## 12. Въпрос

**Комплексна форма на основните закони за електрически вериги. Мощности при синусоидални режими.**

**Комплексна форма на основните закони за електрически вериги**

При анализа на синусоидални режими в линейни електрически вериги най-често се използва метода с комплексни образи, при което синусоидално изменящите се токове и напрежения се заменят с техните комплексни образи, а реалните резистори, бобини и кондензатори с комплексни съпротивления. Процесите във веригата се описват с уравнения, получени на базата на **основните закони за електрически вериги в комплексна форма.**

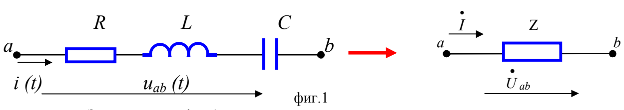
**1. Закон на Ом**

а)Закон на Ом за пасивен участък

Законът на Ом за пасивен участък (фиг.1) от ел. верига се записва в комплексен вид като:

$$\dot I = \frac{\dot U_{ab}}{Z} = \frac{\dot V_a - \dot V_b}{Z},$$

където $\dot I$ и $\dot U$ са съответно комплексите на тока и напрежението в анализирания участък, а $Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$ е комплексното му съпротивление. Потенциалите на възлите ***a*** и ***b*** са означени с $\dot V_a$ и $\dot V_b$. Посоката на тока е от възел "***a***" към възел "***b***" и поради това разглеждаме напрежението $\dot U_{ab} = \dot V_a - \dot V_b$.




фиг.1

За участъка от фиг.1 в сила са съотношенията:

$$i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i);$$
$$u(t) = u_m \sin(\omega t + \psi_u);$$
$$u_m = z.i_m; \quad \psi_u = \psi_i + \varphi;$$
$$z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2};$$
$$\varphi = arctg\frac{(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{R}$$

$\rightarrow$

$$\dot I = I.e^{j\psi_i};$$
$$\dot U = U.e^{j\psi_u};$$
$$\dot I = \frac{\dot U}{Z}; \qquad Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$
$$Z = \frac{\dot U}{\dot I} = \frac{U.e^{j\psi_u}}{I.e^{j\psi_i}} = \frac{U}{I}.e^{j(\psi_u - \psi_i)} = z.e^{j\varphi};$$



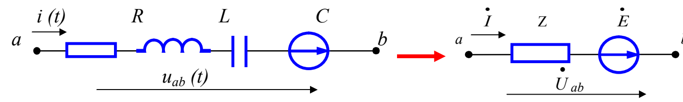
$$\boxed{\dot I = \frac{\dot U}{Z}; \qquad Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

б) Обобщен закон на Ом

Обобщеният закон на Ом се отнася за активен клон на ел. верига (фиг.2). Той се записва в комплексен вид като:

$$\dot I = \frac{\dot U_{ab} + \dot E}{Z} = \frac{\dot V_a - \dot V_b + \dot E}{Z},$$

където $\dot I$, $\dot U$ и $\dot E$ са съответно комплексите на тока, напрежението и електродвижещото напрежение в анализирания участък, а $Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$ е комплексното му съпротивление. Потенциалите на възлите ***a*** и ***b*** са означени с $\dot V_a$ и $\dot V_b$. Посоката на тока е от възел "***a***" към възел "***b***" и поради това разглеждаме напрежението $\dot U_{ab} = \dot V_a - \dot V_b$. Знакът пред $\dot E$ е плюс, тъй като посоките на тока и на източника на е.д.н. съвпадат. Ако посоките бяха различни знакът щеше да е минус.




фиг.2

**2 Закони на Кирхоф**

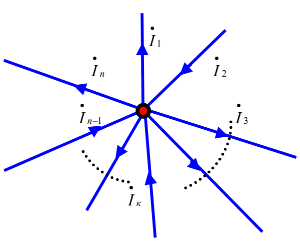
**Всички електрически вериги** (линейни и нелинейни), при произволен характер на изменение на токовете и напреженията **се подчиняват на законите на Кирхоф!**

**При синусоидален режим** законите на Кирхоф могат да се записват в **комплексен вид** относно комплексите на токовете и напреженията**.**

а) I Закон на Кирхоф

$$\sum_{k=1}^{n} \dot I_k = 0$$ **Алгебричната сума** на токовете в даден възел е нула. (Сумата от влизащите е равна на сумата на излизащите от възела токове.)






