11. Въпрос

Изобразяване на синусоидални величини с комплекси. Комплексен образ. Комплексна ефективна стойност.

1. Изобразяване на синусоидални величини с комплекси.

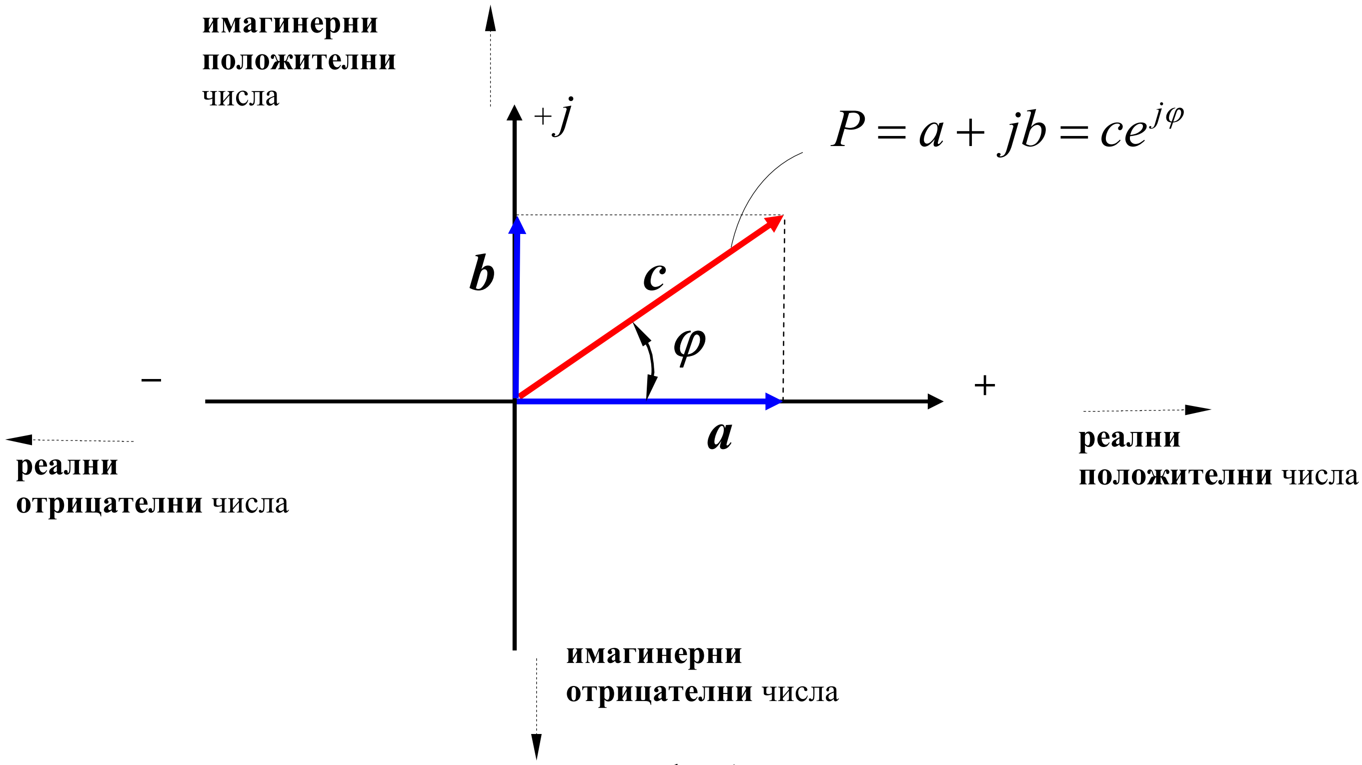
При анализа на синусоидални режими в линейни електрически вериги най-често се използва метод с комплексни образи (символичен метод). При него синусоидално изменящите се токове и напрежения се заменят с техни **комплексни образи**. По този начин анализът на процесите във веригата се опростява значително от математична гледна точка.

В електротехниката **имагинерната единица** се означава с $\boldsymbol{j}$, а не с $\boldsymbol{i}$ **!**

$$j = \sqrt{-1}$$

а) **Припомняне** на някои основни понятия, свързани с комплексните числа:

- Комплексните числа могат да се записват по два начина:
  - като **алгебрична сума** на реална и имагинерна част $P = a + jb$
  - в **експоненциален вид**, като произведение на модул и експонента: $P = c.e^{j\varphi}$
- Комплексните числа могат да се изобразяват в комплексната равнина:



фиг.1

Връзката между двете представяния на комплексните числа (алгебричната сума на реална и имагинерна част и експоненциалния вид) се вижда от фиг.1 и е следната:

$$\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = arctg\frac{b}{a}}$$

$$\boxed{a = c.\cos\varphi; \quad b = c.\sin\varphi}$$

<u>б) Комплексен образ</u> <u>и</u> **<u>комплексна ефективна стойност</u>** <u>на синусоидална величина</u>:

Ако за токът $i(t)$ е известно, че се изменя по синусоидален закон:

$$i(t) = i_m sin(\omega t + \psi_i),$$

то неговия **<u>комплексен образ</u>** може да се запише като:

$$\dot{i}(t) = i_m e^{j(\omega t + \psi_i)}.$$

Комплексният образ $\dot{i}(t)$ може да се представи и като:

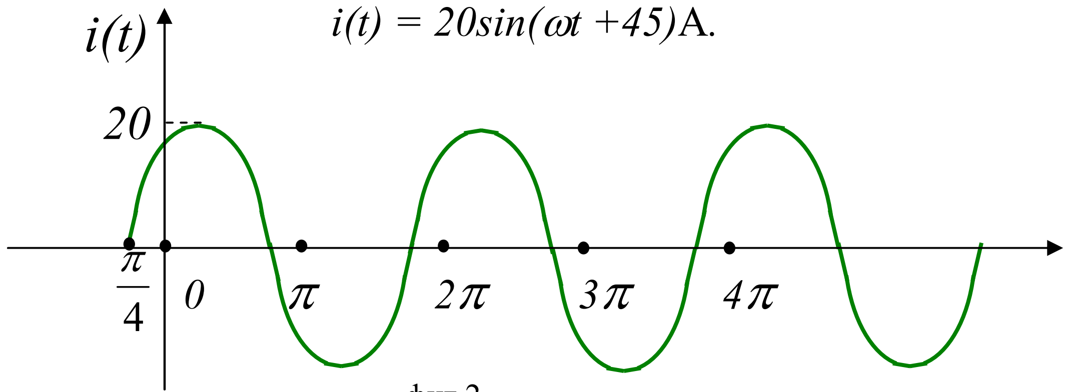
$$\dot{i}(t) = i_m e^{j(\omega t + \psi_i)} = \sqrt{2}.I.e^{j\omega t}.e^{j\psi_i} = \sqrt{2}e^{j\omega t}.Ie^{j\psi_i} = \sqrt{2}e^{j\omega t}.\dot{I},$$

където $\dot{I} = Ie^{j\psi_i}$ е **<u>комплексна ефективна стойност</u>** на синусоидалната величина. Често тази стойност се нарича за по-кратко **<u>комплекс</u>** на синусоидалната величина. Но в една верига всяка синусоидално изменяща се с честота ω величина съдържа в комплексния си образ един и същи коефициент $\sqrt{2}e^{j\omega t}$. Следователно съществената информация, характеризираща синусоидалната величина се съдържа в комплексната ефективна стойност.

