12. Въпрос

Комплексна форма на основните закони за електрически вериги. Мощности при синусоидални режими.

Комплексна форма на основните закони за електрически вериги

При анализа на синусоидални режими в линейни електрически вериги най-често се използва метода с комплексни образи, при което синусоидално изменящите се токове и напрежения се заменят с техните комплексни образи, а реалните резистори, бобини и кондензатори с комплексни съпротивления. Процесите във веригата се описват с уравнения, получени на базата на **основните закони за електрически вериги в комплексна форма.**

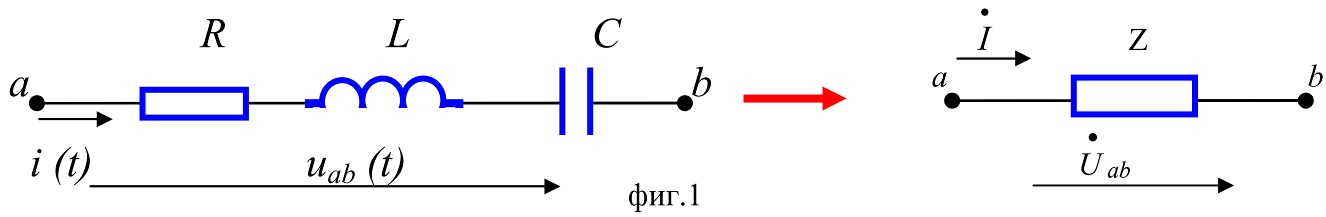
1. Закон на Ом

а) Закон на Ом за пасивен участък

Законът на Ом за пасивен участък (фиг.1) от ел. верига се записва в комплексен вид като:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{ab}}{Z} = \frac{\dot{V}_a - \dot{V}_b}{Z},$$

където $\dot{I}$ и $\dot{U}$ са съответно комплексите на тока и напрежението в анализирания участък, а $Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$ е комплексното му съпротивление. Потенциалите на възлите ***a*** и ***b*** са означени с $\dot{V}_a$ и $\dot{V}_b$. Посоката на тока е от възел "***a***" към възел "***b***" и поради това разглеждаме напрежението $\dot{U}_{ab} = \dot{V}_a - \dot{V}_b$.



фиг.1

За участъка от фиг.1 в сила са съотношенията:

$$i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i);$$
$$u(t) = u_m \sin(\omega t + \psi_u);$$
$$u_m = z.i_m; \quad \psi_u = \psi_i + \varphi;$$
$$z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2};$$
$$\varphi = arctg \frac{(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{R}$$

$$\dot{I} = I.e^{j\psi_i};$$
$$\dot{U} = U.e^{j\psi_u};$$
$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z}; \qquad Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$
$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U.e^{j\psi_u}}{I.e^{j\psi_i}} = \frac{U}{I}.e^{j(\psi_u - \psi_i)} = z.e^{j\varphi};$$

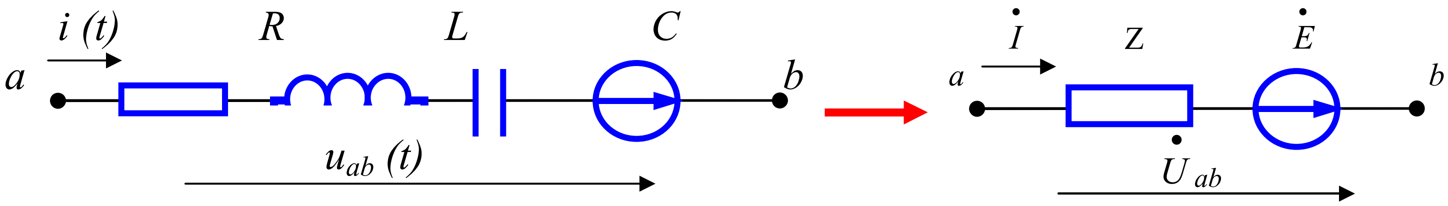
$$\boxed{\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z}; \qquad Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

б) Обобщен закон на Ом

Обобщеният закон на Ом се отнася за активен клон на ел. верига (фиг.2). Той се записва в комплексен вид като:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{ab} + \dot{E}}{Z} = \frac{\dot{V}_a - \dot{V}_b + \dot{E}}{Z},$$

където $\dot{I}$, $\dot{U}$ и $\dot{E}$ са съответно комплексите на тока, напрежението и електродвижещото напрежение в анализирания участък, а $Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$ е комплексното му съпротивление. Потенциалите на възлите ***a*** и ***b*** са означени с $\dot{V}_a$ и $\dot{V}_b$. Посоката на тока е от възел "***a***" към възел "***b***" и поради това разглеждаме напрежението $\dot{U}_{ab} = \dot{V}_a - \dot{V}_b$. Знакът пред $\dot{E}$ е плюс, тъй като посоките на тока и на източника на е.д.н. съвпадат. Ако посоките бяха различни знакът щеше да е минус.



фиг.2

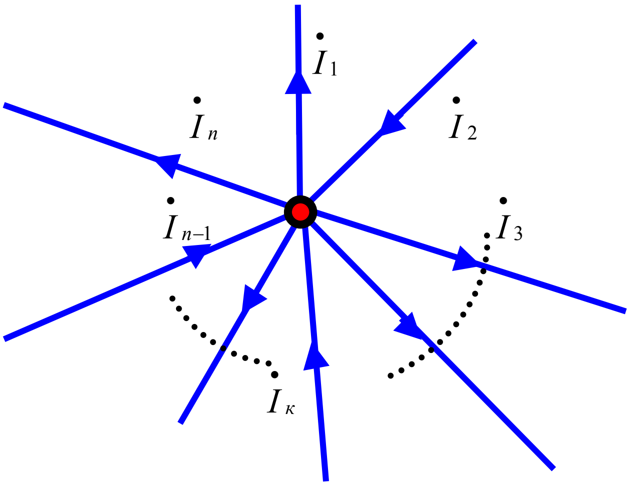
2 Закони на Кирхоф

Всички електрически вериги (линейни и нелинейни), при произволен характер на изменение на токовете и напреженията **се подчиняват на законите на Кирхоф!**

При синусоидален режим законите на Кирхоф могат да се записват в **комплексен вид** относно комплексите на токовете и напреженията**.**

а) I Закон на Кирхоф

$\sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k = 0$ **Алгебричната сума** на токовете в даден възел е нула. (Сумата от влизащите е равна на сумата на излизащите от възела токове.)



