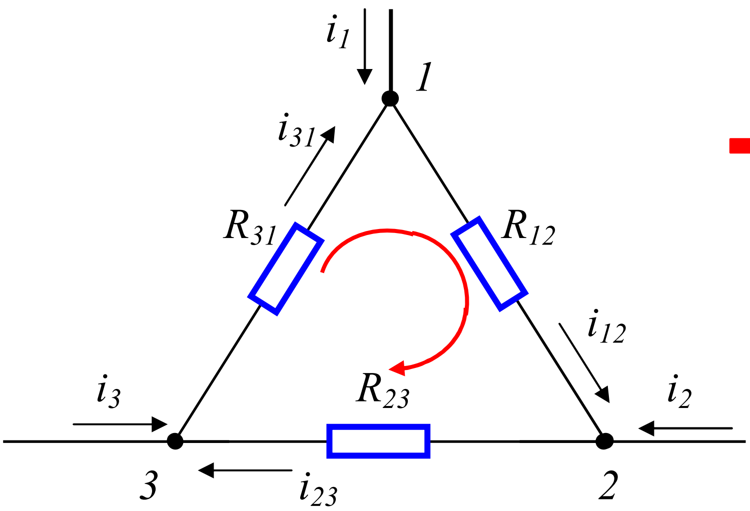
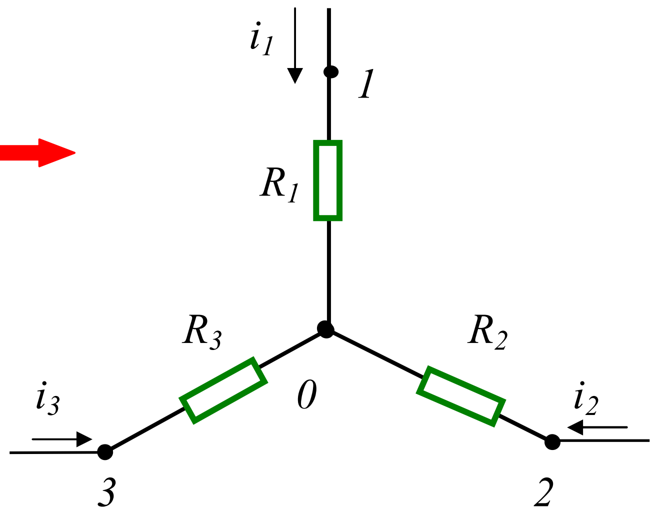
<u>4. Въпрос</u>
<u>Еквивалентно преобразуване на съпротивления свързани в “триъгълник” в свързване “звезда” ($\Delta \rightarrow Y$).</u>

Съединението на три съпротивления във вид на 3-лъчева звезда се нарича съединение “**звезда**”, а на 3 съпротивления, така че да образуват страни на триъгълник – “**триъгълник** “. Често за удобство се налага преобразуване от единия вид в другия, така,че останалата част от схемата не се променя.

<u>а) Преобразуване</u> 



фиг.1



фиг.2

<u>За съединението “триъгълник”</u>

- От II закон на Кирхоф:
  $\boldsymbol{i_{12} R_{12} + i_{23} R_{23} + i_{31} R_{31} = 0}$
- От I закон на Кирхоф:
  $\boldsymbol{i_1 + i_{31} = i_{12}}$
  $\boldsymbol{i_{12} + i_2 = i_{23}}$
- Следователно:
  $\boldsymbol{i_{12} R_{12} + (i_{12} + i_2) R_{23} + (i_{12} - i_1) R_{31} = 0}$

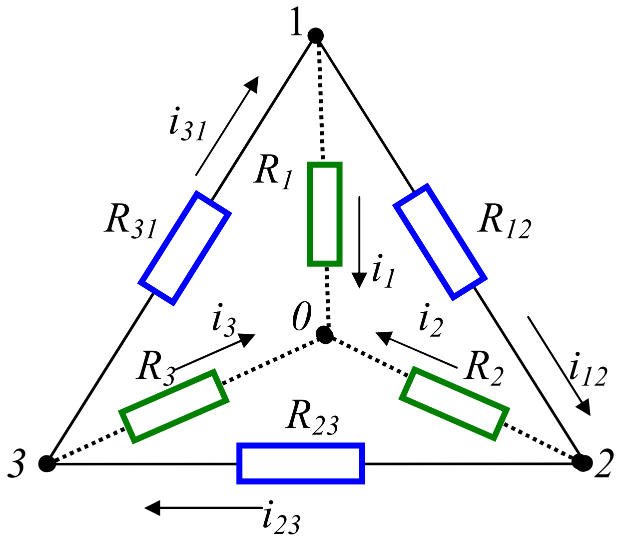
Тогава:

$\boldsymbol{i_{12} (R_{12} + R_{23} + R_{31}) = i_1 R_{31} - i_2 R_{23}}$

$$\Rightarrow \quad i_{12} = i_1 \frac{R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} - i_2 \frac{R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

- но:
  $\boldsymbol{U_{12} = i_{12} R_{12}}$

$$\Rightarrow \quad U_{12} = i_1 \frac{R_{31} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} - i_2 \frac{R_{23} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$