**Пример**

$$-\dot I_1 + \dot I_2 - \dot I_3 + \ldots + \dot I_k + \ldots + \dot I_{n-1} - \dot I_n = 0$$

**б) II Закон на Кирхоф**

$$\sum_{k=1}^{m} \dot I_k Z_k = \sum_{k=1}^{m} \dot E_k$$

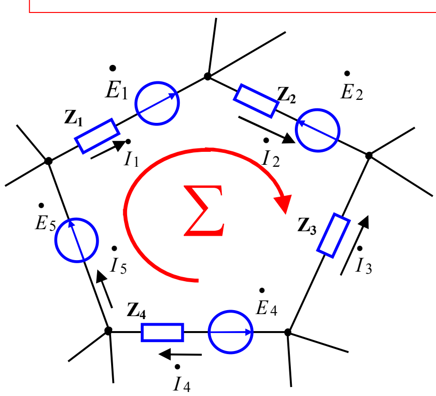
**Алгебричната сума** на напреженията за даден контур е равна на **алгебричната сума** на напреженията на източниците на е.д.н. в контура.

или

(Алгебричната сума на напреженията в произволен затворен контур е нула.)

**Пример**

$$\dot I_1 Z_1 + \dot I_2 Z_2 - \dot I_3 Z_3 + \dot I_4 Z_4 = \dot E_1 - \dot E_2 - \dot E_4 + \dot E_5$$



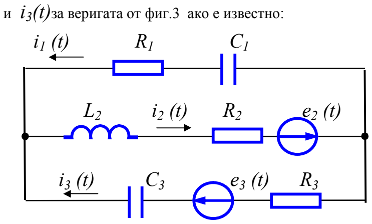



**Пример1.** Анализ на синусоидални режими с използване на законите на Кирхоф (Метод с клонови токове).

Да се определят токовете $i_1(t)$, $i_2(t)$ и $i_3(t)$ за веригата от фиг.3 ако е известно:

$e_2(t)=71sin(1000t+45)V$
$e_2(t)=113sin(1000t+90)V$

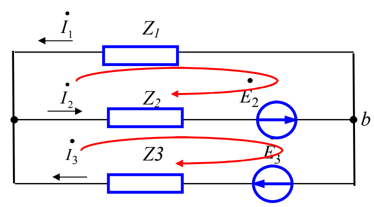
$R_1 = R2=5\Omega$, $R_3 =10\Omega$,
$L_2=10\ mH$,
$C_1=200\mu F$, $C_3=125\mu F$,.




фиг.3

**Решение**

1. Определяме комплексните напрежения на източниците и комплексните съпротивления на веригата (фиг.4):




фиг.4

$$\dot E_2 = E_2 e^{j\psi_{e2}} = \frac{e_{2m}}{\sqrt 2} e^{j\psi_{e2}} = \frac{71}{\sqrt 2} e^{j45} =$$
$$50.(\cos 45 + j\sin 45) = 50.(\frac{\sqrt 2}{2} + j\frac{\sqrt 2}{2}) = (35{,}5 + j35{,}5)V$$

$$\dot E_3 = E_3 e^{j\psi_{e3}} = \frac{e_{3m}}{\sqrt 2} e^{j\psi_{e3}} = \frac{80}{\sqrt 2} e^{j90} =$$
$$80.(\cos 90 + j\sin 90) = 80.(0 + j) = j80V$$

$$\omega = 1000 = 10^3\ rad/s$$

$$Z_1 = R_1 - j\frac{1}{\omega C_1} = 5 - j\frac{1}{10^3.200.10^{-6}} = (5 - j5)\Omega$$

$$Z_2 = R_2 + j\omega L_2 = 5 + j.10^3.10.10^{-3} = (5 + j10)\Omega$$

$$Z_3 = R_3 - j\frac{1}{\omega C} = 10 - j\frac{1}{10^3.125.10^{-6}} = (5 - j8)\Omega$$

2. Определяме брой клонове и брой възли във веригата:

брой възли $n=2$,
брой клонове $m=3$

3. Записваме система уравнения по метода с клонови токове:

- $n\text{-}1=1$ уравнения по I закон на Кирхоф
- $k=m\text{-}n+1=2$ уравнения по II закон на Кирхоф

за възел "$a$":

$$-\dot{I}_1+\dot{I}_2-\dot{I}_3=0$$

за двата контура:

$$\begin{cases} -\dot{I}_1 Z_1-\dot{I}_2 Z_2=-\dot{E}_2 \\ \dot{I}_2 Z_2+\dot{I}_3 Z_3=\dot{E}_2+\dot{E}_3 \end{cases}$$