Пример

$$-\dot{I}_1+\dot{I}_2-\dot{I}_3+\ldots+\dot{I}_k+\ldots+\dot{I}_{n-1}-\dot{I}_n=0$$

б) II Закон на Кирхоф

$$\sum_{k=1}^{m}\dot{I}_k Z_k=\sum_{k=1}^{m}\dot{E}_k$$

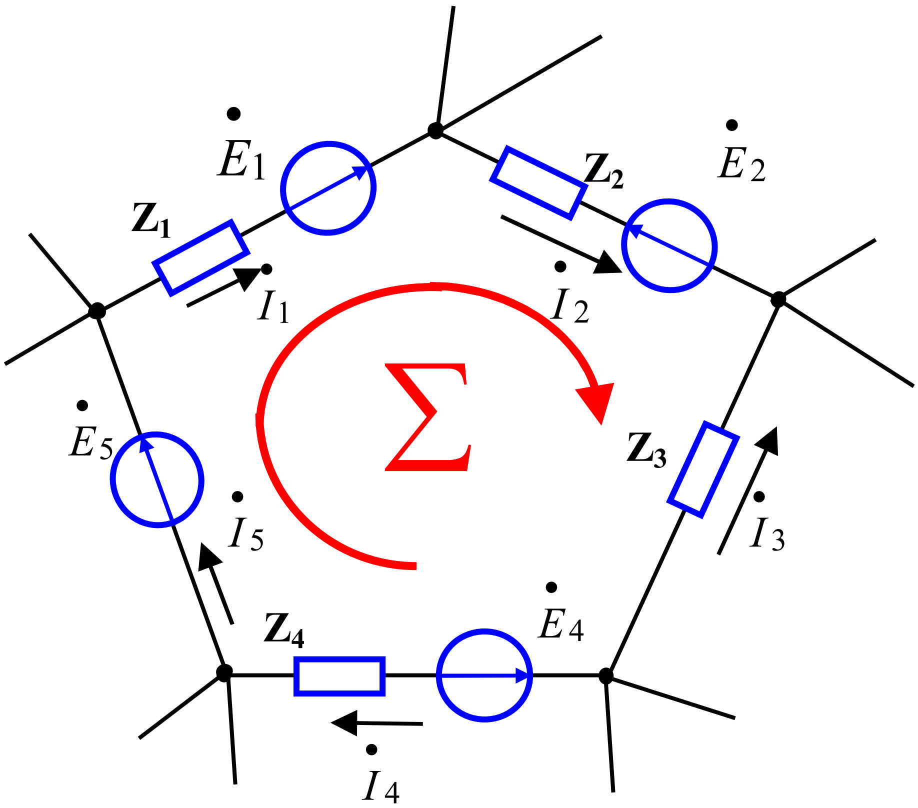
Алгебричната сума на напреженията за даден контур е равна на **алгебричната сума** на напреженията на източниците на е.д.н. в контура.

или

(Алгебричната сума на напреженията в произволен затворен контур е нула.)

Пример

$$\dot{I}_1 Z_1+\dot{I}_2 Z_2-\dot{I}_3 Z_3+\dot{I}_4 Z_4=\dot{E}_1-\dot{E}_2-\dot{E}_4+\dot{E}_5$$



Пример1. Анализ на синусоидални режими с използване на законите на Кирхоф (Метод с клонови токове).

Да се определят токовете $i_1(t)$, $i_2(t)$ и $i_3(t)$ за веригата от фиг.3 ако е известно:

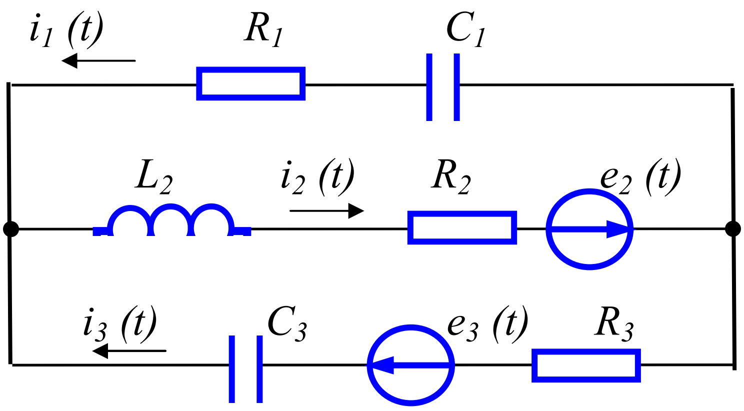
$e_2(t)=71\sin(1000t+45)V$

$e_2(t)=113\sin(1000t+90)V$

$R_1 = R2=5\Omega$, $R_3 =10\Omega$,

$L_2=10\ mH$,

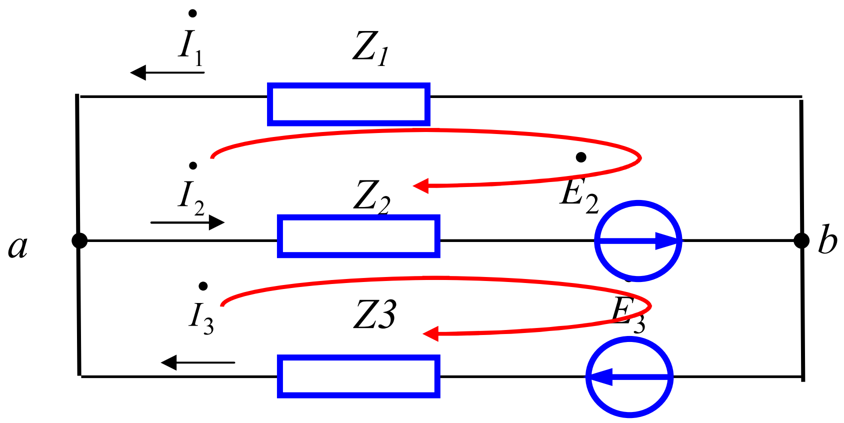
$C_1=200\mu F$, $C_3=125\mu F$,.