За съединението "звезда"

$$U_{12} = i_1 R_1 - i_2 R_2 = 0$$

Напрежението U_{12} е едно и също за "триъгълник" и за "звезда"

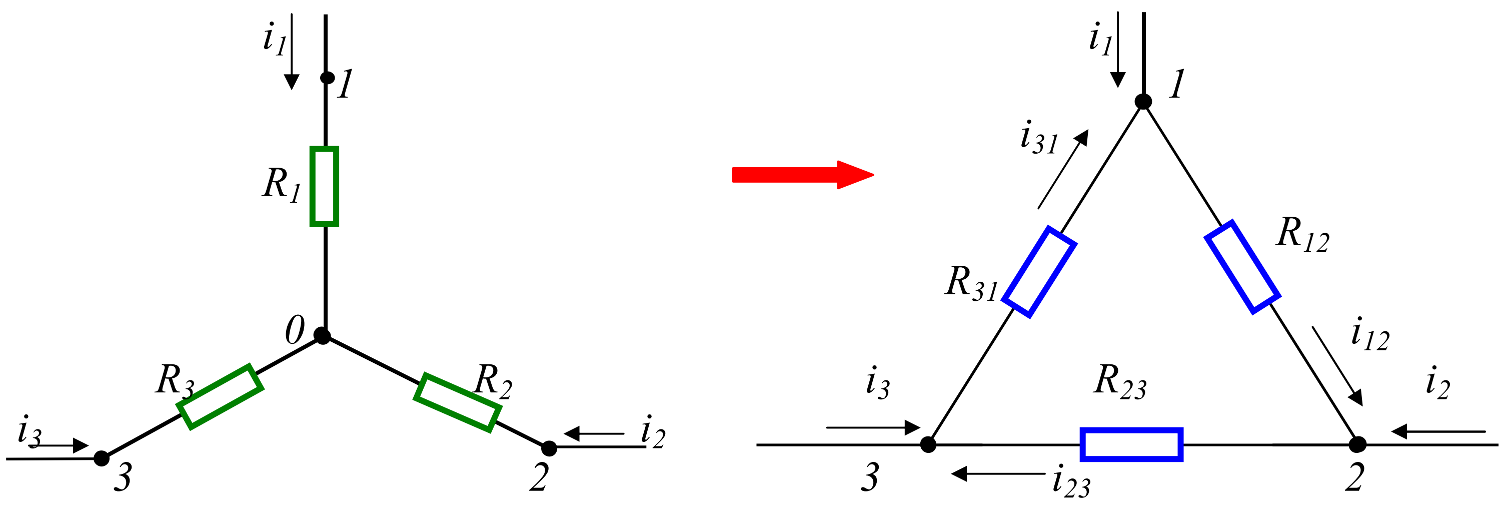
$$\Rightarrow \quad R_1 = \frac{R_{31} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_2 = \frac{R_{23} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

Аналогично:

$$R_3 = \frac{R_{23} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

б) Преобразуване



$$R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_3 = \frac{R_{31} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$\frac{R_3}{R_1}=\frac{R_{31}R_{23}}{R_{31}R_{12}} \quad\Rightarrow\quad R_{23}=R_{12}\frac{R_3}{R_1}$$

$$\frac{R_3}{R_2}=\frac{R_{31}R_{23}}{R_{12}R_{23}} \quad\Rightarrow\quad R_{31}=R_{12}\frac{R_3}{R_2}$$

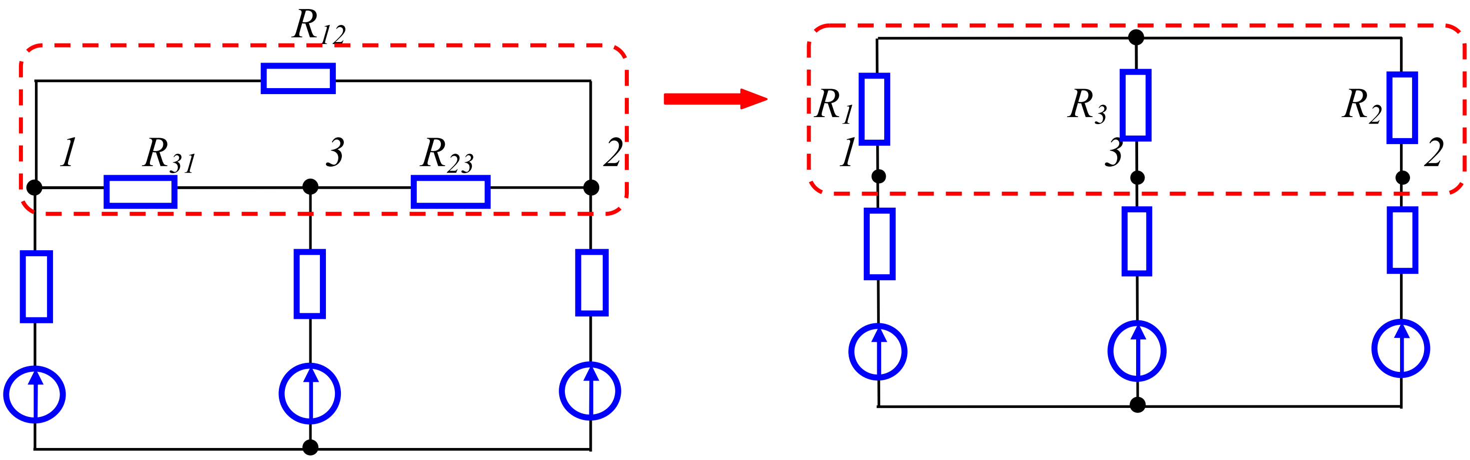
$$\Rightarrow\quad R_1=\frac{R_{12}.R_{12}.\frac{R_3}{R_2}}{R_{12}+R_{12}\frac{R_3}{R_1}+R_{12}\frac{R_3}{R_2}}=\frac{R_{12}\frac{R_3}{R_2}}{1+\frac{R_3}{R_1}+\frac{R_3}{R_2}}=\frac{R_{12}.\frac{R_3}{R_2}.R_1.R_2}{R_1.R_2+R_2.R_3+R_3.R_1}$$

