РЕШАВАНЕ НА ИНЖЕНЕРНИ ЗАДАЧИ С MATLAB И SIMULINK

dimitrova@tu-sofia.bg

pct.tu-sofia.bg/dd/pik3

ЧИСЛЕНО ИНТЕГРИРАНЕ

Числено интегриране

- Определен интеграл

$$q = \int_a^b f(x)dx$$

- Числено интегриране - изчисляване на площта под графиката на функцията дефинирана в ограничен интервал

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; F(x) = F(b) - F(a)$$

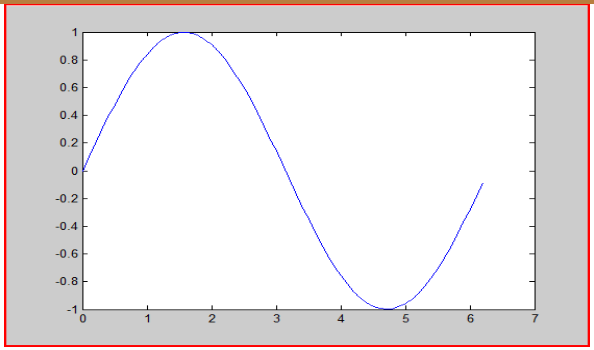
Функции за числено интегриране

- trapz() – метод на трапеците
- quad() – метод на Симпсън
- quadl() - метод на Лобато

Функции за числено интегриране

```
>> x=0:0.1:2*pi;
>> y=sin(x);
>> trapz(x,y)
ans =
   1.9835
```

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)dx$$




```
>> x=0:0.05:2*pi;
>> y=sin(x);
>> trapz(x,y)
ans =
  5.5047e-004
```

по-малки трапеци

по-голяма точност

Функции за числено интегриране

- quad('f',a,b) – изчислява определен интеграл от f(x) от a до b с относителна грешка 1e-6
  - 'f' – символен низ, съдържащ името на функцията
- quad('f',a,b,tol) – интегрира, докато се достигне зададена грешка tol
  - подразбиращи се tol и trace се предават в празна матрица []
- quad('f',a,b,tol,trace)
  - trace - при ненулева стойност на trace се извевдат междинни данни от процеса на интегриране
- quad('f',a,b,tol,trace,p1,p2,...) – позволява директно предаване на параметрите p1,p2,... към функцията f(x,p1,p2,...)

Функции за числено интегриране

```
>> quad('sin',0,2*pi,1e-6)

ans =

     0
```

```
>> quadl('sin',0,2*pi,1e-6)

ans =

  1.7588e-016
```

по-голяма точност

Приложение

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$$

Изчисление на ∏

```
function y=p(x)
y=4./(1.+x.^2);
» q=quad('p',0,1);
» q
q =
3.1416
```

Приложение за анализ на променлив ток

- Ако *u(t)* и *i(t)* са периодични сигнали с период Т,

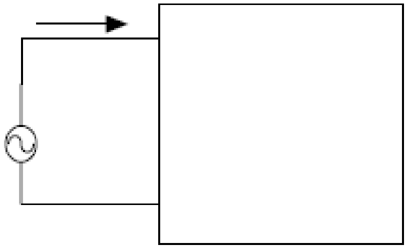
  p(t) = u(t) i(t) – *мощност*

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt}$$ – **ефективна стойност на напрежението**

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}$$ – **ефективна стойност на тока**

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt$$ – **средна мощност**

$$pf = \frac{P}{U_{eff} I_{eff}}$$ – **фактор на мощността**



Ако $u(t)$ **и** $i(t)$ **са синусоидални:**

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$
$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

то:

$$U_{eff} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

$$I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$P = U_{eff} I_{eff} \cos(\varphi_u - \varphi_i)$$
$$pf = \cos(\varphi_u - \varphi_i)$$

$Q = U_{eff} I_{eff} \sin(\varphi_u - \varphi_i)$ **– реактивна мощност**

$$S = P + jQ$$
$S = U_{eff} I_{eff} [\cos(\varphi_u - \varphi_i) + j \sin(\varphi_u - \varphi_i)]$ **– комплексна мощност**

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ **– кръгова честота**

$\alpha^\circ \Rightarrow \frac{\alpha\pi}{180}[rad]$ **– преобразуване на ъгъл от градуси в радиани**

Решаване с MatLab

- Аналитично и числено изчисляване на средната мощност, ефективните стойности на напрежението и тока, фактора на мощността, ако
  - $u(t) = 10\cos(120\pi t + 60°)$
  - $i(t) = 6\cos(120\pi t + 30°)$

Функции

voltage.m

```
function u2=voltage(t)
u2=(10*cos(120*pi*t+60*pi/180)).^2;
```

u2 (t) = (10cos(120πt + 60°))2

current.m

```
function i2=current(t)
i2=(6*cos(120*pi*t+30*pi/180)).^2;
```

i 2 (t) = (6cos(120πt + 30°))2

power_average.m

```
function p=power_average(t)
i=6*cos(120*pi*t+30.0*pi/180);
u=10*cos(120*pi*t+60.0*pi/180);
p=i.*u;
```

p(t) = u(t)i(t)

```
w=120*pi; % кръгова честота
T=2*pi/w; % период на синусоидата

% Числено решение
a=0; % долна граница на интеграла
b=T; % горна граница на интеграла
u=quad('voltage',a,b);
Ueff=sqrt(u/T);
i=quad('current',a,b);
Ieff=sqrt(i/T);
p=quad('power_average',a,b);
P=p/T;
pf=P/(Ueff*Ieff);

% Аналитично решение
Ueffa=10/sqrt(2);
Ieffa=6/sqrt(2);
Pa=Ueffa*Ieffa*cos(30*pi/180);
pfa=cos(30*pi/180);

% Извеждане на резултатите
disp('Ueff'),disp(Ueff),disp(Ueffa);
disp('Ieff'),disp(Ieff), disp(Ieffa);
disp('P'), disp(P),disp(Pa);
disp('pf'),disp(pf),disp(pfa);
```

Резултати:

