Решени изпитни теми по Висша Математика II за Технически Университет — София

Николай Икономов

15 декември 2010 г.

Съдържание

Темите са взети от форума на ТУ–София (линк, линк) и от студенти. Научните степени на преподавателите са взети от сайта на ФПМИ (линк). За контакти: nike32@abv.bg

- Първа тема (2009)
- Втора тема (доц. д-р Ю. Пешева, 2009)
- Трета, четвърта тема (2009)
- Пета, шеста тема (проф. дмн Л. Бояджиев, 2008, 2010)
- Седма до единадесета тема (нерешени) (2008, 2009)

Означения: тангенс $\tan(x)$, котангенс $\cot(x)$, аркус тангенс $\arctan(x)$.

Указател

Задачите по категории. Задачите са решени в реда в който са категориите.

- Числени редове — 1-1+теория, 2-1, 3-5, 4-3
- Развитие на функции в ред на Фурие — 1-2+теория, 3-3
  - по синуси (нечетни функции) — 5-2
  - по косинуси (четни функции) — 4-2, 6-1
- Екстремуми на функции — 1-3+теория, 2-2, 3-1, 4-1, 5-4, 6-2
- Линейни диференциални уравнения — 2-3+теория, 2-4+теория
- Линейни нехомогенни диференциални уравнения с постоянни коефициенти — 1-4+теория, 3-4, 4-4, 5-5, 6-3
- Двойни интеграли — 3-2+теория, 4-5, 6-4
- Тройни интеграли — 1-5+теория, 5-6, 6-5
- Криволинейни интеграли от I род — 2-6+теория
- Криволинейни интеграли от II род — 1-6+теория, 3-6, 4-6, 5-7

Задачите по теми. Задачите в скоби не са решени.

- Първа тема — 1, 2, 3, 4, 5, 6
- Втора тема — 1, 2, 3, 4, 5, 6
- Трета тема — 1, 2, 3, 4, 5, 6
- Четвърта тема — 1, 2, 3, 4, 5, 6
- Пета тема — {1}, 2, 3, 4, 5, 6, 7
- Шеста тема — 1, 2, 3, 4, 5, {6}

1 Първа тема

Задача 1. Даден е редът

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n-4}}{4n-3}$$

(а) Да се намери радиусът на сходимост R на този ред.

(б) Да се установи какъв е редът при $x = 1$, $x = -3/2$, $x = 1/2$ (абсолютно сходящ, условно сходящ или разходящ).

Задача 2. Нека $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е периодична функция с период $T = 6$, за която е дадено, че $F(x) = x/3 - 1$ за $x \in (0, 6]$. Да се представи F в ред на Фурие.

Задача 3. Дадена е точката $A(1, -1, 1)$ и функциите

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7,$$

$$F(x, y, z) = f(x, y) + e^{2x^2+3y^2+4z^2}.$$

Да се намерят:

(а) Локалните екстремуми на f и вида им.

(б) $g = \mathrm{grad} F(A)$ и $\dfrac{\partial F(A)}{\partial g}$

Задача 4. Да се намери общото решение на следното диференциално уравнение.

$$y'' + 4y = \frac{6}{\cos(2x)} + (2x - 3)e^{2x}$$

Задача 5. Да се пресметне обема на тялото T, заградено от следните две повърхнини.

$$T : z = 6 - x^2 - y^2,\ z^2 = x^2 + y^2\ (z \geq 0)$$

Задача 6. Като се използва формулата на Грийн, да се пресметне криволинейния интеграл от втори род

$$\int_C xdy - ydx$$

по кривата линия C с уравнение

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

описана еднократно в положителна посока.

Всяка задача е по 10 точки.

Задача 1. Даден е редът

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n-4}}{4n-3}$$

(а) Да се намери радиусът на сходимост R на този ред.

(б) Да се установи какъв е редът при $x = 1$, $x = -3/2$, $x = 1/2$ (абсолютно сходящ, условно сходящ или разходящ).

Решение. *Числови и степенни редове.* Въвеждаме следните понятия:

- числов ред (сума от числа, в определена зависимост)

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + \dots$$

- знакопроменлив ред (знаците не са в определена зависимост)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - u_5 - u_6 + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + |u_3| + |u_4| + |u_5| + |u_6| + \dots$$

- алтернативен ред (знаците се редуват)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - u_6 + \dots$$

- степенен ред (a_n — коефициенти, x — неизвестно)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Обикновено задачите са алтернативни степенни редове.

Най-често в задачите се търси радиусът на сходимост R на степенен ред. Ако R е безкрайност, то интервалът на сходимост е $(-\infty, \infty)$. Ако R е число, то интервалът на сходимост е $(-R, R)$, и трябва да се провери сходимостта за $x = R$ и $x = -R$.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{или} \quad R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

В задачата може да се търси вида сходимост на реда: абсолютно сходящ, условно сходящ, разходящ. Тогава се прилагат следните критерии (прилагат се и за проверка на сходимостта за $x = R$ и $x = -R$).

- Числови редове с неотрицателни членове
  - Принцип за сравняване на редове с неотрицателни членове

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} v_n,\ u_n \geq 0,\ v_n \geq 0;\ u_n \leq v_n \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

    Ако $\sum v_n$ е сходящ, то $\sum u_n$ е сходящ.

    Ако $\sum u_n$ е разходящ, то $\sum v_n$ е разходящ.

  - Критерий на Коши

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \begin{cases} < 1 \Longrightarrow \text{ редът е сходящ} \\ > 1 \Longrightarrow \text{ редът е разходящ} \\ = 1 \Longrightarrow \text{ друг критерий} \end{cases}$$

  - Критерий на Даламбер

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} < 1 \Longrightarrow \text{ редът е сходящ} \\ > 1 \Longrightarrow \text{ редът е разходящ} \\ = 1 \Longrightarrow \text{ друг критерий} \end{cases}$$

  - Критерий на Раабе

$$\lim_{n\to\infty} \left[n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \right] = \begin{cases} < 1 \Longrightarrow \text{ редът е разходящ} \\ > 1 \Longrightarrow \text{ редът е сходящ} \\ = 1 \Longrightarrow \text{ друг критерий} \end{cases}$$

  - Интегрален критерий на Коши. Общият член се записва като функция $f(x)$. Ако $f(x)$ е положителна и намаляваща за $\forall x \geq k$, то можем да запишем така:

$$I = \int_k^{\infty} f(x)dx$$

    Ако интегралът е равен на число (сходящ), то и редът е сходящ. Ако интегралът е равен на безкрайност (разходящ), то и редът е разходящ.

- Знакопроменливи редове
  - Правило за сходимост

    Ако $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ е сходящ, то редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е абсолютно сходящ.

    Ако $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ е разходящ и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е сходящ, то редът е условно сходящ.

    Ако $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ е разходящ и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е разходящ, то редът е разходящ.

- Алтернативни редове
  - Критерий на Лайбниц

    Ако $|u_{n+1}| \leq |u_n|$ и $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = 0$, то редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ е сходящ.

    Ако се търси условна/абсолютна сходимост, трябва да се приложи някой от критериите за редове с неотрицателни членове, за да се провери сходимостта на $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

- Степенни редове
  - Област (интервал) на сходимост: $(-R, R)$

    $$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \text{ или } R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

    Радиусът на сходимост R може да е безкрайност: $(-\infty, \infty)$. Ако не е, се проверява за $x = R$ и $x = -R$ чрез заместване в сумата.
  - Ако в реда липсват безкраен брой членове, то прилагаме критерия на Коши или Даламбер за абсолютната стойност: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$. Например:

    $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n}}{3n!},\ R = \infty$$

Нека да се върнем към задачата. Имаме алтернативен степенен ред.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-4}}{4n-3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n-3} x^{n-4}$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{4n-3}$$

Да намерим радиуса на сходимост.

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{4n-3} \frac{4(n+1)-3}{(-1)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{4n+4-3}{4n-3}\right| =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{4n+1}{4n-3}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n(4+1/n)}{n(4-3/n)}\right| = \frac{4+0}{4-0} = 1$$

Модул от -1 на каквато и да е степен дава единица. Число върху безкрайност дава нула. Радиусът на сходимост $R = 1$.

Сега трябва да установим сходимостта на реда при $x = 1$. Заместваме в сумата.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1^{n-4}}{4n-3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n-3}$$

Това е алтернативен ред. Прилагаме критерия на Лайбниц. Сравняваме u_{n+1} и u_n.

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{4(n+1)-3}\right|, \left|\frac{(-1)^n}{4n-3}\right| \Longrightarrow \frac{1}{|4n+1|} < \frac{1}{|4n-3|}$$

$4n + 1 > 4n - 3$, следователно реципрочната стойност ще е с обратен знак. Това показва, че имаме намаляваща редица. Сега границата.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{4n-3}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{|4n-3|} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{|n(4-3/n)|} = 0$$

Тоест редът е сходящ. Но ние искаме абсолютна или условна сходимост, трябва проверим сходимостта на $|u_n|$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{4n-3}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n-3}$$

(Това е вариация на хармоничния ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, който винаги е разходящ. Но нека сега проверим.) Нашият ред сега е с неотрицателни членове, можем да приложим критерия на Даламбер.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4(n+1)-3}\frac{4n-3}{1} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n-3}{4n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(4-3/n)}{n(4+1/n)} = 1$$

Този критерий не ни върши работа, обикновено другия критерий е интегралния критерий на Коши (който винаги има решение).

$$\begin{aligned} I = \int_1^{\infty}\frac{dx}{4x-3} &= \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{dx}{4x-3} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{4}\int_1^N \frac{d(4x)}{4x-3} = \\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{4}\ln|4x-3|\big|_1^N = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{4}(\ln|4N-3| - \ln 1) = \frac{1}{4}\lim_{N\to\infty}\ln|4N-3| = \infty \end{aligned}$$

Това означава, че интегралът е разходящ, а също така и редът е разходящ. Тогава имаме, че редът при $x = 1$ е условно сходящ, защото:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n-3} \Longrightarrow \text{ разходящ}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n-3} \Longrightarrow \text{ сходящ}$$

Сега за $x = 1/2$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(1/2)^{n-4}}{4n-3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-4}(4n-3)} = 16\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(4n-3)}$$

Това е алтернативен ред. Прилагаме критерия на Лайбниц.

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{2^n(4(n+1)-3)}\right|, \left|\frac{(-1)^n}{2^n(4n-3)}\right| \Longrightarrow \frac{1}{|2^n(4n+1)|} < \frac{1}{|2^n(4n-3)|}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{2^n(4n-3)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{|2^n(4n-3)|} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$$

Следователно $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е сходящ. Трябва да проверим за сходимост и $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$.

$$16\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{2^n(4n-3)}\right| = 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|2^n(4n-3)|}$$

Прилагаме критерия на Даламбер.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n(4n-3)}{2^{n+1}(4(n+1)-3)} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n-3}{2(4n+1)} =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n(4-3/n)}{n(4+1/n)} = \frac{1}{2}\left(\frac{4-0}{4+0}\right) = \frac{1}{2} < 1$$

Следователно редът $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ е сходящ. Това означава, че $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ е абсолютно сходящ.

И за $x = -3/2$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(-3/2)^{n-4}}{4n-3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n(-1)^{-4}3^{n-4}}{2^{n-4}(4n-3)} = \frac{16}{81}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(4n-3)}$$

Това е ред с неотрицателни членове. Прилагаме критерия на Даламбер.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}(4(n+1)-3)}\frac{2^n(4n-3)}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3(4n-3)}{2(4n+1)} =$$
$$= \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n(4-3/n)}{n(4+1/n)} = \frac{3}{2}\left(\frac{4-0}{4+0}\right) = \frac{3}{2} > 1$$

Редът е разходящ.

Отговор: Радиус на сходимост: $R = 1$, $x = 1$: редът е условно сходящ, $x = 1/2$: абсолютно сходящ, $x = -3/2$: разходящ. □

Задача 2. Нека $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е периодична функция с период $T = 6$, за която е дадено, че $F(x) = x/3 - 1$ за $x \in (0, 6]$. Да се представи F в ред на Фурие.

Решение. Развитие на функции в ред на Фурие. Фуриерови коефициенти — a_n и b_n. Задължително се записва, че функцията има периодично продължение: $f(x+2\pi) = f(x)$ (или $f(x+2l) = f(x)$).

- Развитие в интервал с дължина 2π: $[-\pi, \pi]$, $[0, 2\pi]$, ... Периодично продължение: $f(x + 2\pi) = f(x)$.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \ a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

- Развитие в произволен интервал $[a, b]$. Дължина на интервала: $l = (b - a)/2$. Периодично продължение: $f(x + 2l) = f(x)$.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right), \ a_0 = \frac{1}{l}\int_{a}^{b} f(x)dx$$
$$a_n = \frac{1}{l}\int_{a}^{b} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx, \ b_n = \frac{1}{l}\int_{a}^{b} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

- Развитие по синуси. $f(x)$ е дефинирана в $[0, \pi]$. Трябва да додефинираме $f(x)$ в $[-\pi, \pi]$ като нечетна функция: $f(-x) = -f(x)$. Казваме, че $F(x) = f(x)$ за $x \in [-\pi, \pi]$. Периодично продължение: $F(x + 2\pi) = F(x)$.

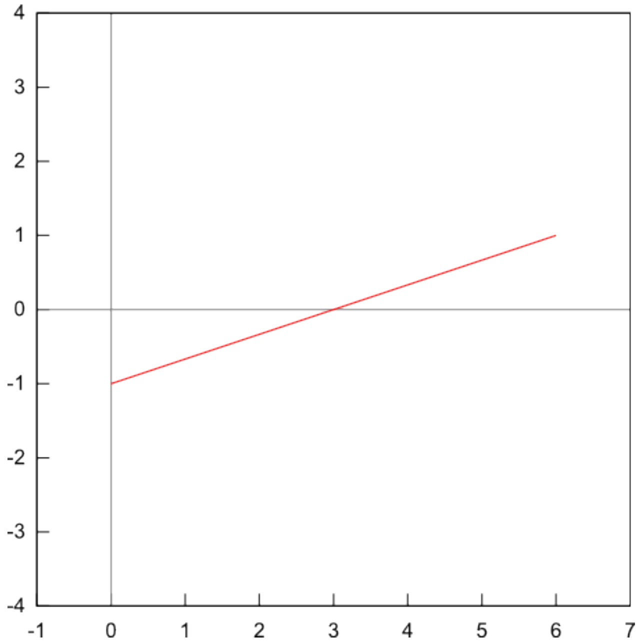
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \ a_0 = 0, \ a_n = 0$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} F(x)\sin(nx)dx$$

- Развитие по косинуси. $f(x)$ е дефинирана в $[0, \pi]$. Трябва да додефинираме $f(x)$ в $[-\pi, \pi]$ като четна функция: $f(-x) = f(x)$. Казваме, че $F(x) = f(x)$ за $x \in [-\pi, \pi]$. Периодично продължение: $F(x + 2\pi) = F(x)$.

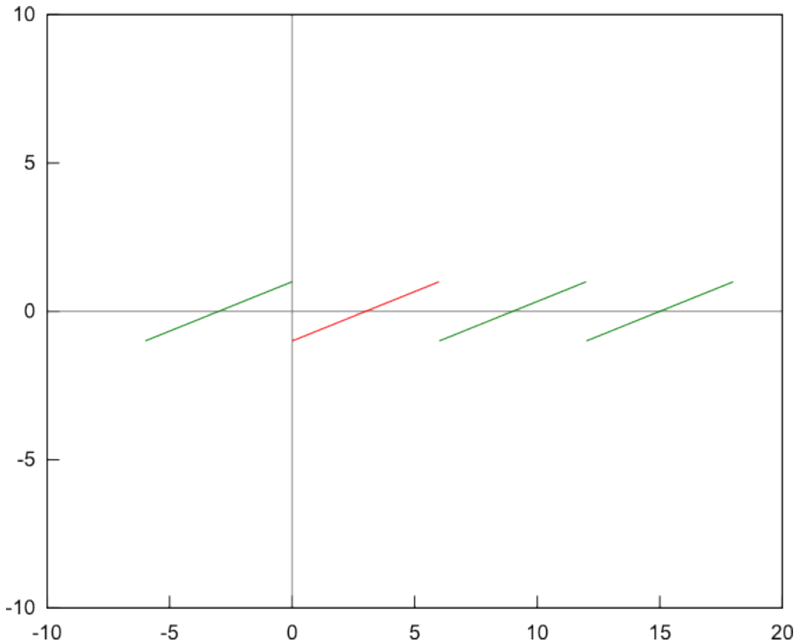
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx), \ a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx, \ b_n = 0$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} F(x)\cos(nx)dx$$

- Развитието по синуси и косинуси в произволен интервал се прави по подобен начин.

Нека да се върнем към задачата. Графиката на функцията.



Имаме $x \in (0, 6]$, $l = (6 - 0)/2 = 3$. Периодично продължение: $F(x + 6) = F(x)$.



Изчисляваме a_0.

$$a_0 = \frac{1}{3} \int_0^6 \left(\frac{x}{3} - 1 \right) dx = \frac{1}{3} \left(\frac{x^2}{6} \bigg|_0^6 - x|_0^6 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{6^2}{6} - 0 - (6 - 0) \right) = 0$$

Сега a_n.

$$a_n = \frac{1}{3}\int_0^6 \left(\frac{x}{3}-1\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx = \frac{1}{3}\left(\int_0^6 \frac{x}{3}\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx - \int_0^6 \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx\right)$$

Решаваме двата интеграла поотделно. За първия: вкарваме косинуса под диференциала и интегрираме по части.

$$\begin{aligned}
\int_0^6 \frac{x}{3}\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx &= \frac{1}{n\pi}\int_0^6 x\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)d\left(\frac{n\pi x}{3}\right) = \frac{1}{n\pi}\int_0^6 x d\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) = \\
&= \frac{1}{n\pi}\left(x\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\Big|_0^6 - \int_0^6 \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx\right) = \\
&= \frac{1}{n\pi}\left(6\sin(2n\pi) - 0\sin(0) - \frac{3}{n\pi}\int_0^6 \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)d\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\right) = \\
&= \frac{3}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\Big|_0^6 = \frac{3}{n^2\pi^2}(\cos(2n\pi)-\cos(0)) = \frac{3}{n^2\pi^2}(1-1) = 0
\end{aligned}$$

Следните две формули са много полезни.

$$\cos(n\pi) = (-1)^n,\ \sin(n\pi) = 0$$

Тогава: $\cos(2n\pi) = (-1)^{2n} = 1$. Сега втория интеграл.

$$-\int_0^6 \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx = -\frac{3}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\Big|_0^6 = \frac{3}{n\pi}(\sin(2n\pi)-\sin(0)) = 0$$

Явно $a_n = 0$. Да видим b_n.

$$b_n = \frac{1}{3}\int_0^6 \left(\frac{x}{3}-1\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx = \frac{1}{3}\left(\int_0^6 \frac{x}{3}\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx - \int_0^6 \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx\right)$$

Изчисляваме двата интеграла поотделно.

$$\begin{aligned}
\int_0^6 \frac{x}{3}\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx &= -\frac{1}{n\pi}\int_0^6 x d\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) = \\
&= -\frac{1}{n\pi}\left(x\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\Big|_0^6 - \int_0^6 \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx\right) = \\
&= -\frac{1}{n\pi}(6\cos(2n\pi) - 0\cos(0) - 0) = -\frac{1}{n\pi}(6.1-0) = -\frac{6}{n\pi}
\end{aligned}$$

Както видяхме по-горе, интеграл от косинус е нула, няма да го смятаме пак. Знаем колко е и от синус, но нека да го запишем.

$$-\int_0^6 \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx = \frac{3}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\Big|_0^6 = \frac{3}{n\pi}(\cos(2n\pi)-\cos(0)) = \frac{3}{n\pi}(1-1) = 0$$

Тогава за b_n имаме:

$$b_n = \frac{1}{3}\left(-\frac{6}{n\pi}+0\right) = -\frac{2}{n\pi}$$

Развитието на функцията $F(x)$ в ред на Фурие:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{n\pi}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$$

□

Задача 3. Дадена е точката $A(1,-1,1)$ и функциите

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7,$$

$$F(x,y,z) = f(x,y) + e^{2x^2+3y^2+4z^2}.$$

Да се намерят:
(а) Локалните екстремуми на f и вида им.
(б) $g = \mathrm{grad} F(A)$ и $\dfrac{\partial F(A)}{\partial g}$

Решение. Ако имаме функция $y = f(x)$ то нейната първа производна и нейната частна производна по x съвпадат:

$$y' = 2x = \frac{dy}{dx} = f'_x$$

Ако имаме функция на две променливи $f(x,y)$, когато диференцираме по x приемаме y за константа, тоест диференциала на y спрямо x е нула:

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 0 - 2 + 0 - 0 = 2x - 2$$

Това се нарича частна производна по x. Същото важи и при диференциране по y (това е частна производна по y):

$$f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 2y - 0 + 2 - 0 = 2y + 2$$

Пълен диференциал df на функцията $f(x,y)$:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = (2x-2)dx + (2y+2)dy$$

Предполагаемите екстремални точки се намират чрез приравняване на първите частни производни на нула.

$$f'_x = 2x - 2 = 0,\ f'_y = 2y + 2 = 0 \Longrightarrow M(1,-1)$$

Екстремумите на функцията се намират чрез вторите частни производни.