фиг.3

Решение

1. Определяме комплексните напрежения на източниците и комплексните съпротивления на веригата (фиг.4):



фиг.4

$$\dot{E}_2 = E_2 e^{j\psi_{e2}} = \frac{e_{2m}}{\sqrt{2}} e^{j\psi_{e2}} = \frac{71}{\sqrt{2}} e^{j45} =$$

$$50.(\cos 45 + j\sin 45) = 50.(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}) = (35{,}5 + j35{,}5)V$$

$$\dot{E}_3 = E_3 e^{j\psi_{e3}} = \frac{e_{3m}}{\sqrt{2}} e^{j\psi_{e3}} = \frac{80}{\sqrt{2}} e^{j90} =$$

$$80.(\cos 90 + j\sin 90) = 80.(0 + j) = j80V$$

$$\omega = 1000 = 10^3\, rad/s$$

$$Z_1 = R_1 - j\frac{1}{\omega C_1} = 5 - j\frac{1}{10^3.200.10^{-6}} = (5 - j5)\Omega$$

$$Z_2 = R_2 + j\omega L_2 = 5 + j.10^3.10.10^{-3} = (5 + j10)\Omega$$

$$Z_3 = R_3 - j\frac{1}{\omega C} = 10 - j\frac{1}{10^3.125.10^{-6}} = (5 - j8)\Omega$$

2. Определяме брой клонове и брой възли във веригата:

брой възли $n=2$,

брой клонове $m=3$

3. Записваме система уравнения по метода с клонови токове:

- $n\text{-}1=1$ уравнения по I закон на Кирхоф
- $k=m\text{-}n+1=2$ уравнения по II закон на Кирхоф

за възел "a":
$$-\dot{I}_1+\dot{I}_2-\dot{I}_3=0$$

за двата контура :
$$-\dot{I}_1 Z_1-\dot{I}_2 Z_2=-\dot{E}_2$$
$$\dot{I}_2 Z_2+\dot{I}_3 Z_3=\dot{E}_2+E_3$$

4. Заместваме със стойности и решаваме системата:

$$\begin{cases} -\dot{I}_1+\dot{I}_2-\dot{I}_3=0 \\ -\dot{I}_1(5-j5)-\dot{I}_2(5+j10)=-(35{,}5+j35{,}5) \\ \dot{I}_2(5+j10)+\dot{I}_3(10-j8)=(35{,}5+j35{,}5)+j80 \end{cases}$$

5. Получаваме комплексите на трите тока:

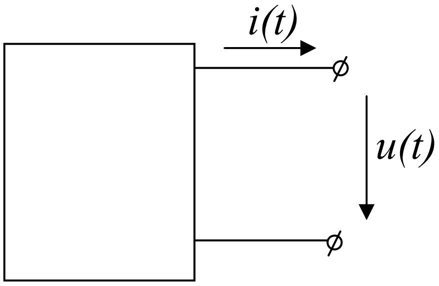
$$\dot{I}_1=(6{,}71-j1{,}375)=6{,}853e^{-j11{,}58}A$$
$$\dot{I}_2=(6{,}41+j2{,}34)=6{,}82e^{j20{,}04}A$$
$$\dot{I}_3=(-0{,}3+j3{,}71)=3{,}73e^{j94{,}65}A$$

6. Тогава моментните стойности на токовете са:

$$i_1(t)=I_1\sqrt{2}\sin(\omega t+\psi_1)=6{,}85\sqrt{2}\sin(1000t-11{,}58^0)A$$
$$i_2(t)=I_2\sqrt{2}\sin(\omega t+\psi_2)=6{,}82\sqrt{2}\sin(1000t+20{,}04^0)A$$
$$i_3(t)=I_3\sqrt{2}\sin(\omega t+\psi_3)=3{,}73\sqrt{2}\sin(1000t+94{,}65^0)A$$

Мощности при синусоидални режими.

Нека разгледаме участък от верига, като двуполюсник (фиг.5), на изводите на който има напрежение $u(t)$ и ток $i(t)$.



Фиг.5

$u(t) = u_m sin(\omega t + \psi_u)$,

$i(t) = i_m sin(\omega t + \psi_i)= i(t) = i_m sin(\omega t + \psi_u\text{-}\varphi)$,

за удобство приемаме $\psi_u=0$ и тогава:

$$\boxed{\begin{array}{l} u(t) = u_m sin\,\omega t \\ i(t) = i_m sin(\omega t - \varphi) \end{array}}$$

За този двуполюсник можем да дефинираме:

1. <u>Моментна мощност - ***p(t)***</u>

Моментната мощност ***p(t)*** се определя като:

$$p(t) = u(t).i(t) = u_m \sin\omega t.i_m \sin(\omega t - \varphi) = u_m i_m \sin\omega t.\sin(\omega t - \varphi) =$$

$$u_m i_m \sin\omega t.[\sin\omega t.\cos\varphi - \cos\omega t.\sin\varphi] =$$

$$u_m i_m [\sin^2\omega t.\cos\varphi - \sin\omega t\cos\omega t.\sin\varphi] = \frac{u_m i_m}{2}[(1-\cos 2\omega t).\cos\varphi - \sin 2\omega t.\sin\varphi]$$

$$U.I[\cos\varphi - (\cos 2\omega t.\cos\varphi + \sin 2\omega t.\sin\varphi)] = U.I[\cos\varphi - \cos(2\omega t - \varphi)]$$

(***U*** и ***I*** са **ефективните** стойности на напрежението и тока)

2. <u>Активна мощност- ***P***</u>

Под активна мощност ***P*** се разбира средната стойност на моментната мощност ***p(t)*** _за време равно на периода ***T*** :

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t).dt = \frac{1}{T}\int_0^T U.I[\cos\varphi - \cos(2\omega t - \varphi)].dt =$$

0 - интеграл на хармонична функция

$$U.I\cos\varphi - \frac{1}{T}U.I\int_0^T \cos(2\omega t - \varphi).dt$$

$$\boxed{\Rightarrow P = U.I\cos\varphi}$$

cos φ се нарича фактор на мощността.