Ueff

7.0711

7.0711

Ieff

4.2426

4.2426

P

25.9808

25.9808

pf

0.8660

0.8660

ЧИСЛЕНО РЕШАВАНЕ НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ

Дирефенциране

- Дирефенциране на функция
  - изследване на графиката на функцията в различни точки
  - описание на наклона на функцията
  - чувствително на изменения

diff(f)	Връща $\frac{df}{dx}$, x е подразбиращата се символна променлива
diff(f,n)	Връща $\frac{d^n f}{dx^n}$, x е подразбиращата се символна променлива
diff(f,x,n)	Връща $\frac{d^n f}{dx^n}$, x е явно зададена символна променлива

- Приложимост на числено диференциране
  - не е подходящо за изследване на експериментални данни
  - може да се замени с метода на най-малките квадрати

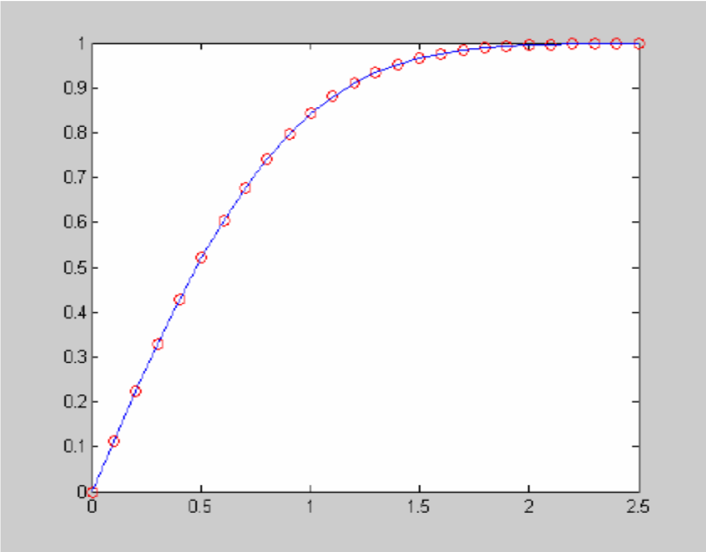
Метод на най-малките квадрати

1. Методът се прилага за намиране на подходящата крива, за която сумата на квадратите на разликите между наблюдаваните и теоретичните стойности е най-малка
2. Търси се резултатният полином

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1$$

Апроксимиране с полиноми

- p=polyfit(x,y,n)
  - x,y – данните, които се апроксимират
  - n – степен на полинома
  - p – вектор-ред с дължина n+1, съдържа коефициентите на полинома в намаляващ ред, който апроксимира p(x(i)) към y(i)



Приложение

```
» x=0:0.1:1;
» y=[-0.447 1.978 3.28 6.16 7.08 7.34 7.66 9.56 9.48 9.30 11.2];
% полином от 2 степен
» p=polyfit(x,y,2)
p =
    -9.8108   20.1293   -0.0317
%производна на полинома
» pd=polyder(p)
pd =
    -19.6217   20.1293
%стойност на полинома за x=0.5
» slope_of_p=polyval(pd,0.5)
slope_of_p =
    10.3185
```

Приложение за изследване на променлив ток

Комплексна форма на напреженията и токовете

$$z = x + jy = A\cos(\theta) + jA\sin(\theta) = Ae^{j\theta} = \mathrm{Re}(z) + j\,\mathrm{Im}(z)$$

$A = \sqrt{x^2 + y^2}$ **– амплитуда**

$\theta = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ **– начална фаза**

Ако $u(t) = U_m e^{\sigma t}\cos(\omega t + \varphi)$ **, то** $u(t) = \mathrm{Re}(\dot{U})$ **,**

$\dot{U}$ **– комплексно напрежение.**

$$u(t) = U_m e^{\sigma t}\cos(\omega t + \varphi) \leftrightarrow \dot{U} = U_m e^{\sigma t} e^{j(\omega t + \varphi)} = U_m e^{j\varphi} e^{(\sigma + j\omega)t}$$

$U = U_m e^{j\varphi}$ **– комплексна амплитуда на напрежението**

$s = \sigma + j\omega$ **– комплексна честота**

Ако $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ **е напълно синусоидално,**

$s = j\omega$

Предавателна функция

Комплексно честотно представяне

$$H(s)=\frac{U_{изх}}{U_{вх}}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}$$

– предавателна функция

$$H(s)=\frac{k(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$

– разлагане на множители

k **– константа**

$z_1, z_2, \ldots, z_m$ **– нули**

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ **– полюси**

$$H(s)=\frac{r_1}{s-p_1}+\frac{r_2}{s-p_2}+\ldots\frac{r_n}{s-p_n}+k(s)$$

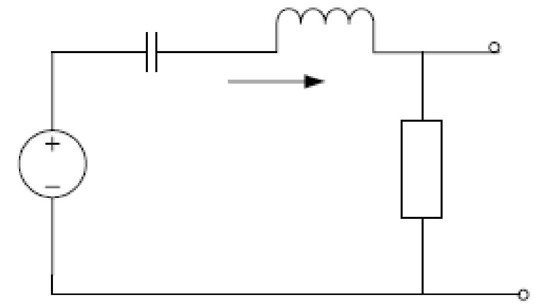
– дробни части

Пример

RLC верига

$$H(s)=\frac{u_{изх}(t)}{u_{вх}(t)}=\frac{i(t)R}{u_{вх}(t)}=\frac{u_{вх}(t)R}{Z_{екв}u_{вх}(t)}$$

$$H(s)=\frac{R}{R+sL+\frac{1}{sC}}=\frac{sRC}{sRC+s^2LC+1}$$



$u_{вх}(t) = 10e^{-3t}\cos(2t + 40°)$

$$H(s)=\frac{s\frac{R}{L}}{s^2+s\frac{R}{L}+\frac{1}{LC}}$$ – **предавателна функция**

$u_{вх}(t)=10e^{-3t}\cos(2t+40^\circ)$ **=> комплексна честота** $s=-3+j2$

$U_{вх}=U_{вхm}e^{j\varphi}=10e^{j\frac{40\pi}{180}}$ – **комплексна амплитуда на входното напрежение**

$U_{изх}=U_{вх}H(s)\big|_{s=-2+j2}=U_m e^{j\varphi}$ – **комплексна амплитуда на изходното напрежение**

Изчисляване на предавателната функция

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{R(1)}{s - P(1)} + \frac{R(2)}{s - P(2)} + \ldots + \frac{R(n)}{s - P(n)} + K(s)$$