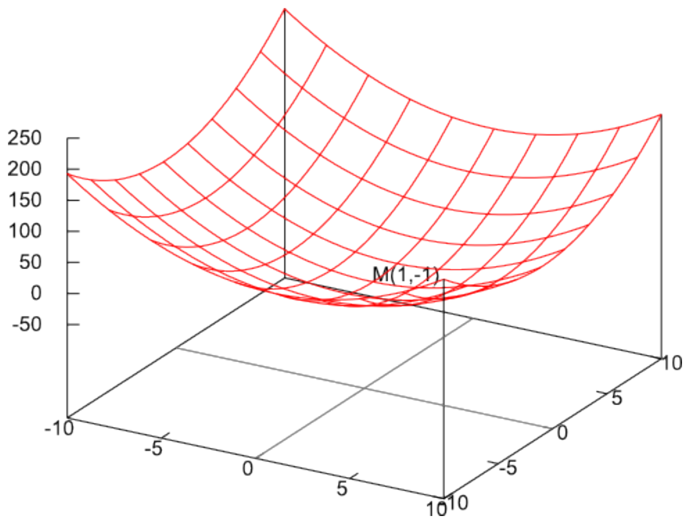
$$f''_{xx} = 2,\ f''_{yy} = 2,\ f''_{xy} = 0,\ f''_{yx} = 0,\ f''_{xy} = f''_{yx}$$

След като са изчислени, се записват ето тези детерминанти (изчисляват се в предполагаемата екстремална точка $M(1,-1)$, тоест ако има x или y в детерминантата се заместват със стойностите от точката [в друга задача ще видим това]):

$$\Delta_1 = f''_{xx} = 2 > 0$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

Ако $\Delta_2 > 0$, то имаме екстремум (ако е по-малко от нула — няма екстремум (седловидна точка)). Ако $\Delta_1 > 0$ — екстремалната точка е минимум, ако $\Delta_1 < 0$ — максимум.

Следователно нашата екстремална точка е минимум: $M(1,-1)$



Градиент на функция — вектор с координати първите частни производни се нарича градиент на функцията $f(x,y,z)$ и се означава така:

$$\text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{k} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Нашата функция е:

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 + e^{2x^2+3y^2+4z^2}$$

Намираме първите частни производни на функцията. Те трябва да бъдат изчислени в точката $A(1,-1,1)$.

$$F'_x = \frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 2 + e^{2x^2+3y^2+4z^2}(4x),\ F'_x(A) = 2 - 2 + 4e^9 = 4e^9$$
$$F'_y = \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 2 + e^{2x^2+3y^2+4z^2}(6y),\ F'_y(A) = -2 + 2 - 6e^9 = -6e^9$$
$$F'_z = \frac{\partial F}{\partial z} = 0 + e^{2x^2+3y^2+4z^2}(8z),\ F'_z(A) = 8e^9$$

Тогава градиентът на функцията $F(x, y, z)$ в точката $A(1, -1, 1)$ е:

$$\overrightarrow{g} = \text{grad}F = 4e^9\overrightarrow{i} - 6e^9\overrightarrow{j} + 8e^9\overrightarrow{k} = (4e^9, -6e^9, 8e^9) = e^9(4, -6, 8)$$

Производна по посока. Нека имаме функция $f(x, y, z)$, градиент на функцията $\text{grad}f$ и вектор $\overrightarrow{a}(a_1, a_2, a_3)$. Дефинираме нормализиран (единичен) вектор $\overrightarrow{a}^0$ както следва (векторът разделен на дължината му):

$$\overrightarrow{a}^0 = \frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|} = \left(\frac{a_1}{|\overrightarrow{a}|}, \frac{a_2}{|\overrightarrow{a}|}, \frac{a_3}{|\overrightarrow{a}|}\right), \ |\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Тогава производната на функцията $f(x, y, z)$ по посока на вектора $\overrightarrow{a}$ е:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \overrightarrow{a}^0.\text{grad}f$$

В нашата задача обаче този вектор е самият градиент:

$$\frac{\partial f}{\partial g} = \overrightarrow{g}^0.\text{grad}f = \overrightarrow{g}^0.\overrightarrow{g}$$

Сега вече става интересно. Нека да видим скаларното произведение на вектора g със самия него.

$$< g, g >= |g||g|\cos(\measuredangle(g, g)) = |g||g|\cos(0) = |g|^2$$

За единичния вектор $\overrightarrow{g}^0$ имаме:

$$\overrightarrow{g}^0 = \frac{\overrightarrow{g}}{|\overrightarrow{g}|}$$

Тогава получаваме следното:

$$\frac{\partial f}{\partial g} = \overrightarrow{g}^0.\overrightarrow{g} = \frac{\overrightarrow{g}}{|\overrightarrow{g}|}.\overrightarrow{g} = \frac{< g, g >}{|\overrightarrow{g}|} = \frac{|\overrightarrow{g}|^2}{|\overrightarrow{g}|} = |\overrightarrow{g}|$$

Следователно, за да решим напълно задачата, трябва да намерим дължината на вектора g.

$$|\overrightarrow{g}| = \sqrt{(4e^9)^2 + (-6e^9)^2 + (8e^9)^2} = e^9\sqrt{4^2 + 6^2 + 8^2} = e^9\sqrt{116} = 2e^9\sqrt{29}$$

Отговор: $f(x, y, z)$ има локален минимум в $M(1, -1)$, $\overrightarrow{g} = \text{grad}F = e^9(4, -6, 8)$, $\dfrac{\partial F}{\partial g} = 2e^9\sqrt{29}$. □

Задача 4. Да се намери общото решение на следното диференциално уравнение.

$$y'' + 4y = \frac{6}{\cos(2x)} + (2x - 3)e^{2x}$$

Решение. Задачи от този вид се решават на два или повече етапи (в зависимост от броя на десните части): това вляво се приравнява на нула (хомогенно уравнение), после се приравнява на едната дясна част, после и на другата. В случая имаме: хомогенното уравнение, дясна част с метод на Лагранж и специална дясна част.

Уравнението се състои от коефициенти a_n, функция $y = y(x)$ и нейните производни до n-ти ред:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

Дясната част е нула. Записваме редът на производните като степен, това се нарича характеристично уравнение:

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} + a_n = 0$$

Намират се корените $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Тогава корените на диференциалното уравнение са:

$$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x},\ \ldots y_n = e^{k_n x}$$

И решението на *хомогенното* диференциално уравнение е:

$$y(x) = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \ldots + c_n e^{k_n x}$$

Нека да запишем подред различните видове корени и съответните решения.

- Реални и различни корени — както по-горе

$$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x},\ \ldots y_n = e^{k_n x}$$

$$y(x) = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \ldots + c_n e^{k_n x}$$

- Реални кратни корени — за всяка нова кратност се умножава по x — нека k е трикратен корен

$$y_1 = e^{kx},\ y_2 = x e^{kx},\ y_3 = x^2 e^{kx}$$
$$y(x) = c_1 e^{kx} + c_2 x e^{kx} + c_3 x^2 e^{kx}$$

- Комплексни различни корени — за всяко комплексно число и неговото комплексно спрегнато се записват по два корена както следва (примерът е с две двойки комплексни корени, може и повече)

$$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta :\ y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ y_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

$$k_{3,4} = \gamma \pm i\delta :\ y_3 = e^{\gamma x}\cos(\delta x),\ y_4 = e^{\gamma x}\sin(\delta x)$$
$$y(x) = e^{\alpha x}[c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x)] + e^{\gamma x}[c_3\cos(\delta x) + c_4\sin(\delta x)]$$

- Комплексни кратни корени — за всяка нова кратност се умножават двойките корени по x — нека k е трикратен комплексен корен (комплексните корени *винаги* са по двойки)

$$\begin{aligned} k_{1,2} = \alpha \pm i\beta &: \ y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ y_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x) \\ k_{3,4} = \alpha \pm i\beta &: \ y_3 = xe^{\alpha x}\cos(\beta x),\ y_4 = xe^{\alpha x}\sin(\beta x) \\ k_{5,6} = \alpha \pm i\beta &: \ y_5 = x^2e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ y_6 = x^2e^{\alpha x}\sin(\beta x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(x) = e^{\alpha x}[c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x)] + xe^{\alpha x}[c_3\cos(\beta x) + c_4\sin(\beta x)] + \\ + x^2e^{\alpha x}[c_5\cos(\beta x) + c_6\sin(\beta x)] \end{aligned}$$

Хомогенното уравнение. (Решаваме задачата.)

$$y'' + 4y = 0$$

Характеристичното му уравнение е:

$$k^2 + 4 = 0$$

Корените му са $k_{1,2} = \pm 2i$, което още може да се запише така: $k_{1,2} = 0 \pm 2i$. Корените на диференциалното уравнение са:

$$y_1 = e^{0x}\cos(2x),\ y_2 = e^{0x}\sin(2x)$$

Тогава решението на *хомогенното* диференциално уравнение е:

$$y(x) = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x)$$

Сега трябва да добавим дясната част. Щом двете събираеми отдясно са толкова различни, ще трябва да ги сметнем на два етапа. Методите са: определяне на специална дясна част и метод на Лагранж (или още метод на вариране на константите). Как да изберем метод? Изчисляваме хомогенното уравнение.

- Метод на Лагранж: ако в решението на хомогенното уравнение има само $\sin / \cos$ и в дясната част има само $\sin / \cos$ ИЛИ в решението има само експонента и в дясната част има само експонента. Аргументът на функциите трябва да съвпада: вляво $\cos(2x)$ и вдясно трябва да е $\cos(2x)$, вляво e^{-3x} и вдясно трябва да е e^{-3x} (ако не съвпадат — специална дясна част).

- Специална дясна част: във всички други случаи. (Трябва да отбележим, че това е универсален метод. Само в изключително редки случаи този метод не може да се приложи.)

Взимаме едната дясна част.

$$y'' + 4y = \frac{6}{\cos(2x)}$$

Решението на хомогенното уравнение е:

$$y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$$

В решението и в дясната част имаме косинусова функция, можем да приложим метода на Лагранж. Който е следният (дясната част се отбелязва с $\eta(x)$).

Метод на Лагранж.

$$\eta_1(x) = C_1(x) \cos(2x) + C_2(x) \sin(2x)$$

Просто се преписва решението на хомогенното уравнение и константите се записват като функции на x. Тези функции трябва да се намерят. Записва се система от уравнения, броя уравнения е максималния ред на производните от диференциалното уравнение. В случая е две.

$$\left| \begin{array}{l} C_1'(x) \cos(2x) + C_2'(x) \sin(2x) = 0 \\ C_1'(x)[\cos(2x)]' + C_2'(x)[\sin(2x)]' = \dfrac{6}{\cos(2x)} \end{array} \right.$$

Функциите $C_1(x)$, $C_2(x)$ (може и да са повече) се записват като производни във всяко уравнение (не се променят). Но другите функции се диференцират с всяко слизане надолу по системата. Имаме две уравнения: в първото са същите, във второто са първи производни (ако бяха три: в третото са втори производни и т.н.).

Вдясно стои нула, само на последното уравнение се преписва дясната част, разделена на коефициента пред най-високата производна от диференциалното уравнение, обикновено е единица.

Обикновено се дават диференциални уравнения с производна от втори ред, значи системата е с две уравнения.

$$\left| \begin{array}{l} C_1'(x) \cos(2x) + C_2'(x) \sin(2x) = 0 \\ -2C_1'(x) \sin(2x) + 2C_2'(x) \cos(2x) = \dfrac{6}{\cos(2x)} \end{array} \right.$$

От първото уравнение се изразява едната функция.

$$C_1'(x) = \frac{-C_2'(x) \sin(2x)}{\cos(2x)}$$

И се замества във второто.

$$-2\frac{-C_2'(x) \sin(2x)}{\cos(2x)} \sin(2x) + 2C_2'(x) \cos(2x) = \frac{6}{\cos(2x)}$$

$$C_2'(x)\frac{\sin^2(2x)}{\cos(2x)} + C_2'(x)\cos(2x) = \frac{3}{\cos(2x)}$$

Привеждаме под общ знаменател.

$$C_2'(x)\frac{\sin^2(2x)}{\cos(2x)} + C_2'(x)\frac{\cos^2(2x)}{\cos(2x)} = \frac{3}{\cos(2x)}$$

$$C_2'(x)[\sin^2(2x) + \cos^2(2x)] = 3$$

$$C_2'(x) = 3$$

Добре е сега да намерим и другата производна, после можем да объркаме функциите с производните.

$$C_2'(x) = 3 : \ C_1'(x) = \frac{-3\sin(2x)}{\cos(2x)}$$

Значи имаме: $C_1'(x) = -3\tan(2x)$, $C_2'(x) = 3$. Сега трябва да ги интегрираме.

$$C_1(x) = -3\int \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}dx = \frac{3}{2}\int \frac{d(\cos(2x))}{\cos(2x)} = \frac{3}{2}\ln|\cos(2x)|$$

$$C_2(x) = 3\int dx = 3x$$

Тогава за $\eta_1(x)$ получаваме:

$$\eta_1(x) = \frac{3}{2}\cos(2x)\ln|\cos(2x)| + 3x\sin(2x)$$

Сега другата дясна част.

$$y'' + 4y = (2x-3)e^{2x}$$

Решението на хомогенното уравнение е:

$$y(x) = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x)$$

В решението имаме косинусова функция, а в дясната част — експонента. Методът на Лагранж няма да проработи, ще трябва да определим специалната дясна част.

Специална дясна част. Има вида:

$$x^\mu e^{\alpha x}[P_m(x)\cos(\beta x) + Q_n(x)\sin(\beta x)]$$

Този вид е при комплексни корени $\alpha \pm i\beta$ на *дясната част*, не на характеристичното уравнение. Ако са реални, то $\alpha \pm i0 = \alpha$ и това добива вида:

$$x^\mu e^{\alpha x}P_m(x)$$

Това е така, защото:

$$x^\mu e^{\alpha x}[P_m(x)\cos(0x) + Q_n(x)\sin(0x)] = x^\mu e^{\alpha x}[P_m(x).1 + 0] = x^\mu e^{\alpha x}P_m(x)$$

Какво е x^μ — при $k = \alpha \pm i\beta$ за всяка нова кратност се умножава по x, ако е двукратен корен: x^2, трикратен: x^3, …Ако $k \neq \alpha \pm i\beta$, то $\mu = 0$: $x^0 = 1$. (С k се означават корените на характеристичното уравнение.)

Какво е $P_m(x)$ — това е неизвестен полином от степен m. Ако в уравнението имаме $2x - 3$ — това е полином от първа степен: $m = 1$. Тогава $P_2(x) = Ax + B$, A и B трябва да се намерят. Ако имаме $x^3 + 1$: $P_3(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. (Записват се всички степени.)

Същото важи и за $Q_n(x)$. Ако имаме два полинома

$$2x - 3, \; x^3 + 1,$$

и двата неизвестни полинома се записват с по-високата степен: трета.

$$P_3(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D, \; Q_3(x) = Ex^3 + Fx^2 + Gx + H$$

Когато определяме специална дясна част видът й трябва да е подобен на вида на дясната част в диференциалното уравнение!

Нека да се върнем към задачата.

$$y'' + 4y = (2x - 3)e^{2x}, \; k_{1,2} = 0 \pm 2i$$

Коренът $\alpha = 2$ е реален, използваме реалния вид на специалната дясна част (няма значение че корените на характ. ур. са комплексни); не са равни $\alpha \neq k$; няма кратност $\mu = 0$; полиномът е от първа степен $m = 1$.

$$x^0 e^{2x}(Ax + B)$$

Сега се диференцира специалната дясна част два пъти и се замества в диференциалното уравнение: $\eta'' \to y''$, $\eta' \to y'$, $\eta \to y$.

$$\begin{aligned}
\eta_2(x) &= Axe^{2x} + Be^{2x} \\
\eta_2'(x) &= 2Axe^{2x} + Ae^{2x} + 2Be^{2x} \\
\eta_2''(x) &= 4Axe^{2x} + 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Be^{2x}
\end{aligned}$$

Добре е да изнесем e^{2x} пред скоби.

$$\begin{aligned}
\eta_2(x) &= e^{2x}(Ax + B) \\
\eta_2'(x) &= e^{2x}(2Ax + A + 2B) \\
\eta_2''(x) &= e^{2x}(4Ax + 2A + 2A + 4B)
\end{aligned}$$

Заместваме в диференциалното уравнение.

$$e^{2x}(4Ax + 4A + 4B) + 4e^{2x}(Ax + B) = e^{2x}(2x - 3)$$

$$4Ax + 4A + 4B + 4Ax + 4B = 2x - 3$$

Сега се приравняват коефициентите пред степените на x.

$$8Ax + 4A + 8B = 2x - 3$$

$$\left| \begin{array}{l} 8A = 2 \\ 4A + 8B = -3 \end{array} \right.$$

$A = 1/4$, $B = -1/2$.

$$\eta_2(x) = e^{2x}\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\right)$$

Отговора се проверява чрез диференциране два пъти на $\eta_2(x)$ и заместване в диференциалното уравнение (може да се направи същото и за $\eta_1(x)$). (Всички задачи с диференциални уравнения са проверени така, отговорите са със сигурност верни.)

Събираме всичко:

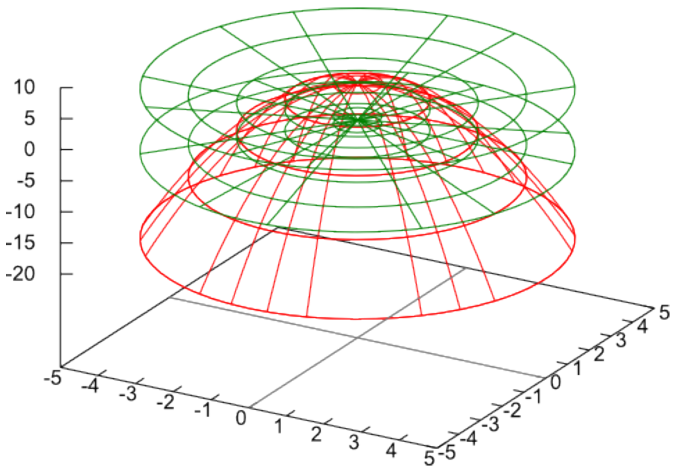
$$y(x) = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) + \frac{3}{2}\cos(2x)\ln|\cos(2x)| + 3x\sin(2x) + e^{2x}\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\right)$$

И това е решението. $\square$

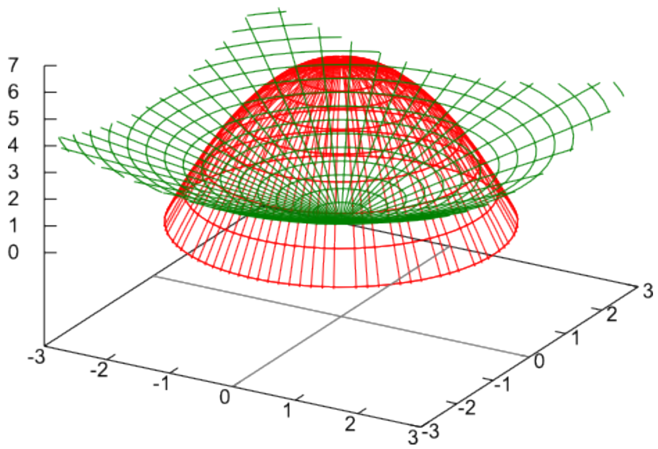
Задача 5. Да се пресметне обема на тялото T, заградено от следните две повърхнини.

$$T : z = 6 - x^2 - y^2,\ z^2 = x^2 + y^2\ (z \geq 0)$$

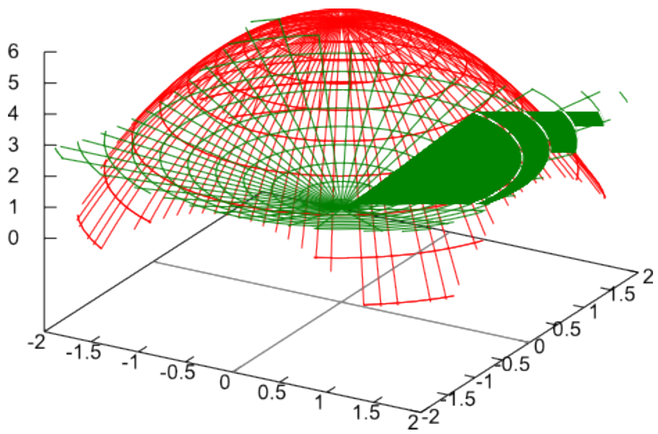
Решение. Определяме повърхнините: $z = 6 - x^2 - y^2$ е параболоид (червено на графиката), $z^2 = x^2 + y^2$ е конус (зелено на графиката). $z \geq 0$ показва, че сме над равнината Oxy. Тялото е заключено между конуса и параболоида. Ето графиката.



Нека да погледнем по-отблизо.



И още по-отблизо.



Търсим обема на областта между конуса (зелено, долната част) и параболоида (червено, горната част).

Ще използваме цилиндрични координати, това са полярни координати за равнината заедно с границите на z, тоест от коя до коя функция се движи z. (Сферични координати се използват само ако всички неизвестни са на втора степен, това са елипсоиди и хиперболоиди. За всички повърхнини могат да се използват цилиндрични координати.)

Както написахме по-горе, долната граница на областта е конуса, горната е параболоида. За параболоида: $z = 6 - x^2 - y^2$. За конуса: $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$, отрицателната част е за под равнината Oxy, но тъй като по условие имаме $z \geq 0$, то отрицателната част не ни трябва. (Така или иначе тялото е над равнината Oxy, и да искаме не можем да използваме отрицателната част).