<u>Примери: за определяне на комплексната ефективна стойност на синусоидална величина</u>

<u>Пример 1:</u> Да се определи комплекса на синусоидално изменящия се ток (фиг.2):

$$i(t) = 20sin(\omega t + 45)\text{A}.$$



фиг.2

<u>Решение:</u>

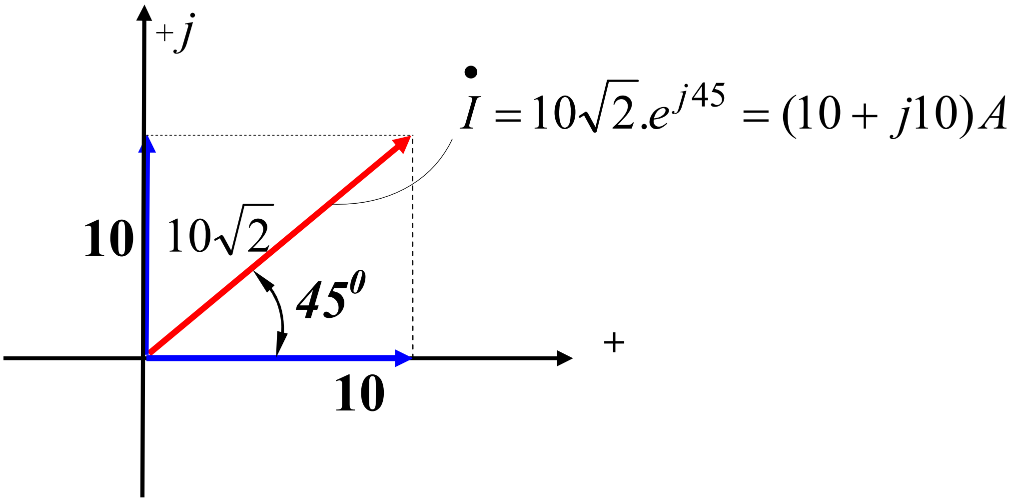
<u>Комплексната ефективна стойност</u> (комплекса) се определя като: $\dot{I} = Ie^{j\psi_i}$. За да определим комплекса $\dot{I}$ на синусоидално изменящия се ток $i(t)$ трябва да намерим ефективната стойност на тока I и началната фаза ψ_i. Ефективната стойност е $I = \frac{i_m}{\sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{2}}$, а началната фаза $\psi_i = 45^0$.

$$\dot{I} = \frac{20}{\sqrt{2}}e^{j45} = 10\sqrt{2}.e^{j45} =$$

$$= 10\sqrt{2}.(\cos 45 + j\sin 45) = 10\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}) = (10 + j10)A$$

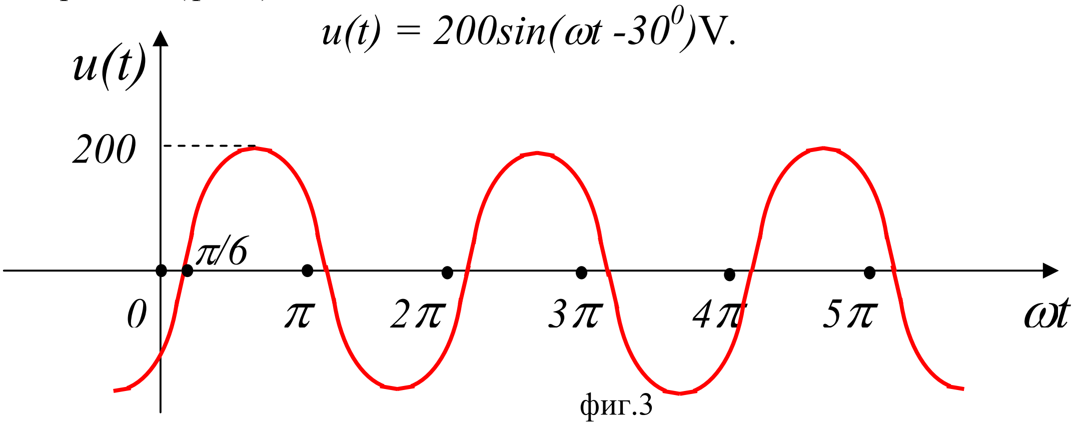
Можем да изобразим този ток в в комплексната равнина:

$$\boxed{\dot{I} = 10\sqrt{2}.e^{j45} = (10 + j10)A}$$



<u>Пример 2:</u> Да се определи комплекса на синусоидално изменящото се напрежение(фиг.3):

$$u(t) = 200\sin(\omega t - 30^0)\text{V}.$$



фиг.3

<u>Решение:</u>

<u>Комплексната ефективна стойност</u> (комплекса) се определя като: $\dot{U} = Ue^{j\psi_u}$.

За да определим комплекса $\dot{U}$ на синусоидално изменящото се напрежение $u(t)$ трябва да намерим ефективната стойност на напрежението U и началната фаза ψ_u.

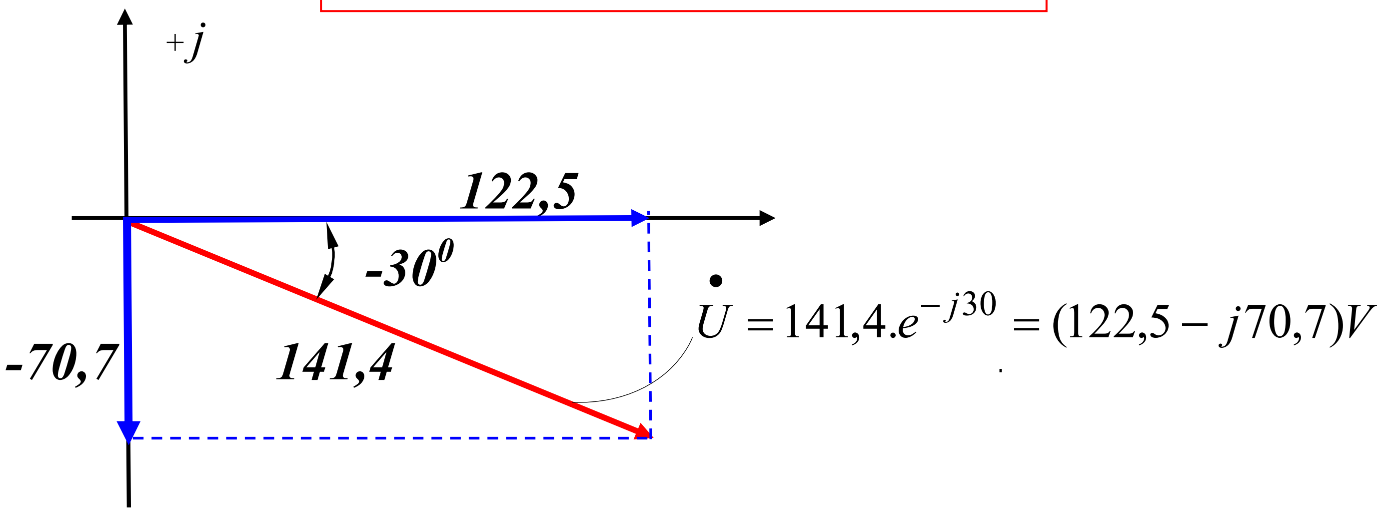
Ефективната стойност е $U = \frac{u_m}{\sqrt{2}} = \frac{200}{\sqrt{2}}$, а началната фаза $\psi_u = -30^0$.