- [R,P,K] = residue(B,A)
  - num – вектор-ред, съдържа коефициентите на полинома-числител в намаляващ ред
  - den – вектор-ред, съдържа коефициентите на полинома-знаменател в намаляващ ред
  - r – вектор-стълб, съдържа остатъците от частното на num и den
  - p – вектор-стълб, съдържа полюсите
  - k – вектор-ред, съдържа директните изрази

Решение в MatLab

```
R=10;L=10e-3;C=100e-6;
% Разлагане на множители на предавателната функция
num=[R/L 0];
den=[1 R/L 1/(L*C)];
z=roots(num); % нули
p=roots(den); % полюси
% изчислените величини
disp('z'),disp(z);
disp('p'),disp(p);
% разлагане на дроби на предавателната функция
[r,p,k]=residue(num,den);
disp('r'),disp(r), disp('p'),disp(p);
disp('k'),disp(k);
```

```
% Стойност на предавателната функция при дадена комплексна честота s
s=-3+j*2;
n=polyval(num,s);
d=polyval(den,s);
% Изходно напрежение
% комплексна амплитуда
Uout=10*exp(j*40*pi/180)*n/d;
% амплитуда
Um=abs(Uout);
% начална фаза в градуси
fi=angle(Uout)*180/pi;
disp('Um'), disp(Um);
disp('fi'),disp(fi);
```

Резултати

z

0

p

1.0e+002 *

-5.0000 + 8.6603i

-5.0000 - 8.6603i

$$H(s) = \frac{s}{\left[s - 100(-5 + j8.66)\right]\left[s - 100(-5 - j8.66)\right]}$$

r

1.0e+002 *

5.0000 + 2.8868i

5.0000 - 2.8868i

$$H(s) = \frac{100(5 + j2.8868)}{s - 100(-5 + j8.66)} + \frac{100(5 - j2.8868)}{s - 100(-5 - j8.66)}$$

p

1.0e+002 *

-5.0000 + 8.6603i

-5.0000 - 8.6603i

k

Um

0.0362

fi

-173.8043

$$U_m = 0.0362V, \varphi = -173.8043^\circ;$$

$$u_{изх}(t) = 0.0362e^{-3t}\cos(2t - 173.8043^\circ)$$

Диференциални уравнения

- Числено решаване на обикновени диференциални уравнения
  - не всички имат аналитични решения
  - нелинейните
- Представяне
  - като система от уравнения от 1 ред
- Подход
  - разбиват се в малки сегменти от време, стъпки h
  - търси се числено решение за сегмента
  - има грешки, които зависят от метода и стъпката

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Диференциални уравнения

- Методи
  - Dormand-Prince (ODE5)
  - fourth-order Runge-Kutta (ODE4)
  - improved Euler (ODE2)
  - Euler (ODE1)
  - Bogacki-Shampine (ODE3) и др.
- Грешка
  - ODE5 – пропорционална на h^5
  - ODE4 - h^4 и т.н.
- Реализация в MatLab
  - y'=f(t,y)
    - ode45, ode23, ode113, ode15s, ode23s, ode23t, ode23tb
  - my'=f(t,y), m(t)y'=f(t,y)
    - ode15s, ode23s, ode23t и ode23tb

Използване на функциите

[t,y]=*ode_function*('f',tspan,yo)

[t,y]=*ode_function*('f',tspan,yo,options)

[t,y]=*ode_function*('f',tspan,yo,options,p1,p2,...)

- f е името на .m файла, който съдържа функцията f(t,y) и връща вектор-стълб;
- function dydt = f(t,y)
  - където t е скалар, dydt и y са вектор-стълбове.
- tspan - вектор, определящ интервала [t0 tfinal];
- yo - вектор, определя началните условия;
- options - незадължителен параметър, който се създава чрез функцията odeset;
- p1,p2,... - незадължителни параметри, които се предават на f;
- [t,y] - матрица на решението

Пример

Уравнение на Ван дер Пол

$$\frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} - \mu\left(1 - y_1(t)^2\right)\frac{dy_1(t)}{dt} + y_1(t) = 0$$

представено като система от ДУ от 1 ред

$$\left|\begin{aligned} &\frac{dy_1(t)}{dt} = y_2(t) \\ &\frac{dy_2(t)}{dt} = \mu\left(1 - y_1(t)^2\right)y_2(t) - y_1(t) \end{aligned}\right.$$

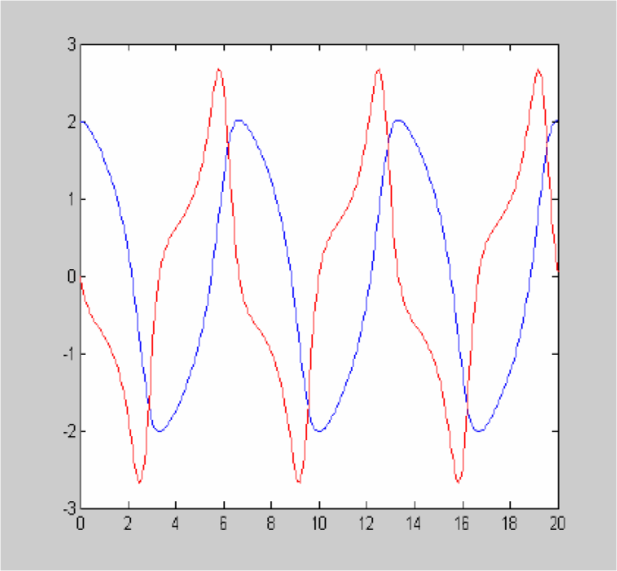
с начални условия

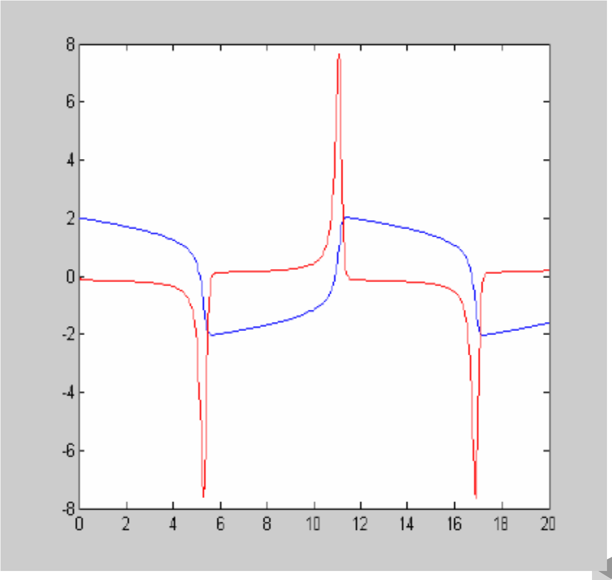
$$\left|\begin{aligned} &y_1(t = 0) = 2 \\ &y_2(t = 0) = 0 \end{aligned}\right.$$

