22m_2 - 5m_3 = 0 \end{array} \right.$$

Имаме две уравнения с три неизвестни. Трябва ни още едно уравнение за да намерим координатите на $\overrightarrow{m}$.

Нека да изчислим дължините на другите два вектора:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$$

$$|\overrightarrow{b}| = \sqrt{18^2 + 22^2 + 25} = \sqrt{833} = 7\sqrt{17}$$

Нека да намерим скаларното произведение на $\overrightarrow{a}$ с $\overrightarrow{b}$.

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = 3.18 - 2.22 - 5.2 = 54 - 44 - 10 = 0$$

Тоест векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ са перпендикулярни. Следователно и трита вектора образуват прав ъгъл един с друг (можем да си го представим като триизмерна координатна система).

Нека да намерим векторното произведение на $\overrightarrow{a}$ с $\overrightarrow{b}$:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 2 \\ 18 & -22 & -5 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -22 & -5 \end{vmatrix} - \overrightarrow{j}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 18 & -5 \end{vmatrix} + \overrightarrow{k}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 18 & -22 \end{vmatrix} =$$
$$= \overrightarrow{i}(-10+44) - \overrightarrow{j}(-15-36) + \overrightarrow{k}(-66-36) = 34\overrightarrow{i} + 51\overrightarrow{j} - 102\overrightarrow{k}$$

Ще ни трябва и дължината на този вектор:

$$|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = \sqrt{34^2 + 51^2 + 102^2} = \sqrt{14161} = 119$$

Има и по лесен начин да изчислим дължината:

$$|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin(\varphi)$$

Това изчислява лицето на успоредника образуван от двата вектора, другите две страни са успоредните на тях вектори. Ъгъл $\varphi = 90$, тъй като скаларното им произведение е нула. Тогава:

$$|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = \sqrt{17}.7\sqrt{17}.1 = 7.17 = 119$$

Записваме скаларното произведение на вектора $\overrightarrow{m}$ с вектора от векторното произведение $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$:

$$\overrightarrow{m}(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{m}||\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|\cos(\theta)$$

Лявата част на уравнението е умножението на координатите:

$$\overrightarrow{m}(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = 34m_1 + 51m_2 - 102m_3$$

Дясната част: от условието имаме $|\overrightarrow{m}| = 14$, изчислихме че $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = 119$. Относно ъгъла: резултата от векторното произведение е вектор, перпендикулярен едновременно на $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ и успореден на $\overrightarrow{m}$ (който също е перпендикулярен на $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$). Тогава ъгълът $\theta = 0$, следователно $\cos(\theta) = \cos(0) = 1$.

Приравняваме лявата и дясната страна:

$$34m_1 + 51m_2 - 102m_3 = 14.119.1$$

Което е третото уравнение. Записваме системата:

$$\left| \begin{array}{l} 3m_1 + 2m_2 + 2m_3 = 0 \\ 18m_1 - 22m_2 - 5m_3 = 0 \\ 34m_1 + 51m_2 - 102m_3 = 1666 \end{array} \right.$$

Умножваваме първото уравнение по 11 и го събираме с второто:

$$(33 + 18)m_1 + (22 - 5)m_3 = 0 \implies 54m_1 + 17m_3 = 0 \implies 3m_1 = -m_3$$

Заместваме $m_3 = -3m_1$ в първото уравнение:

$$3m_1 + 2m_2 - 6m_1 = 0 \implies 3m_1 = 2m_2$$

Сега заместваме $m_3 = -3m_1$ и $m_2 = (3/2)m_1$ в третото уравнение:

$$34m_1 + 51\frac{3}{2}m_1 - 102(-3m_1) = 1666$$

$$2.34m_1 + 3.51m_1 + 2.3.102m_1 = 2.1666$$

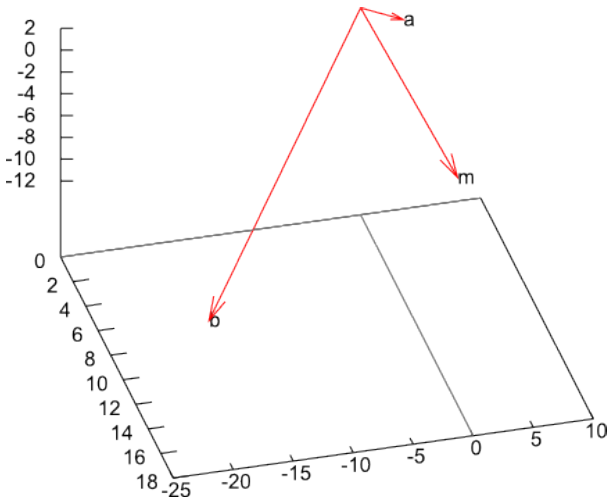
$$68m_1 + 153m_1 + 612m_1 = 3332$$

$$833m_1 = 3332$$

$$m_1 = 4$$

Тогава: $m_2 = 6$, $m_3 = -12$. Отговор:

$$\overrightarrow{m}(4, 6, -12)$$



Както се вижда, $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{m}$ образуват дясна тройка (всеки вектор е перперндикулярен на другите два, тоест задачата е решена вярно). □

Задача 7. Намерете уравнението на равнината β, която минава по правата

$$g: \ \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+2}{2}$$

и е перпендикулярна на равнината $\alpha: 3x + 2y - z - 5 = 0$

Решение. Уравнение на равнина се изчислява чрез точка и два вектора.

