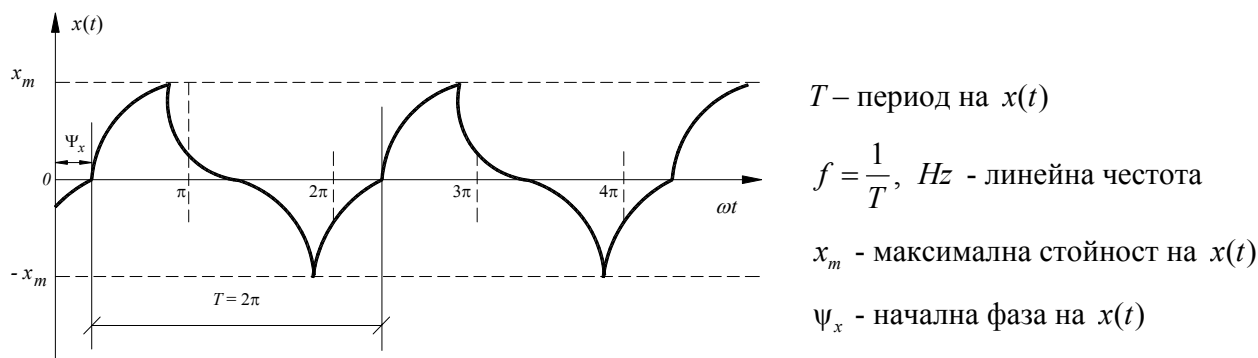


2. ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ ПРИ СИНУСОИДАЛНИ РЕЖИМИ

(3 часа)

2.1. Синусоидални режими в линейни електрически вериги без индуктивна връзка

Голяма част от електротехническите устройства работят при променливи периодични режими. Нека разгледаме периодичната величина $x(t) = x(t + kT)$, $k \in Z$ с период T .



Фиг. 2.1

Всяка периодична функция $x(t) = x(t + kT)$, $k \in Z$ с период T може да бъде разложена в ред на Фурие във вида:

$$x(t) = x_0 + \sum_{k=1}^n x_{m(k)} \cdot \sin(k\omega t + \psi_k), \quad n \in N. \quad (2.1)$$

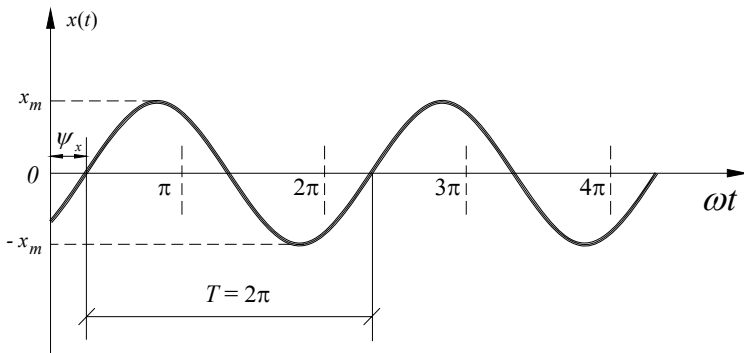
Забележка: Теоретично $n \rightarrow \infty$, но за практически цели n е крайно число.

Тогава анализът на периодичните режими в изследваната верига се свежда до разглеждане на 2 типа анализ: постоянотоков – съответстващ на нулевия хармоник x_0 и променливотоков – съответстващ на всеки от хармониците $x_{(k)}(t) = x_{m(k)} \cdot \sin(k\omega t + \psi_k)$ в разложението. Обикновено в практиката от ключово значение е влиянието на основния хармоник $x_{(1)}(t) = x_{m(1)} \cdot \sin(\omega t + \psi_1)$ и с нарастване на k (номера на хармоника) намалява неговата максимална стойност (амплитуда) $x_{m(k)}$, а оттам намалява и влиянието му върху моментната стойност на $x(t)$.

Следователно при анализа на линейни електрически вериги от ключово значение е изследването на синусоидалните режими в тях, т.е. всеки източник на ЕДН, ЕДТ, ток, напрежение, потенциал, се разглеждат като променливи във времето периодични величини, изменящи се по синусоидален закон (фиг. 2.2).

Нека разгледаме периодичната величина $x(t)$, чиято моментна стойност се изменя по синусоидален закон, както следва: $x(t) = x_m \cdot \sin(\omega t + \psi_x)$

2. ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ ПРИ СИНУСОИДАЛНИ РЕЖИМИ



T – период на $x(t)$

$f = \frac{1}{T}$, Hz - линейна честота

$f = 50$ Hz $\Leftrightarrow T = 20$ ms - в Европа

$f = 60$ Hz - в САЩ

$\omega = 2\pi f$ - кръгова честота

x_m - максимална стойност на $x(t)$

ψ_x - начална фаза на $x(t)$

Фиг. 2.2

2.1.1. Моментни, максимални, средни, ефективни, комплексни стойности, комплекси

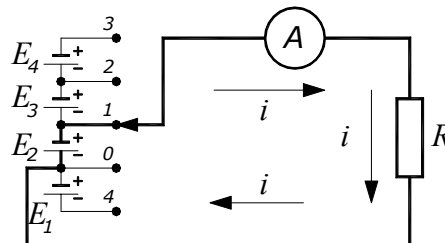
Първите източници на електрическа енергия са били химическите и до въвеждането в експлоатация на променливотоковите генератори **всички електрически вериги са били постояннотокови**. Създадени са били и първите измервателни прибори за съответните величини – напрежения, токове, мощности и т.н. и са дефинирани основните измервателни единици.