Решаване в MatLab

```
function dy=vdp(t,y) % u=0
dy=zeros(2,1);
dy(1)=y(2);
dy(2)=(1-y(1)^2)*y(2)-y(1);
% t=0 до 20s
t0=0; tfinal=20;
y0=[2; 0]; % начални условия
[t,y]=ode45('vdp',[t0 tfinal],y0);
plot(t,y(:,1),'b',t,y(:,2),'r')
```

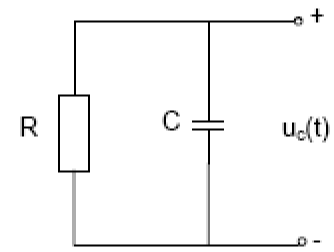
```
function dy=vdp(t,y,options,u)
dy=zeros(2,1);
dy(1)=y(2);
dy(2)=u*(1-y(1)^2)*y(2)-y(1);
% t=0 до 20s
t0=0; tfinal=20;
y0=[2; 0]; % начални условия
[t,y]=ode45('vdp',[t0 tfinal],y0,[],5);
plot(t,y(:,1),'b',t,y(:,2),'r')
```





Приложение за анализ на преходни процеси

- RC верига
  - разреждане на кондензатор
  - U_m – начално заредено състояние
  - аналитично решение



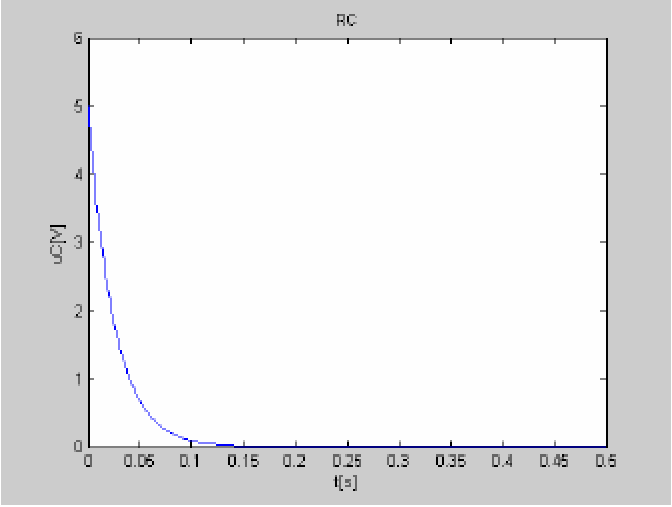
$$\boxed{u_C(t) = U_m e^{-\frac{t}{RC}}}$$

$$i_C(t) + i_R(t) = 0$$

$$C\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{R} = 0$$

$$\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{RC} = 0$$

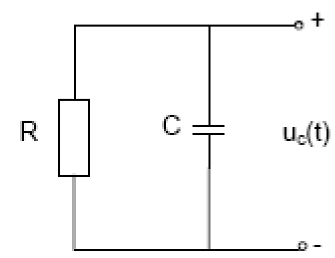
$$\boxed{\frac{du_C(t)}{dt} = -\frac{u_C(t)}{RC}}$$



$\tau = RC$

Приложение за анализ на преходни процеси

- RC верига
  - зареждане на кондензатор
  - $u_C(t)\big|_{t=0} = 0$ – начално състояние
  - аналитично решение



$$i_C(t) + i_R(t) = 0$$

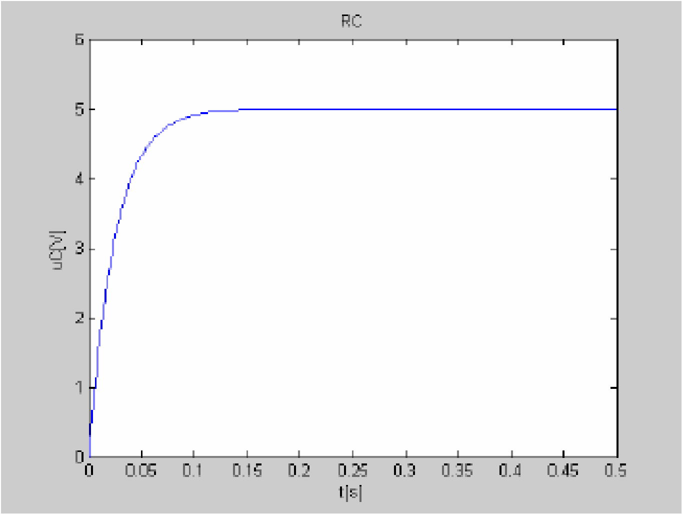
$$C\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t) - E}{R} = 0$$

$$\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t) - E}{RC} = 0$$

$$\boxed{\frac{du_C(t)}{dt} = -\frac{u_C(t) - E}{RC}}$$

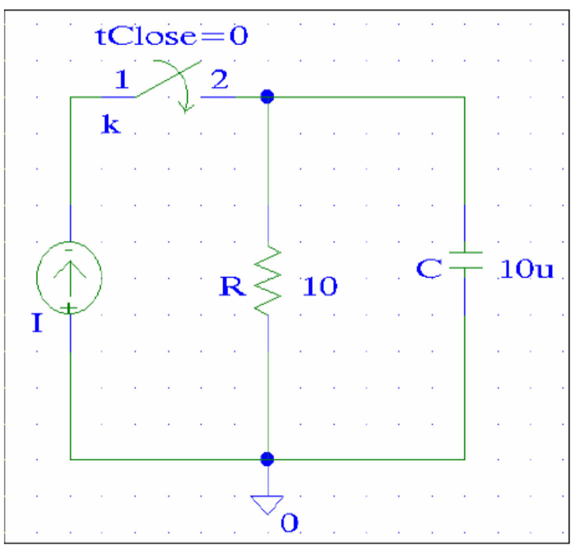
$$\boxed{u_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$$