Тогава за z имаме:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - x^2 - y^2$$

Сега трябва да положим x и y в полярни координати. Нулираме z. И за двете фигури получаваме окръжности. От уравнението на конуса: $x^2 = z^2 - y^2$. Заместваме в уравнението на параболоида:

$$z = 6 - (z^2 - y^2) - y^2$$

$$z^2 + z - 6 = 0,\ z_1 = -3,\ z_2 = 2$$

Това означава, че конуса и параболоида се пресичат в тези две окръжности: $x^2+y^2 = (-3)^2$ и $x^2 + y^2 = 2^2$. Трябва ни $z = 2$, другата окръжност е под равнината Oxy. Тогава смяната в полярни координати е:

$$D^* : \left| \begin{array}{l} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ r \in [0,2],\ \theta \in [0, 2\pi] \end{array} \right.$$

Окръжността $x^2+y^2 = 2^2$, проектирана върху Oxy включва координатното начало, тоест $\theta \in [0, 2\pi]$. Радиусът се движи от нула до две: $r \in [0, 2]$. Да не забравим да умножим по якобиана $\Delta = r$. Пълната смяна е:

$$G^* : \left| \begin{array}{l} D^* : \left| \begin{array}{l} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ r \in [0,2],\ \theta \in [0, 2\pi] \end{array} \right. \\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 6 - x^2 - y^2 \end{array} \right.$$

Обем на тяло се намира чрез троен интеграл с подинтегрална функция единица:

$$\iiint_G dxdydz = \iiint_{G^*} dxdydz$$

Първо заместваме z:

$$\iiint_{G^*} dxdydz = \iint_D \left[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{6-x^2-y^2} dz \right] dxdy = \iint_D \left[6 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2+y^2} \right] dxdy$$

Сега вече заместваме x и y с r и θ и умножаваме по r:

$$\begin{aligned} &\iint_D \left[6 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2+y^2} \right] dxdy = \\ &\quad = \iint_{D^*} \left[6 - (r\cos(\theta))^2 - (r\sin(\theta))^2 - \sqrt{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2} \right] rdrd\theta = \\ &\quad = \iint_{D^*} \left[6 - r^2 - \sqrt{r^2} \right] rdrd\theta = \iint_{D^*} \left[6 - r^2 - r \right] rdrd\theta \end{aligned}$$

При двойни и тройни интеграли много се използва формулата $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$. Заместваме с границите, които са независими (тоест са константи).

$$\begin{aligned} &\iint_{D^*} [6r - r^2 - r^3] drd\theta = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 (6r - r^2 - r^3) dr \right] d\theta = \\ &\quad = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (6r - r^2 - r^3) dr = \theta|_0^{2\pi} \left(3r^2|_0^2 - \frac{r^3}{3}\bigg|_0^2 - \frac{r^4}{4}\bigg|_0^2 \right) = \\ &\quad = 2\pi \left(3.4 - \frac{8}{3} - \frac{16}{4} \right) = \frac{32\pi}{3} \end{aligned}$$

Обемът е $32\pi/3$. И това е решението. □

Задача 6. Като се използва формулата на Грийн, да се пресметне криволинейния интеграл от втори род

$$\int_C xdy - ydx$$

по кривата линия C с уравнение

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

описана еднократно в положителна посока.

Решение. Криволинейни интеграли от втори род. Подинтегралната функция $\overrightarrow{F}$ е векторна функция (при първи род е скаларна функция):

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\overrightarrow{i} + Q(x, y, z)\,\overrightarrow{j} + R(x, y, z)\,\overrightarrow{k}$$

Интегралът се задава така:

$$\int_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

Областта на интегриране трябва да се параметризира и да добие следния вид:

$$C : \left| \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta] \\ z = z(t) \end{array} \right.$$

Тогава решението е:

$$\int_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz =$$
$$= \int_\alpha^\beta \left\{ P[x(t), y(t), z(t)]\frac{dx}{dt} + Q[x(t), y(t), z(t)]\frac{dy}{dt} + R[x(t), y(t), z(t)]\frac{dz}{dt} \right\} dt$$

Най-често формулата се използва само с x и y, без z. Има значение посоката на интегриране: положителна — обратно на часовниковата стрелка, отрицателна — по посока на часовниковата стрелка.

Формула на Грийн:

$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Тази формула свежда криволинейният интеграл от втори род до двоен интеграл, който лесно може да бъде пресметнат. Точно това се изисква в нашата задача.

Имаме:

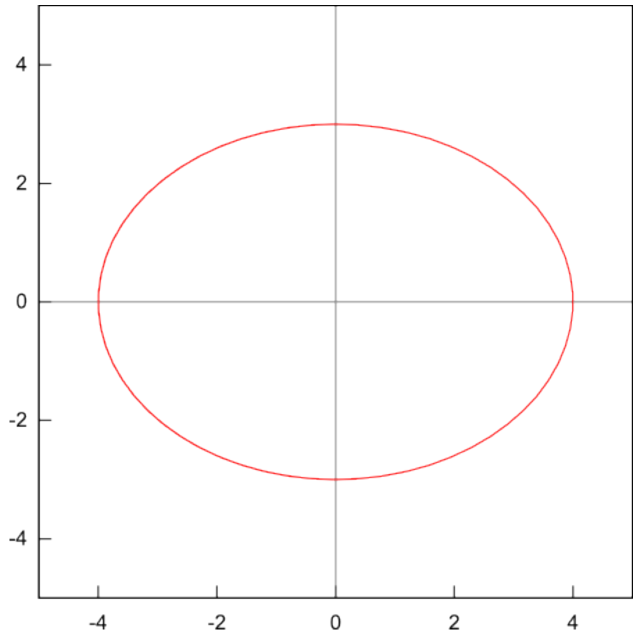
$$\int_C xdy - ydx = \int_C (-y)dx + xdy, \;\; P(x, y) = -y, \;\; Q(x, y) = x$$

Прилагаме формулата на Грийн:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D (1-(-1))dxdy = 2\iint_D dxdy$$

Което означава, че се търси два пъти лицето на елипсата:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$



Параметризираме с полярни координати:

$$\left| \begin{array}{l} x = 4r\cos(\theta) \\ y = 3r\sin(\theta) \end{array} \right.$$

Радиусът е $r \in [0, 1]$. Координатното начало се съдържа в елипсата, границите на ъгъла са: $\theta \in [0, 2\pi]$.

$$D^* : \left| \begin{array}{l} x = 4r\cos(\theta) \\ y = 3r\sin(\theta) \\ r \in [0,1], \;\; \theta \in [0, 2\pi] \end{array} \right.$$

Да не забравим и якобиана $\Delta = 4.3.r = 12r$ (Δ е равно на r само при правилни кръгови области).

$$2\iint_D dxdy = 2\iint_{D^*} 12r dr d\theta = 24\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr =$$

$$= 24\theta|_0^{2\pi} \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^1 = 24.2\pi.\frac{1}{2} = 24\pi$$

Лицето на елипсата по геометричен път: $\pi.a.b.r = \pi.4.3.1 = 12\pi$. Ние търсим два пъти лицето, отоворът ни е верен. И той е 24π. $\square$

2 Втора тема

Задача 1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2}$$

$R =?$ и да се изследва за сходимост при $x = R$ и $x = -R$.

Задача 2.

$$z = f(x, y) = x^3 + y^3 - 12xy + 3$$

Задача 3.

$$y' \sin(x) = (y^2 + 1) \arctan(y), \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Задача 4.

$$y''' - y'' = 4x + 2\sin(4x)$$

Задача 5.

$$\left| \begin{array}{l} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{array} \right.$$

Задача 6.

$$\int_{(C)} (2z - 3x^2 - 3y^2) dl$$

$$(C) : \left| \begin{array}{l} x = 3\cos(2t) \\ y = 3\sin(2t), \quad t \in [\pi, 2\pi] \\ z = 4t \end{array} \right.$$

Всяка задача е по 10 точки.

Задача 1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2}$$

$R =?$ и да се изследва за сходимост при $x = R$ и $x = -R$.

Решение. Това е степенен ред.

$$a_n = \frac{1}{n+2}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)+2}{n+2} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+3/n)}{n(1+2/n)} = 1$$

Радиусът на сходимост $R = 1$. Сега да проверим за $x = 1$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^{n+2}}{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2}$$

Това е хармоничният ред. Той е винаги разходящ.

Сега за $x = -1$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{n+2}$$

Това е алтернативен ред. Прилагаме критерия на Лайбниц.

$$\left| \frac{(-1)^{n+3}}{n+3} \right|, \ \left| \frac{(-1)^{n+2}}{n+2} \right| \Longrightarrow \frac{1}{n+3} < \frac{1}{n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+2}}{n+2} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = \left[\frac{1}{\infty} \right] = 0$$

Следователно редът е сходящ при $x = -1$. Проверяваме само за сходимост, не ни интересува условна/абсолютна сходимост (само ако е казано да изследваме ще го правим).

Отговор: Радиус на сходимост: $R = 1$, $x = 1$: редът е разходящ, $x = -1$: сходящ. Записва се така: област (интервал) на сходимост: $[-1, 1)$. □

Задача 2.

$$z = f(x, y) = x^3 + y^3 - 12xy + 3$$

Решение. Трябва да се определят екстремумите и видът им. Намираме първите частни производни.

$$f'_x = 3x^2 + 0 - 12y + 0 = 3x^2 - 12y$$
$$f'_y = 0 + 3y^2 - 12x + 0 = 3y^2 - 12x$$

Приравняваме ги на нула и получаваме следната система:

$$\left| \begin{array}{l} 3x^2 - 12y = 0 \\ 3y^2 - 12x = 0 \end{array} \right.$$

От второто уравнение изразяваме x и го заместваме в първото.

$$x = \frac{3y^2}{12} \Longrightarrow 3\left(\frac{3y^2}{12}\right)^2 - 12y = 0$$

Привеждаме под общ знаменател и намираме корените: $y = 0$ и $y = 4$. Заместваме в някое от уравненията и намираме предполагаемите екстремални точки — $M_0(0,0)$ и $M_1(4,4)$.

Сега изчисляваме вторите частни производни.

$$f''_{xx} = 6x,\ f''_{yy} = 6y,\ f''_{xy} = -12,\ f''_{yx} = -12$$

Записваме ги като детерминанта и я изчисляваме в съответната предполагаема екстремална точка. Започваме с $M_0(0,0)$.

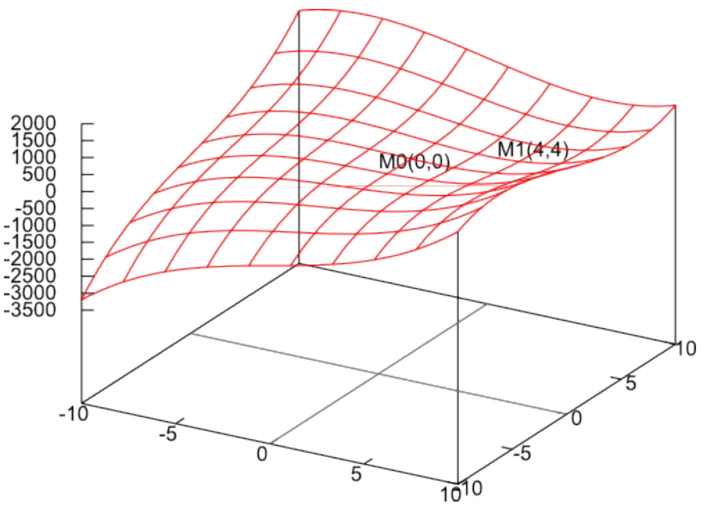
$$\Delta_1 = 6x = 6.0 = 0$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6x & -12 \\ -12 & 6y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 12^2 = -144 < 0$$

Детерминантата е отрицателна — точката $M_0(0,0)$ е седловидна.

Сега за $M_1(4,4)$.

$$\Delta_1 = 6.4 = 24 > 0$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6.4 & -12 \\ -12 & 6.4 \end{vmatrix} = 24^2 - 12^2 = 3.12^2 = 432 > 0$$

Детерминантата Δ_2 е положителна — имаме екстремум и той е минимум (защото $\Delta_1 > 0$). (Това е локален минимум, не глобален.)



Отговор: Локален минимум в $M_1(4,4)$, седловидна точка в $M_0(0,0)$. □

Задача 3.

$$y' \sin(x) = (y^2+1)\arctan(y),\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Решение. Това е диференциално уравнение с разделящи се променливи.

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Трябва от едната страна да остане само x, от другата само y.

$$\frac{dy}{dx}\sin(x) = (y^2+1)\arctan(y)$$

Делим и двете страни на $\sin(x)$, $x \neq k\pi$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y^2+1)\arctan(y)}{\sin(x)}$$

Делим и двете страни на $(y^2+1)\arctan(y)$, $y \neq k\pi/2$.

$$\frac{dy}{(y^2+1)\arctan(y)dx} = \frac{1}{\sin(x)}$$

Умножаваме и двете страни по dx.

$$\frac{dy}{(y^2+1)\arctan(y)} = \frac{dx}{\sin(x)}$$

Вече е с разделени променливи, интегрираме и двете страни (да не забравим да добавим константа, тъй като това са неопределени интеграли).

$$\int \frac{dy}{(y^2+1)\arctan(y)} = \int \frac{dx}{\sin(x)} + C$$

Производната на $\arctan(y)$ е $1/(1+y^2)$.

$$\int \frac{d(\arctan(y))}{\arctan(y)} = \int \frac{dx}{\sin(x)} + C$$

Интегралът вляво е логаритъм от аркус тангенс, а вдясно? Прилагаме универсална субституция:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t,\ \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

Трябва да намерим и dx.

$$x = 2\arctan(t),\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Заместваме в интеграла:

$$\int \frac{dx}{\sin(x)} = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$$

Решението е:

$$\ln|\arctan(y)| = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

Но ние имаме начални условия $y(\pi/2) = 1$, заместваме y с 1 и x с $\pi/2$:

$$\ln|\arctan(1)| = \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

$$\ln\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ln 1 + C \implies \ln\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 + C \implies C = \ln\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Тогава решението става:

$$\ln|\arctan(y)| = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \ln\left(\frac{\pi}{4}\right) \implies \ln|\arctan(y)| = \ln\left|\frac{\pi}{4}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$$

$$\arctan(y) = \frac{\pi}{4}\tan\left(\frac{x}{2}\right) \implies y = \tan\left(\frac{\pi}{4}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

Крайният отговор е:

$$y = \tan\left(\frac{\pi}{4}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

□

Задача 4.

$$y''' - y'' = 4x + 2\sin(4x)$$

Решение. Нека имаме следното линейно диференциално уравнение

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

където $y = y(x)$, $P(x)$ и $Q(x)$ са функции на x. Тогава неговото решение се намира чрез формулата:

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left(C + \int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx\right)$$

Може да се запише и така (да, това е експонента от интеграл):

$$y(x) = \exp\left(-\int P(x)dx\right)\left[C + \int \exp\left(\int P(x)dx\right)Q(x)dx\right]$$

Тази формула може да се приложи само ако имаме y, y' или y'', y''' или y''', y^{IV}, etc. Трябва производните да са с разлика само една, иначе се прилагат други формули. За да приложим формулата трябва да положим най-ниската производна: $y'' = u(x)$. Тогава: $y''' = (y'')' = (u(x))' = u'$. Сега вече уравнението изглежда така:

$$u' - u = 4x + 2\sin(4x)$$

Което ни устройва, $P(x) = -1$, $Q(x) = 4x + 2\sin(4x)$. Тогава заместваме:

$$
\begin{aligned}
u(x) &= e^{-\int(-1)dx}\left(C + \int e^{\int(-1)dx}[4x + 2\sin(4x)]dx\right) \\
u(x) &= e^{x}\left(C + \int e^{-x}[4x + 2\sin(4x)]dx\right) \\
u(x) &= e^{x}\left(C + 4\int xe^{-x}dx + 2\int e^{-x}\sin(4x)dx\right)
\end{aligned}
$$

Ще сметнем двата интеграла поотделно. За първият вкарваме експонентата под диференциала и интегрираме по части.

$$
\begin{aligned}
I_1 = \int xe^{-x}dx = -\int xd(e^{-x}) = -\left(xe^{-x} - \int e^{-x}dx\right) = \\
= -\left(xe^{-x} + \int d(e^{-x})\right) = -(xe^{-x} + e^{-x}) = -e^{-x}(x+1)
\end{aligned}
$$

Вторият интеграл се решава чрез два пъти интегриране по части докато се стигне до началния интеграл (може да се вкара експонентата, може и синуса).

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int e^{-x}\sin(4x)dx = -\int \sin(4x)d(e^{-x}) = \\
&= -\left(e^{-x}\sin(4x) - \int e^{-x}d(\sin(4x))\right) = \\
&= -\left(e^{-x}\sin(4x) - 4\int e^{-x}\cos(4x)dx\right) = \\
&= -\left(e^{-x}\sin(4x) + 4\int \cos(4x)d(e^{-x})\right) = \\
&= -\left(e^{-x}\sin(4x) + 4\left(e^{-x}\cos(4x) - \int e^{-x}d\cos(4x)\right)\right) = \\
&= -\left(e^{-x}\sin(4x) + 4e^{-x}\cos(4x) + 16\int e^{-x}\sin(4x)dx\right) \\
I_2 &= -e^{-x}\sin(4x) - 4e^{-x}\cos(4x) - 16I_2 \\
17I_2 &= -e^{-x}\sin(4x) - 4e^{-x}\cos(4x) \\
I_2 &= -\frac{e^{-x}}{17}(\sin(4x) + 4\cos(4x))
\end{aligned}
$$

Заместваме и намираме колко е $u(x)$.

$$
\begin{aligned}
u(x) &= e^x\left(C + 4I_1 + 2I_2\right)\\
u(x) &= e^x\left(C + 4[-e^{-x}(x+1)] + 2\left[-\frac{e^{-x}}{17}(\sin(4x) + 4\cos(4x))\right]\right)\\
u(x) &= e^x\left(C - 4e^{-x}(x+1) - \frac{2e^{-x}}{17}(\sin(4x) + 4\cos(4x))\right)\\
u(x) &= Ce^x - 4x - 4 - \frac{2}{17}\sin(4x) - \frac{8}{17}\cos(4x)
\end{aligned}
$$

Положихме $y'' = u(x)$. Трябва да изразим y, тоест трябва да интегрираме два пъти. Нека започнем постепенно. Първо малко обяснения.

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}y' = \frac{dy'}{dx}$$

Тогава:

$$\frac{dy'}{dx} = Ce^x - 4x - 4 - \frac{2}{17}\sin(4x) - \frac{8}{17}\cos(4x)$$

Което е уравнение с разделящи се променливи спрямо y' и x (виж предишната задача). Умножаваме двете страни по dx.

$$dy' = \left[Ce^x - 4x - 4 - \frac{2}{17}\sin(4x) - \frac{8}{17}\cos(4x)\right]dx$$

Интегрираме и двете страни, като не забравяме да добавим константа.

$$\int dy' = \int\left[Ce^x - 4x - 4 - \frac{2}{17}\sin(4x) - \frac{8}{17}\cos(4x)\right]dx + C_1$$

Интегралът вляво е равен на y' (знакът за интеграл и знакът за диференциал се унищожават взаимно щом между тях има единица).

$$
\begin{aligned}
y' &= C\int e^x dx - 4\int x dx - 4\int dx - \frac{2}{17}\int \sin(4x)dx - \frac{8}{17}\int \cos(4x)dx + C_1\\
y' &= Ce^x - 4\frac{x^2}{2} - 4x + \frac{2}{17}\frac{1}{4}\cos(4x) - \frac{8}{17}\frac{1}{4}\sin(4x) + C_1\\
y' &= Ce^x - 2x^2 - 4x + \frac{1}{34}\cos(4x) - \frac{2}{17}\sin(4x) + C_1
\end{aligned}
$$

Трябва да интегрираме още веднъж. Ето защо:

$$y' = \frac{d^1y}{dx^1} = \frac{d}{dx}y = \frac{dy}{dx}$$

Отново имаме уравнение с разделящи се променливи.

$$\frac{dy}{dx} = Ce^x - 2x^2 - 4x + \frac{1}{34}\cos(4x) - \frac{2}{17}\sin(4x) + C_1$$

Умножаваме и двете страни по dx

$$dy = \left[Ce^x - 2x^2 - 4x + \frac{1}{34}\cos(4x) - \frac{2}{17}\sin(4x) + C_1\right] dx$$

Интегрираме и двете страни, като не забравяме да добавим още една константа.

$$\int dy = \int \left[Ce^x - 2x^2 - 4x + \frac{1}{34}\cos(4x) - \frac{2}{17}\sin(4x) + C_1\right] dx + C_2$$

$$y = C\int e^x dx - 2\int x^2 dx - 4\int x dx + \frac{1}{34}\int \cos(4x)dx - \frac{2}{17}\int \sin(4x)dx + C_1\int dx + C_2$$

$$y = Ce^x - 2\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + \frac{1}{34}\frac{1}{4}\sin(4x) + \frac{2}{17}\frac{1}{4}\cos(4x) + C_1x + C_2$$

$$y = Ce^x - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{136}\sin(4x) + \frac{1}{34}\cos(4x) + C_1x + C_2$$

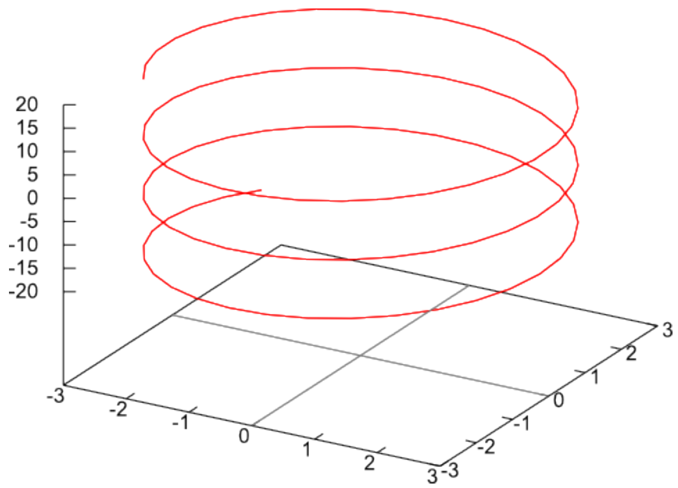
Това вече е решението на задачата. □

Задача 6.