$$\Rightarrow\quad R_1=R_{12}.\frac{R_3R_1}{R_1.R_2+R_2.R_3+R_3.R_1}$$

$$\Rightarrow\quad R_{12}=R_1\left(\frac{R_1.R_2}{R_1.R_3}+\frac{R_2.R_3}{R_1.R_3}+\frac{R_1.R_3}{R_1.R_3}\right)=R_1+R_2+\frac{R_1.R_2}{R_3}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Rightarrow\quad R_{12}&=R_1+R_2+\frac{R_1.R_2}{R_3};\\ R_{23}&=R_2+R_3+\frac{R_2.R_3}{R_1};\\ R_{31}&=R_3+R_1+\frac{R_3.R_1}{R_2};\end{aligned}}$$

<u>Пример</u> – преобразуване 



R$_{12}$=2Ω; R$_{23}$=3Ω R$_{31}$=5Ω

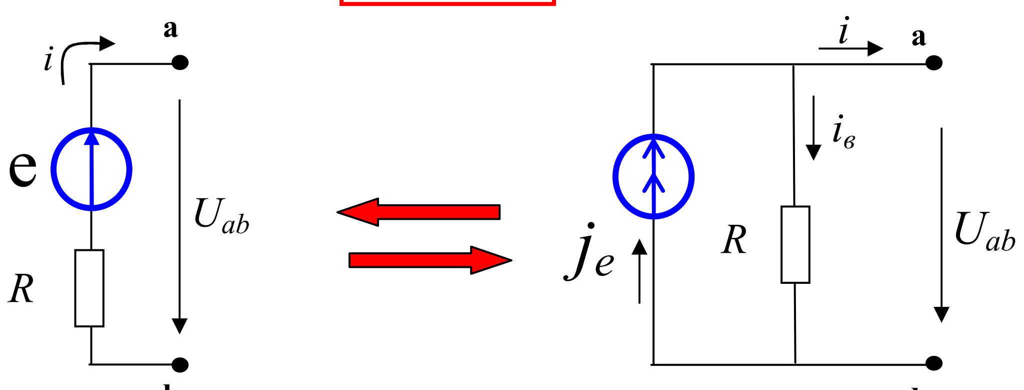
$$\Rightarrow\quad R_1=\frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}=1\Omega \quad R_2=\frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}=0.6\Omega \quad R_3=\frac{R_{31}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}=1.5\Omega$$

Преобразуване на активни участъци от ел. вериги

<u>5. Въпрос</u>
<u>Еквивалентни схеми на активни двуполюсници от последователен и от паралелен тип. Взаимно преминаване</u>

Реалните източници на енергия се представят посредством идеален източник на напрежение ($\boldsymbol{e}$) или ток ($\boldsymbol{j_e}$) и съответно паралелно или последователно свързано към него съпротивление ($\boldsymbol{R}$), отразяващо енергийните загуби. За удобство в електрическите схеми може да се заменя източник от последователен тип с източник от паралелен тип и обратно при спазване на съотношенията:

$$\boxed{\begin{gathered} e = j_e . R \\ j_e = \frac{e}{R} \end{gathered}}$$



фиг.1. Източник от последователен тип

фиг.2. Източник от паралелен тип

<u>**Доказателство**</u>

- Двата двуполюсника са еквивалентни. Следователно токът i и напрежението на изводите им U_{ab} са едни и същи.
- за източника от последователен тип (фиг.1):
  $U_{ab}=e- iR$
- за източника от паралелен тип (фиг.2):
  $j_e = i + i_в$
  $\Rightarrow \ U_{ab} = i_в R = (j_e - i) R = j_e R - iR$
  $\Rightarrow \ U_{ab} = j_e R - iR$

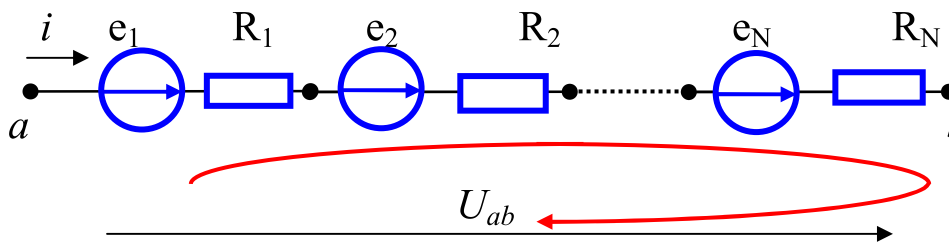
- Но U_{ab} е едно и също за фиг.1 и за фиг.2:
  $\Rightarrow \ e - iR = j_e R - iR$