4. Заместваме със стойности и решаваме системата:

$$\begin{cases} -\dot{I}_1+\dot{I}_2-\dot{I}_3=0 \\ -\dot{I}_1(5-j5)-\dot{I}_2(5+j10)=-(35{,}5+j35{,}5) \\ \dot{I}_2(5+j10)+\dot{I}_3(10-j8)=(35{,}5+j35{,}5)+j80 \end{cases}$$

5. Получаваме комплексите на трите тока:

$\dot{I}_1=(6{,}71-j1{,}375)=6{,}853e^{-j11{,}58}A$

$\dot{I}_2=(6{,}41+j2{,}34)=6{,}82e^{j20{,}04}A$

$\dot{I}_3=(-0{,}3+j3{,}71)=3{,}73e^{j94{,}65}A$

6. Тогава моментните стойности на токовете са:

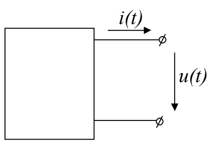
$i_1(t)=I_1\sqrt{2}\sin(\omega t+\psi_1)=6{,}85\sqrt{2}\sin(1000t-11{,}58^0)A$

$i_2(t)=I_2\sqrt{2}\sin(\omega t+\psi_2)=6{,}82\sqrt{2}\sin(1000t+20{,}04^0)A$

$i_3(t)=I_3\sqrt{2}\sin(\omega t+\psi_3)=3{,}73\sqrt{2}\sin(1000t+94{,}65^0)A$

## Мощности при синусоидални режими.

Нека разгледаме участък от верига, като двуполюсник (фиг.5), на изводите на който има напрежение $u(t)$ и ток $i(t)$.




Фиг.5

$u(t)=u_m\sin(\omega t+\psi_u)$,

$i(t)=i_m\sin(\omega t+\psi_i)=i(t)=i_m\sin(\omega t+\psi_u-\varphi)$,

за удобство приемаме $\psi_u=0$ и тогава:

$$\boxed{\begin{aligned} u(t)&=u_m\sin\omega t \\ i(t)&=i_m\sin(\omega t-\varphi) \end{aligned}}$$



За този двуполюсник можем да дефинираме:

1. <u>Моментна мощност - ***p(t)***</u>

Моментната мощност ***p(t)*** се определя като:

$p(t)=u(t).i(t)=u_m\sin\omega t.i_m\sin(\omega t-\varphi)=u_m i_m\sin\omega t.\sin(\omega t-\varphi)=$

$u_m i_m\sin\omega t.[\sin\omega t.\cos\varphi-\cos\omega t.\sin\varphi]=$

$u_m i_m[\sin^2\omega t.\cos\varphi-\sin\omega t\cos\omega t.\sin\varphi]=\dfrac{u_m i_m}{2}[(1-\cos 2\omega t).\cos\varphi-\sin 2\omega t.\sin\varphi]$

$U.I[\cos\varphi-(\cos 2\omega t.\cos\varphi+\sin 2\omega t.\sin\varphi)]=U.I[\cos\varphi-\cos(2\omega t-\varphi)]$

(***U*** и ***I*** са **ефективните** стойности на напрежението и тока)

2. <u>Активна мощност- ***P***</u>

Под активна мощност ***P*** се разбира средната стойност на моментната мощност ***p(t)*** _за време равно на периода ***T*** :

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p(t).dt=\frac{1}{T}\int_0^T U.I[\cos\varphi-\cos(2\omega t-\varphi)].dt=$$

$$U.I\cos\varphi-\frac{1}{T}U.I\underbrace{\int_0^T\cos(2\omega t-\varphi).dt}_{0}$$

0 - интеграл на хармонична функция

$$\boxed{\Rightarrow P=U.I\cos\varphi}$$

***cosφ*** се нарича фактор на мощността.

Единицата за измерване е ват. ***[P]=W***

Активната мощност <u>физически представлява енергията, която се отделя за единица време във вид на топлина</u> за участъка от верига с активно съпротивление ***R***. Действително: .

$$P=U.I\cos\varphi=I^2z.\cos\varphi=I^2R$$

(От триъгълника на съпротивленията е известно, че $R=z.\cos\varphi$ )

3. <u>Реактивна мощност- ***Q***</u>

$Q=U.I\sin\varphi$

Реактивната мощност ***Q*** е енергия, която се обменя между източника и консуматора (за време равно на периода ***T*** се предава 2 пъти от генератора към консуматора и обратно)