Със създаването на променливотоковите генератори и консуматори се появяват и първите „парадокси”. Оказва се, че използваните до момента измервателни прибори дават различни показания, независимо от това, че се включват по един и същи начин към измерваната верига.

За да се избегнат противоречия се приема променливотоковите величини (и параметри) да се дефинират чрез еквивалентни по стойност и въздействие постояннотокови величини.

Основните са: **моментна $x(t)$, амплитудна (максимална) x_m , средна $x_{cp} \equiv x_{av}$ и ефективна X стойност**. Съответните означения (напр. за стойностите на електрическия ток) са: $i(t)$, i_m , i_{cp} , I .

Нека разгледаме процесите в проста постояннотокова верига (фиг. 2.3) със съответните елементи: E – източник на ЕДН, A – амперметър, R – товар. Токът може да се регулира чрез превключване в позиции 1, 2, 3, 4. Продължителността във включено състояние в отделните позиции също е различна.

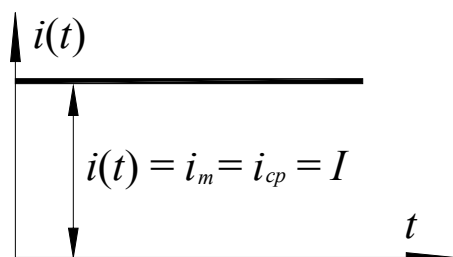


Фиг. 2.3

1. Ако токът в електрическата верига е константен (за определено време), то всички стойности (моментна, амплитудна, средна и ефективна) са равни, т.е. (фиг. 2.4)

2. ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ ПРИ СИНУСОИДАЛНИ РЕЖИМИ

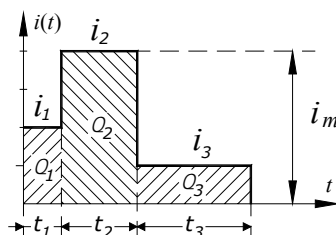
$$i(t) = i_m = i_{cp} = I \quad (2.2)$$



Фиг. 2.4

Средна стойност на постоянен ток

2. Нека в постояннотокова верига тече ток i_1 за определен интервал от време t_1 , ток i_2 - за време t_2 и ток i_3 - за време t_3 . За всеки времеви интервал токовете са с различни стойности, а интервалите са с различна продължителност (фиг. 2.5).



Фиг. 2.5

Очевидно е, че в разгледания случай без пресмятане може да се определи само амплитудната (максималната стойност), която е равна на $i_m = i_2$.

Дефиниция: Средната стойност на тока $i(t)$ за време $[0, t_1 + t_2 + t_3]$ е стойността на постоянен ток i_{cp} , който за същото време пренася през сечението на проводника същото количество заряди $Q_1 + Q_2 + Q_3$, т.е. има същото въздействие*:

$$i_{cp} = i_{av} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{i_1 \cdot t_1 + i_2 \cdot t_2 + i_3 \cdot t_3}{t_1 + t_2 + t_3} \quad (2.3)$$

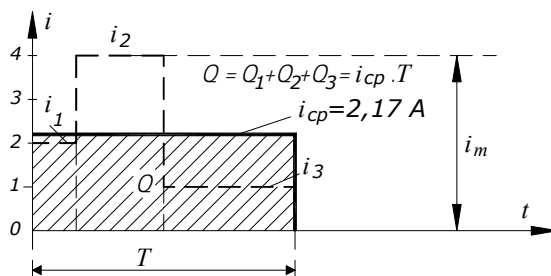
* По дефиниция, стойността на тока е количеството електрически заряди, преминали през веригата за единица време $i = \frac{Q}{t}$.

Токът е 1 А, ако през веригата преминават $6,29 \times 10^{19}$ заряда / 1 секунда.

2. ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ ПРИ СИНУСОИДАЛНИ РЕЖИМИ

Пример 1: Ако
$$\begin{cases} i_1 = 2 \text{ A}, & t_1 = 1 \text{ s} \\ i_2 = 4 \text{ A}, & t_2 = 2 \text{ s} \\ i_3 = 1 \text{ A}, & t_3 = 3 \text{ s} \end{cases} \quad (\text{фиг. 2.6}),$$

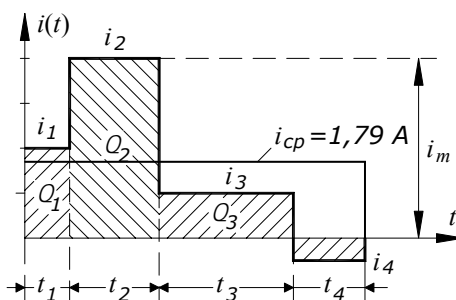
то
$$I_{cp} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{i_1 \cdot t_1 + i_2 \cdot t_2 + i_3 \cdot t_3}{T} = \frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3}{1 + 2 + 3} \approx 2,17 \text{ A}$$



Фиг. 2.6

Пример 2: Ако освен показаните токове с положителна полярност имаме и ток с обратна полярност (напр. $i_4 = -0,5 \text{ A}$ за време $t_4 = 1 \text{ s}$ – фиг.2.7):

$$I_{cp} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4} = \frac{2,1 + 4,2 + 1,3 - 0,5 \cdot 1}{1 + 2 + 3 + 1} \approx 1,79 \text{ A}$$



Фиг. 2.7

Средна стойност на синусоидален ток

Пример: За да се зареди един акумулатор (степената на зареденост се отчита в Ah – амперчасове) през него се пропуска ток с определена стойност и полярност за точно определено време. В резултат на това в него се натрупват електрически заряди (енергия, която в последствие се отдава на консуматора).