$$\Rightarrow \dot{U} = \frac{200}{\sqrt{2}}e^{j(-30)} = 141{,}4e^{j(-30)} =$$

$$= 141{,}4[\cos(-30) + j\sin(-30)] = 141{,}4(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}) = (122.5 - j70.7)V$$

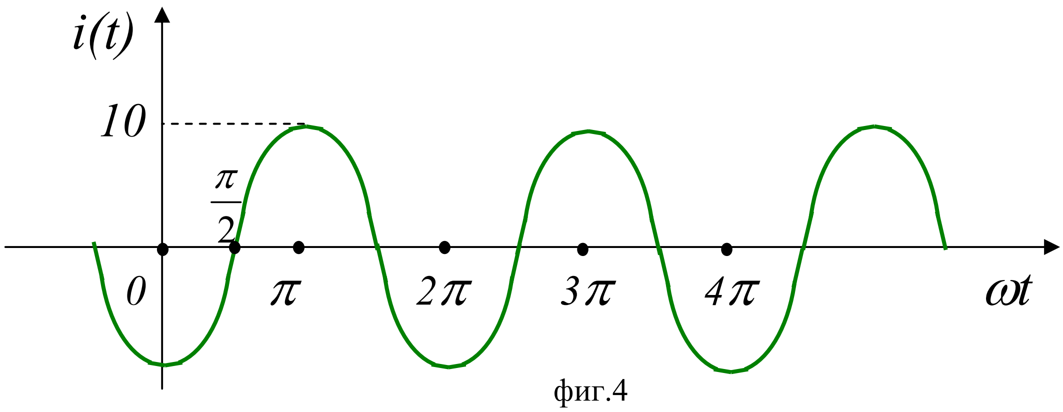
Можем да изобразим това напрежение в комплексната равнина:

$$\boxed{\dot{U} = 141{,}4e^{j(-30)} = (122.5 - j70.7)V}$$



<u>Пример 3:</u> Да се определи комплекса на синусоидално изменящия се ток (фиг.4):

$$i(t) = 10\sin(\omega t - 90)\text{A}.$$



фиг.4

<u>Решение:</u>

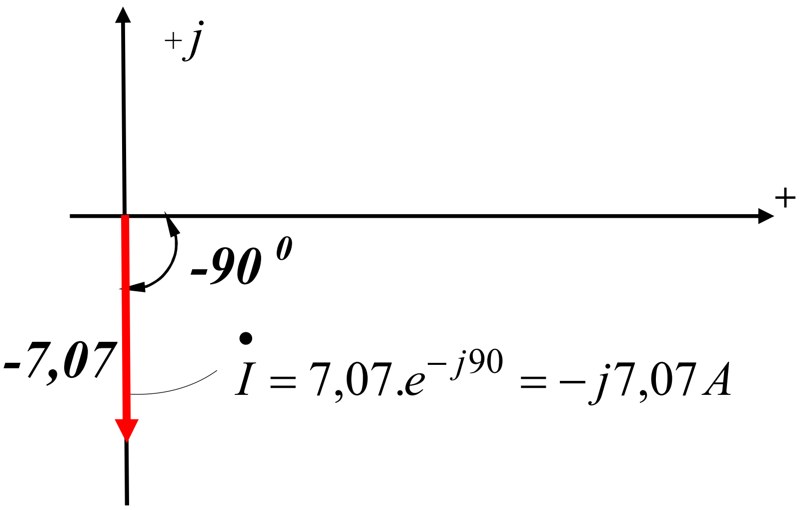
<u>Комплексната ефективна стойност</u> (комплекса) се определя като: $\dot{I} = Ie^{j\psi_i}$. За да определим комплекса $\dot{I}$ на синусоидално изменящия се ток $i(t)$ трябва да намерим ефективната стойност на тока I и началната фаза ψ_i. Ефективната стойност е $I = \frac{i_m}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}}$, а началната фаза $\psi_i = -90^0$.

$$\Rightarrow \quad \dot{I} = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{-j90} = 7{,}07.e^{-j90} =$$

$$= 7{,}07[\cos(-90) + j\sin(-90)] = 7{,}07(0 - j) = -j7{,}07A$$

Можем да изобразим този ток в в комплексната равнина:

$$\boxed{\dot{I} = 7{,}07.e^{-j90} = -j7{,}07\,A}$$



в) Обратно преобразуване от **комплексен образ** в **синусоидална величина**:

Ако за токът $i(t)$ е известно, че неговата комплексна ефективна стойност може да се запише като:

$$\dot{I} = a + jb$$

можем да намерим синусоидалния ток $i(t) = i_m sin(\omega t + \psi_i)$, по следния начин:

1. Определяме ефективната стойност и началната фаза на тока :

$$\dot{I} = a + jb = \sqrt{(a^2 + b^2)}.e^{jarctg\frac{b}{a}} = I.e^{j\psi_i},$$

където:

ефективната стойност е $I = \sqrt{a^2 + b^2}$, а началната фаза $\psi_i = arctg\dfrac{b}{a}$

2. Тогава синусоидалният ток $i(t)$ се определя като:

$$i(t) = \sqrt{2}.I\sin(\omega t + \psi_i) = i_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

Пример 1: Да се определи синусоидално изменящия се ток $i(t)$, ако комплекса на този ток има вида:

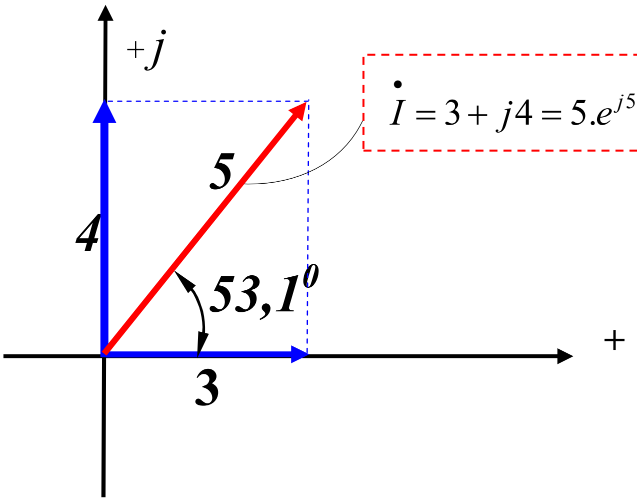
$$\dot{I} = (3 + j4)A$$

Решение:

За да определим синусоидално изменящия се ток $i(t)$ трябва да намерим амплитудната стойност i_m и началната фаза ψ_i на тока. Комплексната ефективна стойност, записана в експоненциален вид позволява да се определят ефективната стойност и началната фаза:

$$\dot{I} = 3 + j4 = \sqrt{3^2 + 4^2}.e^{jarctg\frac{4}{3}} = 5.e^{j53,1}A$$

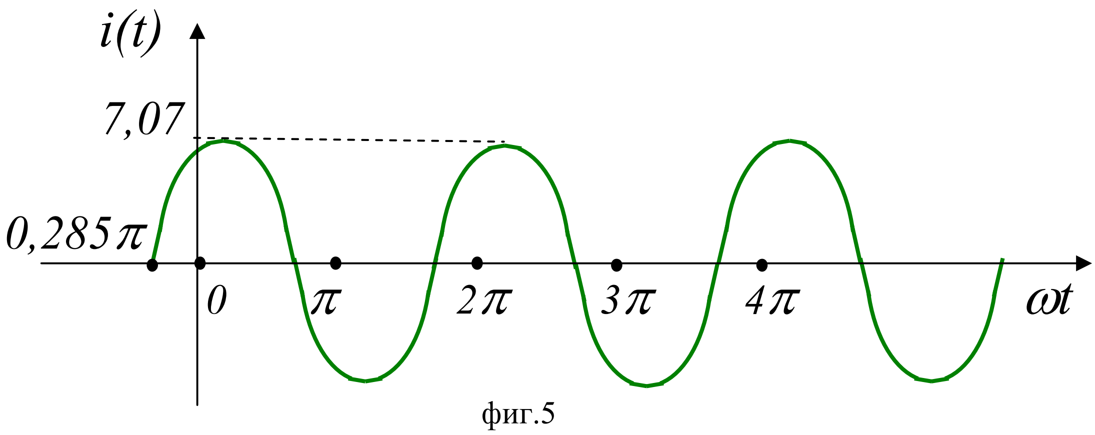
Можем да изобразим този ток в в комплексната равнина:



Следователно **<u>ефективната стойност на тока е I=5A, а началната фаза ψ_i =53,1^0</u>**.
Тогава амплитудата $i_m = 5\sqrt{2} = 7{,}07A$ и вече можем да запишем:

$$\boxed{i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i) = 7{,}07 \sin(\omega t + 53{,}1^0)A}$$

Синусоидално изменящият се ток е представен на фиг.5. (Ъгълът ψ_i в радиани се определя като $\psi_i = 51{,}3.\frac{\pi}{180} = 0.285\pi\ rad$)



фиг.5

<u>Пример 2:</u> Да се определи синусоидално изменящия се ток $i(t)$, ако комплекса на този ток има вида:

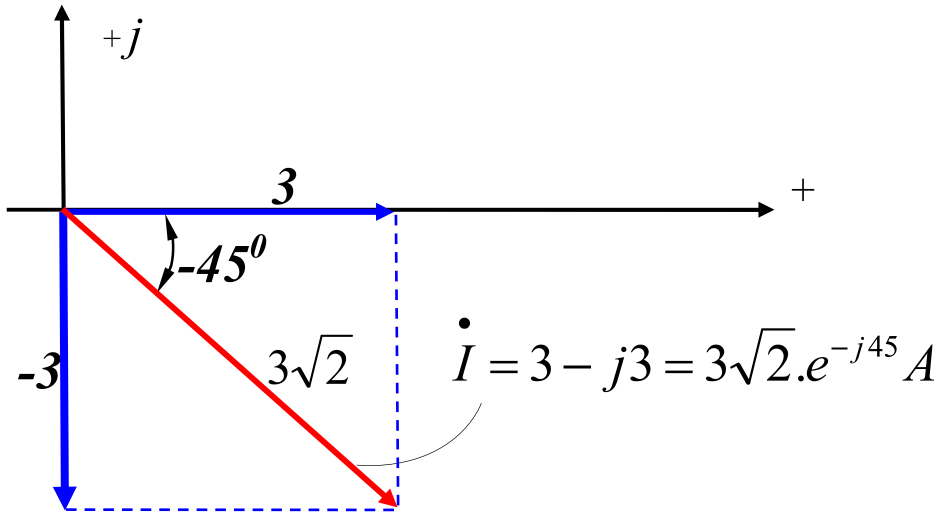
$$\dot{I} = (3 - j3)A$$

<u>Решение:</u>

За да определим синусоидално изменящия се ток $i(t)$ трябва да намерим <u>амплитудната стойност i_m и началната фаза ψ_i</u> на тока. Комплексната ефективна стойност, записана в експоненциален вид позволява да се определят **ефективната стойност и началната фаза:**

$$\dot{I} = 3 - j3 = \sqrt{3^2 + 3^2}.e^{jarctg\frac{-3}{3}} = 3\sqrt{2}.e^{-j45}A$$

Можем да изобразим този ток в в комплексната равнина (фиг.6):



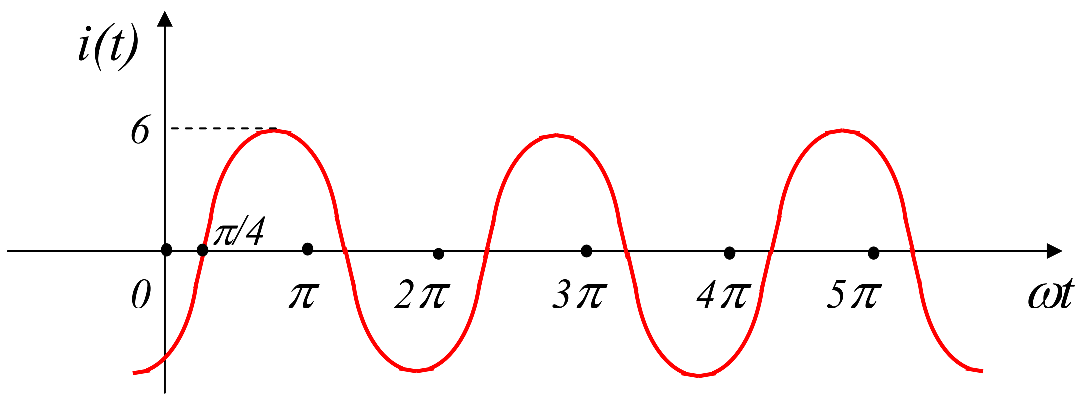
фиг.6

Следователно <u>ефективната стойност на тока</u> е $I = 3\sqrt{2}A$, а <u>началната фаза</u> ψ_i =53,1^0.

Тогава <u>амплитудата</u> $i_m = I\sqrt{2} = 6A$ и вече можем да запишем:

$$\boxed{i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i) = 6\sin(\omega t - 45^0)A}$$

Синусоидално изменящият се ток е представен на фиг.7. (Ъгълт ψ_i в радиани се определя като $\psi_i = -45\frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{4} rad$)



фиг.7

<u>Пример 3:</u> Да се определи синусоидално изменящото се напрежение $u(t)$, ако комплекса на този ток има вида:

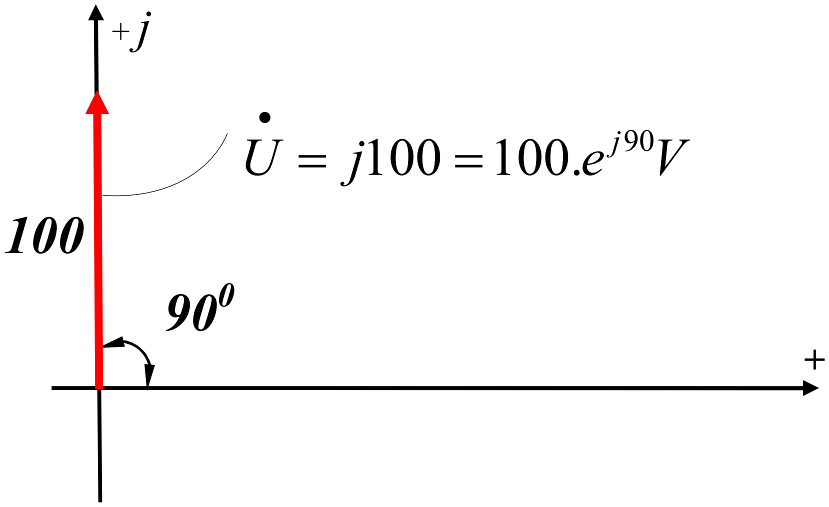
$$\dot{U} = j100V$$

Решение:

За да определим синусоидално изменящото се напрежение $u(t)$ трябва да намерим амплитудната стойност u_m и началната фаза ψ_u на напрежението. Комплексната ефективна стойност, записана в експоненциален вид позволява да се определят **ефективната стойност и началната фаза:**

$$\dot{U} = j100 = \sqrt{100^2}.e^{jarctg\frac{100}{0}} = 100.e^{j90}V$$

Можем да изобразим това напрежение в комплексната равнина (фиг.8):

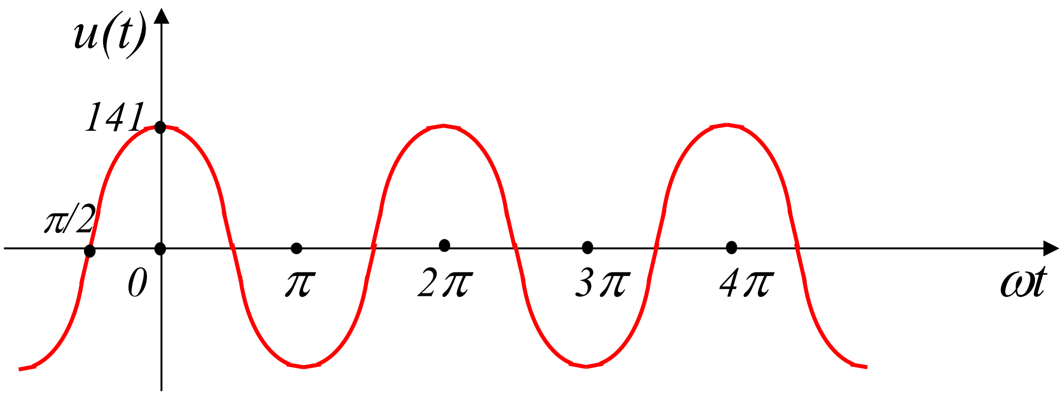


фиг.8

Следователно ефективната стойност на напрежението е $U = 100V$, а началната фаза ψ_u =90^0. Тогава амплитудата $u_m = U\sqrt{2} = 100\sqrt{2} = 141V$ и вече можем да запишем:

$$\boxed{u(t) = u_m \sin(\omega t + \psi_u) = 141\sin(\omega t + 90^0)V}$$

Синусоидално изменящото се напрежение $u(t)$ е представено на фиг.9. (Ъгълът ψ_u в радиани се определя като $\psi_u = 90\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{2}\,rad$)



фиг.9

г) **Умножение** на комплексна величина **с имагинерната единица**

Ако умножим комплексно число с имагинерната единица j, това е равносилно на завъртане на величината на ъгъл 90^0 в комплексната равнина.

Доказателство:

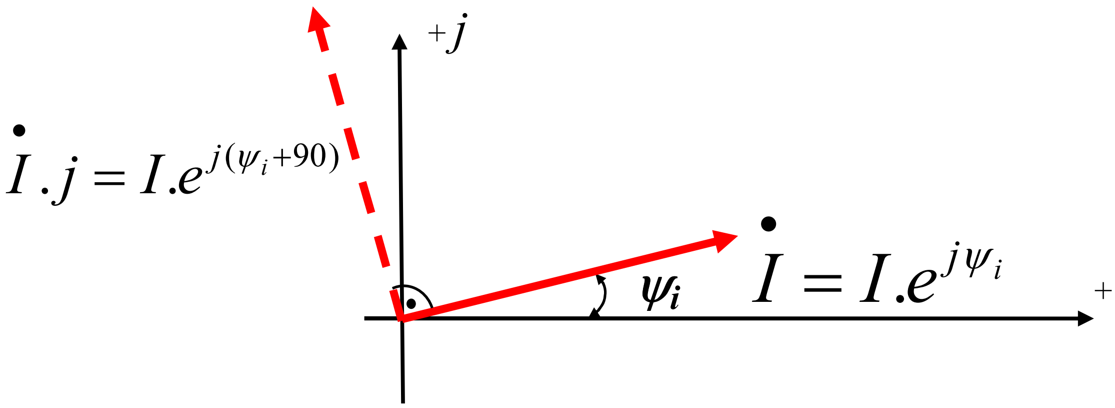
Имагинерната единица j, записана в експоненциален вид се представя като:

$$j = 0 + j.1 = \sqrt{0^2 + 1^2}\, e^{jarctg\frac{1}{0}} = 1e^{j90}.$$

Ако умножим $\dot{I} = I.e^{j\psi_i}$ с имагинерната единица, получаваме:

$$\dot{I}.j = I.e^{j\psi_i}.1.e^{j90} = I.e^{j(\psi_i+90)}.$$

Това може да се изобрази в комплексната равнина по следния начин:



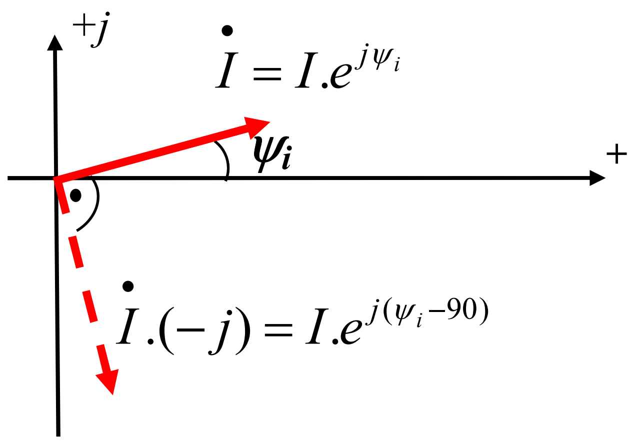
Аналогично, ако умножим комплексно число с (-j), това е равносилно на завъртане на величината на ъгъл -90^0 в комплексната равнина.

Доказателство:

$$-j = 0 - j.1 = \sqrt{0^2 + 1^2}\, e^{jarctg\frac{-1}{0}} = 1e^{j-90}.$$

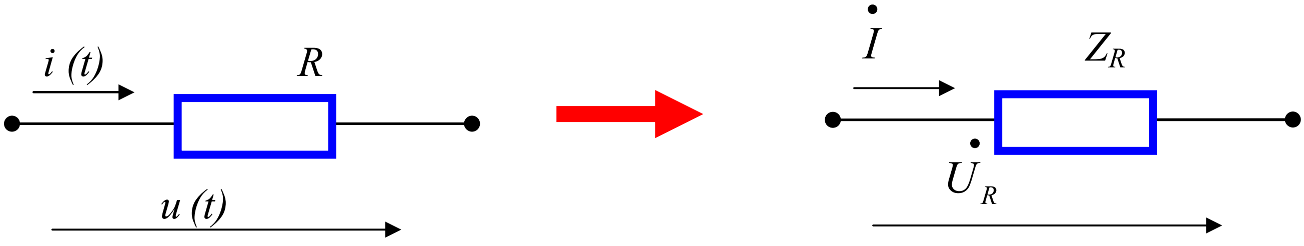
$$\Rightarrow \dot{I}.(-j) = I.e^{j\psi_i}.1.e^{-j90} = I.e^{j(\psi_i-90)}.$$

Това може да се изобрази в комплексната равнина по следния начин:



г) Комплексни съпротивления

1. Комплексно съпротивление на резистор **$\underline{Z_R = R}$**



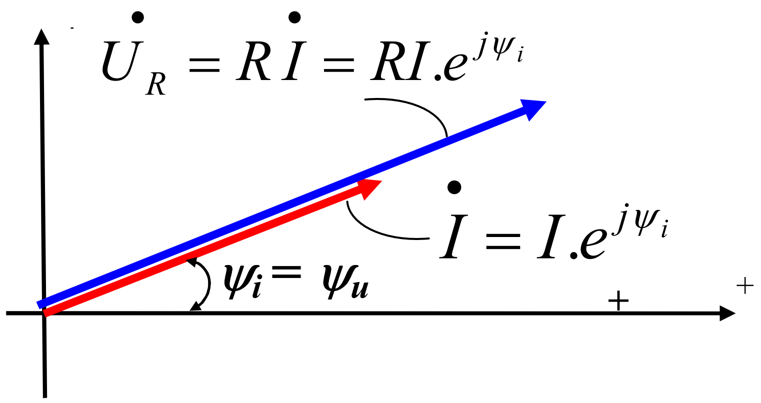
$i(t) = i_m \sin\omega t$ $\longrightarrow$ $\dot{I} = \dfrac{i_m}{\sqrt{2}} e^{j0}$

$u(t) = R.\, i(t) = R\, i_m \sin\omega t$ $\longrightarrow$ $\dot{U}_R = \dfrac{R i_m}{\sqrt{2}} e^{j0} = R.\dot{I}$

$$\dot{U}_R = R.\dot{I}$$
$$\Rightarrow \boxed{Z_R = R}$$

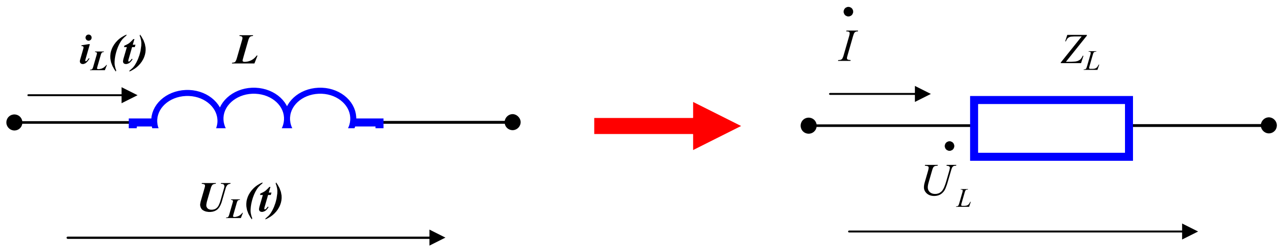
Връзката между **<u>комплексите</u>** на тока, съпротивлението и напрежението на резистора може да се илюстрира с помощта на **<u>векторна диаграма</u>** в комплексната равнина.

<u>Векторна диаграма</u>



$$Z_R = R$$
$$\dot{U}_R = R.\dot{I}$$
$$\psi_i = \psi_u$$

2. Комплексно съпротивление на бобина <u>$Z_L = jX_L = j\omega L$</u>



$i(t) = i_m \sin \omega t$ ⟶ $\dot{I} = \dfrac{i_m}{\sqrt{2}} e^{j0}$

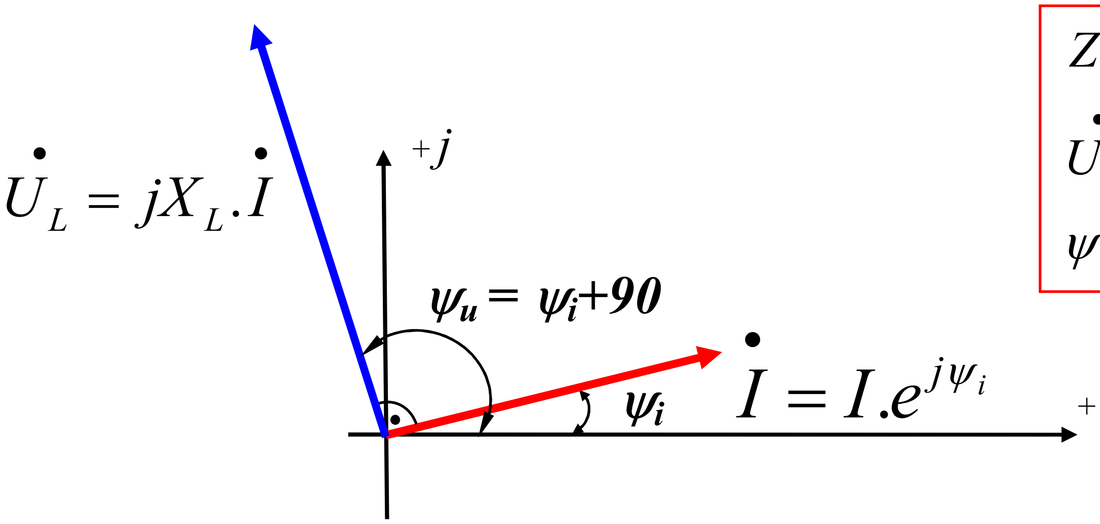
$u_L(t) = \omega L \, i_m \sin(\omega t + 90)$ ⟶ $\dot{U}_L = \dfrac{\omega L i_m}{\sqrt{2}} e^{j90} = \omega L . \dot{I} . j$

$$\dot{U}_L = j\omega L . \dot{I} = jX_L . \dot{I}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_L = j\omega L = jX_L}$$

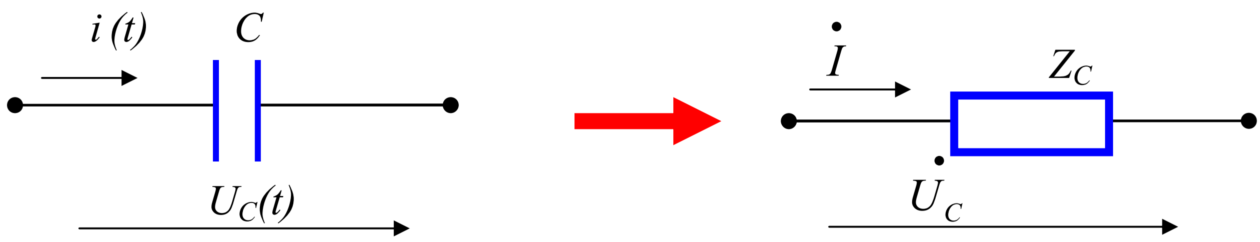
Връзката между **<u>комплексите</u>** на тока, съпротивлението и напрежението на бобината може да се илюстрира с помощта на **<u>векторна диаграма</u>** в комплексната равнина.