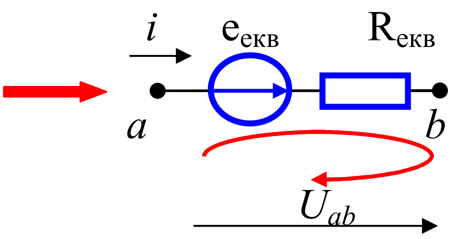
$$\boxed{\Rightarrow \ \boldsymbol{e = j_e R}}$$

6. Въпрос

Преобразуване на последователно и паралелно съединение от активни двуполюсници. Прехвърляне на източник на е.д.н. през възел. Пренасяне на източник на е.д.т. в контур

а) Преобразуване на последователно свързани клонове





$$\boxed{R_{екв} = \sum_{k=1}^{N} R_k; \quad e_{екв} = \sum_{k=1}^{N} e_k}$$

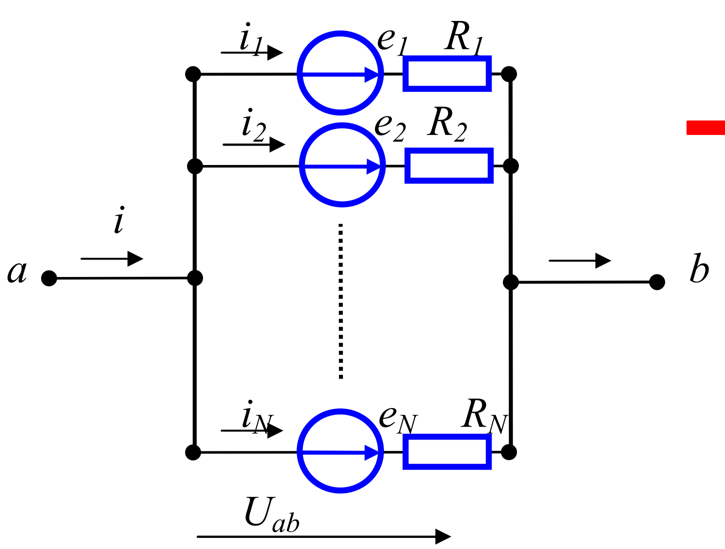
Доказателство

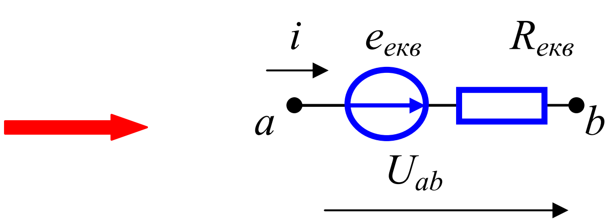
- През последователно свързаните $R_1, R_2, \ldots, R_N$ и $e_1, e_2, \ldots, e_N$ тече един и същи ток i.
- От II закон на Кирхоф за фиг.1:
  $iR_1 + iR_2 + \ldots + iR_N - U_{ab} = e_1 + e_2 + \ldots + e_N$
  $\Rightarrow U_{ab} = i(R_1 + R_2 + \ldots + R_N) - (e_1 + e_2 + \ldots + e_N)$
- От II закон на Кирхоф за фиг.2:
  $iR_{екв} - U_{ab} = e_{екв}$
  $\Rightarrow U_{ab} = iR_{екв} - e_{екв}$
- Но U_{ab} е едно и също за фиг.1 и за фиг.2:
  $\Rightarrow U_{ab} = i(R_1 + R_2 + \ldots + R_N) - (e_1 + e_2 + \ldots + e_N) = iR_{екв} - e_{екв}$

Следователно:

$$\boxed{\begin{aligned} R_{екв} &= R_1 + R_2 + \ldots + R_N \\ e_{екв} &= e_1 + e_2 + \ldots + e_N \end{aligned}}$$

б) Преобразуване на паралелно свързани клонове





$$\boxed{\frac{1}{R_{екв}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{R_k}; \quad e_{екв} = R_{екв} \sum_{k=1}^{N} \frac{e_к}{R_k}}$$

Доказателство

- Към паралелно свързаните $R_1, R_2, R_3, \dots, R_k, R_N$ е приложено <u>едно и също напрежение U_{ab}.</u>
- За <u>всеки клон k</u> токът i_k се определя съгласно закона на Ом: $i_k = (U_{ab}+e_k)/R_k$
- От I закон на Кирхоф за възел a :

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_N = \frac{U_{ab}+e_1}{R_1} + \frac{U_{ab}+e_2}{R_2} + \dots + \frac{U_{ab}+e_N}{R_N} =$$

$$= U_{ab}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}\right) + \sum_{k=1}^{N} \frac{e_k}{R_k}$$

Ако означим с $R_{екв}$ съпротивлението, определено като:

$$\boxed{\frac{1}{R_{екв}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{R_k}}$$