Ако акумулатор се включи към източник на променливо напрежение, той няма да се зареди, защото количеството заряди, с което се зарежда през положителния полупериод ще бъде равно на количеството заряди, с което се разрежда през отрицателния полупериод и **средната стойност на тока ще бъде равна на нула!!!** За да не е нула е необходимо да се пропуска само единият полупериод или и двата, но да са с една и съща полярност – това се реализира с еднополупериоден или с двуполупериоден токоизправител)

2. ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ ПРИ СИНУСОИДАЛНИ РЕЖИМИ

При постоянен ток средната стойност $i_{cp} = \frac{Q}{t} \Rightarrow Q = i_{cp} \cdot t$ се определяше чрез пресмятане на съответните площи. Разсъждавайки по аналогичен начин, елементарното количество електрически заряди, преминаващи през електрическа верига, в която тече синусоидален ток $i(t) = i_m \cdot \sin(\omega t + \psi_i)$, A за време dt е:

$$dQ = i(t) \cdot dt \quad (2.4)$$

Интегрираме (2.4) от 0 до $T/2$, тъй като **средната стойност на синусоидален ток се изчислява за един полупериод, тъй като за 2 полупериода тя е равна на нула!!!** (вж. фиг. 2.2). Тогава

$$Q = \int_0^{T/2} i(t) \cdot dt \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} i_{cp} &= \frac{Q}{T/2} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} i(t) \cdot dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} i_m \cdot \sin(\omega t + \psi_i) \cdot dt = \frac{2}{T \cdot \omega} \int_0^{T/2} i_m \cdot \sin(\omega t + \psi_i) \cdot d(\omega t + \psi_i) = \\ &= -\frac{2}{\frac{1}{f} \cdot 2\pi f} \cdot i_m \cdot \cos(\omega t + \psi_i) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot i_m \cdot (\cos \psi_i - \cos(\omega\pi + \psi_i)) = \\ &= \frac{i_m}{\pi} \cdot (-2) \cdot \sin \frac{(\psi_i + \omega\pi + \psi_i)}{2} \cdot \sin \frac{(\psi_i - \omega\pi - \psi_i)}{2} = \frac{2i_m}{\pi} \cdot \sin \frac{\omega\pi + 2\psi_i}{2} \cdot \sin \frac{\omega\pi}{2} \quad \psi_i = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \psi_i = 0 \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\ = \frac{2i_m}{\pi} \cdot \sin \frac{\omega\pi}{2} \cdot \sin \frac{\omega\pi}{2} = \frac{2i_m}{\pi} \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \frac{2i_m}{\pi} \end{aligned}$$

$$i_{cp} = \frac{2}{\pi} i_m \approx 0,637 \cdot i_m \quad (2.7)$$

Извод: Средна стойност на променливия ток за един полупериод ($T/2$) се дефинира с такъв постоянен ток, който за време един полупериод ($T/2$) прекарва през веригата такова количество електрически заряди, което прекарва и дадения променлив ток.

Забележка: За цял период T средната стойност на синусоидалния променлив ток е равна на нула, тъй като количеството заряди, които преминават през първия полупериод в дадена посока, са точно равни на количеството заряди, преминаващи през втория полупериод в обратна посока.

Ефективна стойност на постоянен ток

Ако през активно съпротивление тече ток, независимо от това дали той е постоянен или променлив, в съпротивлението се отделя енергия и то се загрява т.е. електрическата енергия

2. ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ ПРИ СИНУСОИДАЛНИ РЕЖИМИ

преминава в топлинна. **Енергийното действие (ефект) на променливия ток** може да се прецени като се изравни отделеното количество топлина, получена в резултат на протичането на този ток и същото количество топлина, получено при протичане на постоянен ток. **На този принцип се основава определението за ефективна стойност.**

Дефиниция: **Ефективна стойност** на променливия ток е тази стойност на постоянния ток, при който за време, равно на един период (T) в консуматора (активно съпротивление) се отделя същото количество топлина, каквото се отделя и от променливия ток за този период T .

Количеството топлина, отделено при преминаването на **постоянен ток** през активно съпротивление за време, равно на един период (T), се определя по формулата:

$$U = R.I$$

$$A = U.I.T = R.I.I.T = R.I^2.T, Wh. \quad (2.8)$$

Количеството топлина, отделено при преминаването на **променлив ток** през активно съпротивление за същото време може да се изчисли по следния начин. За безкрайно малко време отделената енергия във вид на топлина е:

$$u(t) = R.i(t)$$

$$dA = u(t).i(t).dt = R.i^2(t).dt$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^T dA = \int_0^T R.i^2(t).dt, Wh \quad (2.9)$$

След изравняване на изрази (2.8) и (2.9) се получава:

$$R.I^2.T = \int_0^T R.i^2(t).dt$$

$$\Downarrow$$

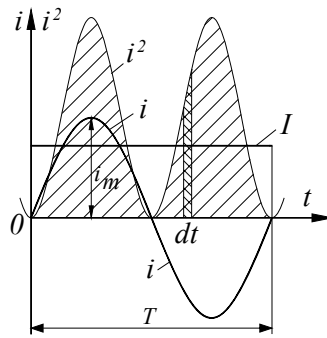
$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t).dt \quad (2.10)$$

Разглеждайки графиките на $i(t) = i_m \cdot \sin(\omega t + \psi_i) = i_m \cdot \sin \omega t, A$ и

$i^2(t) = i_m^2 \cdot \sin^2(\omega t + \psi_i) = i_m^2 \cdot \sin^2 \omega t, A^2$ (фиг. 2.8) се вижда, че независимо от знака на тока (+

или -) $i^2(t)$ винаги приема положителни стойности, поради вдигането на квадрат.

2. ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ ПРИ СИНУСОИДАЛНИ РЕЖИМИ



Фиг. 2.8

Решението на интеграла в (2.10) представлява площта на фигурата, заградена от графиката на $i^2(t)$ и абсцисната ос (фиг. 2.8)

$$\begin{aligned}
 I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t).dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i_m^2 \sin^2(\omega t + \psi_i).dt} = i_m \cdot \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \frac{(1 - \cos 2(\omega t + \psi_i))}{2}.dt} = \\
 &= i_m \cdot \sqrt{\frac{1}{2T} \int_0^T dt - \frac{1}{2T \cdot 2\omega} \int_0^T \cos 2(\omega t + \psi_i) d(\omega t + \psi_i)} = \\
 &= i_m \cdot \sqrt{\frac{1}{2T} t \Big|_0^T - \frac{1}{2T \cdot 2\omega} \sin 2(\omega t + \psi_i) \Big|_0^T} = i_m \cdot \sqrt{\frac{1}{2T} (T - 0) - \frac{1}{4T\omega} (\sin 2(\omega T + \psi_i) - \sin 2\psi_i)} = \quad (2.11) \\
 &= i_m \cdot \sqrt{\frac{1}{2T} T - \frac{1}{4T\omega} \underbrace{(\sin(2\omega T + 2\psi_i) - \sin 2\psi_i)}_0} = \frac{i_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot i_m
 \end{aligned}$$

sin x е периодична функция с период T

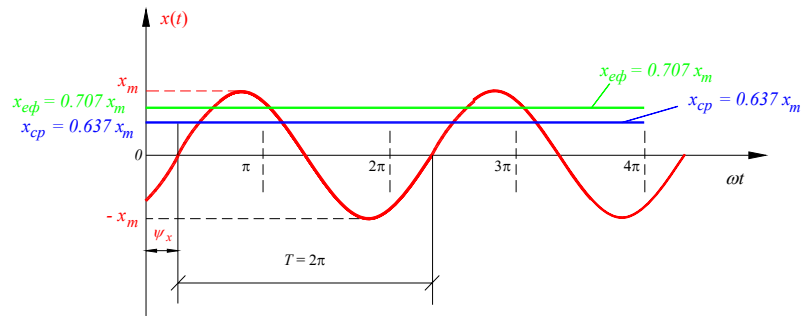
$$I = \frac{i_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 \cdot i_m \quad (2.12)$$

Базирайки се на резултатите, получени за средната и ефективната стойност на синусоидален ток съгласно изрази (2.7) и (2.12) се дефинира т.нар. коефициент на формата на синусоидална величина:

$$k_\phi = \frac{I}{i_{cp}} = \frac{i_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2i_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,11 \quad (2.13)$$

На фиг. 2.9 са показани моментната, максималната, средната и ефективната стойност на показаната на фиг. 2.2 синусоидална величина.

2. ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ ПРИ СИНУСОИДАЛНИ РЕЖИМИ



Фиг. 2.9

Връзка между моментни стойности и комплекси

Нека разгледаме моментната стойност $x(t) = x_m \cdot \sin(\omega t + \psi)$, която в обобщен вид се представя чрез:

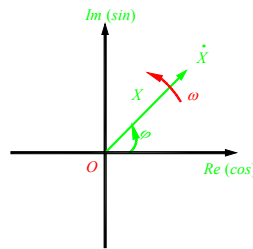
$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= x_m \cdot e^{j(\omega t + \psi)} = \sqrt{2} X \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\psi} = \sqrt{2} \cdot e^{j\omega t} \underbrace{X \cdot e^{j\psi}}_{\dot{X}} \\ x(t) &= x_m \cdot [\cos(\omega t + \psi) + j \cdot \sin(\omega t + \psi)] \Rightarrow x(t) = \text{Im}[\dot{x}(t)] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dot{X} = X \cdot e^{j\psi}, \quad (2.14)$$

където: $\dot{x}(t)$ - комплексна моментната стойност;

X – ефективна стойност;

\dot{X} - комплекс (комплексна ефективна стойност).

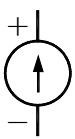
Изобразяване на комплекси в комплексната равнина



Фиг. 2.10

Всеки комплекс \dot{X} се изобразява в комплексната равнина като вектор, който е с дължина, равна на ефективната му стойност X , сключва ъгъл ψ с положителната посока на абсцисната ос и се върти с честота ω .

В линейни електрически вериги физическата природа на величината $x(t)$ е следната:



фиг. 2.10a

$$e(t) = e_m \cdot \sin(\omega t + \psi_e), \quad V$$

$$\Leftrightarrow \dot{E} = E \cdot e^{j\psi_e} = \frac{e_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\psi_e}, \quad V$$

2. ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ ПРИ СИНУСОИДАЛНИ РЕЖИМИ



фиг. 2.10b $j_e(t) = j e_m \cdot \sin(\omega t + \psi_{j_e}), A$

$$\Leftrightarrow \dot{J}_e = J_e \cdot e^{j\psi_{j_e}} = \frac{j e_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\psi_{j_e}}, A$$

$$v(t) = v_m \cdot \sin(\omega t + \psi_v), V$$

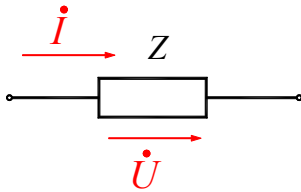
$$\Leftrightarrow \dot{V} = V \cdot e^{j\psi_v} = \frac{v_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\psi_v}, V$$

$$u(t) = u_m \cdot \sin(\omega t + \psi_u), V$$

$$\Leftrightarrow \dot{U} = U \cdot e^{j\psi_u} = \frac{u_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\psi_u}, V$$

$$i(t) = i_m \cdot \sin(\omega t + \psi_i), A$$

$$\Leftrightarrow \dot{I} = I \cdot e^{j\psi_i} = \frac{i_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\psi_i}, A$$



фиг. 2.10c

$$\left. \begin{array}{l} \dot{U} = U \cdot e^{j\psi_u} \\ \dot{I} = I \cdot e^{j\psi_i} \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi = \Psi_u - \Psi_i - \text{фазова разлика}$$

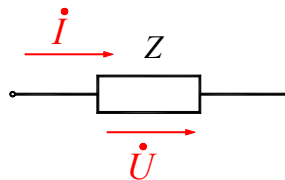
2.1.2. Комплексни съпротивления и проводимости

Нека разгледаме пасивен двуполусник, върху който е приложено синусоидално напрежение $u(t)$ и през него тече синусоидален ток $i(t)$.

$$u(t) = u_m \cdot \sin(\omega t + \psi_u), V \quad \Leftrightarrow \quad \dot{U} = \frac{u_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\psi_u} = U \cdot e^{j\psi_u} \quad (2.15)$$

$$i(t) = i_m \cdot \sin(\omega t + \psi_i), A \quad \Leftrightarrow \quad \dot{I} = \frac{i_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\psi_i} = I \cdot e^{j\psi_i} \quad (2.16)$$

а) След деление на израз (2.15) на израз (2.16) се дефинира, т. нар. **комплексно съпротивление** Z, Ω :



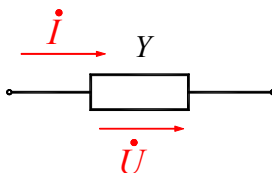
фиг. 2.11

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U \cdot e^{j\psi_u}}{I \cdot e^{j\psi_i}} = \frac{U}{I} \cdot e^{j(\psi_u - \psi_i)} = \frac{U}{I} \cdot e^{j\varphi}, \quad \varphi = \psi_u - \psi_i \quad (2.17)$$

2. ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ ПРИ СИНУСОИДАЛНИ РЕЖИМИ

$$Z = \frac{U}{I} \cdot e^{\varphi} = z \cdot e^{\varphi}, \text{ където: } \begin{cases} Z - \text{комплексно съпротивление} \\ z - \text{импеданс} \end{cases} \quad (2.17a)$$

б) След деление на израз (2.16) на израз (2.15) се дефинира, т. нар. **комплексна проводимост** Y , S :



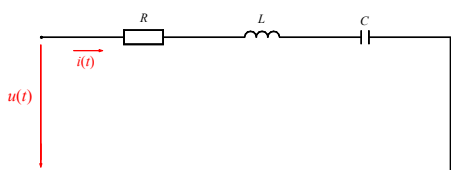
фиг. 2.12

$$\frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{I \cdot e^{j\psi_i}}{U \cdot e^{j\psi_u}} = \frac{I}{U} \cdot e^{j(\psi_i - \psi_u)} = \frac{I}{U} \cdot e^{-j\varphi}, \quad \varphi = \psi_u - \psi_i \quad (2.18)$$

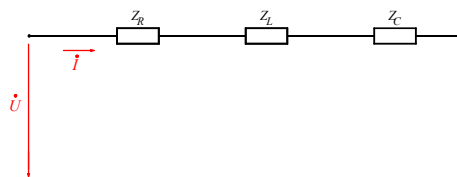
$$Y = \frac{I}{U} \cdot e^{-j\varphi} = y \cdot e^{-j\varphi}, \text{ където: } \begin{cases} Y - \text{комплексна проводимост} \\ y - \text{адмитанс} \end{cases} \Leftrightarrow Y = \frac{1}{Z} \quad (2.18a)$$

Елемент	Съпротивление при променлив ток, Ω	Комплексно съпротивление, Ω	Проводимост при променлив ток, S	Комплексна проводимост, S
Резистор – R, Ω	R	$Z_R = R$	$G = \frac{1}{R}$	$Y_G = G$
Бобина – L, H	$X_L = \omega L$	$Z_L = jX_L = j\omega L$	$B_L = \frac{1}{\omega L}$	$Y_L = -jB_L = -j \cdot \frac{1}{\omega L}$
Кондензатор – C, F	$X_C = \frac{1}{\omega C}$	$Z_C = -jX_C = -j \cdot \frac{1}{\omega C}$	$B_C = \omega C$	$Y_C = jB_C = j\omega C$

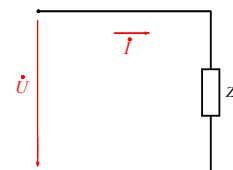
Пример 1: RLC двуполюсник от последователен тип



фиг. 2.13а



фиг. 2.13б



фиг. 2.13с

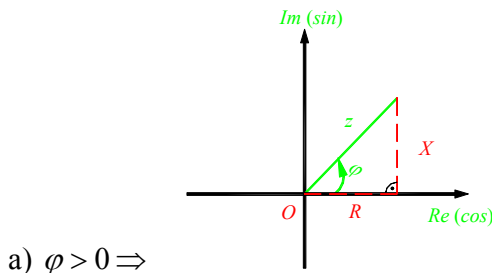
2. ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ ПРИ СИНУСОИДАЛНИ РЕЖИМИ

$$Z_e = Z_R + Z_L + Z_C = R + jX_L - jX_c = R + j(X_L - X_c) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