Единицата за измерване е вар (волт-ампер реактивни). ***[Q]=VAr***

$$Q=U.I\sin\varphi=I^2z.\sin\varphi=I^2X$$

(От триъгълника на съпротивленията е известно, че $X=z.\sin\varphi;\quad X=X_L-X_C$ )

4. <u>Пълна мощност- ***S***</u>

$S=U.I$



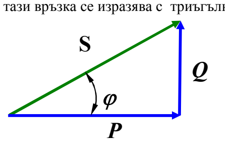
Пълната мощност ***S*** характеризира тази мощност, която източника би отдавал на потребителя при ***cosφ =1***

Единицата за измерване е волт-ампер ***[S]=VA***

Между активната и реактивната мощности съществува следното съотношение:

$$S^2=P^2+Q^2$$

Графически тази връзка се изразява с триъгълника на мощностите ( фиг.6)




фиг.6

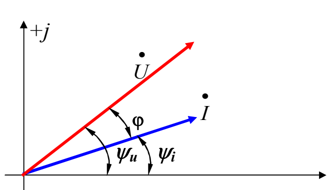
5. <u>Комплексна мощност-</u> $\dot{S}$

Ако комплексите на напрежението и тока (фиг.7 ). са съответно:

$$\dot{U}=Ue^{j\psi_u}$$

и $\dot{I}=Ie^{j\psi_i}$

Спрегнатата стойност на тока е $\overset{*}{I}=Ie^{-j\psi_i}$ .




\+

фиг.7

Нека разгледаме произведението:

$$\dot{S}=\dot{U}.\overset{*}{I}=Ue^{j\psi_u}.Ie^{-j\psi_i}=UIe^{j(\psi_u-\psi_i)}=UIe^{j\varphi}=$$

$$=UI\cos\varphi+UI\sin\varphi=P+jQ$$

Произведението $\dot{S}=\dot{U}.\overset{*}{I}=P+jQ$ се нарича комплексна мощност. Съответно активната и реактивната мощности могат да се получат като:



$$P=\mathrm{Re}[\dot{S}]$$

$$Q=\mathrm{Im}[\dot{S}]$$

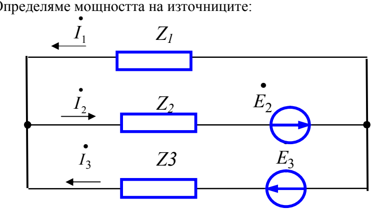
<u>**Пример2.**</u> За веригата от <u>Пример1</u> да се направи баланс на мощностите:

<u>**Решение**</u>

Да се направи баланс на мощностите означава да се направи проверка дали мощността на източниците е равна на мощността на консуматорите.

$$\sum\dot{S}_{изт}=\sum\dot{S}_{конс}$$

1. Определяме мощността на източниците:




Тогава мощността на източниците $\sum\dot{S}_{изт}=\dot{S}_{E_2}+\dot{S}_{E_3}$

$\dot{E}_2=(35{,}5+j35{,}5)V$ $\qquad\dot{I}_2=(6{,}41+j2{,}34)A$

$\dot{E}_3=j80V$ $\qquad\dot{I}_3=(-0{,}3+j3{,}71)A$

( Знакът е минус защото токът и напрежението имат различни посоки)

$\dot{S}_{E_2}=-\dot{E}_2.\overset{*}{I}_2=(35{,}5+j35{,}5)(6{,}41-j2{,}34)$

$\dot{S}_{E_3}=\dot{E}_3.\overset{*}{I}_3=j80.(-0{,}3-j3{,}72)$

$\sum\dot{S}_{изт}=(606{,}4+j120)VA$

2. Определяме мощността на консуматорите:

$\sum\dot{S}_{конс}=Z_1I_1^2+Z_2I_2^2+Z_3I_3^2=$

$(5-j5)(6{,}71^2+1{,}375^2)+(5+j10)(6{,}41^2+2{,}34^2)+(10-j8)(0{,}3^2+3{,}72^2)=$

$(606{,}4+j120)VA$

Следователно се получава баланс на мощностите, а именно:

$$\sum\dot{S}_{изт}=\sum\dot{S}_{конс}=(606{,}4+j120)VA$$

3. Можем да определим и активната и реактивна мощности:

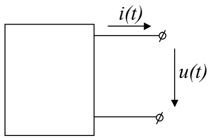
$P = \mathrm{Re}[\dot{S}] = 606{,}4W$

$Q = \mathrm{Im}[\dot{S}] = 120VAr$

## 13. Въпрос

**Еквивалентни схеми на пасивен двуполюсник от последователен и паралелен тип при синусоидален режим. Взаимно преминаване.**

Ако разгледаме участък от верига, като пасивен двуполюсник, на изводите на който има напрежение $u(t)$ и ток $i(t)$.