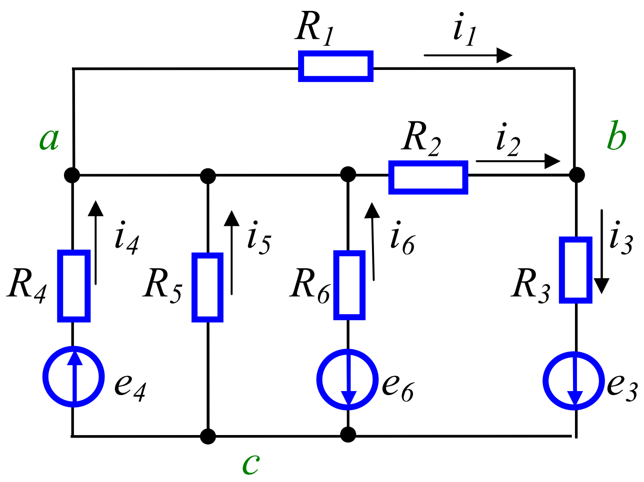
$$\Rightarrow i = U_{ab}\frac{1}{R_{екв}} + \sum_{k=1}^{N}\frac{e_k}{R_k} = \frac{1}{R_{екв}}\left(U_{ab} + R_{екв}\sum_{k=1}^{N}\frac{e_k}{R_k}\right) = \frac{1}{R_{екв}}(U_{ab} + e_{екв})$$

където с $e_{екв}$ е означено електродвжещо напрежение, определено като:

$$\boxed{e_{екв} = R_{екв}\sum_{k=1}^{N}\frac{e_k}{R_k}}$$

Пример

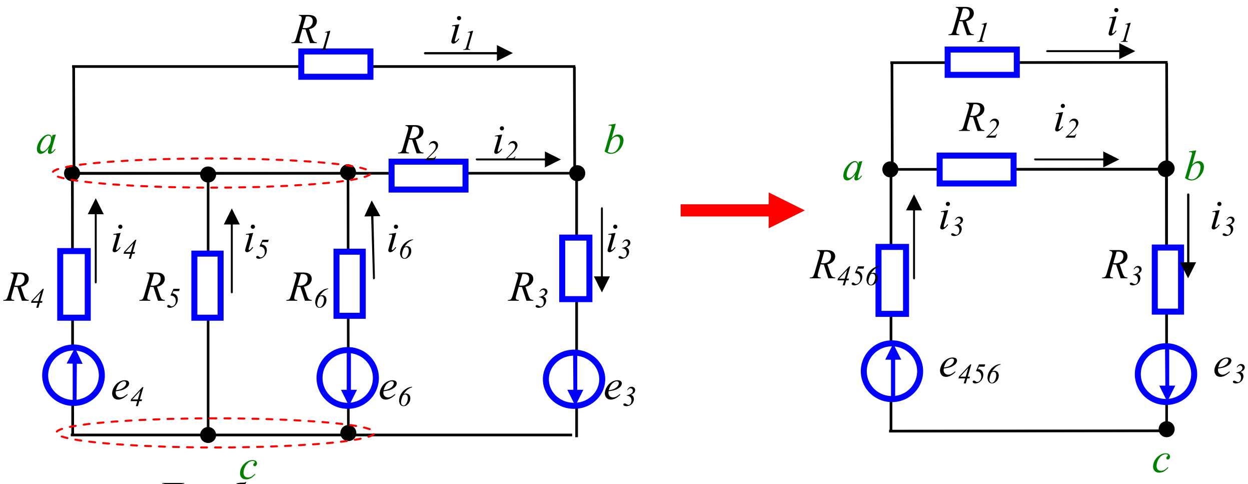
Да се определят клоновите токове i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 и i_6, както и напреженията Uab, Uac, и Ucb за веригата от фиг.3, ако $R_1=15\Omega$, $R_2=10\Omega$, $R_3=4\Omega$, $R_4=R_5=R_6=30\Omega$, а напреженията на източниците са съответно $e_3=90V$, $e_4=60V$ и $e_6=30V$.



фиг.3

Решение

Преобразуваме участъци от веригата с цел опростяване на анализа и удобство при определяне на търсените токове и напрежения.



Преобразуваме участъка между възлите a и c, като заменяме трите паралелни клона с токове i_4, i_5 и i_6 с един клон с еквивалентно съпротивление R_{456} и източник на напрежение e_{456}, които се определят като:

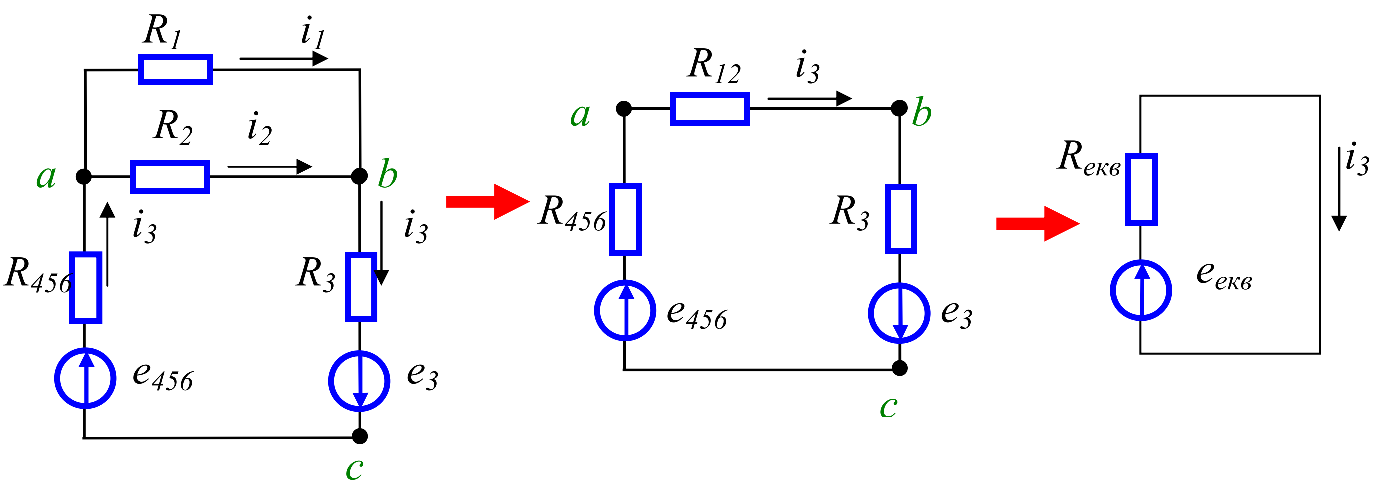
$$\frac{1}{R_{456}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} = \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10} \qquad \boxed{\Rightarrow R_{456} = 10\Omega}$$

$$e_{456} = R_{456}\left(\frac{e_4}{R_4} + \frac{0}{R_5} - \frac{e_6}{R_6}\right) = 10\left(\frac{60}{30} - \frac{30}{30}\right) = 10V \qquad \boxed{\Rightarrow e_{456} = 10V}$$

Заменяме участъка между възлите a и b с един клон с еквивалентно съпротивление $R_{12} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \dfrac{15.10}{25} = 6\Omega$, а след това преобразуваме последователно свързаните участъци в контур с еквивалентно съпротивление $R_{екв}$ и източник на напрежение $e_{екв}$, които се определят като:

$$R_{екв} = R_{456} + R_{12} + R_3 = 10 + 6 + 4 = 20\Omega$$
$$e_{екв} = e_{456} + e_3 = 10 + 90 = 100V$$

$$\boxed{\begin{aligned} R_{екв} &= 20\Omega \\ e_{екв} &= 100V \end{aligned}}$$



Тогава токът i_3 се определя като: $i_3 = \dfrac{E}{R_{екв}} = \dfrac{100}{20} = 5A$

Токовете i_1 и i_2 се определят съответно като:

$$i_1 = i_3 . \frac{R_2}{R_2 + R_1} = 5 . \frac{10}{25} = 2A$$

$$i_2 = i_3 - i_1 = 5 - 2 = 3A$$

Напрежението *Uab* може да се определи по закона на Ом като :

$$U_{ab} = i_1 . R_1 = 2.15 = 30V$$

Напреженията *Uac* и *Ubc* можгат да се определят по обобщения закон на Ом като :

$$U_{ac} = e_{456} - i_3 . R_{456} = 10 - 5.10 = -40V \text{ или } U_{ca} = 40V$$

$$U_{bc} = -e_3 + i_3 . R_3 = -30 + 4.10 = 10V$$

Токовете $i_{4,}$ i_5 и i_6 се определят от изходната схема по закона на Ом като:

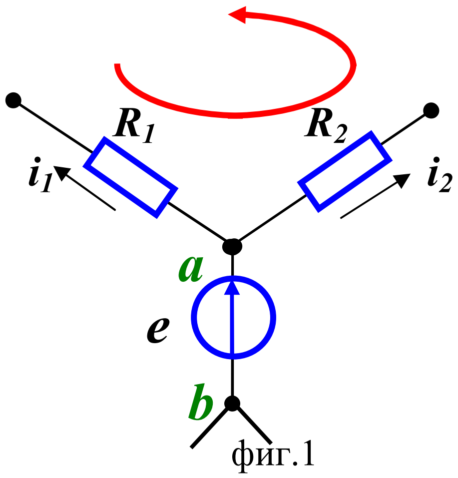
$$i_4 = \frac{V_c - V_a + e_4}{R_4} = \frac{U_{ca} + e_4}{R_4} = \frac{40 + 60}{30} = 3{,}33A$$

$$i_5 = \frac{V_c - V_a}{R_5} = \frac{U_{ca}}{R_5} = \frac{40}{30} = 1{,}33A$$

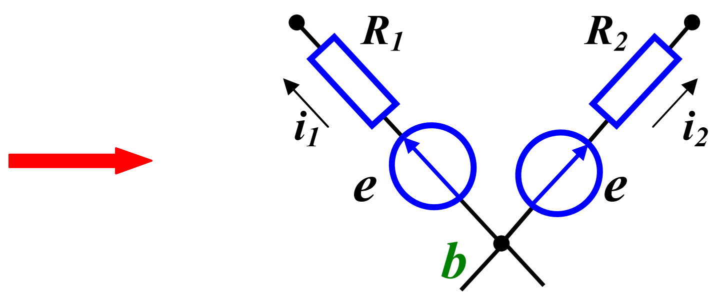
$$i_6 = \frac{V_c - V_a - e_6}{R_6} = \frac{U_{ca} - e_6}{R_6} = \frac{40 - 30}{30} = 0{,}33A$$

в) Прехвърляне на източник на е.д.н. през възел

Този тип преобразуване се налага понякога с цел опростяване на анализа на веригата или за удобство при прилагане на определен метод.