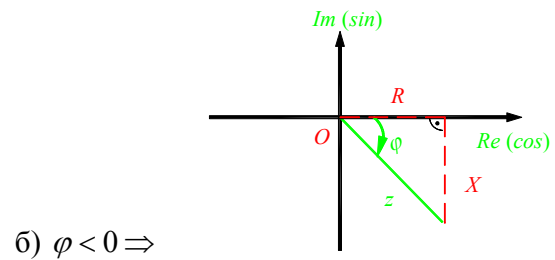
$$\Downarrow$$
(2.19)

$$Z_e = R + jX = z.e^{j\varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{R^2 + X^2} \\ \varphi = \arctg \frac{X}{R} \end{cases}$$

Графичната визуализация на (2.19) в комплексната равнина е показана на фиг. 2.14.

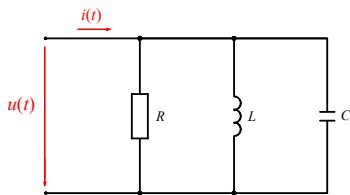


фиг. 2.14a

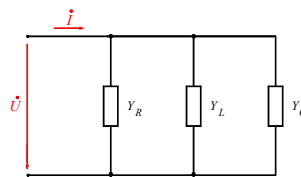


фиг. 2.14b

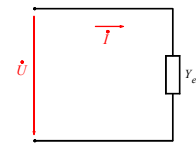
Пример 2: GLC дуполусник от паралелен тип



фиг. 2.15a



фиг. 2.15b



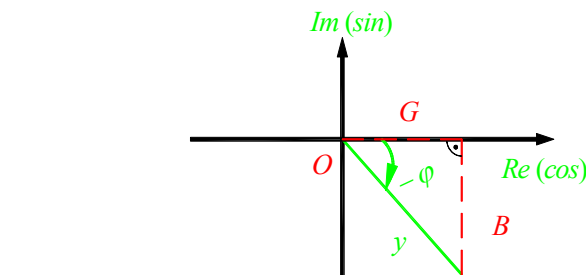
фиг. 2.15c

$$Y_e = Y_R + Y_L + Y_C = G - jB_L + jB_c = G - j(B_L - B_c) = G - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)$$

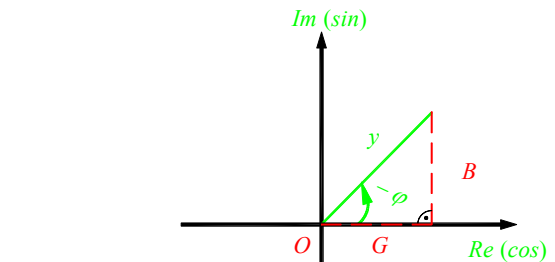
$$\Downarrow$$
(2.20)

$$Y_e = G + jB = y.e^{-j\varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{G^2 + B^2} \\ \varphi = \arctg \frac{B}{G} \end{cases}$$

Графичната визуализация на (2.20) в комплексната равнина е показана на фиг. 2.16.



фиг. 2.16a



фиг. 2.16b

2. ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ ПРИ СИНУСОИДАЛНИ РЕЖИМИ

2.1.3. Закони за електрическите вериги в комплексна форма

Законите за електрическите вериги (законите на Кирхоф и законът на Ом) са в сила за моментни стойности $x(t)$, комплексни моментни стойности $\dot{x}(t)$, комплекси \dot{X} , но не важат за ефективни стойности X .

а) **I-ви закон на Кирхоф** е в сила за възел в електрическата верига \Rightarrow за възел a може да се запише:

$$\left. \begin{aligned}
 \pm \sum_{k \in a} i_k(t) \pm \sum_{r \in a} j e_r(t) = 0 & \text{ - за моментни стойности} \\
 \pm \sum_{k \in a} \dot{i}_k(t) \pm \sum_{r \in a} \dot{j} e_r(t) = 0 & \text{ - за комплексни стойности}
 \end{aligned} \right\}, \text{ където } \begin{aligned}
 & + \text{ входяща към възела посока на тока} \\
 & - \text{ изходяща от възела посока на тока}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \Downarrow \\
 & \pm \sum_{k \in a} i_{mk} \cdot e^{j(\omega t + \psi_{i_k})} \pm \sum_{r \in a} j e_{mr} \cdot e^{j(\omega t + \psi_{j_{e_r}})} = 0 \\
 & \Downarrow \\
 & \pm \sum_{k \in a} \sqrt{2} \cdot I_k \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\psi_{i_k}} \pm \sum_{r \in a} \sqrt{2} \cdot J_{e_r} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\psi_{j_{e_r}}} = 0 \\
 & \Downarrow \\
 & \pm \sqrt{2} \cdot e^{j\omega t} \cdot \underbrace{\sum_{k \in a} I_k \cdot e^{j\psi_{i_k}}}_{\dot{I}_k} \pm \sqrt{2} \cdot e^{j\omega t} \cdot \underbrace{\sum_{r \in a} J_{e_r} \cdot e^{j\psi_{j_{e_r}}}}_{\dot{J}_{e_r}} = 0 \quad | : \sqrt{2} \cdot e^{j\omega t} > 0 \\
 & \Downarrow \\
 & \pm \sum_{k \in a} \dot{I}_k \pm \sum_{r \in a} \dot{J}_{e_r} = 0 \text{ - за комплекси}
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