$u(t) = u_m \sin(\omega t + \psi_u)$,

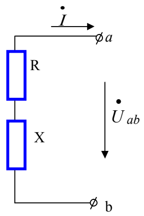
$i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i) = i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi)$ ,

за удобство приемаме $\psi_u = 0$ и тогава:

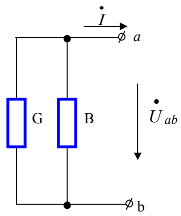
$$\boxed{\begin{aligned} u(t) &= u_m \sin\omega t \\ i(t) &= i_m \sin(\omega t - \varphi) \end{aligned}}$$

Този двуполюсник може се представи със заместващи схеми от последователен и от паралелен тип.

Заместваща схема от последователен тип




Заместваща схема от паралелен тип




В сила са съотношенията:

$\dot{I} = \dfrac{\dot{U}_{ab}}{Z}$, където: $Z = R + jX$

$\dot{I} = Y.\dot{U}_{ab}$, където: $Y = G - jB$



От единия вид заместваща схема може да се премине към другия по следния начин:

$$\boxed{G = \frac{R}{R^2+X^2},\quad B = \frac{X}{R^2+X^2}} \longrightarrow \boxed{R = \frac{G}{G^2+B^2},\quad X = \frac{B}{G^2+B^2}}$$

**Доказателство:**

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R+jX} = \frac{1}{(R+jX)}\frac{(R-jX)}{(R-jX)} = \frac{R}{R^2+X^2} - j\frac{X}{R^2+X^2} = G - jB$$

$$\Rightarrow G = \frac{R}{R^2+X^2},\quad B = \frac{X}{R^2+X^2}$$

Аналогично:

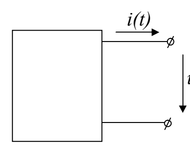
$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{G-jB} = \frac{1}{(G-jB)}\frac{(G+jB)}{(G+jB)} = \frac{G}{G^2+B^2} + j\frac{B}{G^2+B^2} = R + jX$$

$$\Rightarrow R = \frac{G}{G^2+B^2},\quad X = \frac{B}{G^2+B^2}$$

## 14. Въпрос

**Резонанс. Напрежителен резонанс в R, L, C двуполюсник от последователен тип**

Резонансът е такова състояние на една пасивна ел.верига, включваща поне 1 бобина и поне 1 кондензатор, при което входният ток и входното напрежение съвпадат по фаза.

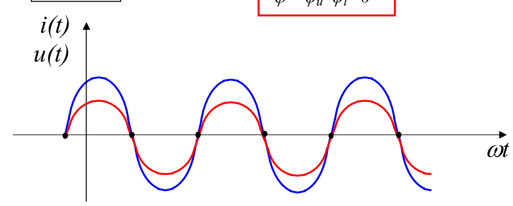



$u(t) = u_m \sin(\omega t + \psi_u)$,

$i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i)$

**Фазово условие за резонанс**

$$\boxed{\varphi = \psi_u - \psi_i = 0}$$




По отношение на външната верига двуполюсникът има поведение на активно съпротивление.

**Реактивната мощност** на двуполюсника при това е равна на нула- т.е. между генератора и консуматора няма енергийни колебания. Такива колебания се осъществяват само между консервативните елементи, като общата сума от електрическата и и магнитна енергии, съсредоточени в консервативните елементи на веригата има неизменна големина във времето.



**Резонанс може да се постигне или чрез**:

- изменение на параметрите на веригата или
- изменение на честотата на входния сигнал.

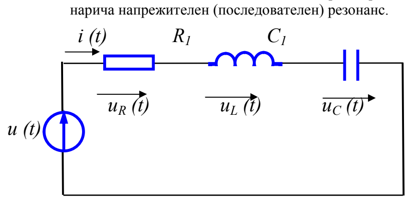
Амплитудата на входния сигнал не оказва влияние върху резонансните явления.
При определени условия обаче резонансните хармонични колебания могат да имат много по- голяма амплитуда от амплитудата на входния сигнал.

Различават се два вида резонансни режими:

- напрежителен (последователен) резонанс
- токов (паралелен) резонанс

**Напрежителен резонанс в R, L, C двуполюсник от последователен тип**

Резонанс в схема на последователно свързани резистор, бобина и кондензатор (фиг.8) се нарича напрежителен (последователен) резонанс.