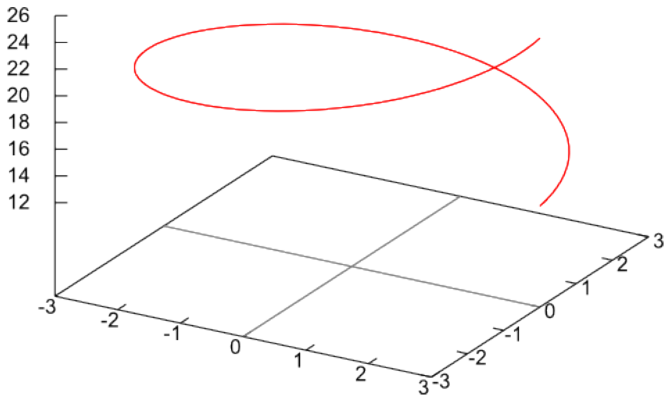
$$\int_{(C)} (2z - 3x^2 - 3y^2)dl$$

$$(C): \left|\begin{array}{l} x = 3\cos(2t) \\ y = 3\sin(2t), \quad t \in [\pi, 2\pi] \\ z = 4t \end{array}\right.$$

Решение. Графиката на кривата линия, $t \in [-5, 5]$.



Графиката на кривата линия, $t \in [\pi, 2\pi]$.



Криволинейни интеграли от първи род. Подинтегралната функция $f(x, y, z)$ е скаларна функция. Нека имаме пространствена крива линия C, зададена параметрично по следния начин:

$$C : \left| \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta] \\ z = z(t) \end{array} \right.$$

Тогава интегралът се решава чрез формулата:

$$\int_C f(x, y, z) dl = \int_\alpha^\beta f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

Ако линията не е зададена параметрично, то тя трябва да се параметризира. Ако липсва z, имаме равнинна крива линия.

Намираме производните спрямо t:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[3\cos(2t)] = -6\sin(2t), \ \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}[3\sin(2t)] = 6\cos(2t), \ \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}[4t] = 4$$

Заместваме във формулата:

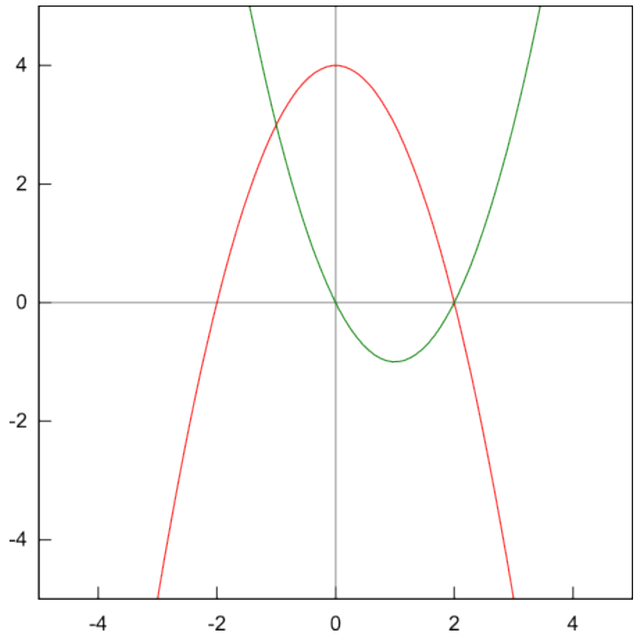
$$\begin{aligned}
&\int_C (2z - 3x^2 - 3y^2) dl = \\
&= \int_\pi^{2\pi} [2.4t - 3(3\cos(2t))^2 - 3(3\sin(2t))^2] \sqrt{(-6\sin(2t))^2 + (6\cos(2t))^2 + 4^2}\, dt = \\
&= \int_\pi^{2\pi} [8t - 27\cos^2(2t) - 27\sin^2(2t)] \sqrt{36\sin^2(2t) + 36\cos^2(2t) + 16}\, dt = \\
&= \int_\pi^{2\pi} (8t - 27)\sqrt{36 + 16}\, dt = \sqrt{52} \int_\pi^{2\pi} (8t - 27) dt = 2\sqrt{13}(4t^2|_\pi^{2\pi} - 27t|_\pi^{2\pi}) = \\
&= 2\sqrt{13}[4(4\pi^2 - \pi^2) - 27(2\pi - \pi)] = 2\sqrt{13}(12\pi^2 - 27\pi)
\end{aligned}$$

И това е решението. Това число е дължината на кривата линия от π до 2π (втората графика). $\square$

Задача 5.

$$\left|\begin{array}{l} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{array}\right.$$

Решение. Графиката на функциите, $y = 4 - x^2$ в червено, $y = x^2 - 2x$ в зелено.



Вляво имаме само y, приравняваме десните страни.

$$x^2 - 2x = 4 - x^2$$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Корените са 2 и -1. При $x = 2 \to y = 0$, $x = -1 \to y = 3$.

Отговор: $x = 2, y = 0;\ x = -1, y = 3$. $\square$

3 Трета тема

Задача 1. Да се намерят екстремумите на функцията $z = x^3 + y^3 - 15xy$.

Задача 2. Като се използва смяна с полярни координати, да се пресметне стойността на двойния интеграл

$$\iint_D \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dxdy,$$

където D е кръгът $x^2 + y^2 \leq \pi^2$.

Задача 3. Да се разложи в ред на Фурие периодичната функция.

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } -\pi < x < 0, \\ 0 & \text{при } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Задача 4. Да се общото решение на уравнението.

$$y'' + y' - 2y = \cos(x) - 3\sin(x)$$

Задача 5. Да се намери радиусът на сходимост и областта на сходимост на реда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 + 1}$$

Задача 6. Да се пресметне криволинейният интеграл

$$\int_K ydx + 2xdy,$$

където K е пробяган ромб, в посока обратна на часовниковата стрелка, чиито страни лежат на правите с уравнения

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \pm 1, \ \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \pm 1.$$

Всяка задача е по 10 точки.

Задача 5. Да се намери радиусът на сходимост и областта на сходимост на реда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$$

Решение. Това е степенен ред.

$$a_n = \frac{1}{n^2+1}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2+1}{n^2+1} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+2}{n^2+1} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1+2/n+2/n^2)}{n^2(1+1/n^2)} = \frac{1+0+0}{1+0} = 1$$

Радиусът на сходимост $R = 1$. Сега проверяваме за $x = 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

Това е ред с неотрицателни членове. Прилагаме интегралния критерий на Коши (другите ще дадат единица).

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{N\to\infty} \int_1^{N} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{N\to\infty} \arctan(x)\Big|_1^N =$$
$$= \lim_{N\to\infty} (\arctan(N) - \arctan(1)) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Интегралът е сходящ, тоест и редът е сходящ.

Сега за $x = -1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$$

Това е алтернативен ред. Прилагаме критерия на Лайбниц.

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2+1} \right|, \ \left| \frac{(-1)^n}{n^2+1} \right| \Longrightarrow \frac{1}{n^2+2n+2} < \frac{1}{n^2+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2+1} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = \left[\frac{1}{\infty} \right] = 0$$

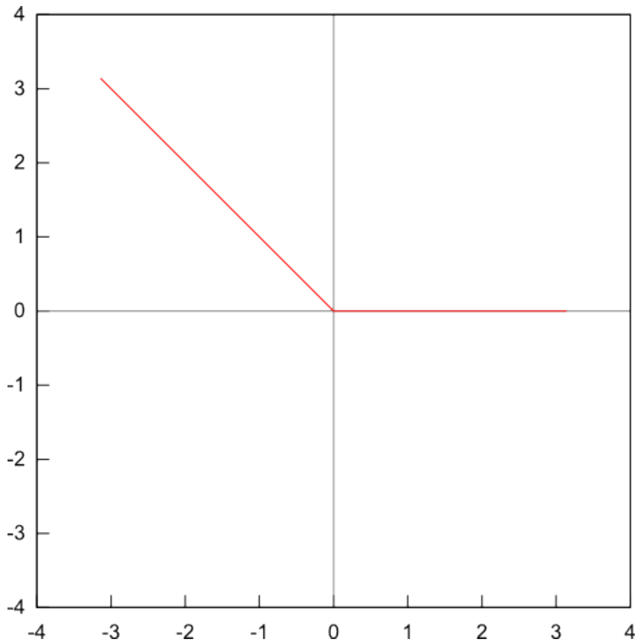
Редът е сходящ.

Отговор: Интервал на сходимост: $[-1, 1]$. □

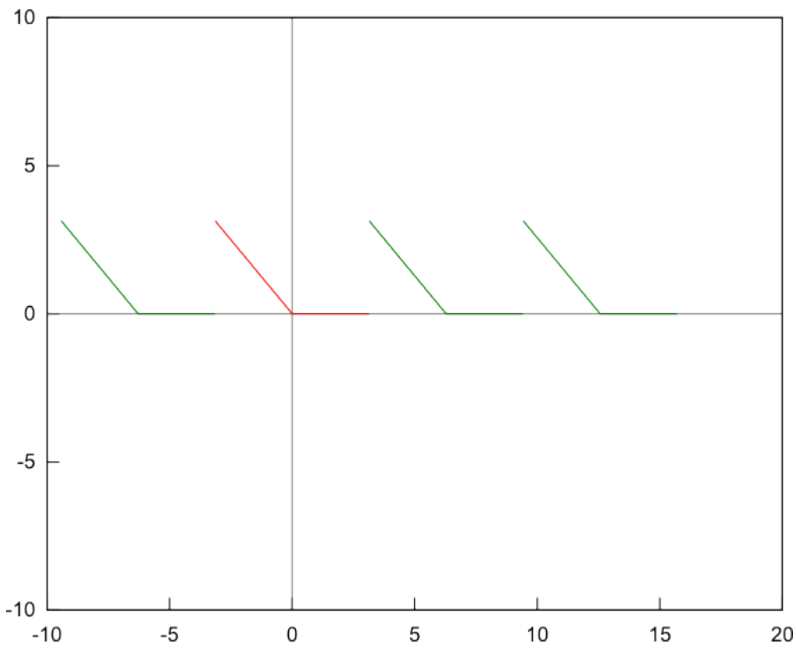
Задача 3. Да се разложи в ред на Фурие периодичната функция.

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } -\pi < x < 0, \\ 0 & \text{при } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Решение. Графиката на функцията.



Периодично продължение: $f(x + 2\pi) = f(x)$.



Интеграл от нула е нула, така че няма да го записваме. Изчисляваме a_0.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -xdx = -\frac{1}{\pi}\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-\pi}^{0} = -\frac{1}{\pi}\left(0 - \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Сега a_n.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x\cos(nx)dx = -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{0} xd\sin(nx) = \\
&= -\frac{1}{n\pi}\left(x\sin(nx)|_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0}\sin(nx)dx\right) = \\
&= -\frac{1}{n\pi}\left(0\sin(0) - (-\pi)\sin(-n\pi) - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin(nx)d(nx)\right) = \\
&= -\frac{1}{n^2\pi}\cos(nx)|_{-\pi}^{0} = -\frac{1}{n^2\pi}(\cos(0) - \cos(-n\pi)) = \\
&= -\frac{1}{n^2\pi}(1 - (-1)^n) = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}
\end{aligned}$$

Да видим и b_n.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x\sin(nx)dx = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{0} xd\cos(nx) = \\
&= \frac{1}{n\pi}\left(x\cos(nx)|_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0}\cos(nx)dx\right) = \\
&= \frac{1}{n\pi}\left(0\cos(0) - (-\pi)\cos(-n\pi) - \frac{1}{n}\sin(nx)|_{-\pi}^{0}\right) = \\
&= \frac{1}{n\pi}\left(\pi(-1)^n - \frac{1}{n}(\sin(0) - \sin(-n\pi))\right) = \frac{(-1)^n}{n}
\end{aligned}$$

Записваме развитието на функцията в ред на Фурие:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\cos(nx) + \frac{(-1)^n}{n}\sin(nx)\right)$$

□

Задача 1. Да се намерят екстремумите на функцията $z = x^3 + y^3 - 15xy$.

Решение. Решението е аналогично на Тема 2, Задача 2. Трябва да се определят екстремумите и видът им. Намираме първите частни производни.

$$\begin{aligned}
f'_x &= 3x^2 + 0 - 15y = 3x^2 - 15y \\
f'_y &= 0 + 3y^2 - 15x = 3y^2 - 15x
\end{aligned}$$

Приравняваме ги на нула и намираме предполагаемите екстремални точки: $M_0(0,0)$ и $M_1(5,5)$.

Сега изчисляваме вторите частни производни.

$$f''_{xx} = 6x,\ f''_{yy} = 6y,\ f''_{xy} = -15,\ f''_{yx} = -15$$

Записваме ги като детерминанта и я изчисляваме в съответната предполагаема екстремална точка. Започваме с $M_0(0,0)$.

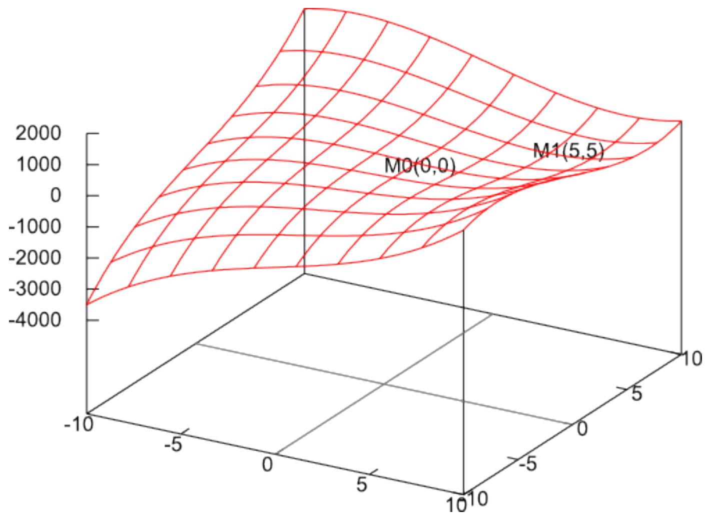
$$\Delta_1 = 6x = 6.0 = 0$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6x & -15 \\ -15 & 6y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -15 \\ -15 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 15^2 = -225 < 0$$

Детерминантата е отрицателна — точката $M_0(0,0)$ е седловидна.

Сега за $M_1(5,5)$.

$$\Delta_1 = 6.5 = 30 > 0$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6.5 & -15 \\ -15 & 6.5 \end{vmatrix} = 30^2 - 15^2 = 3.15^2 = 675 > 0$$

Детерминантата Δ_2 е положителна — имаме екстремум и той е минимум (защото $\Delta_1 > 0$). (Това е локален минимум, не глобален.)



Отговор: Локален минимум в $M_1(5,5)$, седловидна точка в $M_0(0,0)$. □

Задача 4. Да се общото решение на уравнението.

$$y'' + y' - 2y = \cos(x) - 3\sin(x)$$

Решение. Хомогенното уравнение е:

$$y'' + y' - 2y = 0$$

Характеристичното уравнение е:

$$k^2 + k - 2 = 0$$

Неговите корени са $k_1 = 1$ и $k_2 = -2$. Решението на хомогенното диференциално уравнение е:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$$

Диференциалното уравнение е:

$$y'' + y' - 2y = e^{0x}[1\cos(x) + (-3)\sin(x)]$$

Решението на хомогенното уравнение съдържа експонента, а дясната част има $\sin / \cos$ функции — ще трябва да определим специална дясна част.

Дясната част на диференциалното уравнение е с комплексни корени $0 + i$, $\alpha = 0$, които не са равни на корените на характеристичното уравнение, тоест няма кратности: $\mu = 0$. И двата полинома са от нулева степен: 1 и -3, неизвестните полиноми ще са константи: A и B.

Общият вид на специалната дясна част с комплексни корени (виж стр. 19):

$$x^{\mu} e^{\alpha x}[P_m(x)\cos(\beta x) + Q_n(x)\sin(\beta x)]$$

Заместваме с нашите стойности:

$$x^0 e^{0x}[A\cos(1x) + B\sin(1x)]$$

Диференцираме специалната дясна част два пъти.

$$\begin{aligned} \eta(x) &= A\cos(x) + B\sin(x) \\ \eta'(x) &= -A\sin(x) + B\cos(x) \\ \eta''(x) &= -A\cos(x) - B\sin(x) \end{aligned}$$

Заместваме в диференциалното уравнение:

$$-A\cos(x) - B\sin(x) - A\sin(x) + B\cos(x) - 2[A\cos(x) + B\sin(x)] = \cos(x) - 3\sin(x)$$

Приравняваме коефициентите:

$$(B - 3A)\cos(x) + (-A - 3B)\sin(x) = 1\cos(x) + (-3)\sin(x)$$

$$\left| \begin{array}{l} B - 3A = 1 \\ -A - 3B = -3 \end{array} \right.$$

$A = 0$, $B = 1$.

$$\eta(x) = \sin(x)$$

Решението на диференциалното уравнение е:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \sin(x)$$

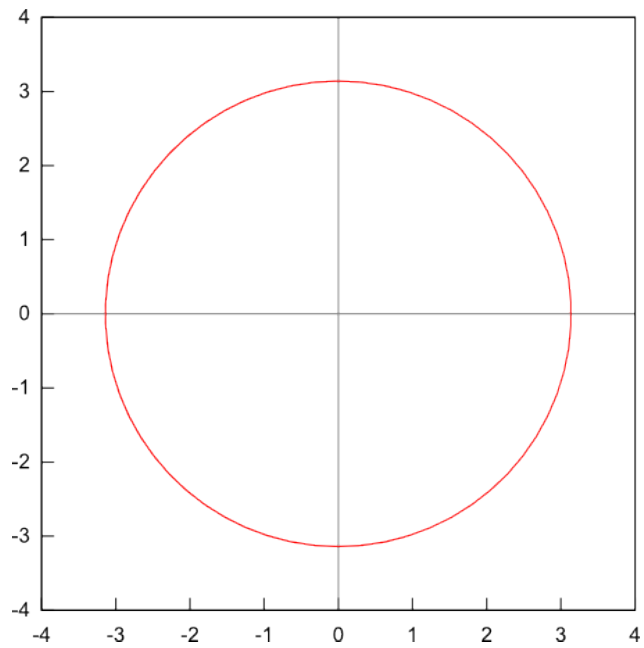
$\square$

Задача 2. Като се използва смяна с полярни координати, да се пресметне стойността на двойния интеграл

$$\iint_D \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dxdy,$$

където D е кръгът $x^2 + y^2 \leq \pi^2$.

Решение. Полярни координати. Имаме окръжност $x^2 + y^2 = \pi^2$.