$\tau = RC$



Пример

В момента t=0 ключът се затваря и RC веригата се свързва към източник на ток. Да се изчисли напрежението върху кондензатора, ако R=10Ω, C=10μF и е приложен постоянен източник на ток I=1A.



$$i_R(t)+i_C(t)-I=0$$

$$i_R(t)=\frac{u_R(t)}{R}=\frac{u_C(t)}{R}$$

$$i_C(t)=C\frac{du_C(t)}{dt}$$

$$\frac{u_C(t)}{R}+C\frac{du_C(t)}{dt}-I=0$$

$$\boxed{\frac{du_C(t)}{dt}=-\frac{1}{RC}u_C(t)+\frac{I}{C}}$$

$$u_C(t)\Big|_{t=0}=0$$

$$\boxed{u_C(t)=IR(1-e^{\frac{t}{\tau}})}$$

$$\tau=RC$$

Решение в MatLab

Зареждане на кондензатор

RC1diff.m – диференциално уравнение

```
function duc=RC1diff(t,uc,options,I,R,C)
tau=R*C;
duc(1)=-uc(1)/tau+I/C;
```

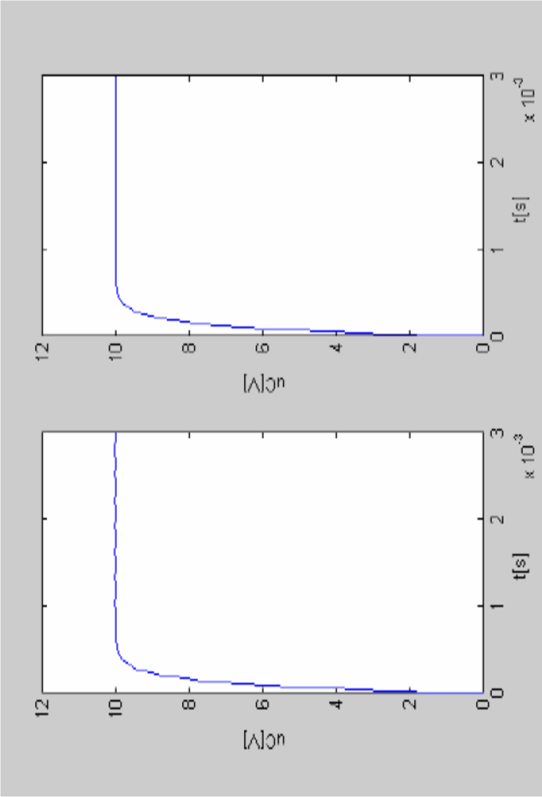
$$\frac{du_C(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}u_C(t) + \frac{I}{C}$$

RC1.m – аналитично решение

```
function u=RC1(R,C,I,t)
tau=R*C;
u=I*R*(1-exp(-t/tau))
```

$$u_C(t) = IR(1 - e^{\frac{t}{\tau}})$$

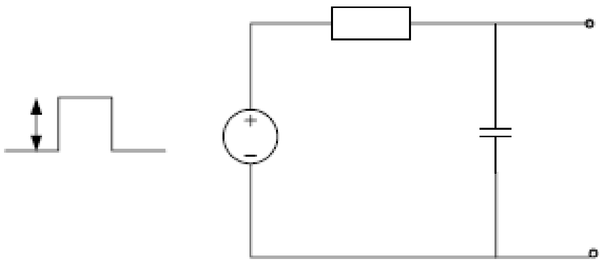
```
% RC верига – зареждане на кондензатор
t0=0; % начално време
tfinal=0.003; % крайно време
uc0=0; % начално условие uc(t=0)=0
I=1;C=10e-6;R=10;
% числено решение
[t1,uc1]=ode45('RC1diff',[t0,tfinal],[uc0],[],I,R,C)
% аналитично решение
u1=RC1(R,C,I,t1);
% Графика на uc=f(t)
subplot(121),plot(t1,uc1)
axis([0 0.003 0 12])
xlabel('t[s]'),ylabel('uC[V]')
subplot(122),plot(t1,u1)
axis([0 0.003 0 12])
xlabel('t[s]'),ylabel('uC[V]')
```

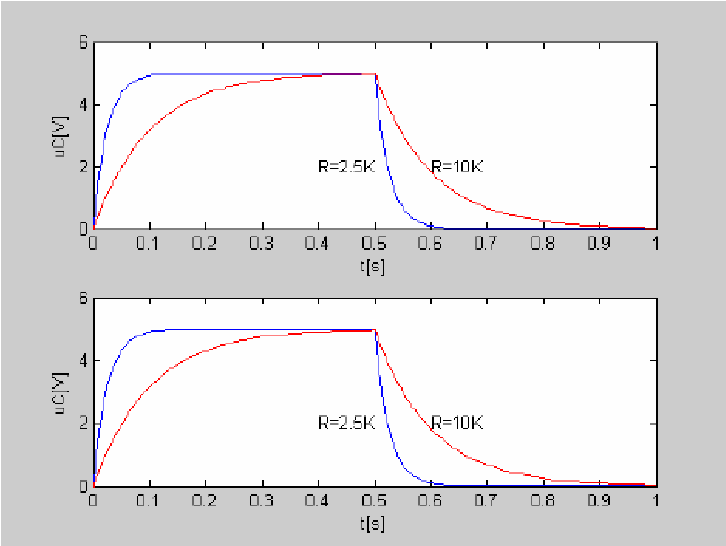


Входното напрежение на RC веригата е правоъгълен импулс с амплитуда 5V и ширина 0.5s.

Да се изчисли напрежението върху кондензатора за две стойности на R=2.5KΩ и R=10KΩ , ако C=10μF.

Да се начертае графиката на напрежението на кондензатора в зависимост от времето.