фиг.1

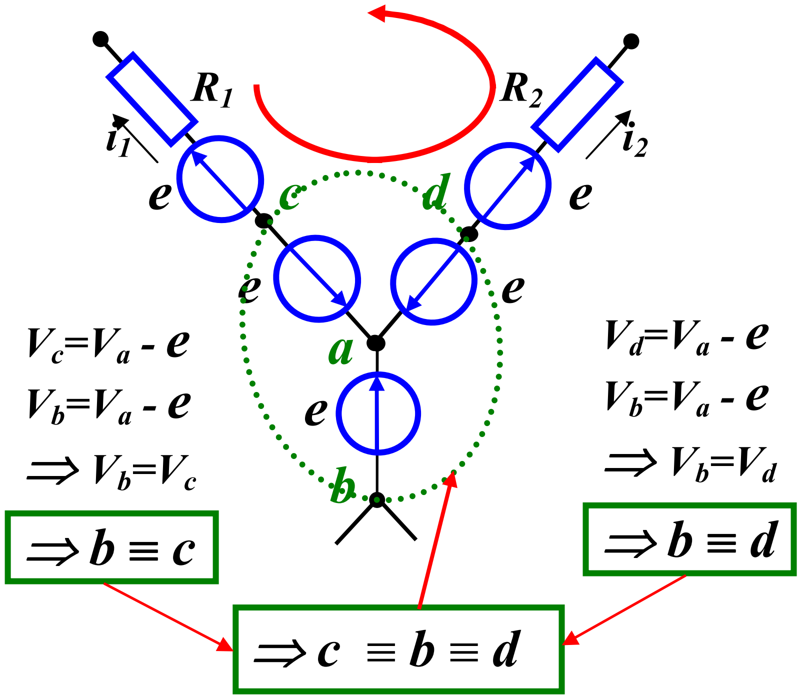


фиг.2

Доказателство

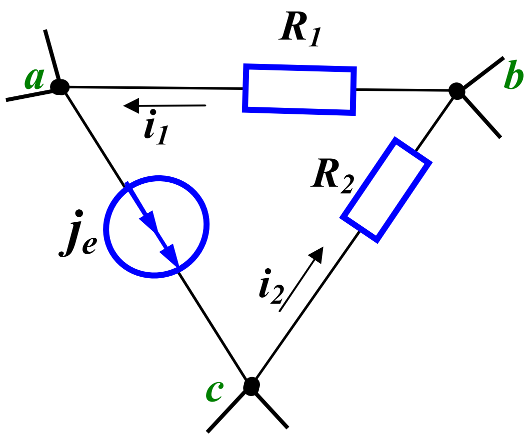
Ако в клоновете със съпротивления R_1 и R_2 (фиг.1) **прибавим и извадим** източник с големина e (фиг.3), схемата не се променя. (За проверка може да се използва II закон на Кирхоф.) При това обаче **точките *c*, *b* и *d* имат един и същи потенциал**.

Следователно **могат да се обединят в една и съща точка** ***b***.