Смяна в полярни координати се нарича полагането:

$$\left| \begin{array}{l} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{array} \right.$$

Където r е радиусът на окръжността, а θ е ъгълът на завъртане на радиуса от координатното начало. Ако координатното начало се съдържа в окръжността, то границите на ъгъла са $\theta \in [0, 2\pi]$ (както е във случая). Ако не се съдържа, границите зависят от позицията на окръжността в координатната система. (Примерно: окръжността $(x-1)^2+(y-1)^2 = 1$ е изцяло в първи квадрант, то тогава $\theta \in [0, \pi/2]$.) Заместваме в уравнението на окръжността и намираме границите на r.

$$(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2 = \pi^2,\ r^2 = \pi^2,\ r = \pm\pi$$

Радиусът не може да е отрицателен, така че $r \in [0, \pi]$. Ако означим окръжността с D, то смяната в полярни координати обикновено се означава с D^*.

$$D^* : \left| \begin{array}{l} r \in [0, \pi] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{array} \right.$$

Има нещо наречено якобиан, отбелязва се с Δ. Това е детерминанта от частните производни на x и y спрямо r и θ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} x'_r & y'_r \\ x'_\theta & y'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) = r$$

(Якобиана е модул от тази детерминанта, за да е винаги положителен.) Това означава, че когато правим смяната, трябва да умножим по r. Този якобиан не е нужно да се изчислява всеки път, за полярни координати е равен на радиуса $\Delta = r$. Тоест смяната е:

$$\iint_D \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dxdy = \iint_{D^*} \left(1 - \frac{r^2\sin^2(\theta)}{r^2\cos^2(\theta)}\right) rdrd\theta$$

Нека да опростим само подинтегралната функция:

$$1 - \frac{r^2\sin^2(\theta)}{r^2\cos^2(\theta)} = 1 - \frac{1-\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = 1 - \frac{1}{\cos^2(\theta)} + 1 = 2 - \frac{1}{\cos^2(\theta)}$$

Тогава интеграла изглежда така:

$$\iint_{D^*} \left(2 - \frac{1}{\cos^2(\theta)}\right) rdrd\theta = \iint_{D^*} \left(2r - \frac{r}{\cos^2(\theta)}\right) drd\theta$$

Най-важното нещо при двойни и тройни интеграли: дали границите на променливите са зависими едни от други. В случая не са. И двете променливи са с граници константи. Когато са с граници функции, трябва да се внимава много кой интеграл се смята първо. Сега няма значение.

$$\iint_{D^*} \left(2r - \frac{r}{\cos^2(\theta)}\right) drd\theta = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi} \left(2r - \frac{r}{\cos^2(\theta)}\right) dr\right] d\theta$$

Ще интегрираме събираемите поотделно. Всички събираеми трябва да минат и през двата интеграла.

$$\int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi} 2rdr\right] d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} 2rdr = \theta|_0^{2\pi} r^2|_0^{\pi} = 2\pi\pi^2 = 2\pi^3$$

Вторият интеграл е по подобен начин. Можем да разделим самите функции (спестява писане, нищо друго).

$$\int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi} \left(-\frac{r}{\cos^2(\theta)}\right) dr\right] d\theta = -\int_0^{\pi} rdr \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)} =$$
$$= -\frac{r^2}{2}\bigg|_0^{\pi} \tan(\theta)|_0^{2\pi} = -\frac{\pi^2}{2}(\tan(2\pi) - \tan(0)) = 0$$

Двата интеграла събрани дават $2\pi^3$. И това е отговора. $\square$

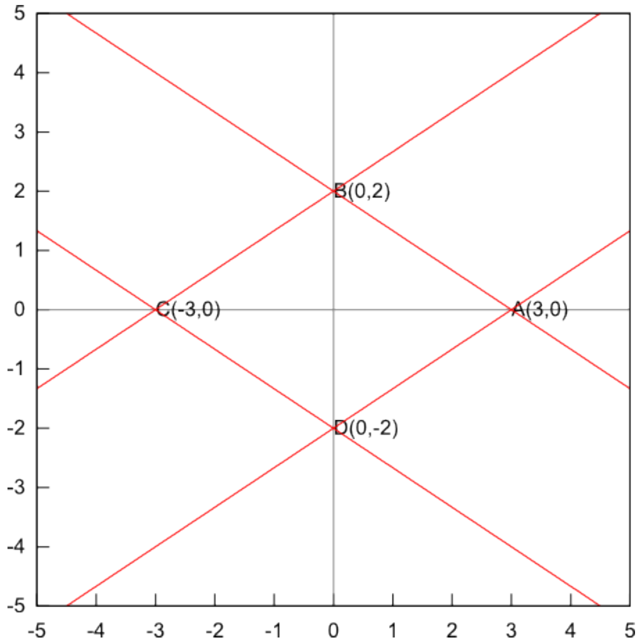
Задача 6. Да се пресметне криволинейният интеграл

$$\int_K ydx + 2xdy,$$

където K е пробяган ромб, в посока обратна на часовниковата стрелка, чиито страни лежат на правите с уравнения

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \pm 1,\ \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \pm 1.$$

Решение. Графиката на областта.



Това е криволинеен интеграл от втори род. Областта на интегриране не е гладка функция (в другите задачи е гладка функция), затова се пресмята от точка до точка. Границите на областта са линии от първа степен, можем да ги изразим като функции на x: $y = y(x)$ или като функции на y: $x = x(y)$.

При положителната посока x играе ролята на параметъра t, тоест интеграла се смята спрямо x (y и dy се заместват със съответните им изчислени функции).

При отрицателна посока y играе ролята на параметър, x и dx се заместват със съответните изчислени функции.

Забележка: Може да се изберат и обратно, при положителна — y, при отрицателна x. Важното е да не ги смесваме, веднъж щом ги определим, трябва да останат такива до края на задачата.

Изразяваме x и y от условието на задачата (това са страните на ромба):

$$\begin{aligned}
\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1:\ & y=2-\frac{2}{3}x \ \text{ или } \ x=3-\frac{3}{2}y\\
\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=-1:\ & y=2+\frac{2}{3}x \ \text{ или } \ x=-3+\frac{3}{2}y\\
\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=-1:\ & y=-2-\frac{2}{3}x \ \text{ или } \ x=-3-\frac{3}{2}y\\
\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1:\ & y=-2+\frac{2}{3}x \ \text{ или } \ x=3+\frac{3}{2}y
\end{aligned}$$

Положителна посока (обратно на часовниковата стрелка). Определяме границите на x, като $y=y(x)$ е функцията. Намираме dy като диференцираме функцията спрямо x.

$$\begin{aligned}
AB &: x\in[3,0],\ y=2-\frac{2}{3}x,\ dy=-\frac{2}{3}dx\\
BC &: x\in[0,-3],\ y=2+\frac{2}{3}x,\ dy=\frac{2}{3}dx\\
CD &: x\in[-3,0],\ y=-2-\frac{2}{3}x,\ dy=-\frac{2}{3}dx\\
DA &: x\in[0,3],\ y=-2+\frac{2}{3}x,\ dy=\frac{2}{3}dx
\end{aligned}$$

Интегралът се разделя на четири интеграла (положителна посока, обратно на часовниковата стрелка):

$$\int_K ydx+2xdy=\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CD}+\int_{DA}$$

Заместваме в интегралите:

$$\int_{AB} ydx + 2xdy = \int_{3}^{0} \left(2 - \frac{2}{3}x\right) dx + 2x\left(-\frac{2}{3}\right) dx = \int_{3}^{0} \left(2 - \frac{6}{3}x\right) dx =$$
$$= \int_{3}^{0} (2 - 2x)\, dx = 2x|_{3}^{0} - x^2|_{3}^{0} = 2(0-3) - (0-9) = -6 + 9 = 3$$
$$\int_{BC} ydx + 2xdy = \int_{0}^{-3} \left(2 + \frac{2}{3}x\right) dx + 2x\left(\frac{2}{3}\right) dx = \int_{0}^{-3} \left(2 + \frac{6}{3}x\right) dx =$$
$$= \int_{0}^{-3} (2 + 2x)\, dx = 2x|_{0}^{-3} - x^2|_{0}^{-3} = 2(-3-0) - (9-0) = -6 + 9 = 3$$
$$\int_{CD} ydx + 2xdy = \int_{-3}^{0} \left(-2 - \frac{2}{3}x\right) dx + 2x\left(-\frac{2}{3}\right) dx = \int_{-3}^{0} \left(-2 - \frac{6}{3}x\right) dx =$$
$$= \int_{-3}^{0} (-2 - 2x)\, dx = 2x|_{-3}^{0} - x^2|_{-3}^{0} = -2(0+3) - (0-9) = -6 + 9 = 3$$
$$\int_{DA} ydx + 2xdy = \int_{0}^{3} \left(-2 + \frac{2}{3}x\right) dx + 2x\left(\frac{2}{3}\right) dx = \int_{0}^{3} \left(-2 + \frac{6}{3}x\right) dx =$$
$$= \int_{0}^{3} (-2 + 2x)\, dx = -2x|_{0}^{3} + x^2|_{0}^{3} = -2(3-0) + (9-0) = -6 + 9 = 3$$

Интегралите събрани дават 12.

Отрицателна посока (по часовниковата стрелка). Сега определяме границите на y, като $x = x(y)$ е функцията. Намираме dx като диференцираме функцията спрямо y.

$$AD : x = 3 + \frac{3}{2}y,\ y \in [0, -2],\ dx = \frac{3}{2}dy$$
$$DC : x = -3 - \frac{3}{2}y,\ y \in [-2, 0],\ dx = -\frac{3}{2}dy$$
$$CB : x = -3 + \frac{3}{2}y,\ y \in [0, 2],\ dx = \frac{3}{2}dy$$
$$BA : x = 3 - \frac{3}{2}y,\ y \in [2, 0],\ dx = -\frac{3}{2}dy$$

Интегралът се разделя на четири интеграла (отрицателна посока, по часовниковата стрелка):

$$\int_{K} ydx + 2xdy = -\int_{-K} ydx + 2xdy = -\int_{AD} - \int_{DC} - \int_{CB} - \int_{BA}$$

Заместваме в интегралите:

$$\int_{AD} ydx + 2xdy = \int_0^{-2} y\left(\frac{3}{2}\right)dy + 2\left(3 + \frac{3}{2}y\right)dy = \int_0^{-2}\left(6 + \frac{9}{2}y\right)dy =$$

$$= 6y|_0^{-2} + \frac{9}{2}\frac{y^2}{2}|_0^{-2} = 6(-2-0) + \frac{9}{4}(4-0) = -12 + 9 = -3$$

$$\int_{DC} ydx + 2xdy = \int_{-2}^{0} y\left(-\frac{3}{2}\right)dy + 2\left(-3 - \frac{3}{2}y\right)dy = \int_{-2}^{0}\left(-6 - \frac{9}{2}y\right)dy =$$

$$= -6y|_{-2}^{0} - \frac{9}{2}\frac{y^2}{2}|_{-2}^{0} = -6(0+2) - \frac{9}{4}(0-4) = -12 + 9 = -3$$

$$\int_{CB} ydx + 2xdy = \int_0^{2} y\left(\frac{3}{2}\right)dy + 2\left(-3 + \frac{3}{2}y\right)dy = \int_0^{2}\left(-6 + \frac{9}{2}y\right)dy =$$

$$= -6y|_0^{2} + \frac{9}{2}\frac{y^2}{2}|_0^{2} = -6(2-0) + \frac{9}{4}(4-0) = -12 + 9 = -3$$

$$\int_{BA} ydx + 2xdy = \int_2^{0} y\left(-\frac{3}{2}\right)dy + 2\left(3 - \frac{3}{2}y\right)dy = \int_2^{0}\left(6 - \frac{9}{2}y\right)dy =$$

$$= 6y|_2^{0} - \frac{9}{2}\frac{y^2}{2}|_2^{0} = 6(0-2) - \frac{9}{4}(0-4) = -12 + 9 = -3$$

Тогава интегралите събрани дават:

$$\int_{-K} ydx + 2xdy = -12$$

Интегралът, пресметнат в положителна посока, е равен на интеграла, пресметнат в отрицателна посока, умножен със знак минус:

$$\int_{K} ydx + 2xdy = -\int_{-K} ydx + 2xdy = -(-12) = 12$$

Отговор на задачата: 12. □

4 Четвърта тема

Задача 1. Да се намери пълният диференциал на функцията $z = x^2y^3(6 - x - y)$ в точката $M(1, 2)$.

Задача 2. Да се развие в ред на Фурие функцията $f(x) = \pi^2 - x^2$ в интервала $[-\pi, \pi]$.

Задача 3. Да се намери радиусът на сходимост R на реда и да се изследва за сходимост при $x = R$ и $x = -R$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}$$

Задача 4. Да се намери общото решение на диференциалното уравнение.

$$y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x}$$

Задача 5. Да се пресметне интегралът

$$J = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy,$$

където D е частта от равнината, ограничена от правите $y = x$, $y = x + 3$, $y = 3$, $y = 9$.

Задача 6. Да се изчисли криволинейният интеграл

$$\int_C 2xydx + x^2dy,$$

където C е дъгата от параболата $y^2 = x$ от точката $A(0, 0)$ до точката $B(1, 1)$

Всяка задача е по 10 точки.

Задача 3. Да се намери радиусът на сходимост R на реда и да се изследва за сходимост при $x = R$ и $x = -R$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}$$

Решение. Това е алтернативен степенен ред.

$$a_n \ \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n(n+1)^2}{n^2(-1)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+2}{n^2} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1+2/n+2/n^2)}{n^2.1} = \frac{1+0+0}{1} = 1$$

Радиусът на сходимост $R = 1$. Сега да проверим за $x = 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

Това е алтернативен ред. Прилагаме критерия на Лайбниц.

$$\left|\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)^2}\right|, \ \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right| \Longrightarrow \frac{1}{n^2+2n+1} < \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$$

Редът е сходящ.

Сега за $x = -1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n^2}$$

Това е ред с неотрицателни членове. Прилагаме интегралния критерий на Коши (другите ще дадат единица).

$$\int_1^{\infty}\frac{-dx}{x^2} = \lim_{N\to\infty}\int_1^N -x^{-2}dx = \lim_{N\to\infty} x^{-1}|_1^N = \lim_{N\to\infty}\left.\frac{1}{x}\right|_1^N =$$
$$= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}-1\right) = 0 - 1 = -1$$

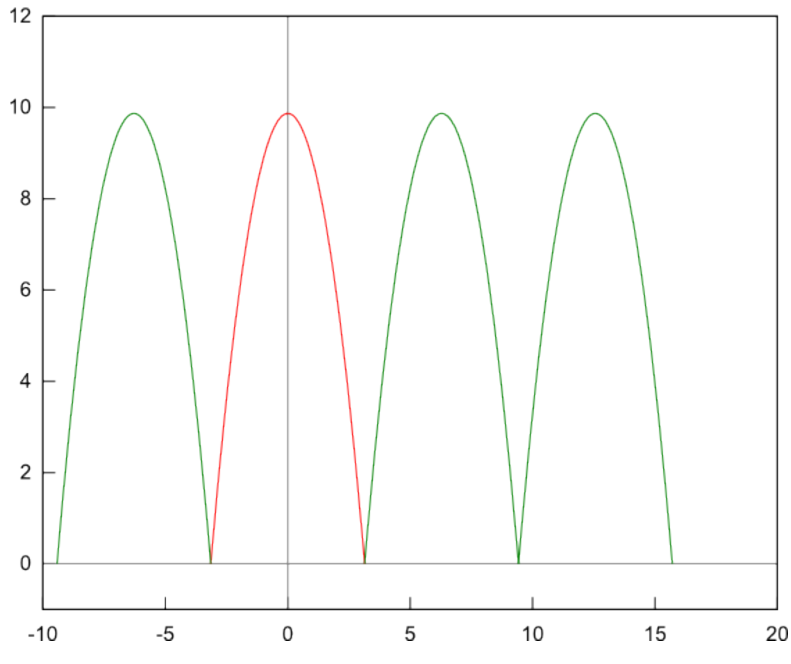
Интегралът е сходящ, тоест и редът е сходящ.

Отговор: Интервал на сходимост: $[-1, 1]$. □

Задача 2. Да се развие в ред на Фурие функцията $f(x) = \pi^2 - x^2$ в интервала $[-\pi, \pi]$.

Решение. Графиката на функцията.

Периодично продължение: $f(x + 2\pi) = f(x)$.



Трябва да отбележим, че това е четна функция ($f(-x) = f(x)$):

$$f(-x) = \pi^2 - (-x)^2 = \pi^2 - x^2 = f(x)$$

Развиване на четна функция в ред на Фурие още се нарича развитие по косинуси (както развитие на нечетна функция — развитие по синуси). Тоест $b_n = 0$. Изчисляваме само a_0 и a_n.

Следната формула за a_n важи само при развитие по косинуси (ако пробваме същото нещо за b_n ще получим грешен резултат):

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

Започваме с a_0.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)dx = \frac{2}{\pi}\left(\pi^2 x|_0^{\pi} - \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\pi}\right) = \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\pi^2\pi - 0 - \left(\frac{\pi^3}{3} - 0\right)\right) = 2\pi^2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi^2 \end{aligned}$$

Сега a_n.

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\pi^2\cos(nx)dx - \int_0^{\pi} x^2\cos(nx)dx\right)$$

Разделяме интегралите и ги смятаме поотделно.

$$\int_0^{\pi}\pi^2\cos(nx)dx = \frac{\pi^2}{n}\sin(nx)|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{n}(\sin(n\pi) - \sin(0)) = 0$$

Вторият се решава чрез два пъти интегриране по части (вкарва се косинуса).

$$\begin{aligned} -\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)dx &= -\frac{1}{n}\int_0^{\pi} x^2 d\sin(nx) = \\ &= -\frac{1}{n}\left(x^2\sin(nx)|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin(nx)d(x^2)\right) = \\ &= -\frac{1}{n}\left(\pi^2\sin(n\pi) - 0 + \frac{2}{n}\int_0^{\pi} xd\cos(nx)\right) = \\ &= -\frac{2}{n^2}\left(x\cos(nx)|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos(nx)dx\right) = \\ &= -\frac{2}{n^2}\left(\pi\cos(n\pi) - 0 - \frac{1}{n}\sin(nx)|_0^{\pi}\right) = \\ &= -\frac{2}{n^2}\left(\pi(-1)^n - \frac{1}{n}(\sin(n\pi) - \sin(0))\right) = \\ &= -\frac{2\pi}{n^2}(-1)^n = 2\pi\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \end{aligned}$$

Тогава за a_n се получава:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(0 + 2\pi\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right) = 4\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

Развитието на функцията в ред на Фурие:

$$f(x) = \frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos(n\pi)$$

□

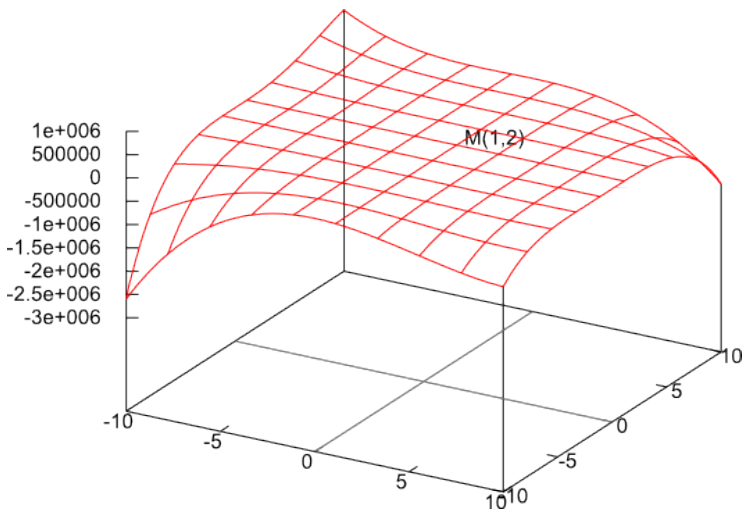
Задача 1. Да се намери пълният диференциал на функцията $z = x^2y^3(6 - x - y)$ в точката $M(1, 2)$.

Решение. Пълен диференциал: $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$.

$$\begin{aligned} z = f(x, y) &= 6x^2y^3 - x^3y^3 - x^2y^4 \\ f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} &= 12xy^3 - 3x^2y^3 - 2xy^4 \\ f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} &= 18x^2y^2 - 3x^3y^2 - 4x^2y^3 \end{aligned}$$

Изчисляват се частните производни в съответната точка.

$$\begin{aligned} f'_x(M) &= 12.8 - 3.8 - 2.16 = 8(12 - 3 - 4) = 8.5 = 40 \\ f'_y(M) &= 18.4 - 3.4 - 4.8 = 4(18 - 3 - 8) = 4.7 = 28 \\ df &= 40dx + 28dy \end{aligned}$$



□

Задача 4. Да се намери общото решение на диференциалното уравнение.

$$y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x}$$

Решение. Хомогенното уравнение е:

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

Характеристичното уравнение е:

$$k^2 + 4k + 4 = 0 \Longrightarrow (k+2)^2 = 0$$

Двукратен корен $k_{1,2} = -2$. Решението на хомогенното уравнение е:

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$$

Диференциалното уравнение е:

$$y'' + 4y' + 4y = x e^{-2x}$$

Решението на хомогенното уравнение и дясната част съдържат експонента — можем да приложим метода на Лагранж. (Можем да приложим и специална дясна част, но ще е по-дълго; пък и е добре да спазваме написаните правила на стр. 17. Специалната дясна част изглежда така: $x^2 e^{-2x}(Ax+B)$).

Метод на Лагранж. Дясната част е:

$$\eta(x) = C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)xe^{-2x}$$

Записваме системата.

$$\left| \begin{array}{l} C_1'(x)e^{-2x} + C_2'(x)xe^{-2x} = 0 \\ C_1'(x)[-2e^{-2x}] + C_2'(x)[-2xe^{-2x} + e^{-2x}] = xe^{-2x} \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} C_1'(x) = -C_2'(x)x \\ -2C_1'(x) - 2C_2'(x)x + C_2'(x) = x \end{array} \right.$$

От първото уравнение изразяваме $C_1'(x)$ и го заместваме във второто.

$$-2[-C_2'(x)x] - 2C_2'(x)x + C_2'(x) = x$$

$$C_2'(x) = x$$

Тогава имаме: $C_1'(x) = -x^2$, $C_2'(x) = x$. Сега ги интегрираме за да намерим самите функции.

$$C_1(x) = -\int x^2 dx = -\frac{x^3}{3},\ C_2(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2}$$

Заместваме в $\eta(x)$:

$$\eta(x) = -\frac{x^3}{3}e^{-2x} + \frac{x^2}{2}xe^{-2x} = \left(-\frac{2x^3}{6} + \frac{3x^3}{6}\right)e^{-2x} = \frac{x^3}{6}e^{-2x}$$

Решението на диференциалното уравнение е:

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + \frac{x^3}{6}e^{-2x}$$

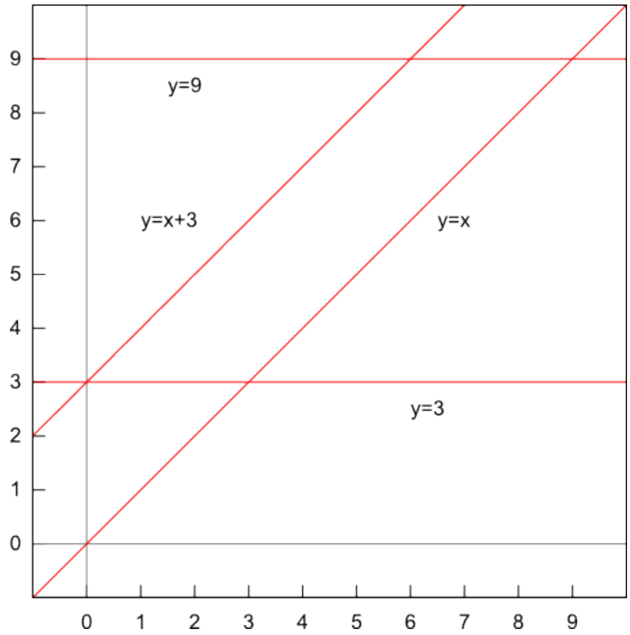
□

Задача 5. Да се пресметне интегралът

$$J = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy,$$

където D е частта от равнината, ограничена от правите $y = x$, $y = x + 3$, $y = 3$, $y = 9$.