Единицата за измерване е ват. ***[P]=W***

Активната мощност <u>физически представлява енергията, която се отделя за единица време във вид на топлина</u> за участъка от верига с активно съпротивление ***R***. Действително: .

$$P = U.I\cos\varphi = I^2 z.\cos\varphi = I^2 R$$

(От триъгълника на съпротивленията е известно, че $R = z.\cos\varphi$)

3. <u>Реактивна мощност- ***Q***</u>

$$Q = U.I\sin\varphi$$

Реактивната мощност ***Q*** е енергия, която се обменя между източника и консуматора (за време равно на периода ***T*** се предава 2 пъти от генератора към консуматора и обратно)

Единицата за измерване е вар (волт-ампер реактивни). ***[Q]=VAr***

$$Q = U.I\sin\varphi = I^2 z.\sin\varphi = I^2 X$$

(От триъгълника на съпротивленията е известно, че $X = z.\sin\varphi;\quad X = X_L - X_C$)

4. <u>Пълна мощност- ***S***</u>

$$S = U.I$$

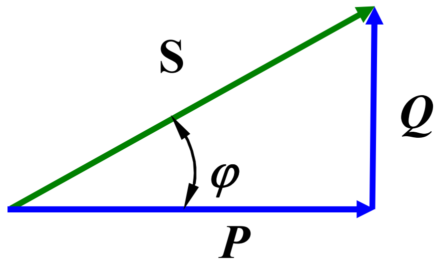
Пълната мощност ***S*** характеризира тази мощност, която източника би отдавал на потребителя при ***cosφ=1***

Единицата за измерване е волт-ампер ***[S]=VA***

Между активната и реактивната мощности съществува следното съотношение:

$$S^2 = P^2 + Q^2$$

Графически тази връзка се изразява с триъгълника на мощностите (фиг.6)



фиг.6

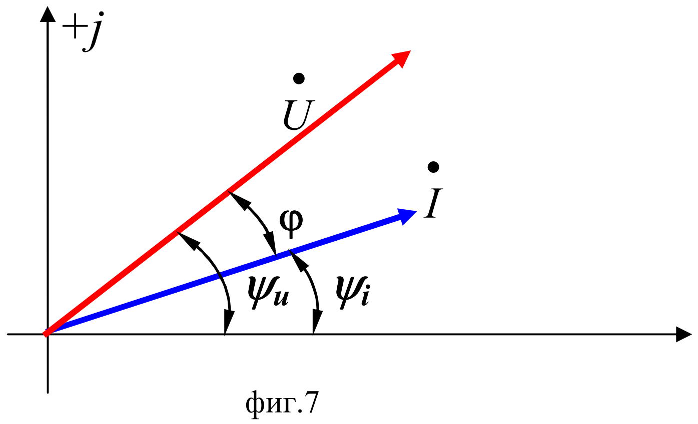
5. <u>Комплексна мощност-</u> $\dot{S}$

Ако комплексите на напрежението и тока (фиг.7). са съответно:

$$\dot{U} = Ue^{j\psi_u}$$

и $\dot{I} = Ie^{j\psi_i}$

Спрегнатата стойност на тока е $\overset{*}{I} = Ie^{-j\psi_i}$.



\+

фиг.7

Нека разгледаме произведението:

$$\dot{S} = \dot{U}.\overset{*}{I} = Ue^{j\psi_u}.Ie^{-j\psi_i} = UIe^{j(\psi_u - \psi_i)} = UIe^{j\varphi} =$$

$$= UI\cos\varphi + UI\sin\varphi = P + jQ$$

Произведението $\dot{S} = \dot{U}.\overset{*}{I} = P + jQ$ се нарича комплексна мощност. Съответно активната и реактивната мощности могат да се получат като:

$$P = \mathrm{Re}[\dot{S}]$$

$$Q = \mathrm{Im}[\dot{S}]$$

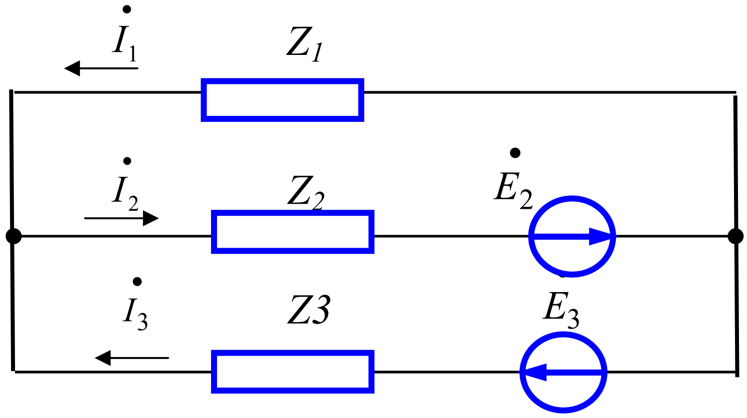
<u>Пример2.</u> За веригата от <u>Пример1</u> да се направи баланс на мощностите:

<u>Решение</u>

Да се направи баланс на мощностите означава да се направи проверка дали мощността на източниците е равна на мощността на консуматорите.

$$\sum \dot{S}_{изт} = \sum \dot{S}_{конс}$$

1. Определяме мощността на източниците:



Тогава мощността на източниците $\sum \dot{S}_{изт} = \dot{S}_{E_2} + \dot{S}_{E_3}$

$\dot{E}_2 = (35{,}5 + j35{,}5)V$ $\quad\quad$ $\dot{I}_2 = (6{,}41 + j2{,}34)A$

$\dot{E}_3 = j80V$ $\quad\quad$ $\dot{I}_3 = (-0{,}3 + j3{,}71)A$

(Знакът е минус защото токът и напрежението имат различни посоки)

$$\dot{S}_{E_2} = -\dot{E}_2.\overset{*}{I}_2 = (35{,}5 + j35{,}5)(6{,}41 - j2{,}34)$$

$$\dot{S}_{E_3} = \dot{E}_3.\overset{*}{I}_3 = j80.(-0{,}3 - j3{,}72)$$

$$\sum \dot{S}_{изт} = (606{,}4 + j120)VA$$

2. Определяме мощността на консуматорите:

$$\sum \dot{S}_{конс} = Z_1 I_1^2 + Z_2 I_2^2 + Z_3 I_3^2 =$$

$$(5 - j5)(6{,}71^2 + 1{,}375^2) + (5 + j10)(6{,}41^2 + 2{,}34^2) + (10 - j8)(0{,}3^2 + 3{,}72^2) =$$

$$(606{,}4 + j120)VA$$

Следователно се получава баланс на мощностите, а именно:

$$\sum \dot{S}_{изт} = \sum \dot{S}_{конс} = (606{,}4 + j120)VA$$

3. Можем да определим и активната и реактивна мощности:

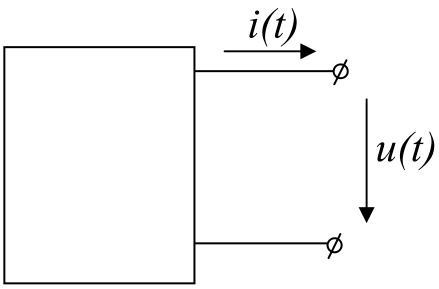
$$P = \mathrm{Re}[\dot{S}] = 606{,}4W$$

$$Q = \mathrm{Im}[\dot{S}] = 120VAr$$

13. Въпрос

Еквивалентни схеми на пасивен двуполюсник от последователен и паралелен тип при синусоидален режим. Взаимно преминаване.

Ако разгледаме участък от верига, като пасивен двуполюсник, на изводите на който има напрежение $u(t)$ и ток $i(t)$.



$$u(t) = u_m \sin(\omega t + \psi_u),$$

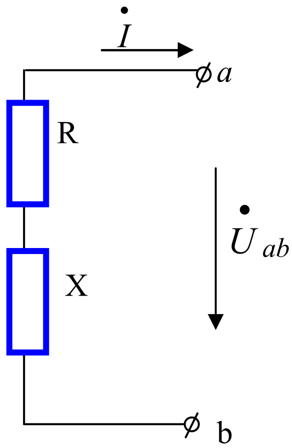
$$i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i) = i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi),$$

за удобство приемаме $\psi_u = 0$ и тогава:

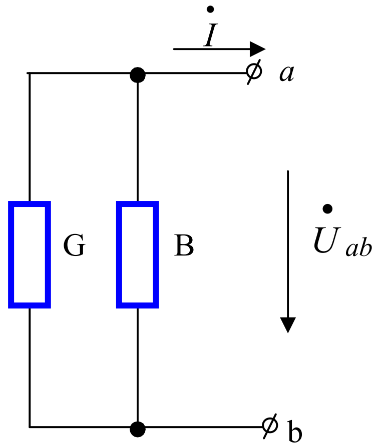
$$\boxed{\begin{aligned} u(t) &= u_m \sin \omega t \\ i(t) &= i_m \sin(\omega t - \varphi) \end{aligned}}$$

Този двуполюсник може се представи със заместващи схеми от последователен и от паралелен тип.

Заместваща схема от последователен тип



Заместваща схема от паралелен тип



В сила са съотношенията:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{ab}}{Z},$$

където: $Z = R + jX$

$$\dot{I} = Y.\dot{U}_{ab},$$

където: $Y = G - jB$

От единия вид заместваща схема може да се премине към другия по следния начин:

$$\boxed{G = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad B = \frac{X}{R^2 + X^2}} \quad \longrightarrow \quad \boxed{R = \frac{G}{G^2 + B^2}, \quad X = \frac{B}{G^2 + B^2}}$$

Доказателство:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{1}{(R + jX)} \frac{(R - jX)}{(R - jX)} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j\frac{X}{R^2 + X^2} = G - jB$$

$$\Rightarrow G = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad B = \frac{X}{R^2 + X^2}$$

Аналогично:

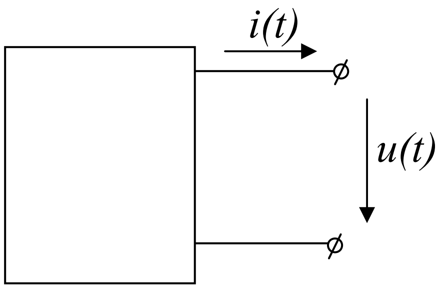
$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{G - jB} = \frac{1}{(G - jB)} \frac{(G + jB)}{(G + jB)} = \frac{G}{G^2 + B^2} + j\frac{B}{G^2 + B^2} = R + jX$$

$$\Rightarrow R = \frac{G}{G^2 + B^2}, \quad X = \frac{B}{G^2 + B^2}$$

14. Въпрос

Резонанс. Напрежителен резонанс в R, L, C двуполюсник от последователен тип

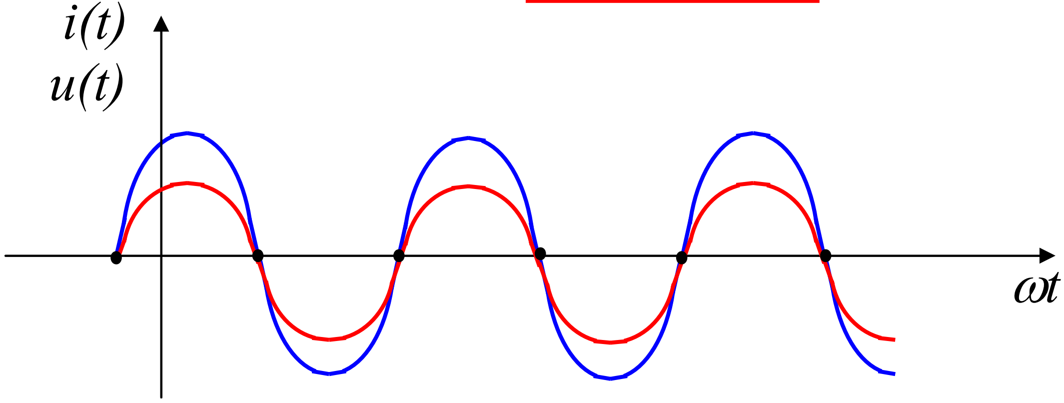
Резонансът е такова състояние на една пасивна ел.верига, включваща поне 1 бобина и поне 1 кондензатор, при <u>което входният ток и входното напрежение съвпадат по фаза</u>.



$$u(t) = u_m \sin(\omega t + \psi_u),$$
$$i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

Фазово условие за резонанс

$$\boxed{\varphi = \psi_u - \psi_i = 0}$$



По отношение на външната верига двуполюсникът <u>има поведение на активно съпротивление.</u>

<u>Реактивната мощност</u> на двуполюсника при това е <u>равна на нула</u>- т.е. между генератора и консуматора <u>няма енергийни колебания</u>. Такива колебания се осъществяват само между консервативните елементи, като общата сума от електрическата и и магнитна енергии, съсредоточени в консервативните елементи на веригата има <u>неизменна големина във времето</u>.