Разреждане на кондензатор

RCDdiff.m – диференциално уравнение

```
function duc=RCDdiff(t,uc,options,Um,R,C)
tau=R*C;
duc(1)=-uc(1)/tau;
```

RCD.m – числено решение

```
function u=RCD(R,C,Um,t)
tau=R*C;
u=Um*exp(-t/tau)
```

Зареждане на кондензатор

RCdiff.m – диференциално уравнение

```
function duc=RCdiff(t,uc,options,E,R,C)
tau=R*C;
duc(1)=-uc(1)/tau+E/tau;
```

RC.m – числено решение

```
function u=RC(R,C,E,t)
tau=R*C;
u=E*(1-exp(-t/tau))
```

Зареждане на кондензатор

$$\frac{du_C(t)}{dt} = -\frac{u_C(t)}{RC}$$

$$u_C(t) = U_m e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\frac{du_C(t)}{dt} = -\frac{u_C(t) - E}{RC}$$

$$u_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

```
% RC верига
t0=0;
tfinal=0.5;
uc0=0;
E=5;
C=10e-6;
R=2.5e3;

% Числено решение
[t11,uc11]=ode45('RCdiff',[t0 tfinal],[uc0],[],E,R,C);
Um=uc11(end);
[t12,uc12]=ode45('RCDdiff',[t0 tfinal],[Um],[],Um,R,C);

% Аналитично решение
u11=RC(R,C,E,t11);
Um=u11(end);
u12=RCD(R,C,Um,t12);
```

```
% начално време
% крайно време
% начално условие
uc(t=0)=0
% амплитуда на
правоъгълния импулс

% зареждане на С
% начално условие
% разреждане на С

% зареждане на С
% начално условие
% разреждане на С
```

```
R=10e3;
% Числено решение
[t21,uc21]=ode45('RCdiff',[t0 tfinal],[uc0],[],E,R,C); % зареждане на C
Um=uc21(end); % начално условие
[t22,uc22]=ode45('RCDdiff',[t0 tfinal],[Um],[],Um,R,C); % разреждане на C
% Аналитично решение
u21=RC(R,C,E,t21); % зареждане на C
Um=u21(end); % начално условие
u22=RCD(R,C,Um,t22); % разреждане на C
% Графика на uc=f(t) – числено решение
subplot(211),plot(t11,uc11,'b',t12+0.5,uc12,'b',t21,uc21,'r',t22+0.5,uc22,'r')
axis([0 1 0 6]),xlabel('t[s]'),ylabel('uC[V]')
text(0.4, 2.0, 'R=2.5K'),text(0.6, 2.0, 'R=10K')
% Графика на uc=f(t) – аналитично решение
subplot(212),plot(t11,u11,'b',t12+0.5,u12,'b',t21,u21,'r',t22+0.5,u22,'r')
axis([0 1 0 6]),xlabel('t[s]'),ylabel('uC[V]')
text(0.4, 2.0, 'R=2.5K'),text(0.6, 2.0, 'R=10K')
```

RL верига

$$u_L(t)+u_R(t)=0$$

$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)=0$$

$$\frac{di(t)}{dt}+\frac{i(t)}{\frac{L}{R}}=0$$

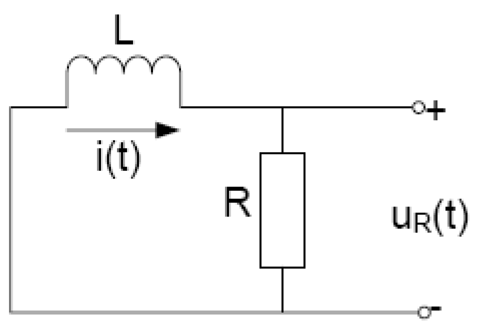
$$\boxed{\frac{di(t)}{dt}=-\frac{i(t)}{\frac{L}{R}}}$$

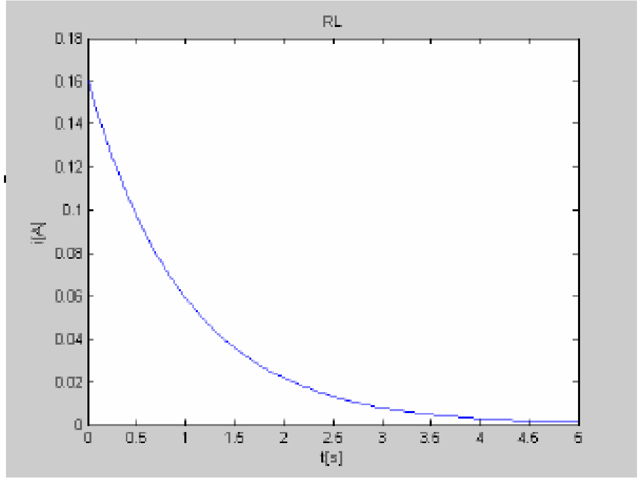
$\tau=L/R$ **– време константа**

Ако I_m е началната стойност на тока през бобината, аналитичното решение е:

$$\boxed{i(t)=I_m e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

Разсейване на енергия в бобина





RL верига

$$u_L(t)+u_R(t)=E$$

$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)=E$$

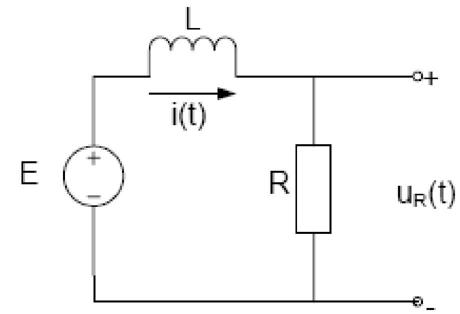
$$\frac{di(t)}{dt}+\frac{i(t)}{\frac{L}{R}}=\frac{E}{L}$$

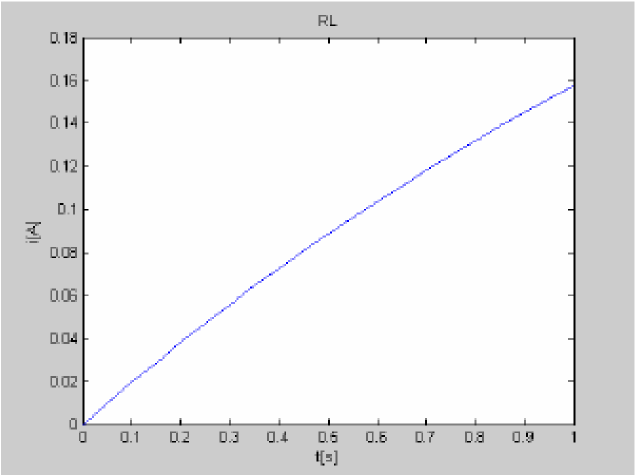
$$\boxed{\frac{di(t)}{dt}=-\frac{i(t)}{\frac{L}{R}}+\frac{E}{L}}$$