Решение. Областта на интегриране.



Ако вземем y да е с граници константи (вървим надясно от оста Oy), границите на областта са:

$$\left| \begin{array}{l} y \in [3, 9] \\ x \in [y - 3, y] \end{array} \right.$$

Сега ако x е с граници константи (вървим нагоре от оста Ox), ще имаме три отделни области:

$$\left| \begin{array}{l} x \in [0, 3] \\ y \in [3, x + 3] \end{array} \right. , \quad \left| \begin{array}{l} x \in [3, 6] \\ y \in [x, x + 3] \end{array} \right. , \quad \left| \begin{array}{l} x \in [6, 9] \\ y \in [x, 9] \end{array} \right.$$

Да сметнем интеграла по първия начин.

$$D^* : \left| \begin{array}{l} y \in [3, 9] \\ x \in [y - 3, y] \end{array} \right.$$

Сега имаме зависимост между границите. Това означава, че първо трябва да сметнем интеграла по x и тогава интеграла по y. Тоест интеграла по x трябва да е вътрешен, а интеграла по y — външен. Ето така:

$$\int_3^9 \left[\int_{y-3}^{y} (x^2 + y^2)dx \right] dy$$

Подинтегралната функция трябва първо да се интегрира по x — тоест y се явява константа:

$$\int_3^9 \left[\int_{y-3}^{y} (x^2+y^2)dx\right] dy = \int_3^9 \left[\left.\frac{x^3}{3}\right|_{y-3}^{y} + y^2x|_{y-3}^{y}\right] dy$$

Сега като заместим с границите не трябва да има x, само y:

$$\int_3^9 \left[\frac{1}{3}[y^3-(y-3)^3] + y^2[y-(y-3)]\right] dy$$

Вече имаме интеграл с една променлива, изчисляваме го.

$$\int_3^9 \left[\frac{1}{3}[y^3-(y-3)^3] + y^2[y-(y-3)]\right] dy = \int_3^9 \frac{1}{3}[y^3-(y-3)^3] + 3y^2dy =$$
$$= \int_3^9 \frac{1}{3}[y^3-(y^3-3y^23+3y3^2-3^3)] + 3y^2dy =$$
$$= \int_3^9 3y^2-9y+9+3y^2dy = \int_3^9 (6y^2-9y+9)dy =$$
$$= 2y^3|_3^9 - \left.\frac{9y^2}{2}\right|_3^9 + 9y|_3^9 = 2(9^3-3^3) - \frac{9}{2}(9^2-3^2) + 9(9-3) =$$
$$= 2(3^33^3-3^3) - \frac{9}{2}(3^23^2-3^2) + 9.6 = 2.26.3^3 - \frac{9}{2}8.3^2 + 54 =$$
$$= 2.26.27 - 9.4.9 + 54 = 1404 - 324 + 54 = 1134$$

Отговорът е 1134. Но нека да сметнем задачата и по-другия начин.

$$I_1 : \left| \begin{array}{l} x\in[0,3] \\ y\in[3,x+3] \end{array}\right. ,\ I_2 : \left| \begin{array}{l} x\in[3,6] \\ y\in[x,x+3] \end{array}\right. ,\ I_3 : \left| \begin{array}{l} x\in[6,9] \\ y\in[x,9] \end{array}\right.$$

Сега вътрешния интеграл е по y, външния по x. Започваме отвътре навън, при интегрирането по y — променливата x се явява константа.

$$I_1 = \int_0^3 \left[\int_3^{x+3} (x^2+y^2)dy\right] dx = \int_0^3 \left[x^2y|_3^{x+3} + \left.\frac{y^3}{3}\right|_3^{x+3}\right] dx =$$
$$= \int_0^3 \left[x^2(x+3-3) + \frac{1}{3}[(x+3)^3-3^3]\right] dx =$$
$$= \int_0^3 \left[x^3 + \frac{1}{3}(x^3+9x^2+27x+27-27)\right] dx =$$
$$= \int_0^3 \left[x^3 + \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 9x\right] dx = \int_0^3 \left[\frac{4x^3}{3} + 3x^2 + 9x\right] dx =$$
$$= \left.\frac{x^4}{3}\right|_0^3 + x^3|_0^3 + \left.\frac{9x^2}{2}\right|_0^3 = \frac{3^4}{3} + 3^3 + \frac{9.3^2}{2} = 2.3^3 + \frac{3^4}{2} = 94,5$$

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int_6^9 \left[\int_x^9 (x^2+y^2)dy\right] dx = \int_6^9 \left[x^2y|_x^9 + \frac{y^3}{3}\bigg|_x^9\right] dx = \\
&= \int_6^9 \left[x^2(9-x) + \frac{1}{3}(9^3 - x^3)\right] dx = \int_6^9 \left[9x^2 - x^3 + 3^5 - \frac{x^3}{3}\right] dx = \\
&= \int_6^9 \left[9x^2 - \frac{4x^3}{3} + 3^5\right] dx = 3x^3|_6^9 - \frac{x^4}{3}\bigg|_6^9 + 3^5x|_6^9 = \\
&= 3(9^3 - 6^3) - \frac{1}{3}(9^4 - 6^4) + 3^5.3 = 3(3^33^3 - 2^33^3) - \frac{1}{3}(3^43^4 - 2^43^4) + 3^6 = \\
&= 3.19.3^3 - \frac{1}{3}65.3^4 + 3^6 = 3^3(3.19 - 65 + 3^3) = 3^3.19 = 513
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_3^6 \left[\int_x^{x+3} (x^2+y^2)dy\right] dx = \int_3^6 \left[x^2y|_x^{x+3} + \frac{y^3}{3}\bigg|_x^{x+3}\right] dx = \\
&= \int_3^6 \left[x^2(x+3-x) + \frac{1}{3}[(x+3)^3 - x^3]\right] dx = \\
&= \int_3^6 \left[3x^2 + \frac{1}{3}(x^3 + 9x^2 + 27x + 27 - x^3)\right] dx = \\
&= \int_3^6 \left[3x^2 + 3x^2 + 9x + 9\right] dx = \int_3^6 \left[6x^2 + 9x + 9\right] dx = \\
&= 2x^3|_3^6 + \frac{9x^2}{2}\bigg|_3^6 + 9x|_3^6 = 2(6^3 - 3^3) + \frac{9}{2}(6^2 - 3^2) + 9(6-3) = \\
&= 2(2^33^3 - 3^3) + \frac{9}{2}(2^23^2 - 3^2) + 9.3 = 2.7.3^3 + \frac{9}{2}3.3^2 + 27 = \\
&= 15.27 + \frac{9}{2}27 = 526,5
\end{aligned}
$$

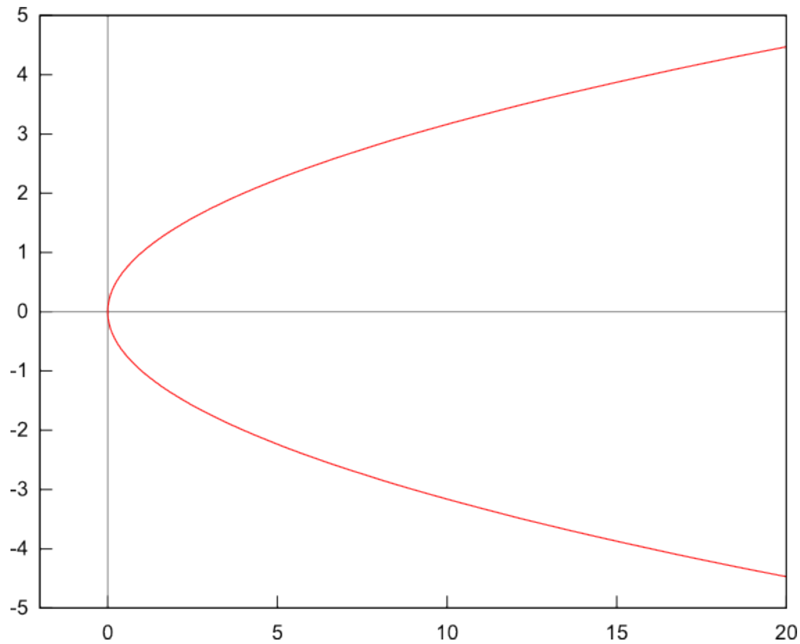
Събираме интегралите: $94,5 + 526,5 + 513 = 1134$. Отговор: 1134. □

Задача 6. Да се изчисли криволинейният интеграл

$$\int_C 2xydx + x^2dy,$$

където C е дъгата от параболата $y^2 = x$ от точката $A(0,0)$ до точката $B(1,1)$

Решение. Графиката на параболата $y^2 = x$.



Това е криволинеен интеграл от втори род. Трябва областта да бъде представена само с t. Параметризираме параболата: $y = t$, $x = t^2$. За границите на t: от точка $A(0,0)$ до точка $B(1,1)$, тоест $t \in [0,1]$. Диференцираме x и y по t:

$$x = t^2,\ dx = 2tdt, \quad y = t,\ dy = dt$$

Заместваме в интеграла:

$$\int_C 2xydx + x^2dy = \int_0^1 2t^2\,t\,2tdt + t^4dt = \int_0^1 4t^4 + t^4dt = \int_0^1 5t^4dt = t^5|_0^1 = 1$$

Отговор: 1. $\square$

5 Пета тема

Задача 1. Теорема за сравнение на числени редове с неотрицателни членове — формулировка и доказателство.

Задача 2. Да се развие в ред на Фурие само по синуси следната функция.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} - x, \ 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{4}, \ \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

Задача 3. Температурата, измерена в произволна точка (x, y) на метална плоча, се определя с функцията $T(x, y) = e^x \cos(y) + e^y \cos(x)$. Да се намери градиента на функцията $T(x, y)$ в точката $O(0, 0)$ и да се изчисли скоростта на изменение на температурата в тази точка.

Задача 4. Да се намерят стационарните точки на функцията $z(x, y) = x^3 + y^3 - 15xy$ и да се определи типа им.

Задача 5. Да се намери общото решение на уравнението $y'' + y = x^2 + 1$.

Задача 6. Да се реши интегралът

$$\iiint_G \frac{xy}{\sqrt{z}} dxdydz,$$

където G е областта, зададена с неравенствата

$$G : \{4z^2 \geq x^2 + y^2, \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ 0 \leq z \leq 1\}.$$

Задача 7. Да се реши криволинейният интеграл от втори род

$$\int_C (x + y)dx - (x - y)dy,$$

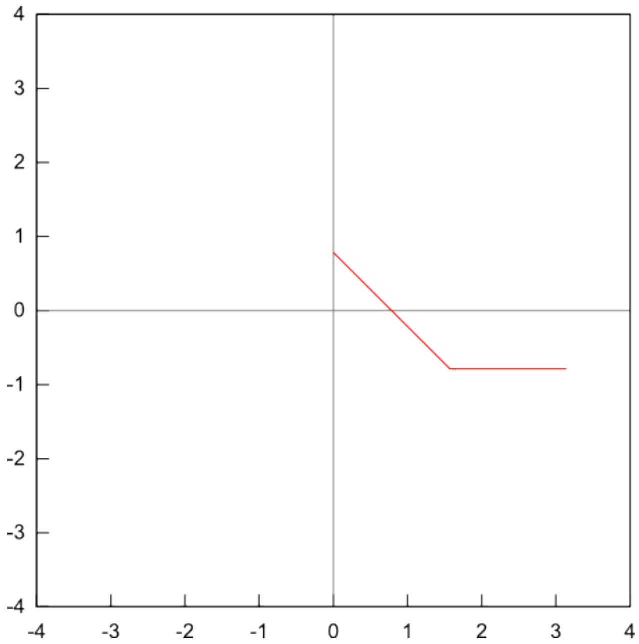
където C е затвореният контур $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

Точки: 1,2,6: 10т, 3,7: 5т, 4: 8т, 5: 12т.

Задача 2. Да се развие в ред на Фурие само по синуси следната функция.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} - x, & 0 < x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{\pi}{4}, & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

Решение. Графиката на функцията.



За да развием функцията по синуси, трябва да я додефинираме като нечетна функция. Четните функции са огледални спрямо оста Oy, нечетните функции са огледални спрямо координатното начало — това което е в първи квадрант, трябва да е същото в трети; а това което е в четвърти квадрант, трябва да е същото във втори. Тоест $f(-x) = -f(x)$.

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}, & -\pi < x < -\dfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{\pi}{4} - x, & -\dfrac{\pi}{2} \leq x < 0 \end{cases}$$

Нека проверим.

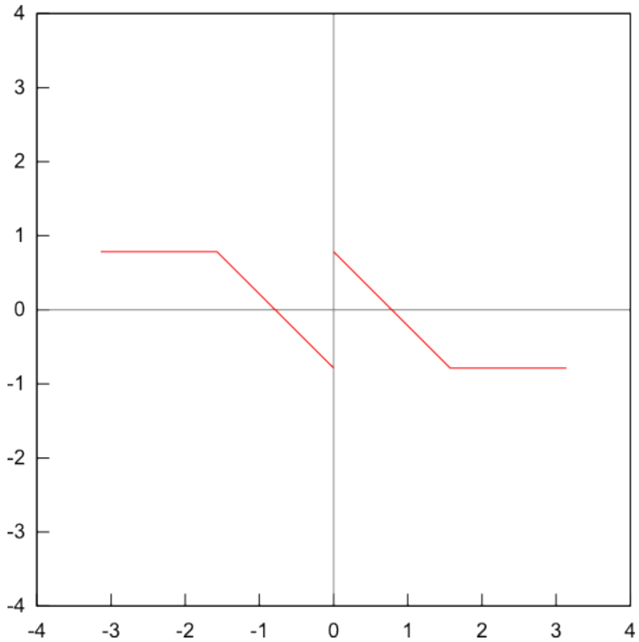
$$\widetilde{f}(-x) = \frac{\pi}{4} = -f(x)$$
$$\widetilde{f}(-x) = -\frac{\pi}{4} - (-x) = -\frac{\pi}{4} + x = -\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -f(x)$$

Значи това е нашата допълваща функция. Двете заедно ще направят нечетна функция. Нека да ги запишем малко по-четливо.

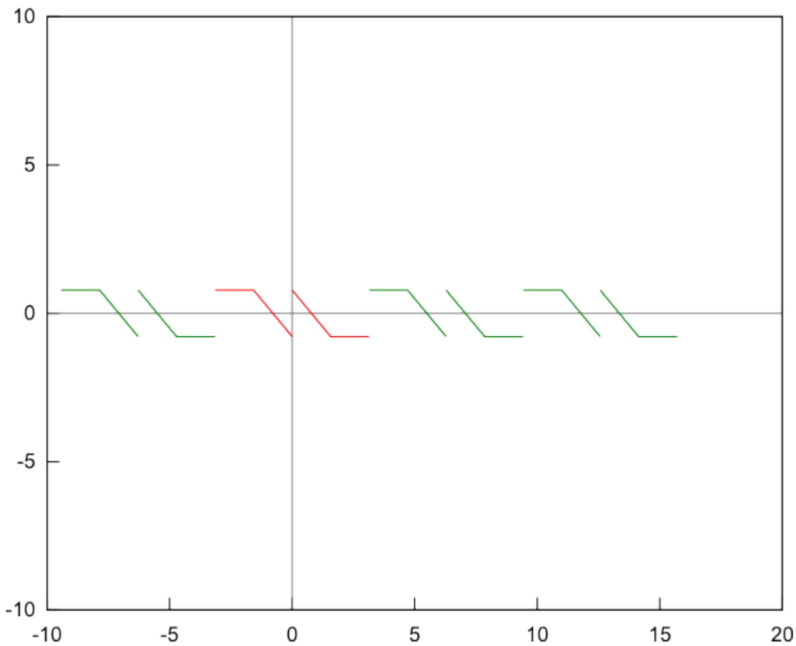
$$\widetilde{f}(x) \Longrightarrow \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] : \frac{\pi}{4}, \quad \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] : -\frac{\pi}{4} - x$$
$$f(x) \Longrightarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : \frac{\pi}{4} - x, \quad \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] : -\frac{\pi}{4}$$

Сега да запишем новата нечетна функция $F(x)$ (на която ще търсим развитие в ред на Фурие).

$$F(x) = \begin{cases} \pi/4, & x \in [-\pi, -\pi/2] \\ -\pi/4 - x, & x \in [-\pi/2, 0] \\ \pi/4 - x, & x \in [0, \pi/2] \\ -\pi/4, & x \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$



Периодично продължение: $F(x + 2\pi) = F(x)$.



Иска се развитие по синуси — $a_0 = 0$, $a_n = 0$. Изчисляваме само b_n.

Следното нещо важи само при развитие по синуси:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} F(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

Това е така, защото $f(x)$ е в интервала $[0, \pi]$, а $\widetilde{f}(x)$ е в интервала $[-\pi, 0]$. Малко по-подробно:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} \widetilde{f}(x)\sin(nx)dx + \right.\\
&\left. + \int_{-\pi/2}^{0} \widetilde{f}(x)\sin(nx)dx + \int_{0}^{\pi/2} f(x)\sin(nx)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx\right] = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[2\int_{0}^{\pi/2} f(x)\sin(nx)dx + 2\int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx\right] = \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{4} - x\right)\sin(nx)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin(nx)dx\right]
\end{aligned}$$

По дългия начин нещата излизат същите, но колкото повече сметки има, толкова по-голяма е вероятността да сбъркаме.

Нека да започнем с първия интеграл

$$I_1 = \int_{0}^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{4} - x\right)\sin(nx)dx = \frac{\pi}{4}\int_{0}^{\pi/2} \sin(nx)dx - \int_{0}^{\pi/2} x\sin(nx)dx$$

Ще ги сметнем поотделно.

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4}\int_{0}^{\pi/2} \sin(nx)dx &= -\frac{\pi}{4n}\cos(nx)\Big|_{0}^{\pi/2} = -\frac{\pi}{4n}\left(\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \cos(0)\right) = \\
&= -\frac{\pi}{4n}\left(\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - 1\right) = \frac{\pi}{4n} - \frac{\pi}{4n}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Сега другата част.

$$\begin{aligned}
-\int_{0}^{\pi/2} x\sin(nx)dx &= \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi/2} xd\cos(nx) = \\
&= \frac{1}{n}\left(x\cos(nx)\Big|_{0}^{\pi/2} - \int_{0}^{\pi/2}\cos(nx)dx\right) = \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - 0\cos(0) - \frac{1}{n}\sin(nx)\Big|_{0}^{\pi/2}\right) = \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{n}\left(\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0)\right)\right) = \\
&= \frac{\pi}{2n}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{n^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Записваме първия интеграл.

$$I_1 = \frac{\pi}{4n} - \frac{\pi}{4n}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2n}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{n^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= \frac{\pi}{4n} + \frac{\pi}{4n}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{n^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

Смятаме и втория интеграл.

$$I_2 = \int_{\pi/2}^{\pi}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin(nx)dx = -\frac{\pi}{4n}\int_{\pi/2}^{\pi}\sin(nx)d(nx) = \frac{\pi}{4n}\cos(nx)|_{\pi/2}^{\pi} =$$
$$= \frac{\pi}{4n}\left(\cos(n\pi) - \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{4n}(-1)^n - \frac{\pi}{4n}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

Сега вече записваме b_n.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{4n} + \frac{\pi}{4n}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{n^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{4n}(-1)^n - \frac{\pi}{4n}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{4n}((-1)^n + 1) - \frac{1}{n^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Развитието на функцията в ред на Фурие:

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\pi}{4n}((-1)^n + 1) - \frac{1}{n^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right]\sin(nx)$$

Бихме могли да махнем синуса, ето така:

$$n = 2k \Longrightarrow \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2k\frac{\pi}{2}\right) = \sin(k\pi) = 0$$
$$n = 2k+1 \Longrightarrow \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k$$

Интересува ни $n = 2k+1$. Но тогава $(-1)^n = (-1)^{2k+1} = -1$. Първото събираемо става нула. И крайният резултат е:

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[0 - \frac{1}{(2k+1)^2}(-1)^k\right]\sin[(2k+1)x] = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}\sin[(2k+1)x]$$

Формули за синус и косинус, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\cos(n\pi) = (-1)^n,\ \sin(n\pi) = 0$$
$$\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} n = 2k \Longrightarrow \cos(k\pi) = (-1)^k \\ n = 2k+1 \Longrightarrow \cos((2k+1)\pi/2) = 0 \end{cases}$$
$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} n = 2k \Longrightarrow \sin(k\pi) = 0 \\ n = 2k+1 \Longrightarrow \sin((2k+1)\pi/2) = (-1)^k \end{cases}$$

$\square$

Задача 4. Да се намерят стационарните точки на функцията $z(x, y) = x^3 + y^3 - 15xy$ и да се определи типа им.