<u>Векторна диаграма</u>



$$\boxed{\begin{aligned} Z_L &= jX_L = j\omega L \\ \dot{U}_L &= jX_L \dot{I} \\ \psi_u &= \psi_i + 90^0 \end{aligned}}$$

3. Комплексно съпротивление на кондензатор $\boxed{Z_C = -jX_C = -j\dfrac{1}{\omega C}}$



$i(t) = i_m \sin \omega t$ $\longrightarrow$ $\dot{I} = \dfrac{i_m}{\sqrt{2}} e^{j0}$

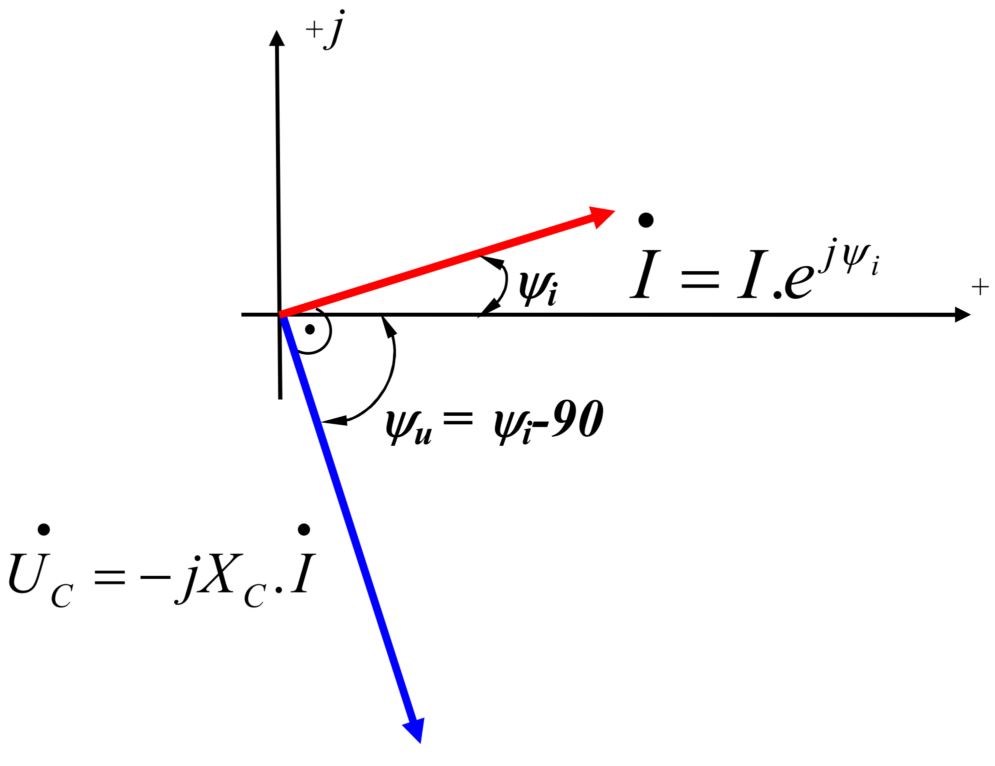
$u_C(t) = i_m \dfrac{1}{\omega C}\sin(\omega t - 90)$ $\longrightarrow$ $\dot{U}_C = \dfrac{i_m}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{\omega C} e^{-j90} = -j\dfrac{1}{\omega C}.\dot{I}.$

$$\dot{U}_C = -j\frac{1}{\omega C}.\dot{I} = -jX_C.I$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_C = -j\frac{1}{\omega C} = -jX_C}$$

Връзката между **<u>комплексите</u>** на тока, съпротивлението и напрежението на кондензатора може да се илюстрира с помощта на **<u>векторна диаграма</u>** в комплексната равнина.

<u>Векторна диаграма</u>



$$Z_L = -jX_C = -j\frac{1}{\omega C}$$

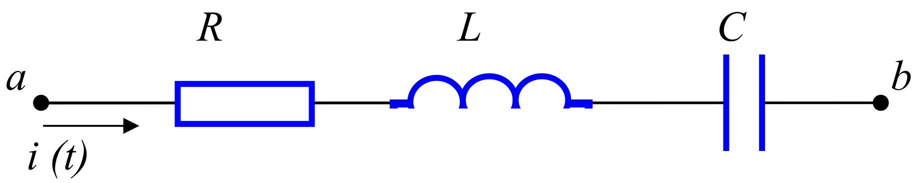
$$\dot{U}_C = -jX_C\,\dot{I}$$

$$\psi_u = \psi_i - 90^0$$

Обобщение: Комплексните съпротивления са дадени в таблицата:

Елемент	Комплексно съпротивление
Резистор със съпротивление ***R***	$Z_R = R$
Бобина с индуктивност ***L***	$Z_L = -jX_L = j\omega L$
Кондензатор с капацитет ***C***	$Z_C = -jX_C = -j\dfrac{1}{\omega C}$

Пример 1: Да се определи комплексното съпротивление на участъка (фиг.10), ако е известно: R = 10Ω, L=30 mH, C=50μF, f=160Hz.



фиг.10

Решение

Трите елемента са свързани последователно. Следователно съпротивлението на участъка е сума от трите съпротивления:

$$Z_{ab} = Z_R + Z_L + Z_C$$

$$Z_R = R = 10\Omega$$

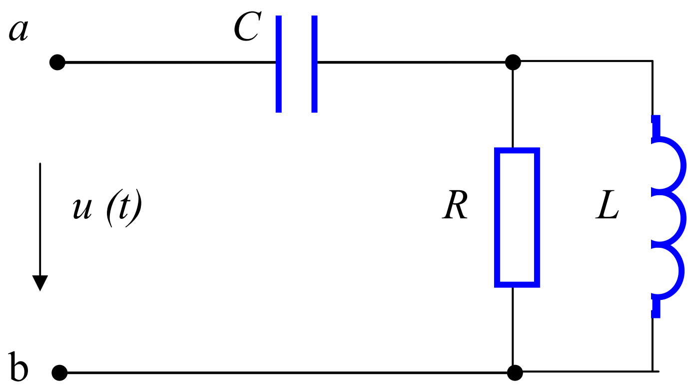
$$\omega = 2\pi f = 2\pi.160 \approx 1000 = 10^3 rad/s$$

$$Z_L = j\omega L = j.10^3.30.10^{-3} = j30\Omega$$

$$Z_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{10^3.50.10^{-6}} = -j20\Omega$$

$$\Rightarrow \quad Z_{ab} = 10 + j30 - j20 = (10 - j10)\Omega$$

Пример 2: Да се определи комплексното съпротивление на участъка (фиг.11), ако:



R = 20Ω, L=20 mH, C=50μF, f=160Hz.

фиг.11

Решение

Схемата е на смесено съединение. Еквивалентното съпротивление на участъка може да се определи като:

$$Z_{екв} = Z_C + \frac{Z_R Z_L}{Z_R + Z_L}$$

$$Z_R = R = 20\Omega$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi.160 \approx 1000 = 10^3 rad/s$$

$$Z_L = j\omega L = j.10^3.20.10^{-3} = j20\Omega$$

$$Z_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{10^3.50.10^{-6}} = -j20\Omega$$

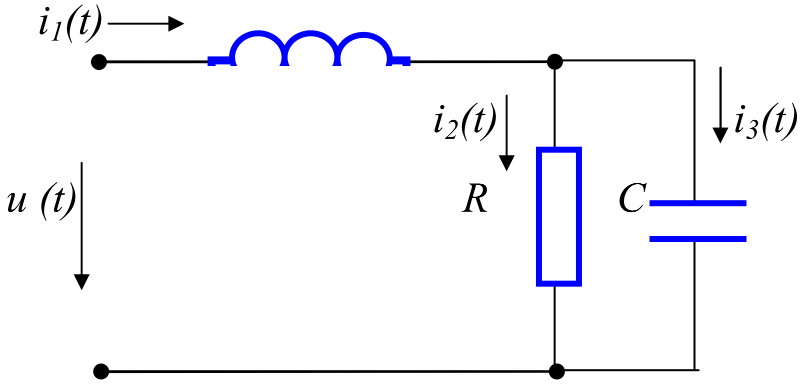
$$\Rightarrow \quad Z_{екв} = -j20 + \frac{20.j20}{20 + j20} =$$

$$= -j20 + \frac{20.j}{1 + j} = -j20 + \frac{20.j(1-j)}{(1+j)(1-j)} = -j20 + \frac{20.(j+1)}{1^2 + 1^2} =$$

$$= -j20 + \frac{20.(j+1)}{2} = -j20 + j10 + 10 = (10 - j10)\Omega$$

Пример 3: Да се определи комплексното съпротивление на участъка (фиг.12) и токовете $i_1(t)$, $i_2(t)$ и $i_3(t)$ ако е известно:

u(t)=200sin(ωt+45)V
f=80Hz,
R = 10Ω, L=20 mH,
C=100μF,.