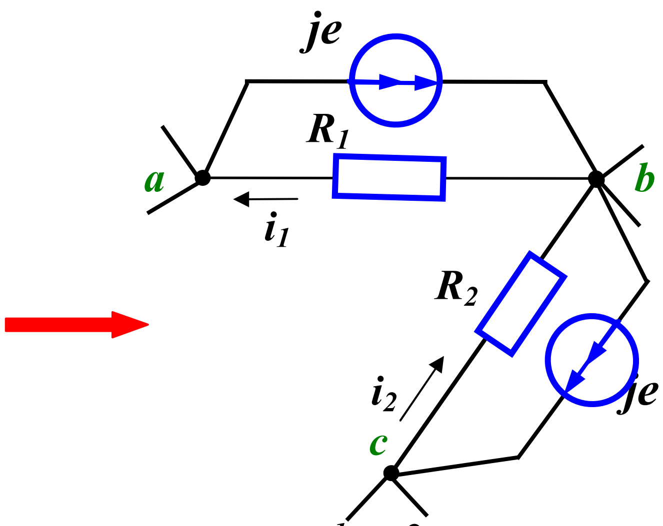


фиг.3

<u>г)Пренасяне на източник на е.д.т. в контур</u>

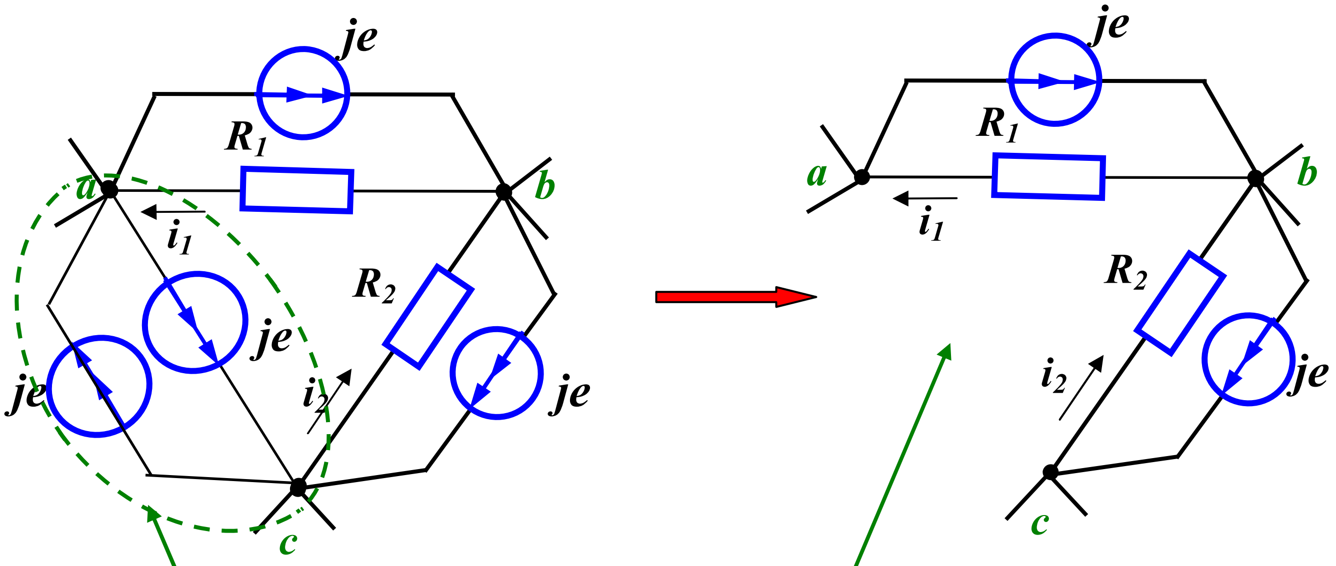


фиг.1



фиг.2

Ако във всеки възел прибавим или извадим източник на ток j_e (фиг.3), схемата не се променя. (За проверка може да се използва I закон на Кирхоф за възлите ***a***, ***b*** и ***c***.)



фиг.3

Еквивалентният ток между възлите **а** и **с** е **нула**:

$i_{екв} = j_e - j_e = 0$

⇒

Следователно участъкът между **а** и **с** е прекъснат

7. Въпрос

Анализ на стационарни режими с използване на законите на Кирхоф. (Метод с клонови токове)

Както вече отбелязахме **всички електрически вериги**, при произволен характер на изменение на токовете и напреженията, **се подчиняват на законите на Кирхоф.** Методът при който за определяне на неизвестните токове в една верига записваме система уравнения по законите на Кирхоф се нарича "**метод с клонови токове**".

Алгоритъм на метода:

1. Определят се :

    m - брой клонове на веригата (във верига с **m** клона има **m** неизвестни тока);

    n - брой възли на веригата.

2. Записват се :

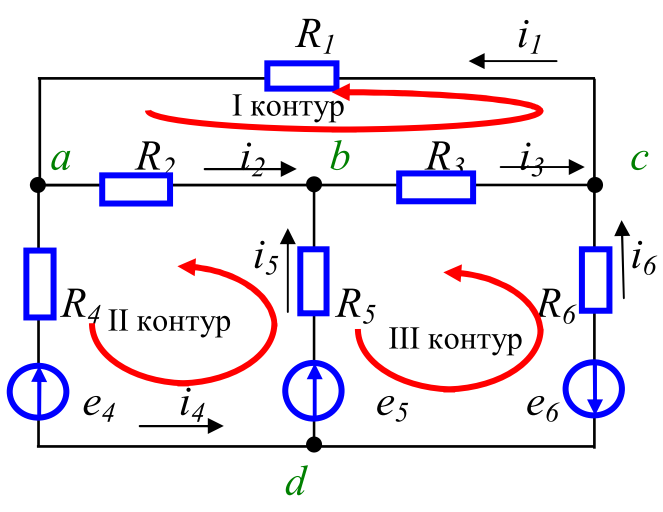
    n -1 уравнения по I закон на Кирхоф за **n -1** възела на веригата;

    к = m - n +1 уравнения по II закон на Кирхоф за **к** контура във веригата

(Общо **m** уравнения относно **m** неизвестни тока).

3. Решава се системата от **m** уравнения относно **m** неизвестни тока:

Пример – Система уравнения по **метод с клонови токове**



1. Определят се :

m =6 - брой клонове на веригата ;

n=4 - брой възли на веригата.

2. Записват се :

n -1 = <u>3 уравнения</u> по I закон на Кирхоф за възли **a, b** и **c** на веригата;

възел **"a"**: $+i_1 - i_2 - i_4 = 0$

възел **"b"**: $+i_5 + i_2 - i_3 = 0$

възел **"c"**: $-i_1 + i_3 + i_6 = 0$

к = m - n +1 = 6 - 4 + 1 =3 <u>уравнения</u> по II закон на Кирхоф

I контур: $i_1 R_1 + i_2 R_2 + i_3 R_3 = 0$

II контур: $i_5 R_5 - i_2 R_2 + i_4 R_{34} = e_5 - e_4$

III контур: $i_6 R_6 - i_3 R_3 - i_5 R_5 = -e_5 - e_6$

3. Решава се системата от общо **6** уравнения относно **6**$^{-те}$ неизвестни тока