б) **II-ри закон на Кирхоф** е в сила за контур в електрическата верига, за който предварително е избрана условна положителна посока на обхождане \Rightarrow за контур K може да се запише:

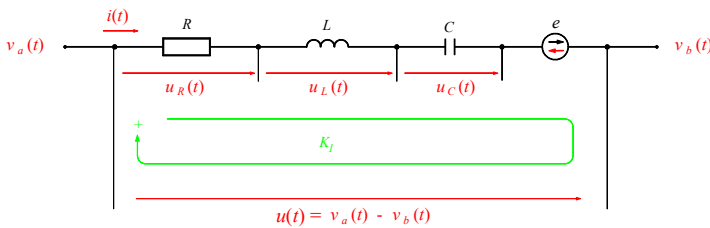
$$\left. \begin{aligned}
 \pm \sum_{s \in a} u_s(t) = \pm \sum_{s \in a} e_s(t) & \text{ - за моментни стойности} \\
 \pm \sum_{s \in a} \dot{u}_s(t) = \pm \sum_{s \in a} \dot{e}_s(t) & \text{ - за комплексни стойности}
 \end{aligned} \right\},$$

където: + еднаква посока на u_s и e_s с посоката на обхождане на контура K ;
 - различна посока на u_s и e_s с посоката на обхождане на контура K .

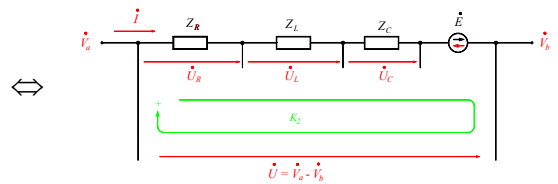
2. ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ ПРИ СИНУСОИДАЛНИ РЕЖИМИ

$$\begin{aligned}
 & \Updownarrow \\
 & \pm \sum_{s \in K} u_{ms} \cdot e^{j(\omega t + \psi_{u_s})} = \pm \sum_{s \in K} e_{ms} \cdot e^{j(\omega t + \psi_{e_s})} \\
 & \Updownarrow \\
 & \pm \sum_{s \in K} \sqrt{2} \cdot U_s \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\psi_{u_s}} = \pm \sum_{s \in K} \sqrt{2} \cdot E_s \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\psi_{e_s}} \\
 & \Updownarrow \\
 & \pm \sqrt{2} \cdot e^{j\omega t} \cdot \underbrace{\sum_{s \in K} U_s \cdot e^{j\psi_{u_s}}}_{\dot{U}_S} = \pm \sqrt{2} \cdot e^{j\omega t} \cdot \underbrace{\sum_{s \in K} E_s \cdot e^{j\psi_{e_s}}}_{\dot{E}_S} \quad | : \sqrt{2} \cdot e^{j\omega t} > 0 \\
 & \Updownarrow \\
 & \left. \begin{aligned} \pm \sum_{s \in K} \dot{U}_s &= \pm \sum_{s \in K} \dot{E}_s \\ \pm \sum_{s \in K} Z_s \dot{I}_s &= \pm \sum_{s \in K} \dot{E}_s \end{aligned} \right\} \text{— за КОМПЛЕКСИ} \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

в) Закон на Ом и обобщен закон на Ом



фиг. 2.17а



фиг. 2.16b

I начин: Записва се *II*-ри закон на Кирхоф за контур K_1 (фиг. 2.17b):

$$Z\dot{I} - \dot{U} = + / - \dot{E}, \tag{2.23}$$

където: $Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + j\omega L - j \frac{1}{\omega C}.$ (2.23a)

$$\dot{I} = \frac{\dot{U} + / - \dot{E}}{Z} = \frac{\dot{V}_a - \dot{V}_b + / - \dot{E}}{Z}. \tag{2.24}$$

II начин: Записва се *II*-ри закон на Кирхоф за контур K_1 (фиг. 2.17a):

2. ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ ПРИ СИНУСОИДАЛНИ РЕЖИМИ

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) - u(t) = + / - e(t) \quad u_R(t) = R \cdot i(t)$$

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = u(t) + / - e(t) \quad u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = u(t) + / - e(t) \quad i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \Leftrightarrow u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t) \cdot dt$$

$$R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i_C(t) \cdot dt = u(t) + / - e(t)$$

$$R \cdot \dot{i}(t) + L \cdot \frac{d\dot{i}(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int \dot{i}(t) \cdot dt = \dot{u}(t) + / - \dot{e}(t)$$

$$R \cdot \dot{i}_m \cdot e^{j(\omega t + \psi_i)} + L \cdot \frac{d\dot{i}_m \cdot e^{j(\omega t + \psi_i)}}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int \dot{i}_m \cdot e^{j(\omega t + \psi_i)} \cdot dt = \dot{u}_m \cdot e^{j(\omega t + \psi_u)} + / - \dot{e}_m \cdot e^{j(\omega t + \psi_e)}$$

$$R \cdot \sqrt{2} \cdot I \cdot e^{j\omega t} e^{j\psi_i} + L \cdot \frac{d[\sqrt{2} \cdot I \cdot e^{j\omega t} e^{j\psi_i}]}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int \sqrt{2} \cdot I \cdot e^{j\omega t} e^{j\psi_i} \cdot d(\omega t + \psi_i) = \\ = \sqrt{2} \cdot U \cdot e^{j\omega t} e^{j\psi_u} + / - \sqrt{2} \cdot E \cdot e^{j\omega t} e^{j\psi_e} \quad | : \sqrt{2} \cdot e^{j\omega t}$$