Ако началната стойност на тока през бобината е 0, $i(t)\big|_{t=0}=0$**, решението е:**

$$\boxed{i(t)=\frac{E}{R}(1-e^{-\frac{t}{\tau}})}$$

Натрупване на енергия в бобина



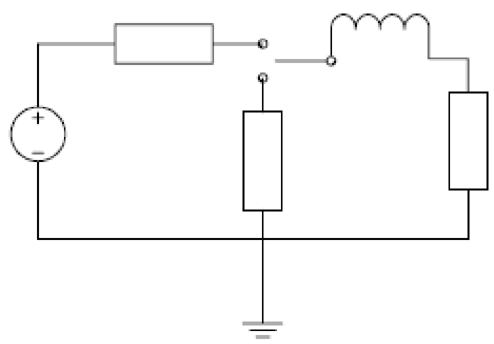


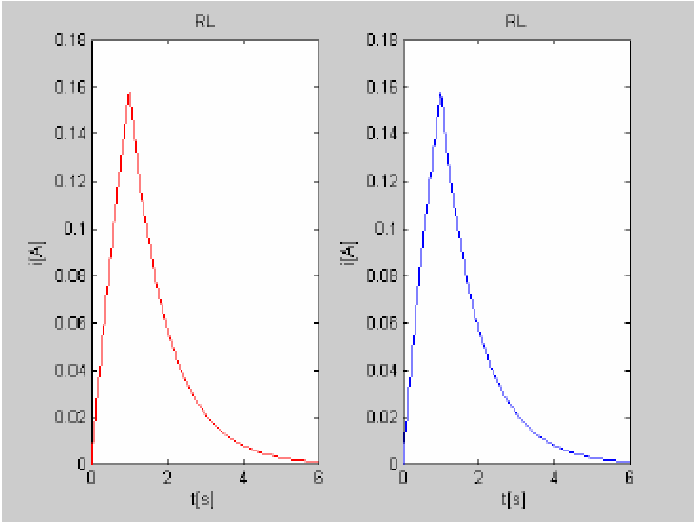
Пример

За схемата токът през бобината е 0. В момента t=0 ключът се затваря към позиция 1, където остава 1s. След това закъснение от 1s ключът се премества от позиция 1 в позиция 2, където остава неограничено време. Напрежението на постоянотоковия източник е E=40V.

Елементите в схемата са: R1=50Ω, R2=50Ω, R3=150Ω, L=200H.

Да се начертае графиката на тока през бобината спрямо времето.





Разсейване на енергията в бобина

RLDdiff.m – диференциално уравнение

```
function diL=RLDdiff(t,iL,options,Im,R,L)
tau=L/R;
diL(1)=-iL(1)/tau;
```

RLD.m – числено решение

```
function i=RLD(R,L,Im,t)
tau=L/R;
i=Im*exp(-t/tau)
```

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{i(t)}{\frac{L}{R}}$$

$$i(t) = I_m e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Натрупване на енергия в бобина

RLdiff.m – диференциално уравнение

```
function diL=RLdiff(t,iL,options,E,R,L)
tau=L/R;
diL(1)=-iL(1)/tau+E/L;
```

RL.m – числено решение

```
function i=RL(R,L,E,t)
tau=L/R;
i=E/R*(1-exp(-t/tau))
```

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{i(t)}{\frac{L}{R}} + \frac{E}{L}$$

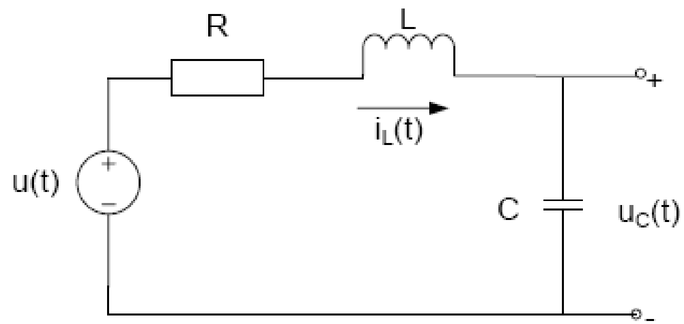
$$i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

```
% RL верига
R1=50;R2=50;R3=150;L=200;E=40;
R=R1+R2;        % ключът е в позиция 1 – натрупване на енергия в L
t0=0;           % начално време
tfinal=1;       % крайно време
iL0=0;          % начално условие iL(t=0)=0
[t1,iL1]=ode45('RLdiff',[t0 tfinal],[iL0],[],E,R,L);     % числено решение
i1=RL(R,L,E,t1);                                         % аналитично решение

R=R2+R3;        % ключът е в позиция 2 – разсейване на енергия в L
t0=0;           % начално време
tfinal=5;       % крайно време
Im=iL1(end);    % начално условие
[t2,iL2]=ode45('RLDdiff',[t0 tfinal],[Im],[],Im,R,L);   % числено решение
Im=i1(end);     % начално условие
i2=RLD(R,L,Im,t2);                                       % аналитично решение

% Графика на iL=f(t) – числено решение
subplot(121),plot(t1,iL1,'r',t2+1,iL2,'r')
axis([0 6 0 0.18]),xlabel('t[s]'),ylabel('i[A]'),title('RL')
% Графика на iL=f(t) – аналитично решение
subplot(122),plot(t1,i1,'b',t2+1,i2,'b')
axis([0 6 0 0.18]),xlabel('t[s]'),ylabel('i[A]'),title('RL')
```