<u>Резонанс може да се постигне или чрез</u>:

- изменение на параметрите на веригата или
- изменение на честотата на входния сигнал.

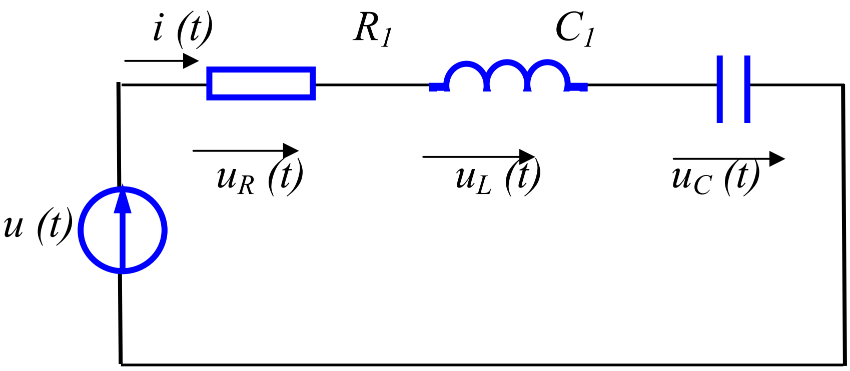
<u>Амплитудата на входния сигнал не оказва влияние</u> върху резонансните явления.
При определени условия обаче резонансните хармонични колебания могат да имат <u>много по- голяма амплитуда от амплитудата на входния сигнал</u>.

Различават се два вида резонансни режими:

- напрежителен (последователен) резонанс
- токов (паралелен) резонанс

<u>Напрежителен резонанс в R, L, C двуполюсник от последователен тип</u>

Резонанс в схема на последователно свързани резистор, бобина и кондензатор (фиг.8) се нарича напрежителен (последователен) резонанс.



фиг.8

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$

$$\Rightarrow \dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C =$$

$$= \dot{I}R + \dot{I}\,j\omega L + \dot{I}\left(-\frac{1}{j\omega C}\right) =$$

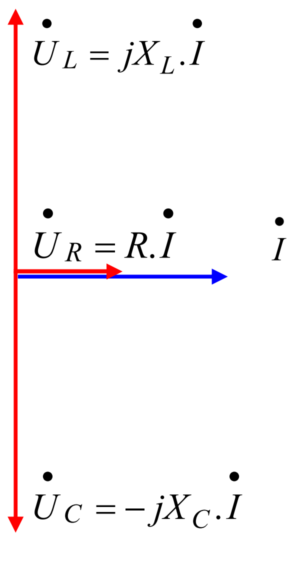
$$= \dot{I}\left(R + j\omega L - \frac{1}{j\omega C}\right) =$$

$$= \dot{I}Z = \dot{I}(R_{екв} + jX_{екв})$$

За да има веригата <u>поведение на активно съпротивление</u> е необходимо $Z = R_{екв} + \cancelto{0}{jX_{екв}}$,
т.е. реактивното съпротивление:

$$\varphi = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{X_{екв} = 0}$$ - **<u>условие за напрежителен резонанс</u>**

На фиг.9 е показана векторната диаграма при <u>напрежителен резонанс</u>:



$$\dot{U} = \dot{U}_R + \cancelto{0}{(\dot{U}_L + \dot{U}_C)} = \dot{U}_R$$

(напреженията на бобината и кондензатора са <u>равни по големина</u> $\boldsymbol{U_L = U_C}$ и <u>обратни по посока</u>).

Те **<u>могат да бъдат и много по-големи</u>** от входното напрежение $\boldsymbol{U_{вх} = U_R}$

От условието $X_{екв} = 0$, следва че:

$$\begin{aligned} &X_{екв} = X_L - X_C = 0 \\ &\Rightarrow X_L = X_C \\ &\Rightarrow \omega_p L = \frac{1}{\omega_p C} \end{aligned}$$

, където $\omega_р$ е резононсната честота <u>за веригата от фиг.8</u>

<u>Резонансната честота</u> може да се определи като $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$. В точката на резонанса съпротивлението на участъка е минимално $\boldsymbol{Z = R}$ и съответно тока при напрежителен резонанс е максимален: $\dot{I}_p = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{\dot{U}}{R}$.

<u>Характеристично съпротивление</u> е съпротивлението $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$, определено по следния начин :

$$X_L = X_C = \omega_p L = \frac{1}{\sqrt{LC}}.L = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$$

<u>Качествен фактор</u> е величината $Q = \frac{\rho}{R}$, която показва колко пъти напрежението върху реактивните елементи $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{C}$ е по голямо от входното напрежение :

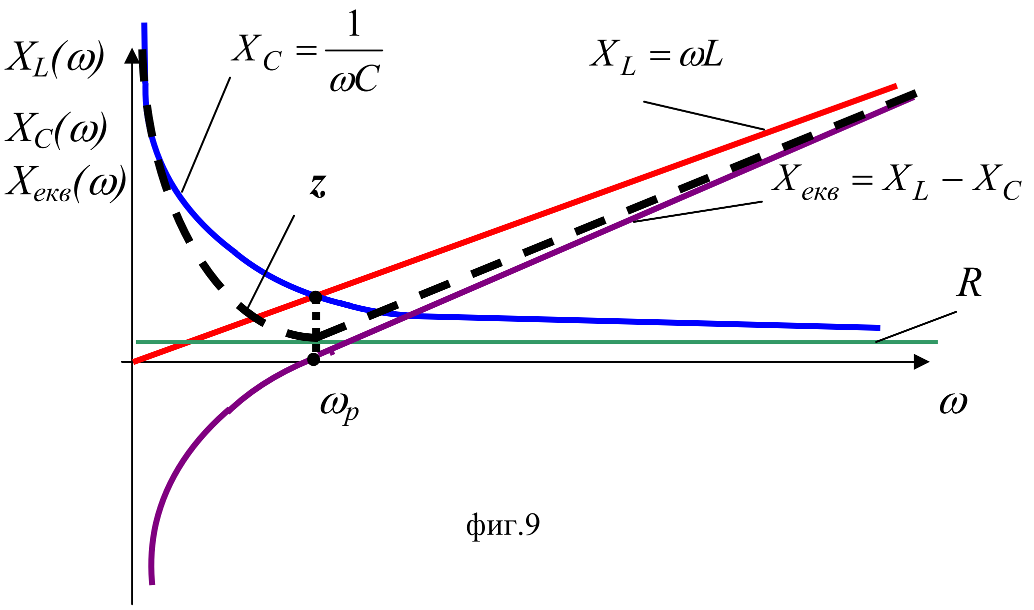
$$Q = \frac{U_L}{U_{вх}} = \frac{U_C}{U_{вх}} = \frac{\omega_p L.I}{R.I} = \frac{\omega_p L}{R} = \frac{1/\omega_p C}{R} = \frac{\rho}{R}$$