$$R \cdot \dot{I} + j\omega L \cdot \dot{I} - j \frac{1}{\omega C} \cdot \dot{I} = \dot{U} + / - \dot{E}$$

$$\left(R + j\omega L - j \frac{1}{\omega C} \right) \cdot \dot{I} = \dot{U} + / - \dot{E}$$

$$Z \cdot \dot{I} = \dot{U} + / - \dot{E}$$

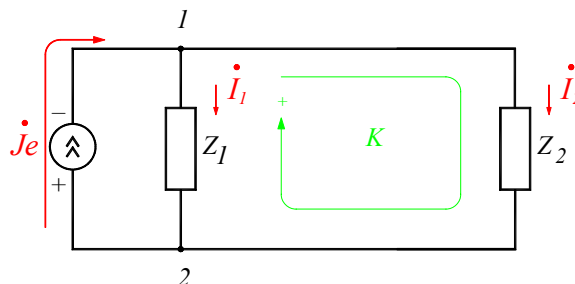
$$\dot{I} = \frac{\dot{U} + / - \dot{E}}{Z} = \frac{\dot{V}_a - \dot{V}_b + / - \dot{E}}{Z} \quad (2.25)$$

Обобщеният закон на Ом в комплексна форма (изрази (2.24) и (2.25)) е в сила за активен клон (клон, съдържащ източник на ЕДН). При наличие на пасивен клон, несъдържащ източник на ЕДН $\Rightarrow \dot{E} = 0 \text{ V}$, при което комплексната форма на закона е следната:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{\dot{V}_a - \dot{V}_b}{Z} \quad (2.26)$$

2.1.4. Делител на ток и делител на напрежение

а) Делител на ток е показан на фиг. 2.18.



Фиг. 2.18

2. ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ ПРИ СИНУСОИДАЛНИ РЕЖИМИ

$$\text{От I-ви закон на Кирхоф за възел 1} \Rightarrow \begin{cases} j\dot{e} - \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

$$\text{От II-ри закон на Кирхоф за контур } K \Rightarrow \begin{cases} Z_2 \dot{I}_2 - Z_1 \dot{I}_1 = 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

От (2.27) $\Rightarrow \dot{I}_1 = j\dot{e} - \dot{I}_2$, което се замества в (2.28) и се получава:

$$Z_2 \dot{I}_2 - Z_1 (j\dot{e} - \dot{I}_2) = 0$$

$$Z_2 \dot{I}_2 + Z_1 \dot{I}_2 = Z_1 j\dot{e}$$

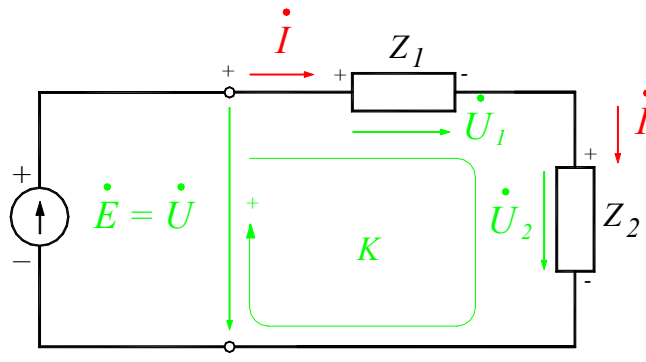
$$(Z_1 + Z_2) \dot{I}_2 = Z_1 j\dot{e} \quad \Rightarrow \quad \dot{I}_2 = j\dot{e} \cdot \frac{Z_1}{(Z_1 + Z_2)} \quad (2.29)$$

Замества се (2.29) в (2.27) и се получава:

$$\dot{I}_1 = j\dot{e} - \dot{I}_2 = j\dot{e} \cdot \frac{Z_2}{(Z_1 + Z_2)} \quad (2.30)$$

Извод: Токът в паралелен клон на токов делител е равен на **общия ток по чуждото съпротивление, разделени на сбора от съпротивленията** в двата паралелни колони.

б) Делител на напрежение е показан на фиг. 2.19.



Фиг. 2.19

$$\text{От II-ри закон на Кирхоф за контур } K \Rightarrow \dot{U}_1 + \dot{U}_2 - \dot{U} = 0, \quad \dot{U} = \dot{E}$$

$$\dot{U}_1 + \dot{U}_2 = \dot{U} = \dot{E}$$

$$Z_1 \dot{I} + Z_2 \dot{I} = \dot{E}$$

$$(Z_1 + Z_2) \dot{I} = \dot{E}$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{(Z_1 + Z_2)} = \frac{\dot{U}}{(Z_1 + Z_2)} \quad (2.31)$$

2. ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ ПРИ СИНУСОИДАЛНИ РЕЖИМИ

$$\text{От закона на Ом} \Rightarrow \begin{cases} \dot{U}_1 = Z_1 \cdot \dot{I} = \dot{E} \cdot \frac{Z_1}{(Z_1 + Z_2)} = \dot{U} \cdot \frac{Z_1}{(Z_1 + Z_2)} \\ \dot{U}_2 = Z_2 \cdot \dot{I} = \dot{E} \cdot \frac{Z_2}{(Z_1 + Z_2)} = \dot{U} \cdot \frac{Z_2}{(Z_1 + Z_2)} \end{cases} \quad (2.32)$$

Извод: Напрежението върху всяко от съпротивленията в контура е равно на входното напрежение по собственото съпротивление, разделени на сбора от съпротивленията в контура.