фиг.8

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$

$$\Rightarrow \dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C =$$

$$= \dot{I}R + \dot{I}j\omega L + \dot{I}\left(-\frac{1}{j\omega C}\right) =$$

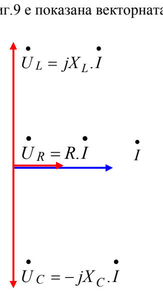
$$= \dot{I}\left(R + j\omega L - \frac{1}{j\omega C}\right) =$$

$$= \dot{I}Z = \dot{I}(R_{екв} + jX_{екв})$$

За да има веригата поведение на активно съпротивление е необходимо $Z = R_{екв} + j\overset{\nearrow 0}{X_{екв}}$, т.е. реактивното съпротивление:

$\boldsymbol{\varphi = 0} \;\Rightarrow\; \boxed{X_{екв} = 0}$ - **условие за напрежителен резонанс**

На фиг.9 е показана векторната диаграма при напрежителен резонанс:




$$\dot{U} = \dot{U}_R + (\overset{\nearrow 0}{\dot{U}_L + \dot{U}_C}) = \dot{U}_R$$

(напреженията на бобината и кондензатора са равни по големина $\boldsymbol{U_L = U_C}$ и обратни по посока).

Те **могат да бъдат и много по-големи** от входното напрежение $\boldsymbol{U_{вх} = U_R}$



От условието $\boldsymbol{X_{екв}} = 0$, следва че:

$X_{екв} = X_L - X_C = 0$

$\Rightarrow X_L = X_C$ , където $\omega_p$ е резонансната честота за веригата от фиг.8

$\Rightarrow \omega_p L = \dfrac{1}{\omega_p C}$

**Резонансната честота** може да се определи като $\omega_p = \dfrac{1}{\sqrt{L.C}}$. В точката на резонанса съпротивлението на участъка е минимално $\boldsymbol{Z = R}$ и съответно тока при напрежителен резонанс е максимален: $\dot{I}_p = \dfrac{\dot{U}}{Z} = \dfrac{\dot{U}}{R}$.

**Характеристично съпротивление** е съпротивлението $\rho = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$, определено по следния начин :

$$X_L = X_C = \omega_p L = \frac{1}{\sqrt{LC}}.L = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$$

**Качествен фактор** е величината $Q = \dfrac{\rho}{R}$, която показва колко пъти напрежението върху реактивните елементи $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{C}$ е по голямо от входното напрежение :

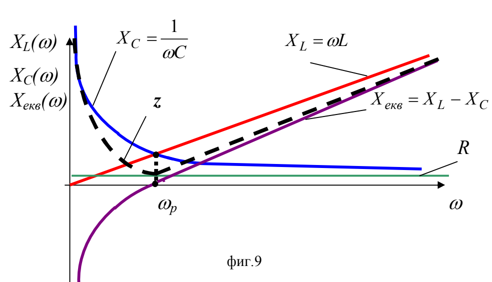
$$Q = \frac{U_L}{U_{вх}} = \frac{U_C}{U_{вх}} = \frac{\omega_p L.I}{R.I} = \frac{\omega_p L}{R} = \frac{1/\omega_p C}{R} = \frac{\rho}{R}$$

**Честотни характеристики**

Зависимостта на даден параметър от честотата е честотна характеристика .За да получим честотните характеристики ще разгледаме как се променят параметрите на веригата при изменение на честотата $\boldsymbol{\omega}$ от нула към безкрайност $(\boldsymbol{\omega = 0 \div \infty})$.

При този анализ приемаме, че амплитудата на входното напрежение не зависи от честотата ($\boldsymbol{U_m}$ = const), както и че R=const, L=const, C=const.

На фиг.9 са показани **честотните зависимости на съпротивленията** във веригата.




фиг.9

$X_L = \omega L;\quad X_C = \dfrac{1}{\omega C}$

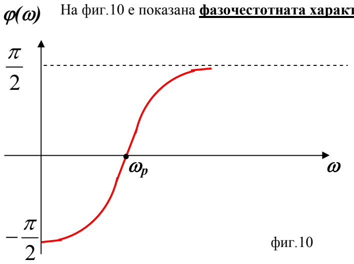
$X_{екв} = \omega L - \dfrac{1}{\omega C}$

$z = \sqrt{R^2 + X_{екв}^{\,2}}$

$\boldsymbol{\omega = \omega_p \Rightarrow X_{екв} = 0,\; z = R}$

$\boldsymbol{\omega < \omega_p \Rightarrow}$ вх. съпрот. има капацитивен характер