<u>Честотни характеристики</u>

Зависимостта на даден параметър от честотата е <u>честотна характеристика</u> .За да получим честотните характеристики ще разгледаме как се променят параметрите на веригата при изменение на честотата $\boldsymbol{\omega}$ от нула към безкрайност $(\boldsymbol{\omega = 0 \div \infty})$.

При този анализ приемаме, че амплитудата на входното напрежение не зависи от честотата ($\boldsymbol{U_m}$ = const), както и че R=const, L=const, C=const.

На фиг.9 са показани **<u>честотните зависимости на съпротивленията</u>** във веригата.



фиг.9

$X_L = \omega L; \quad X_C = \frac{1}{\omega C}$

$X_{екв} = \omega L - \frac{1}{\omega C}$

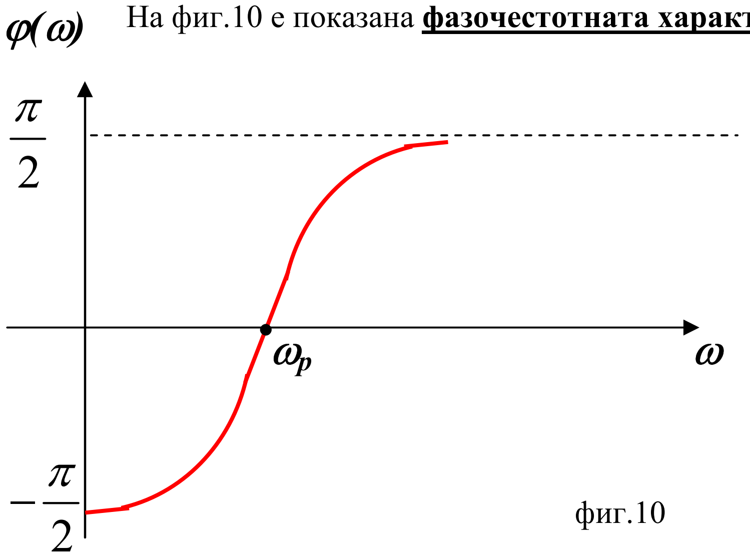
$z = \sqrt{R^2 + X_{екв}{}^2}$

$\boldsymbol{\omega = \omega_p \Rightarrow X_{екв} = 0, \ z = R}$

$\boldsymbol{\omega < \omega_p \Rightarrow}$ вх. съпрот. има капацитивен характер

$\boldsymbol{\omega > \omega_p \Rightarrow}$ вх. съпрот. има индуктивен характер

На фиг.10 е показана **<u>фазочестотната характеристика</u>**



$$\varphi = arctg\,\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

фиг.10

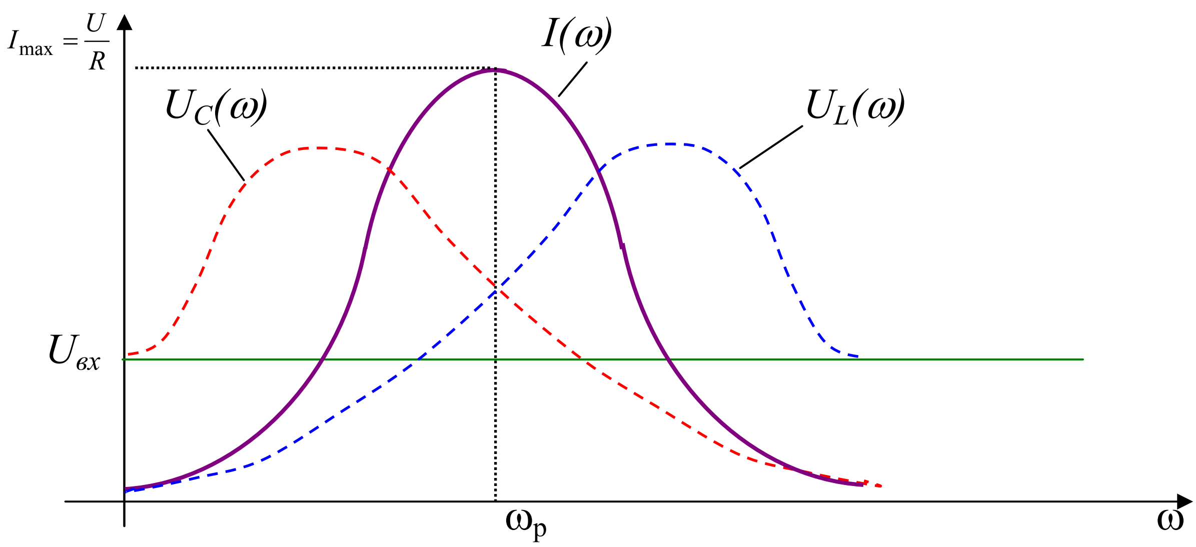
Ефективни стойности на напреженията U_L, U_C и тока I, в зависимост от честотата

За двуполюсника от фиг.8 може да се определи ефективната стойност на тока I и напреженията U_L , U_C :

$$I(\omega) = \frac{U}{z(\omega)} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}};$$

$$U_L = I(\omega).\omega L = \frac{U.\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}; \quad U_C = I(\omega).\frac{1}{\omega C} = \frac{U}{\omega C.\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

Тези зависимости са показани на фиг.11.