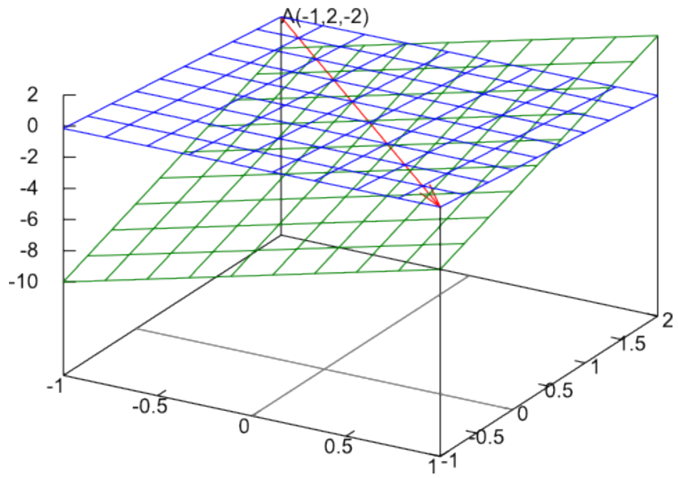
Искаме равнината β да минава по права g: взимаме точка $A(1, 2, -2)$ от g и вектор $\overrightarrow{a}(2, -3, 2)$ от g. Трябва ни още един вектор.

Искаме равнината β да е перпендикулярна на равнината α. Нормалният вектор на α е $\overrightarrow{b}(3, 2, -1)$, който е перпендикулярен на своята равнина α, тогава той ще е успореден на равнината β.

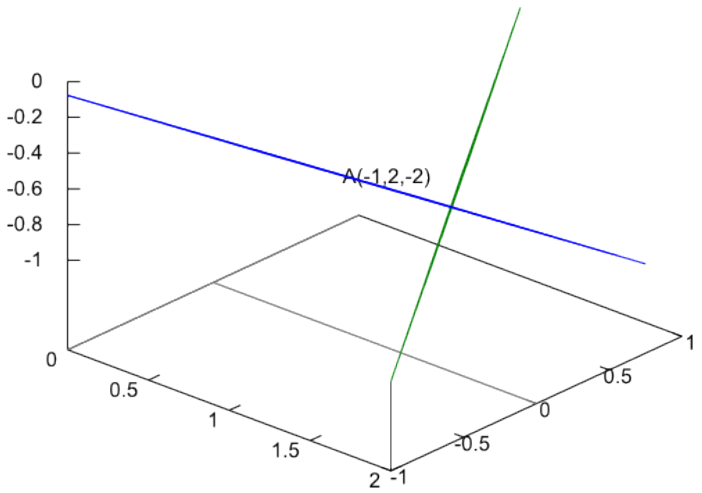
Записваме детерминанта от точка A, вектор $\overrightarrow{a}$ и вектор $\overrightarrow{b}$:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z+2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (x+1)(-1)^2 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (y-2)(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} +$$
$$+(z+2)(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (x+1)(3-4) - (y-2)(-2-6) + (z+2)(4+9) =$$
$$= -x - 1 + 8y - 16 + 13z + 26 = -x + 8y + 13z + 9$$

Уравнението на β: $-x + 8y + 13z + 9 = 0$.



На тази графика не се вижда добре дали равнините са перпендикулярни. Нека да приближим.



Сега вече се вижда. □

Задача 8. Намерете точка Q, симетрична на точка $P(4,1,6)$, относно правата

$$a: \begin{cases} \alpha: & -x+y-4z+12=0 \\ \beta: & -2x-y-2z+3=0 \end{cases}$$

Решение. Трябва да намерим каноничното уравнение на правата a. Записваме детерминанта от коефициентите пред x и y:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1+2 = 3 \neq 0$$

Полагаме $z = \lambda$. Тогава:

$$\left| \begin{array}{l} -x+y = 4\lambda - 12 \\ -2x - y = 2\lambda - 3 \end{array} \right.$$

Събираме двете уравнения:

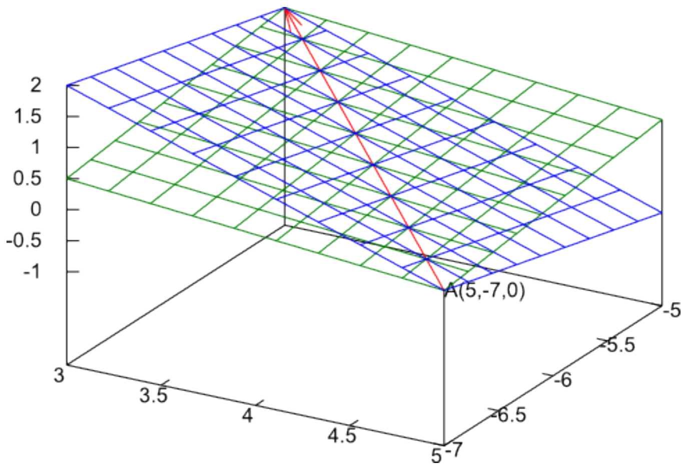
$$-3x = 6\lambda - 15 \implies -x = 2\lambda - 5 \implies \lambda = \frac{x-5}{-2}$$

Заместваме x в първото уравнение:

$$2\lambda - 5 + y = 4\lambda - 12 \implies y = 2\lambda - 7 \implies \lambda = \frac{y+7}{2}$$

За z: $\lambda = \dfrac{z-0}{1}$. Приравняваме λ:

$$a: \ \frac{x-5}{-2} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-0}{1}$$



Нека $P'(x_1, y_1, z_1)$ е търсената точка. Нека $Q(x_0, y_0, z_0)$ е пресечната точка на PP' с правата a. Правите PP' и a са перпендикулярни, тоест скаларното произведение от векторите им ще е нула. Векторът на a: $(-2, 2, 1)$. Векторът на PQ (крайна минус начална точка): $(x_0 - 4, y_0 - 1, z_0 - 6)$. Тогава:

$$(-2, 2, 1)(x_0 - 4, y_0 - 1, z_0 - 6) = 0$$

$$-2(x_0 - 4) + 2(y_0 - 1) + z_0 - 6 = 0$$

Записваме параметризацията от по-горе, като заместим $\lambda = t$:

$$a : \left| \begin{array}{l} x = -2t + 5 \\ y = 2t - 7 \\ z = t \end{array} \right.$$

Заместваме параметризацията в уравнението по-горе и получаваме координатите на точка Q (защото това обозначава пресичането на правите a и PQ):

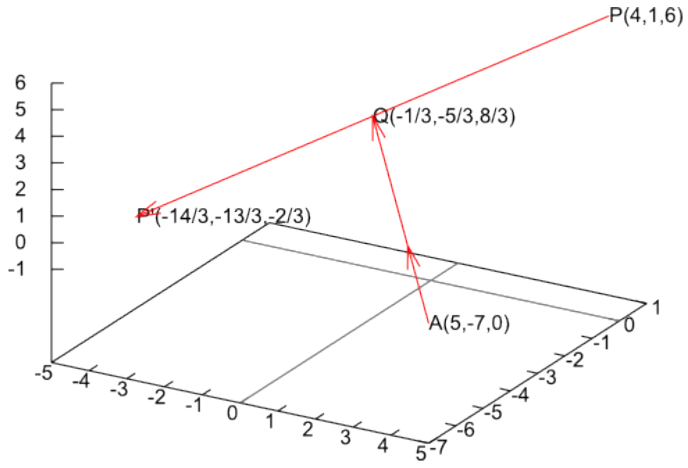
$$-2(-2t + 5 - 4) + 2(2t - 7 - 1) + t - 6 = 0$$

$$4t - 2 + 4t - 16 + t - 6 = 0$$

$$9t - 24 = 0 \implies t = \frac{24}{9} \implies t = \frac{8}{3}$$

Заместваме t в параметризацията и получаваме координатите на точка Q:

$$Q\left(-2\frac{8}{3} + 5, 2\frac{8}{3} - 7, \frac{8}{3}\right) \implies Q\left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)$$



На правата PP' точка Q се явява среда, тоест:

$$Q\left(\frac{4+x_1}{2}=-\frac{1}{3},\frac{1+y_1}{2}=-\frac{5}{3},\frac{6+z_1}{2}=\frac{8}{3}\right) \implies x_1=-\frac{14}{3},\ y_1=-\frac{13}{3},\ z_1=-\frac{2}{3}$$

Координатите на точка P':

$$P'\left(-\frac{14}{3},-\frac{13}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

□

Литература

- Аналитична геометрия: доц. д-р И. Трендафилов (л,у)
- Линейна алгебра: проф. дтн К. Пеева (л), гл. ас. М. Узунова (у)
- Математически анализ: доц. д-р Е. Върбанова (л), доц. д-р Й. Панева (у)
- Сайтове: Wikibooks LaTeX, gnuplot tips, Wikipedia, Wolfram MathWorld
- Софтуер: TeX Live, gnuplot, Inkscape, Notepad++, Sumatra PDF, Windows XP