RLC верига



$$u_R(t)+u_L(t)+u_C(t)=u(t)$$

$$u_R(t)=Ri_L(t)$$

$$u_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}$$

$$u_C(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_L(\tau)d\tau$$

$$\frac{du_C(t)}{dt}=\frac{i_L(t)}{C}$$

$$RC\frac{du_C(t)}{dt}+L\frac{di_L(t)}{dt}+u_C(t)=u(t)$$

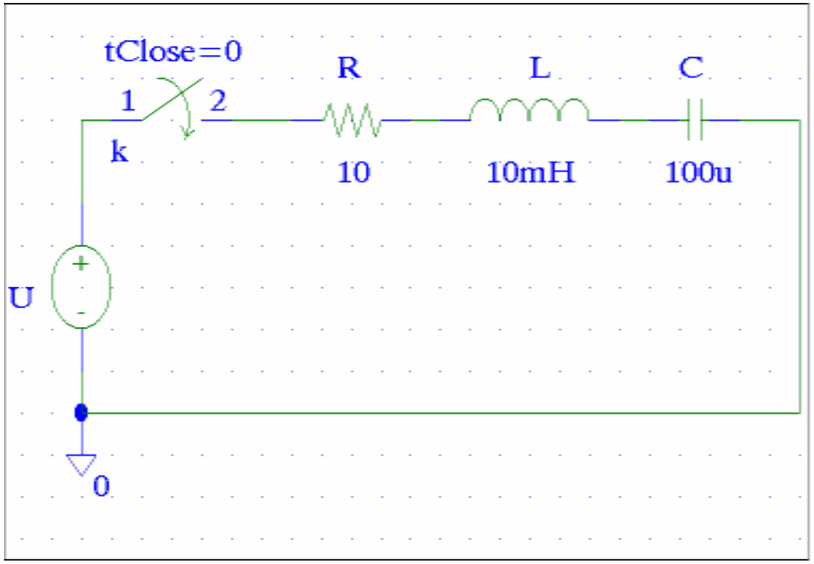
$$\begin{cases} y_1(t)=i_L(t) \\ y_2(t)=u_C(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(t)=C\dfrac{dy_2(t)}{dt} \\ Ry_1(t)+L\dfrac{dy_1(t)}{dt}+y_2(t)=u(t) \end{cases}$$

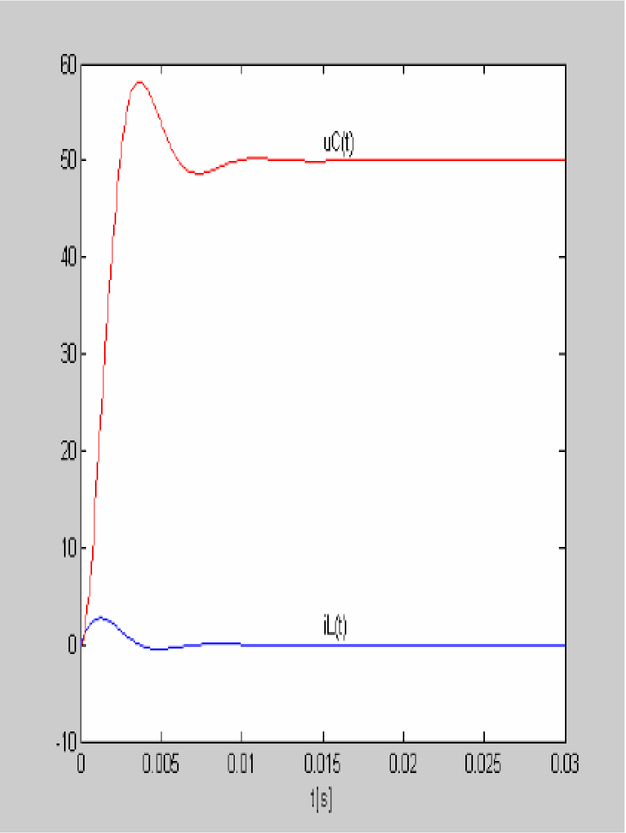
$$\boxed{\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{dy_1(t)}{dt}=\dfrac{1}{L}u(t)-\dfrac{R}{L}y_1(t)-\dfrac{1}{L}y_2(t) \\ \dfrac{dy_2(t)}{dt}=\dfrac{1}{C}y_1(t) \end{cases} \\ \begin{cases} y_1(t=0)=0 \\ y_2(t)=0 \end{cases} \end{array}}$$

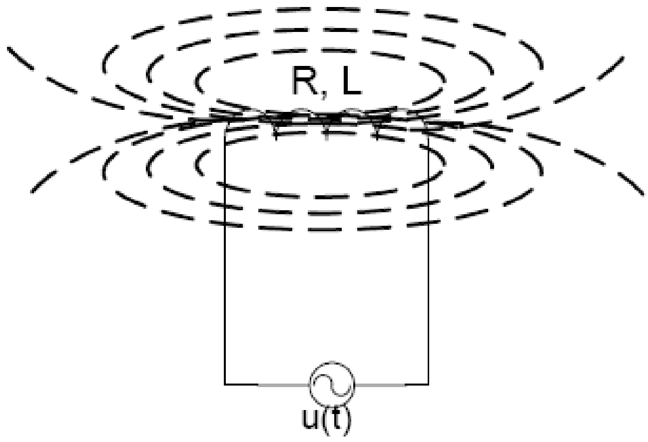
Пример

- В момента t=0 ключът се затваря и RLC веригата се свързва към източник на напрежение.
- Да се изчисли напрежението върху кондензатора, ако R=10Ω, L=10mH, C=100μF и е приложен постоянен източник на напрежение U=50V.



```
function dy=RLC(t,y,options,u,R,L,C)
dy=zeros(2,1);
a=1/L;b=R/L;c=1/C;
dy(1)=a*u-b*y(1)-a*y(2);
dy(2)=c*y(1);
% RLC верига
U=50;R=10;L=10e-3;C=100e-6;
t0=0;               % начално време
tfinal=30e-3;       % крайно време
iL0=0;   % начално условие iL(t=0)=0
uC0=0;   % начално условие uC(t=0)=0
[t,x]=ode45('RLC',[t0 tfinal],[iL0
uC0],[],U,R,L,C); % числено решение
plot(t,x(:,1),'b',t,x(:,2),'r')
axis([0 30e-3 -10 60]),xlabel('t[s]')
text(0.015, 2, 'iL(t)'),text(0.015, 52, 'uC(t)')
```





$$u(t) = i(t)R + L\frac{di(t)}{dt}.$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L}\left(u(t) - i(t)R\right)$$