Решение. Вече е решена, виж Тема 3, Задача 1. □

Задача 5. Да се намери общото решение на уравнението $y'' + y = x^2 + 1$.

Решение. Хомогенното уравнение е:

$$y'' + y = 0$$

Характеристичното уравнение е:

$$k^2 + 1 = 0$$

Двукратен комплексен корен $k_{1,2} = 0 \pm i$. Решението на хомогенното диференциално уравнение е:

$$y(x) = e^{0x}[c_1 \cos(1x) + c_2 \sin(1x)] = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

Диференциалното уравнение е:

$$y'' + y = x^2 + 1$$

Решението на хомогенното уравнение съдържа $\sin / \cos$, а вдясно не. Тоест трябва да определим специална дясна част. Имаме:

$$y'' + y = e^{0x}(x^2 + 1)$$

$\alpha = 0$, $k = 0 \pm i$, $\alpha \neq k$, няма кратност: $\mu = 0$. Полиномът е от втора степен: $m = 2$, неизвестният полином ще е: $Ax^2 + Bx + C$.

Общият вид на специалната дясна част с реални корени (виж стр. 19):

$$x^\mu e^{\alpha x} P_m(x)$$

Заместваме с нашите стойности:

$$x^0 e^{0x}(Ax^2 + Bx + C)$$

Диференцираме два пъти:

$$\begin{aligned} \eta(x) &= Ax^2 + Bx + C \\ \eta'(x) &= 2Ax + B \\ \eta''(x) &= 2A \end{aligned}$$

Заместваме в диференциалното уравнение:

$$2A + Ax^2 + Bx + C = x^2 + 1$$

$$Ax^2 + Bx + 2A + C = x^2 + 1$$

Приравняваме коефициентите:

$$\left| \begin{array}{l} A = 1 \\ B = 0 \\ 2A + C = 1 \end{array} \right.$$

$A = 1$, $C = -1$.

$$\eta(x) = x^2 - 1$$

Решението на диференциалното уравнение е:

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + x^2 - 1$$

□

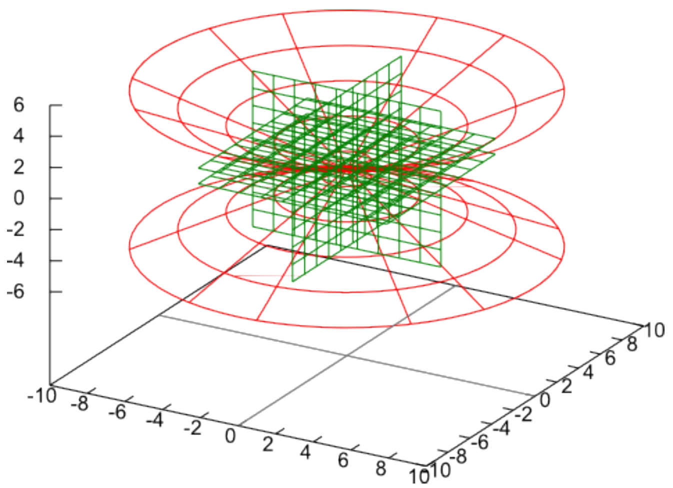
Задача 6. Да се реши интегралът

$$\iiint_G \frac{xy}{\sqrt{z}} dxdydz,$$

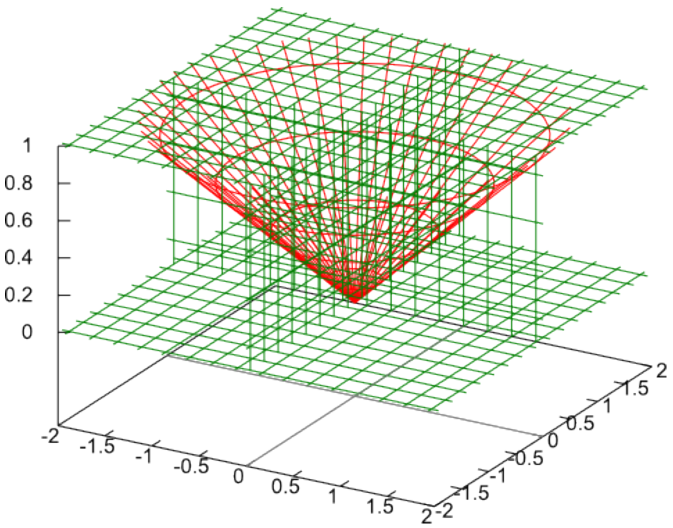
където G е областта, зададена с неравенствата

$$G : \{4z^2 \geq x^2 + y^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 1\}.$$

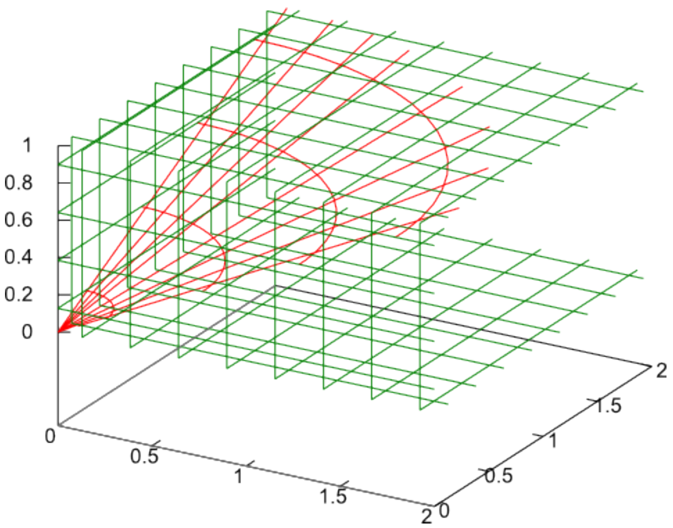
Решение. Определяме повърхнините: $4z^2 = x^2 + y^2$ е конус, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и $z = 1$ са равнини. От трите равнини сме затворени в първи квадрант, затворени сме откъм $z = 1$, и сме във вътрешността на конуса. Ето графиката в далечен план.



Сега в по-близък.



И най-близък.



Тук вече се вижда как сме оградени от четирите равнини (зелено на графиката) и трябва да определим областта нагоре от конуса (червено на графиката) до равнината $z = 1$.

Ще използваме цилиндрични координати (ще е по-лесно, може и сферични). Ясно се вижда че z се движи (е в граници) от конуса до равнината $z = 1$. От уравнението на конуса изразяваме z:

$$z = \pm\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{4}}$$

Ние сме над равнината $z = 0$, така че взимаме положителната част на конуса. Границите на z са:

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} \leq z \leq 1$$

Сега да определим x и y. Като приравним z на различни константи се вижда че това са окръжности. Параметризацията е стандартната:

$$D^* : \left| \begin{array}{l} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{array} \right.$$

Максималната окръжност се достига при равнината $z = 1$, заместваме в уравнението на конуса: $4 = x^2 + y^2$. Тоест максималният радиус е две: $r \in [0, 2]$.

Сега за θ. Координатното начало се съдържа в окръжността, но не и в нашата област. Ние сме в първи квадрант (само положителни стойности за x и y), имаме една четвърт от пълния кръг. Тогава границите на ъгъла са: $\theta \in [0, \pi/2]$.

Да не забравим да умножим по якобиана $\Delta = r$. Пълната смяна е:

$$G^* : \left| \begin{array}{l} D^* : \left| \begin{array}{l} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ r \in [0,2],\ \theta \in [0, \pi/2] \end{array} \right. \\ \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} \leq z \leq 1 \end{array} \right.$$

Заместваме z:

$$\iiint_G \frac{xy}{\sqrt{z}} dxdydz = \iint_D \left[\int_{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}}^{1} \frac{xy}{\sqrt{z}} dz \right] dxdy$$

Малко пояснения:

$$(2\sqrt{z})' = (2z^{1/2})' = 2\frac{1}{2}z^{1/2-1} = z^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{z}}$$

Заместваме с границите на z:

$$\iint_D \left[xy\ 2\sqrt{z}\Big|_{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}}^{1} \right] dxdy = \iint_D \left[2xy \left(1 - \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}} \right) \right] dxdy =$$

$$= \iint_D \left[2xy \left(1 - \frac{\sqrt[4]{x^2+y^2}}{\sqrt{2}} \right) \right] dxdy$$

Заместваме x и y с r и θ и умножаваме по r:

$$\iint_{D^*} \left[2r\cos(\theta) r\sin(\theta) \left(1 - \frac{\sqrt[4]{r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)}}{\sqrt{2}} \right) \right] rdrd\theta$$

Прилагаме формулата $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ и вкарваме самотния r в скобите:

$$\iint_{D^*} \left[2r^3\cos(\theta)\sin(\theta) \left(1 - \frac{\sqrt[4]{r^2}}{\sqrt{2}} \right) \right] drd\theta$$

Границите на r и θ са независими (са константи), можем да разделим интегралите:

$$\int_0^{\pi/2} 2\cos(\theta)\sin(\theta)d\theta \int_0^2 r^3 \left(1-\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}}\right) dr$$

Използваме формулата $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/2} \sin(2\theta)d\theta \int_0^2 \left(r^3 - \frac{r^3\sqrt{r}}{\sqrt{2}}\right) dr = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin(2\theta)d(2\theta) \int_0^2 \left(r^3 - \frac{r^{7/2}}{\sqrt{2}}\right) dr = \\
&= -\frac{1}{2}\cos(2\theta)\Big|_0^{\pi/2} \left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{9}r^{9/2}\Big|_0^2\right) = \\
&= -\frac{1}{2}(\cos(\pi)-\cos(0))\left(\frac{16}{4} - 0 - \frac{2}{9\sqrt{2}}(2^{9/2}-0)\right) = \\
&= -\frac{1}{2}(-1-1)\left(4 - \frac{\sqrt{2}}{9}2^{9/2}\right) = \\
&= -\frac{1}{2}(-2)\left(4 - \frac{2^{10/2}}{9}\right) = 4 - \frac{2^5}{9} = \frac{36}{9} - \frac{32}{9} = \frac{4}{9}
\end{aligned}$$

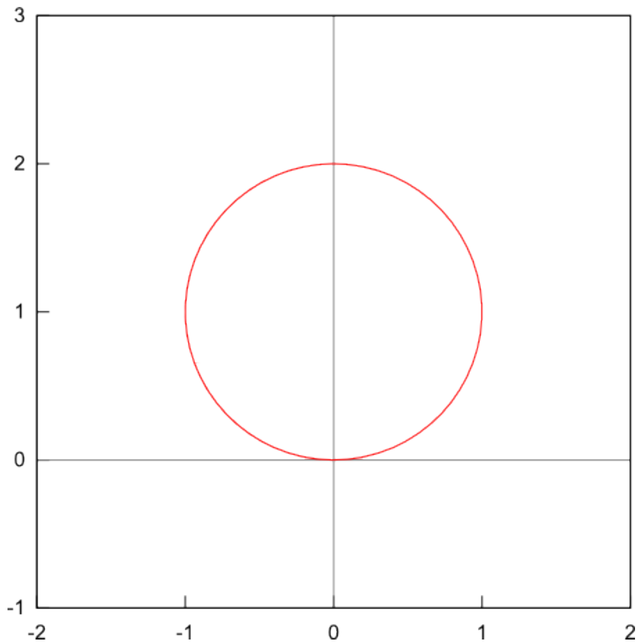
Отговор: 4/9. □

Задача 7. Да се реши криволинейният интеграл от втори род

$$\int_C (x+y)dx - (x-y)dy,$$

където C е затвореният контур $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

Решение. Графиката на окръжността $x^2 + y^2 = 2y$.



Това е окръжност с център $(0,1)$ и радиус 1.

$$x^2+y^2-2y+1-1=0 \Longrightarrow x^2+(y-1)^2=1$$

Прилагаме стандартна параметризация (полярни координати):

$$\left|\begin{array}{l} x=r\cos(\theta) \\ y=r\sin(\theta) \end{array}\right.$$

Окръжността е в първи и втори квадрант, затова границите на ъгъла са: $\theta\in[0,\pi]$. За радиуса заместваме в уравнението на окръжността:

$$\begin{aligned} &r^2\cos^2(\theta)+r^2\sin^2(\theta)=2r\sin(\theta) \\ &r^2=2r\sin(\theta) \\ &r=2\sin(\theta) \end{aligned}$$

Да не забравим да умножим по якобиана $\Delta=r$. Пълната смяна е:

$$D^*:\left|\begin{array}{l} x=r\cos(\theta) \\ y=r\sin(\theta) \\ r\in[0,2\sin(\theta)],\ \ \theta\in[0,\pi] \end{array}\right.$$

Не можем да заместим директно в интеграла, значи трябва да приложим формулата на Грийн:

$$\begin{aligned} &\int_C (x+y)dx+(y-x)dy=\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}(y-x)-\frac{\partial}{\partial y}(x+y)\right)dxdy= \\ &\quad=\iint_D(-1-1)dxdy=-2\iint_D dxdy \end{aligned}$$

Това е лицето на окръжността, умножено по -2.

$$-2\iint_D dxdy = -2\iint_{D^*} rdrd\theta = -\int_0^\pi \left[\int_0^{2\sin(\theta)} 2rdr\right] d\theta =$$
$$= -\int_0^\pi r^2|_0^{2\sin(\theta)} d\theta = -\int_0^\pi 4\sin^2(\theta)d\theta$$

Използваме формулата: $\sin^2(\theta) = [1-\cos^2(\theta)]/2$.

$$-\int_0^\pi 4\sin^2(\theta)d\theta = -\int_0^\pi 4\frac{1-\cos^2(\theta)}{2}d\theta = \int_0^\pi [-2+2\cos(2\theta)]d\theta =$$
$$= -2\theta|_0^\pi + \sin(2\theta)|_0^\pi = -2(\pi-0) + (\sin(2\pi)-\sin(0)) = -2\pi$$

Лицето на окръжността по геометричен път е $\pi.r = \pi.1 = \pi$. Умножено по -2 дава отговора: -2π. □

Задача 3. Температурата, измерена в произволна точка (x, y) на метална плоча, се определя с функцията $T(x, y) = e^x\cos(y) + e^y\cos(x)$. Да се намери градиента на функцията $T(x, y)$ в точката $O(0, 0)$ и да се изчисли скоростта на изменение на температурата в тази точка.

Решение. Изчисляваме частните производни в точката $O(0, 0)$.

$$T'_x = e^x\cos(y) - e^y\sin(x),\ T'_x(0,0) = 1$$
$$T'_y = -e^x\sin(y) + e^y\cos(x),\ T'_y(0,0) = 1$$

Записваме градиента.

$$\text{grad}T = T'_x\overrightarrow{i} + T'_y\overrightarrow{j} = 1\overrightarrow{i} + 1\overrightarrow{j}$$

Скоростта на изменение на температурата е дължината на градиента.

$$|\text{grad}T| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

□

6 Шеста тема

Задача 1. Да се развие в ред на Фурие.

$$f(x) = |x|, \ x \in [-1, 1]$$

Задача 2. Локални екстремуми?

$$z = xy(4 - x - y)$$

Задача 3.

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1} + xe^{-x}$$

Задача 4. Лицето на областта?

$$D : \{y = x^2 + 4, \ y = 4x, \ x = 0\}$$

Задача 5.

$$\iiint_G \sqrt{x^2 + y^2} dxdydz, \ G : \{x^2 + y^2 = 2x, \ z = 0, \ z = x^2 + y^2\}$$

Задача 6. Нека

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx, \ D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \ c \leq \alpha \leq a\}.$$

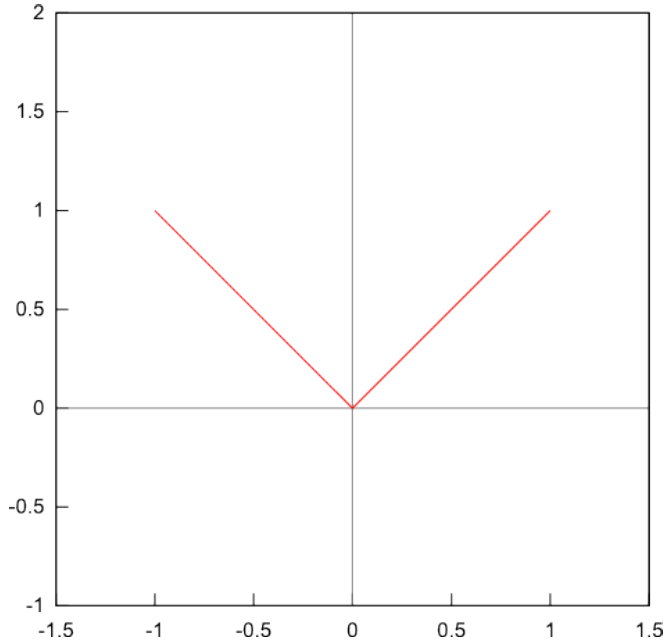
Да се докаже, че ако $f(x, \alpha) \in \mathbb{C}(D)$, то $F(\alpha) \in \mathbb{C}[c, a]$.

Всяка задача е по 10 точки.

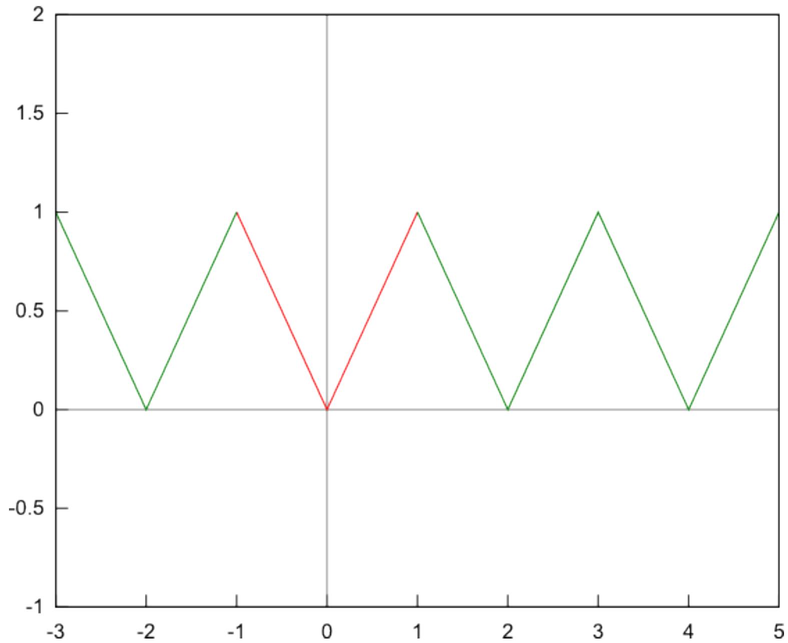
Задача 1. Да се развие в ред на Фурие.

$$f(x) = |x|, \; x \in [-1, 1]$$

Решение. Графиката на функцията.



Период: $l = (1 - (-1))/2 = 1$. Периодично продължение:$f(x+2) = f(x)$.



Това е четна функция: $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$. Развиване на четна функция в ред на Фурие още се нарича развитие по косинуси (както развитие на нечетна функция — развитие по синуси).

Следната формула за a_n важи само при развитие по косинуси (ако пробваме същото нещо за b_n ще получим грешен резултат):

$$a_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} |x| \cos\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx = 2\int_0^1 x\cos(n\pi x)dx$$

Започваме с a_0.

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} |x| dx = 2\int_0^1 xdx = x^2|_0^1 = 1 - 0 = 1$$

Сега за a_n.

$$\begin{aligned}
a_n = 2\int_0^1 x\cos(n\pi x)dx &= \frac{2}{n\pi}\int_0^1 xd\sin(n\pi x) = \\
&= \frac{2}{n\pi}\left(x\sin(n\pi x)|_0^1 - \int_0^1 \sin(n\pi x)dx\right) = \\
&= \frac{2}{n\pi}\left(\sin(n\pi) - 0 + \frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)|_0^1\right) = \\
&= \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos(n\pi) - \cos(0)) = 2\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}
\end{aligned}$$

Развитието на функцията в ред на Фурие:

$$f(x) = \frac{1}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)$$

□

Задача 2. Локални екстремуми?

$$z = xy(4 - x - y)$$

Решение. Изчисляваме първите частни производни на функцията.

$$z = f(x, y) = 4xy - x^2y - xy^2$$

$$f'_x = 4y - 2xy - y^2,\ f'_y = 4x - x^2 - 2xy$$

Техните корени са предполагаемите екстремални точки.

$$\begin{aligned}
y(4 - 2x - y) = 0 &\Longrightarrow y = 0,\ y = 4 - 2x \\
x(4 - x - 2y) = 0 &\Longrightarrow x = 0,\ x = 4 - 2y
\end{aligned}$$

Точките са $M_0(0, 0)$ и $M_1\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$. Намираме вторите частни производни.

$$f''_{xx} = -2y,\ f''_{yy} = -2x,\ f''_{xy} = 4 - 2x - 2y,\ f''_{yx} = 4 - 2x - 2y$$

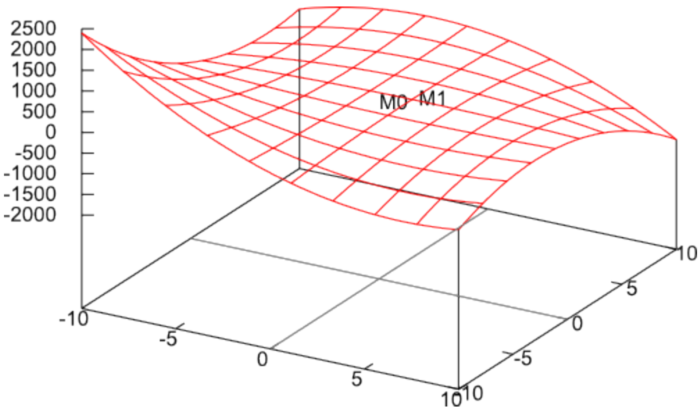
Записваме ги като детерминанта и ги изчисляваме в съответната точка.

$$\Delta_1 = -2y = 0$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2y & 4-2x-2y \\ 4-2x-2y & -2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 16 < 0$$

Детерминантата Δ_2 е отрицателна, точката $M_0(0,0)$ е седловидна.

$$\Delta_1 = -2\frac{4}{3} = -\frac{8}{3} < 0$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2y & 4-2x-2y \\ 4-2x-2y & -2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8/3 & -4/3 \\ -4/3 & -8/3 \end{vmatrix} = \frac{64}{9} - \frac{16}{9} > 0$$

Детерминантата Δ_2 е положителна, точката $M_1\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$ е максимум ($\Delta_1 < 0$).