Решение

фиг.12

1. Определяме комплексното входно напрежение и комплексните съпротивления (фиг.13):

$$\dot{U} = Ue^{j\psi_u} = \frac{u_m}{\sqrt{2}}e^{j\psi_u} = \frac{200}{\sqrt{2}}e^{j45} =$$

$$100\sqrt{2}.(\cos 45 + j\sin 45) = 100\sqrt{2}.(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}) = (100 + j100)V$$

$$Z_{екв} = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi.80 \approx 500 = 5.10^2 rad/s$$

$$Z_1 = j\omega L = j.5.10^2.20.10^{-3} = j10\Omega$$

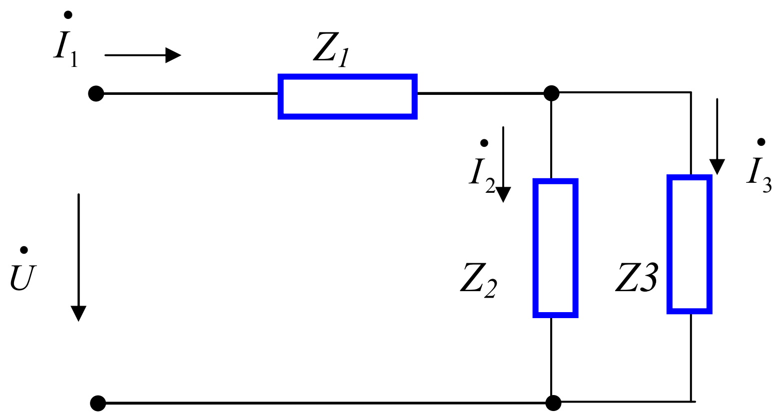
$$Z_2 = R = 10\Omega$$

$$Z_3 = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{5.10^2.100.10^{-6}} = -j20\Omega$$

$$\Rightarrow \quad Z_{екв} = j10 + \frac{10.(-j20)}{10 - j20} =$$

$$= j10 + \frac{20.(-j)}{1-2j} = j10 + \frac{20.(-j)(1+2j)}{(1-2j)(1+2j)} = j10 + \frac{20.(-j+2)}{1^2+2^2} =$$

$$= j10 + \frac{20.(-j+2)}{5} = j10 - j4 + 8 = (8 + j6)\Omega$$



фиг.13

2. Определяме комплекса на входния ток $\dot{I}_1$.

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_{ek}} = \frac{100 + j100}{8 + j6} = \frac{100(1+j)}{2(4+j3)} = \frac{50(1+j)}{(4+j3)} = \frac{50(1+j)(4-j3)}{(4+j3)(4-j3)} =$$

$$\frac{50(1+j)(4-j3)}{4^2+3^2} = \frac{50(4+4j-j3+3)}{25} = 2(7+j)A = (14+2j)A$$

3. Определяме комплексите на токовете в двата паралелни клона $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$.Използваме формулата за разпределянето на общия ток $\dot{I}_1$ по двата паралелни клона.

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = 2(7+j)\frac{-j20}{10-j20} = \frac{40(7+j)(-j)}{10-j20} = \frac{4(7+j)(-j)}{1-j2} =$$

$$= \frac{4(7+j)(-j)}{1-j2} = \frac{4(-7j+1)}{1-j2} = \frac{4(-7j+1)(1+j2)}{(1-j2)(1+j2)} = \frac{4(-7j+1+14+2j)}{1^2+2^2}$$

$$= 0{,}8(15 - j5) = (12 - j4)A$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 14 + 2j - 12 + 4j = (2 + 6j)A$$

4. Определяне на моментните стойности на токовете във веригата:
Известни са:

$$\dot{I}_1 = (14 + 2j)A$$

$$\dot{I}_2 = (12 - j4)A$$

$$\dot{I}_3 = (2 + 6j)A$$

Тогава

$$\dot{I}_1 = 14 + 2j = \sqrt{14^2 + 2^2}\,e^{jarctg\frac{2}{14}} = \sqrt{200}e^{j8,13} = 10\sqrt{2}.e^{j8,13} = I_1 e^{j\psi_1}$$

$$\Rightarrow i_1(t) = I_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_1) = 20\sin(\omega t + 8,13^0)A$$

$$\dot{I}_2 = 12 - 4j = \sqrt{12^2 + 4^2}\,e^{jarctg\frac{-4}{12}} = \sqrt{160}e^{-j18,43} = 4\sqrt{10}.e^{-j18,43} = I_2 e^{j\psi_2}$$

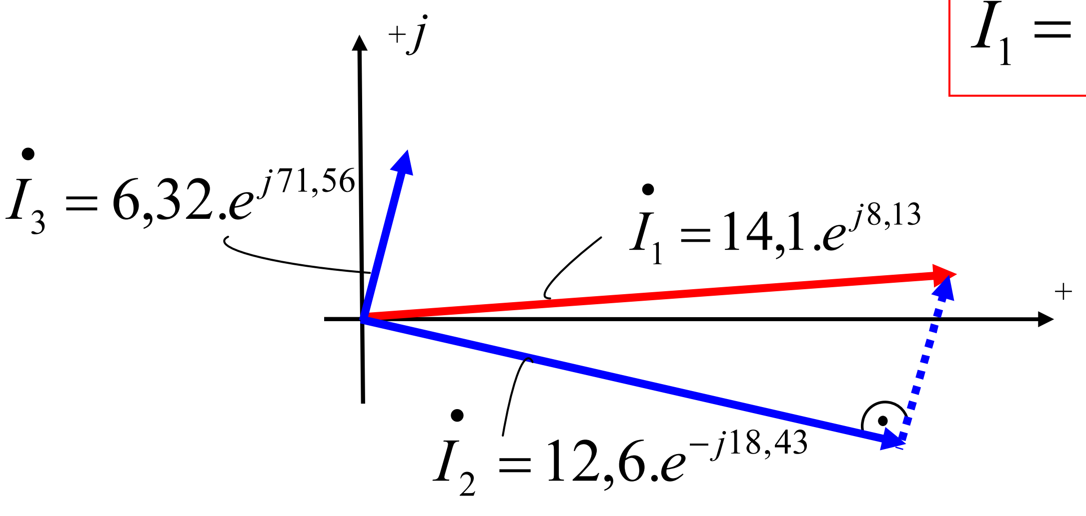
$$\Rightarrow i_2(t) = I_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_2) = 17,9\sin(\omega t - 18,43^0)A$$

$$\dot{I}_3 = 2 + 6j = \sqrt{2^2 + 6^2}\,e^{jarctg\frac{6}{2}} = \sqrt{40}e^{j71,56} = 2\sqrt{10}.e^{j71,56} = I_3 e^{j\psi_3}$$

$$\Rightarrow i_3(t) = I_3\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_3) = 8,94\sin(\omega t + 71,56^0)A$$

Векторна диаграма

$$\boxed{\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3}$$



От векторната диаграма се вижда, че токът $\dot{I}_3$ през кондензатора изпреварва с 90^0 тока $\dot{I}_2$ през резистора.