$\boldsymbol{\omega > \omega_p \Rightarrow}$ вх. съпрот. има индуктивен характер




На фиг.10 е показана **фазочестотната характеристика**

$$\varphi = arctg\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

фиг.10

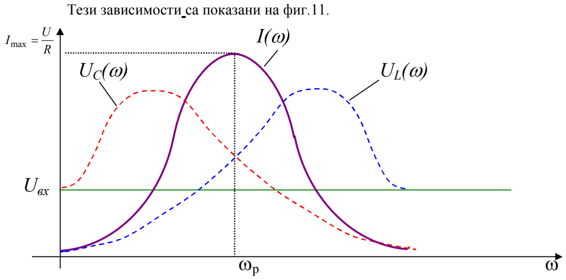
**Ефективни стойности на напреженията $U_L$, $U_C$ и тока $I$, в зависимост от честотата**

За двуполюсника от фиг.8 може да се определи ефективната стойност на тока $I$ и напреженията $U_L$, $U_C$:

$$I(\omega)=\frac{U}{z(\omega)}=\frac{U}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}};$$

$$U_L=I(\omega).\omega L=\frac{U.\omega L}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}};\quad U_C=I(\omega).\frac{1}{\omega C}=\frac{U}{\omega C.\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}$$

Тези зависимости са показани на фиг.11.




фиг.11

Нека разгледаме как се изменят тези величини при промяната на ***ω***.

1. $\omega=0 \quad \Rightarrow X_C=\frac{1}{\omega C}\to\infty \quad \Rightarrow I=0,\quad U_C=U_{вх}$ .Следователно не протича ток, а входното напрежение е приложено върху кондензатора.

2. $\omega=0\div\omega_p \quad \Rightarrow X_C\downarrow,\quad X_L\uparrow$ токът нараства



3. $\omega=\omega_p \quad \Rightarrow X_C=X_L\Rightarrow X_{екв}=0 \quad I_p=I_{max}=\frac{U}{R}$ токът е максимален- има резонанс

4. $\omega=\omega_p\div\infty \quad \Rightarrow X_L=\omega L\to\infty \quad \Rightarrow I=0,\quad U_L=U_{вх}$ Следователно не протича ток, а входното напрежение е приложено върху бобината.

**Съпоставяне на резонансните качества на отделни контури**

За да се съпоставят резонансните качества на отделните контури, честотната характеристика $I(\omega)$ се представя в относителни единици $F_I(\frac{\omega}{\omega_p})=\frac{I}{I_p}$, където

$I_p=\frac{U}{R},\quad I=\frac{U}{z},\quad z=\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}$ .

Можем да изразим импеданса $z$ като функция зависеща от отношението $\frac{\omega}{\omega_p}$.

Комплексното съпротивление $Z=R+j(\omega L-\frac{1}{\omega C})=R+j(\frac{\omega}{\omega_p}.\omega_p L-\frac{\omega_p}{\omega}\frac{1}{\omega_p C})$.

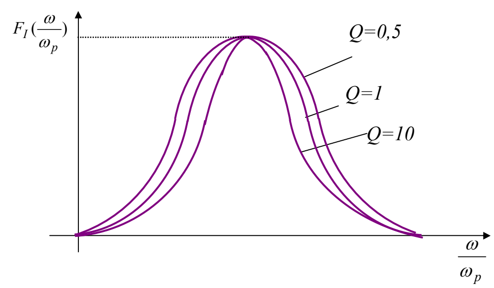
Но както вече знаем характеристичното съпротивление е $\rho=\omega_p L=\frac{1}{\omega_p C}$. Тогава

$$Z=R+j(\frac{\omega}{\omega_p}.\rho-\frac{\omega_p}{\omega}\rho)=R+j\rho(\frac{\omega}{\omega_p}-\frac{\omega_p}{\omega})$$

$$\Rightarrow z=\sqrt{R^2+\rho^2(\frac{\omega}{\omega_p}-\frac{\omega_p}{\omega})^2}=R\sqrt{1+Q^2(\frac{\omega}{\omega_p}-\frac{\omega_p}{\omega})^2}.$$