Отговор: Локален максимум в $M_1\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$, седловидна точка в $M_0(0,0)$. □

Задача 3.
$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1} + xe^{-x}$$

Решение. Хомогенното уравнение е:

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Характеристичното уравнение е:

$$k^2 + 2k + 1 = 0 \Longrightarrow (k+1)^2 = 0$$

Двукратен корен $k_{1,2} = -1$. Решението на хомогенното диференциалното уравнение е:

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$$

Диференциалното уравнение е:

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}(3\sqrt{x+1} + x)$$

Решението на хомогенното уравнение съдържа експонента, също така и дясната част — прилагаме метод на Лагранж (виж стр. 17). (Това е един от малкото случаи, в които не може да се приложи специална дясна част, защото не може да определим степента на x: $\sqrt{x+1}$.)

$$\eta(x) = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)xe^{-x}$$

Записваме системата.

$$\left| \begin{array}{l} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)xe^{-x} = 0 \\ C_1'(x)(-e^{-x}) + C_2'(x)[-xe^{-x} + e^{-x}] = e^{-x}(3\sqrt{x+1} + x) \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} C_1'(x) = -C_2'(x)x \\ -C_1'(x) - C_2'(x)x + C_2'(x) = 3\sqrt{x+1} + x \end{array} \right.$$

От първото уравнение изразяваме $C_1'(x)$ и го заместваме във второто.

$$-[-C_2'(x)x] - C_2'(x)x + C_2'(x) = 3\sqrt{x+1} + x$$

$$C_2'(x) = 3\sqrt{x+1} + x$$

Тогава имаме: $C_2'(x) = 3\sqrt{x+1} + x$, $C_1'(x) = -3x\sqrt{x+1} - x^2$. Сега ги интегрираме за да намерим самите функции.

$$C_2(x) = \int [3\sqrt{x+1} + x]dx = 3\int (x+1)^{1/2}dx + \int xdx =$$
$$= 3\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + \frac{x^2}{2} = 2(x+1)^{3/2} + \frac{x^2}{2}$$

За $C_1(x)$ вкарваме $\sqrt{x+1}$ под диференциала и интегрираме по части.

$$\begin{aligned} C_1(x) &= -3\int x(x+1)^{1/2}dx - \int x^2 dx = \\ &= -3\frac{2}{3}\int xd(x+1)^{3/2} - \frac{x^3}{3} = \\ &= -2\left(x(x+1)^{3/2} - \int (x+1)^{3/2}dx\right) - \frac{x^3}{3} = \\ &= -2\left(x(x+1)^{3/2} - \frac{2}{5}(x+1)^{5/2}\right) - \frac{x^3}{3} = \\ &= -2x(x+1)^{3/2} + \frac{4}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

Заместваме в $\eta(x)$:

$$\eta(x) = \left[-2x(x+1)^{3/2} + \frac{4}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{x^3}{3}\right]e^{-x} + \left[2(x+1)^{3/2} + \frac{x^2}{2}\right]xe^{-x} =$$
$$= \left[\frac{4}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{2}\right]e^{-x} = \left[\frac{4}{5}(x+1)^{5/2} + \frac{x^3}{6}\right]e^{-x}$$

Решението на диференциалното уравнение е:

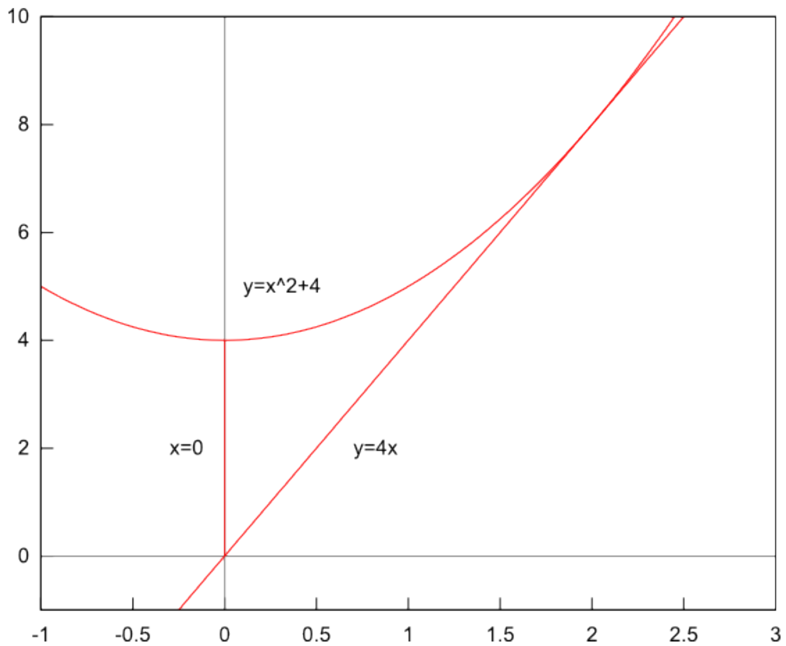
$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \left[\frac{4}{5}(x+1)^{5/2} + \frac{x^3}{6}\right] e^{-x}$$

□

Задача 4. Лицето на областта?

$$D : \{y = x^2 + 4, \;\; y = 4x, \;\; x = 0\}$$

Решение. Областта на интегриране.



Границите са:

$$D^* : \left| \begin{array}{l} x \in [0, 2] \\ y \in [4x, x^2 + 4] \end{array} \right.$$

Лице на област се намира чрез двоен интеграл с подинтегрална функция единица:

$$\iint_D dxdy = \iint_{D^*} dxdy$$

Заместваме с нашите граници:

$$\iint_{D^*} dxdy = \int_0^2 \left[\int_{4x}^{x^2+4} dy\right] dx = \int_0^2 y|_{4x}^{x^2+4} dx = \int_0^2 (x^2 + 4 - 4x)dx =$$

$$= \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 + 4x|_0^2 - 2x^2|_0^2 = \frac{8}{3} + 8 - 8 = \frac{8}{3}$$

Лицето на областта е $8/3$. □

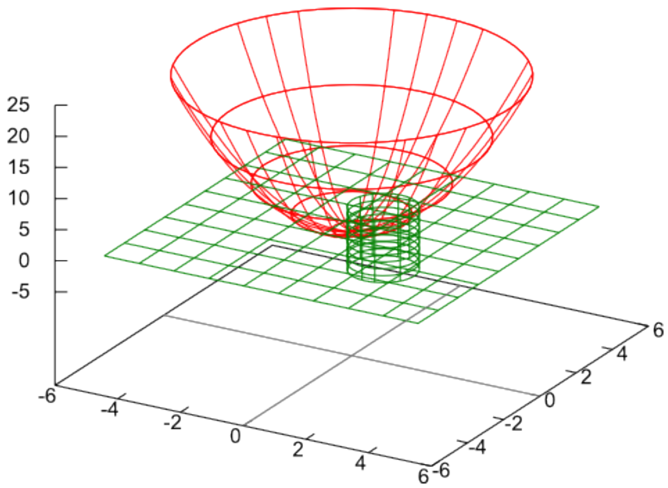
Задача 5.

$$\iiint_G \sqrt{x^2+y^2}dxdydz, \ G : \{x^2+y^2=2x, \ z=0, \ z=x^2+y^2\}$$

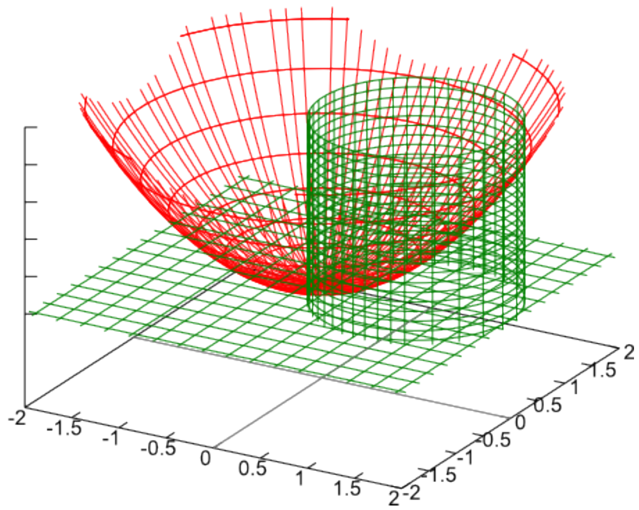
Решение. Определяме повърхнините: $z = x^2 + y^2$ е параболоид, $x^2 + y^2 = 2x$ е прав кръгов цилиндър. Ето защо:

$$x^2+y^2 = 2x - 1 + 1 \Longrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \Longrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$$

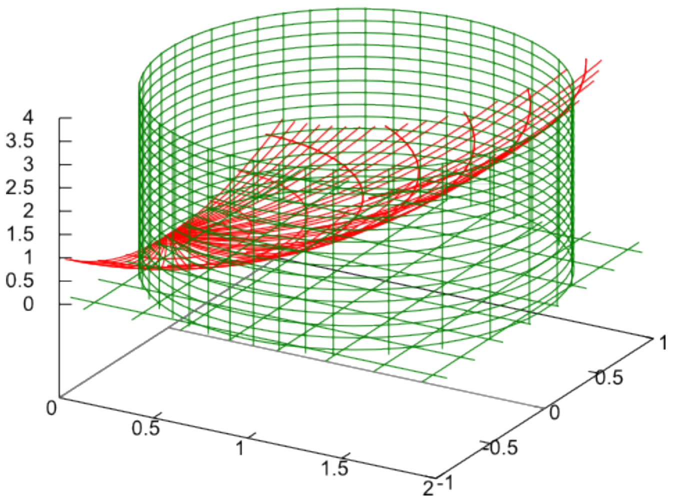
Това е окръжност с център $(0, 1)$ и радиус единица. Тъй като сме в пространството, повърхнината е цилиндър. Ето графиката в далечен план.



По-близък.



И най-близък.



Търсената област е затворена между трите повърхнини: отстрани от цилиндъра (зелено на графиката), отдолу от равнината $z = 0$ (зелено на графиката) и отгоре от параболоида (червено на графиката).

Ще използваме цилиндрични координати (сферични не може). Границите на z са от равнината $z = 0$ до параболоида:

$$0 \leq z \leq x^2 + y^2$$

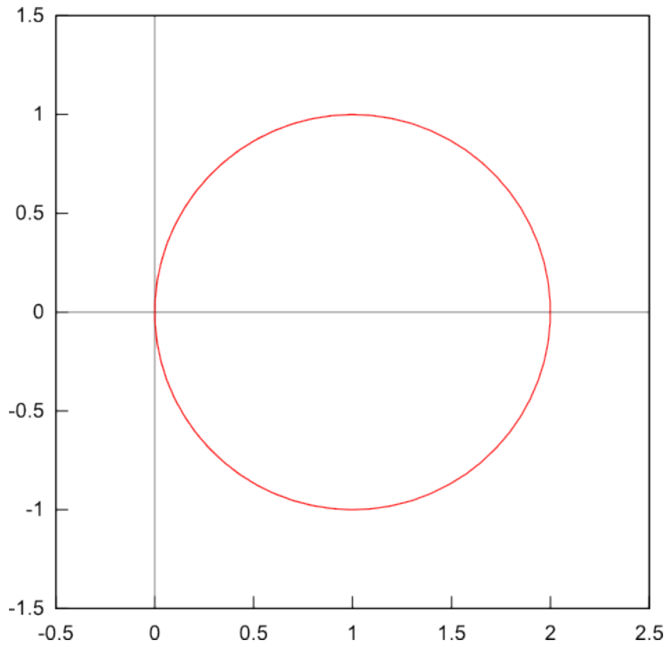
За окръжността използваме стандартната параметризация:

$$D^* : \left| \begin{array}{l} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{array} \right.$$

Заместваме в $x^2 + y^2 = 2x$ (може и в $(x-1)^2 + y^2 = 1$):

$$\begin{aligned} & r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta) = 2r\cos(\theta) \\ & r^2 = 2r\cos(\theta) \\ & r = 2\cos(\theta) \end{aligned}$$

Границите на радиуса: $r \in [0, 2\cos(\theta)]$. Окръжността $x^2 + y^2 = 2x$ е в първи и четвърти квадрант. Ъгълът ще е с граници: $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.



Да не забравим да умножим по якобиана $\Delta = r$. Пълната смяна е:

$$G^*: \left| \begin{array}{l} D^*: \left| \begin{array}{l} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ r \in [0, 2\cos(\theta)],\ \ \theta \in [-\pi/2, \pi/2] \end{array} \right. \\ 0 \le z \le x^2 + y^2 \end{array} \right.$$

Заместваме z:

$$\iiint_G \sqrt{x^2+y^2}dxdydz = \iint_D \left[\int_0^{x^2+y^2} \sqrt{x^2+y^2}dz\right] dxdy =$$
$$= \iint_D \sqrt{x^2+y^2}z|_0^{x^2+y^2}dxdy = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2-0)dxdy =$$
$$= \iint_D \sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)dxdy = \iint_D (x^2+y^2)^{3/2}dxdy$$

Заместваме x и y с r и θ и умножаваме по r:

$$\iint_D (x^2+y^2)^{3/2}dxdy = \iint_{D^*} [r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)]^{3/2} r dr d\theta =$$
$$= \iint_{D^*} [r^2]^{3/2} r dr d\theta = \iint_{D^*} r^4 dr d\theta =$$
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\int_0^{2\cos(\theta)} r^4 dr\right] d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left.\frac{r^5}{5}\right|_0^{2\cos(\theta)} d\theta =$$
$$= \frac{1}{5}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} [2^5\cos^5(\theta) - 0]d\theta = \frac{32}{5}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^5(\theta)d\theta$$

Трябва да разложим подинтегралната функция. Ще използваме следните формули:

$$\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}, \ \cos^3(\theta) = \frac{1}{4}[3\cos(\theta) + \cos(3\theta)]$$
$$\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) = \frac{1}{2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \cos(\theta_1 + \theta_2)]$$

Представяме $\cos^5(\theta)$ така:

$$\begin{aligned}
[\cos^3(\theta)]^2 &= \frac{1}{4^2}[3\cos(\theta) + \cos(3\theta)]^2 = \\
&= \frac{1}{16}[9\cos^2(\theta) + 6\cos(\theta)\cos(3\theta) + \cos(3\theta)] = \\
&= \frac{1}{16}\left[9\frac{1+\cos(2\theta)}{2} + 6\frac{1}{2}(\cos(\theta) + \cos(4\theta)) + \frac{1+\cos(6\theta)}{2}\right] = \\
&= \frac{1}{32}[9 + 9\cos(2\theta) + 6\cos(2\theta) + 6\cos(4\theta) + 1 + \cos(6\theta)] = \\
&= \frac{1}{32}[10 + 15\cos(2\theta) + 6\cos(4\theta) + \cos(6\theta)]
\end{aligned}$$

Заместваме в интеграла:

$$\begin{aligned}
&\frac{32}{5}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{32}[10 + 15\cos(2\theta) + 6\cos(4\theta) + \cos(6\theta)]d\theta = \\
&= \frac{1}{5}\left[10\theta|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{15}{2}\sin(2\theta)|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{6}{4}\sin(4\theta)|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{6}\sin(6\theta)|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right] = \\
&= \frac{1}{5}\left[10\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + 0 + 0 + 0\right] = 2\frac{2\pi}{2} = 2\pi
\end{aligned}$$

Всички синуси са или от π, или от $-\pi$ (дават нула). Отговорът е 2π. □

7 Още теми

Седма тема

Задача 1. Проверете равенството, ако $z = \dfrac{y^2}{3x} + xy$.

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$$

Задача 2. Определете интервалът на сходимост на реда.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$$

Задача 3. Изследвайте за екстремум функцията.

$$z = x^3 + y^3 - 3xy$$

Задача 4. Решете уравнението.

$$y' = y\tan(x) + \sin^2(x)$$

Задача 5. Решете уравнението.

$$y'' + 2y' + 2y = 6x^2 + xe^x$$

Задача 6. Намерете лицето на областта, ограничена от кривите $y = 2x - x^2$, $y = -x$.

Задача 7. Да се развие в ред на Фурие по косинуси функцията за $x \in (0, \pi)$.

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$$

Точки: 4 и 7 са по 5 точки, останалите по 10.

Осма тема

Задача 1. Да се намерят радиусът на сходимост и областта на сходимост на реда. Изследвайте сходимостта на реда в краищата на получения интервал на сходимост.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{2n-1}$$

Задача 2. Да се развие в ред на Фурие по синуси функцията за $x \in (0, \pi)$.

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$$

Задача 3а. Намерете $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, където $z = \dfrac{y^2}{x \ln(y)}$.

Задача 3б. Намерете екстремумите на функцията $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

Задача 4. Намерете общия интеграл на уравнението $y'' + y = cos(x) + xe^{2x}$.

Задача 5. Намерете обема, ограничен от повърхнините $2z = 2 + x^2 + y^2$ и $z = 3$, като използвате цилиндрични координати.

Задача 6. Да се намери общия интеграл на уравнението.

$$y' = y\cos(x) - \sin(2x)$$

Точки: 3а и 6 са по 5 точки, останалите по 10.

Девета тема

Задача 1. Да се намери интервалът на сходимост на реда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+4}}{6n+11}$$

Задача 2. Нека $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е периодична функция с период $T = 8$, за която е дадено че $F(x) = 1 - x/2$ за $x \in [0, 4]$. Да се представи $F(x)$ в ред на Фурие само по косинуси.

Задача 3. Намерете локалните екстремуми на функцията и вида им.

$$f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2x - 4y + 6$$

Задача 4. Намерете общото решение на следното диференциално уравнение.

$$y'' + 9y = -\frac{4}{\sin(3x)} + (3x - 4)e^{2x}$$

Задача 5. Пресметнете интеграла

$$\iint_D 2xy^2 dxdy,$$

където областта D е ограничена от кривите $x = 0$ $(x \geq 0)$ и $x^2 + y^2 = 16$.

Задача 6. Пресметнете криволинейния интеграл от първи род

$$\int_C (2x^2 + 2y^2) dl$$

по кривата линия C, зададена с уравненията $x = 3\cos(2t)$, $y = 3\sin(2t)$, $t \in [0, \pi]$.

Всяка задача е по 10 точки.

Десета тема

Задача 1. Определете интервала на сходимост на реда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n n^2}$$

Задача 2. Да се намерят частните производни от първи ред на функцията.

$$z = e^{x^2-x}(4x + xy^2)$$

Задача 3. Да се развие в ред на Фурие функцията.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \\ x, & x \in (0,1) \end{cases}$$

Задача 4. Намерете частно решение на уравнението $y' \sin(x) = y \ln(y)$, което удовлетворява условието $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Задача 5. Решете уравнението.

$$y''' - y'' = 2x + 4\cos(2x)$$

Задача 6. Намерете лицето на равнинната област, ограничена от кривите.

$$y = 4 - x^2,\ y = x^2 - 2x$$

Всяка задача е по 10 точки.

Единадесета тема

Задача 1. Да се намерят локалните екстремуми на функцията.

$$f(x,y) = 2x^3 + xy^2 - 216x$$

Задача 2. Да се реши обикновеното диференциално уравнение.

$$y'' - y = 4xe^{-x} + \frac{1}{e^x + 2}$$

Задача 3. Да се реши обикновеното диференциално уравнение от първи ред.

$$(y - x)dx + (y + x)dy = 0$$

Задача 4. Да се реши тройният интеграл

$$\iiint_V ydxdydz,$$

където V е областта, ограничена от коничната повърхнина $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ и равнината $y = 2$.

Задача 5. Да се изследва за абсолютна и условна сходимост реда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n - \ln(n)}$$

Задача 6. Да се реши интегралът

$$\int_L 3xydx + 2x^2dy,$$

където L е контурът на областта, ограничена от линиите $y = x$ и $y = x^2 - 2x$, описан еднократно в положителна посока.

Всяка задача е по 10 точки.

Литература

- Линейни диференциални уравнения: проф. дмн Л. Каранджулов (л), гл. ас. Я. Стоянова (у)
- Математически анализ II: доц. д-р Р. Петрова (л), доц. д-р Й. Панева (у)
- Функционален анализ: доц. д-р О. Каменов (л), доц. д-р Г. Венков (у)
- Сайтове: Wikibooks LaTeX, gnuplot tips, Wikipedia, Wolfram MathWorld
- Софтуер: TeX Live, gnuplot, Inkscape, Notepad++, Sumatra PDF, Windows XP