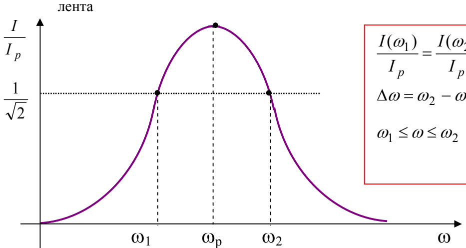
Тогава честотната характеристика $F_I(\frac{\omega}{\omega_p})$ се определя като

$$F_I(\frac{\omega}{\omega_p})=\frac{I}{I_p}=\frac{U}{z}.\frac{R}{U}=\frac{R}{z}=\frac{R}{R\sqrt{1+Q^2(\frac{\omega}{\omega_p}-\frac{\omega_p}{\omega})^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2(\frac{\omega}{\omega_p}-\frac{\omega_p}{\omega})^2}}.$$






**Извод:** Резонансната крива на тока зависи изключително много от ***Q*** фактора на веригата. Колкото по-малко е съпротивлението ***R*** в контура, т.е. колкото ***Q*** фактора е по-голям толкова кривата на тока е по- остра (пикообразна). На фиг.12 са показани граничните честоти $\omega_1$ и $\omega_2$, за които ефективната стойност на тока става $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Те определят честотната лента




$$\frac{I(\omega_1)}{I_p}=\frac{I(\omega_2)}{I_p}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Delta\omega=\omega_2-\omega_1$$

$$\omega_1\le\omega\le\omega_2 \quad \Leftrightarrow \frac{I}{I_p}\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$$

фиг.12

В точките на гранични честоти $\omega_1$ и $\omega_2$, отделената в резистора мощност е равна на половината от максималната мощност отделена при резонанс.

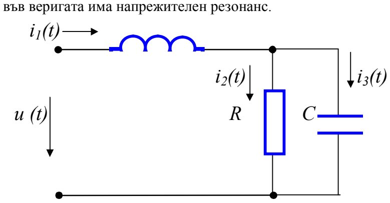
**Доказателство**

$$P(\omega_p)=I_p^2R$$

$$P(\omega_1)=I(\omega_1)^2R=(\frac{I_p}{\sqrt{2}})^2R=\frac{I_p^2}{2}R=\frac{P(\omega_p)}{2}$$

**Пример за определяне на резонансен параметър:** Да се определи стойността на капацитета C (фиг.13 ) за която във веригата има напрежителен резонанс.

*f=160Hz,*
*R = 10Ω, L=5 mH,*




фиг.13

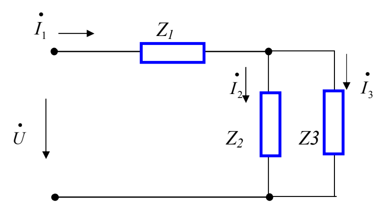
## Решение

За да има резонанс във веригата е необходимо еквивалентното реактивно съпротивление да бъде нула, т. е

$$X_{екв}=0$$

Определяме еквивалентното съпротивление на веригата:






фиг.14

$$\omega=2\pi f=2\pi.160\approx1000=10^3\,rad/s$$

$$Z_1=j\omega L=j.10^3.5.10^{-3}=j5\Omega$$

$$Z_2=R=10\Omega$$

$$Z_3=-j\frac{1}{\omega C}=-jX_C$$

$$Z_{екв}=Z_1+\frac{Z_2Z_3}{Z_2+Z_3}$$

$$\Rightarrow \quad Z_{екв}=j5+\frac{10.(-jX_C)}{10-jX_C}=j5+\frac{10.(-jX_C)(10+jX_C)}{(10-jX_C)(10+jX_C)}=$$

$$=j5+\frac{10.(-jX_C)(10+jX_C)}{100+X_C^2}=j5-j\frac{100.X_C}{100+X_C^2}+\frac{10.X_C^2}{100+X_C^2}=$$

$$=\frac{10.X_C^2}{100+X_C^2}+j(5-\frac{100.X_C}{100+X_C^2})=R_{екв}+jX_{екв}$$

където $R_{екв}=\frac{10.X_C^2}{100+X_C^2};\quad X_{екв}=(5-\frac{100.X_C}{100+X_C^2})$

но за да има резонанс $X_{екв}=(5-\frac{100.X_C}{100+X_C^2})=0$

$$\Rightarrow 5(100+X_C^2)-100X_C=0$$

$$\Rightarrow 5X_C^2-100X_C+500=0$$

$$\Rightarrow X_C^2-20X_C+100=0$$

$$\Rightarrow X_C=\frac{20\pm\sqrt{400-400}}{2}=10\Omega$$

$$\Rightarrow C=\frac{1}{\omega X_C}=\frac{1}{10^310}=10^{-4}F=100.10^{-6}F=100\mu F$$