фиг.11

<u>Нека разгледаме как се изменят тези величини при промяната на ω</u> .

1. $\omega = 0 \quad \Rightarrow X_C = \frac{1}{\omega C} \to \infty \quad \Rightarrow I = 0, \quad U_C = U_{вх}$.Следователно не протича ток, а входното напрежение е приложено върху кондензатора.

2 . $\omega = 0 \div \omega_p \quad \Rightarrow X_C \downarrow, \quad X_L \uparrow$ токът нараства

3. $\omega = \omega_p \quad \Rightarrow X_C = X_L \Rightarrow X_{екв} = 0 \quad I_p = I_{max} = \dfrac{U}{R}$ токът е максимален- има резонанс

4. $\omega = \omega_p \div \infty \quad \Rightarrow X_L = \omega L \to \infty \quad \Rightarrow I = 0, \quad U_L = U_{вх}$ Следователно не протича ток, а входното напрежение е приложено върху бобината.

Съпоставяне на резонансните качества на отделни контури

За да се съпоставят резонансните качества на отделните контури, честотната характеристика $I(\omega)$ се представя в относителни единици $F_I(\dfrac{\omega}{\omega_p}) = \dfrac{I}{I_p}$, където

$$I_p = \frac{U}{R}, \qquad I = \frac{U}{z}, \qquad z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}\ .$$

Можем да изразим импеданса z като функция зависеща от отношението $\dfrac{\omega}{\omega_p}$.

Комплексното съпротивление $Z = R + j(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}) = R + j(\dfrac{\omega}{\omega_p}.\omega_p L - \dfrac{\omega_p}{\omega}\dfrac{1}{\omega_p C})$.

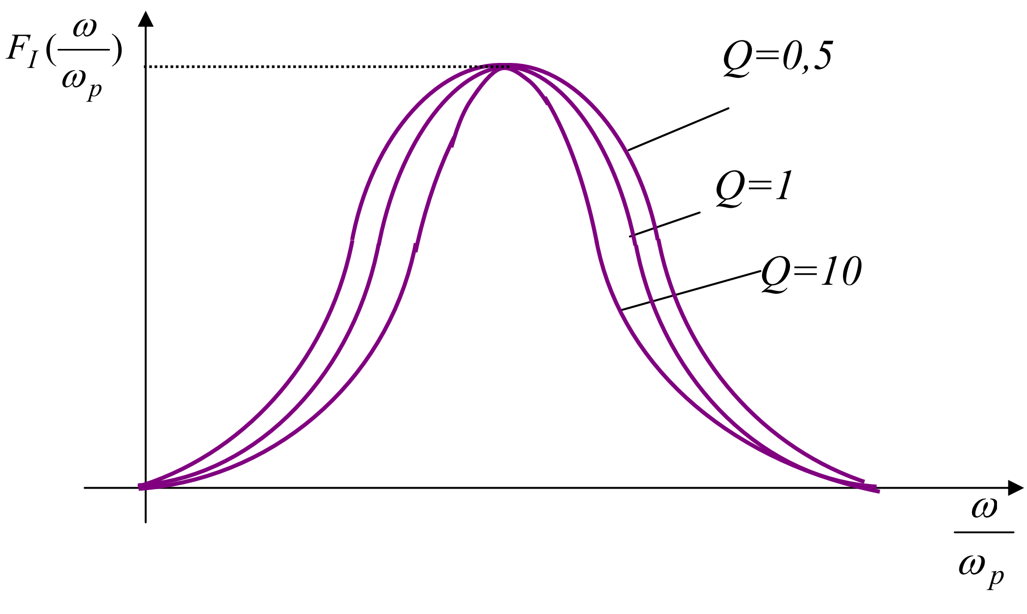
Но както вече знаем характеристичното съпротивление е $\rho = \omega_p L = \dfrac{1}{\omega_p C}$. Тогава

$$Z = R + j(\frac{\omega}{\omega_p}.\rho - \frac{\omega_p}{\omega}\rho) = R + j\rho(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega})$$

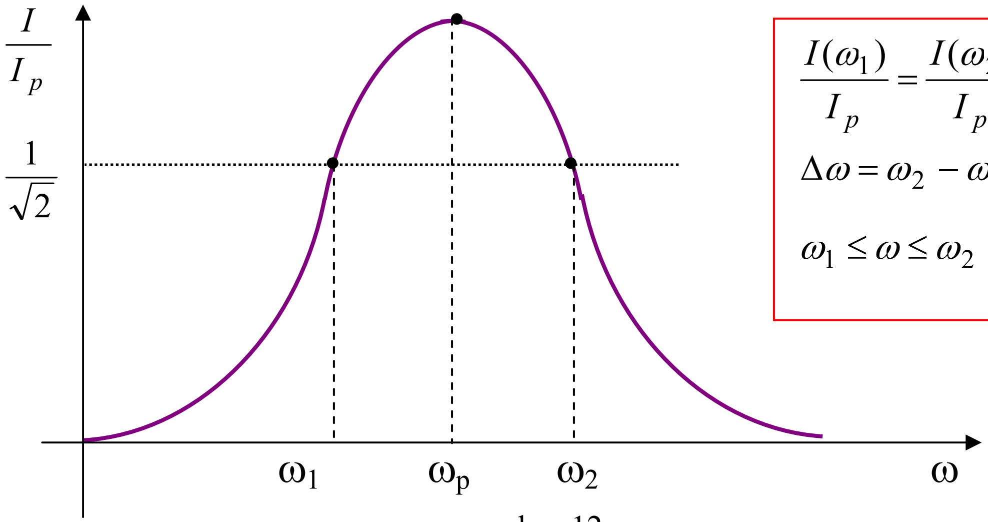
$$\Rightarrow z = \sqrt{R^2 + \rho^2(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega})^2} = R\sqrt{1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega})^2}\ .$$

Тогава честотната характеристика $F_I(\dfrac{\omega}{\omega_p})$ се определя като

$$F_I(\frac{\omega}{\omega_p}) = \frac{I}{I_p} = \frac{U}{z}.\frac{R}{U} = \frac{R}{z} = \frac{R}{R\sqrt{1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega})^2}}\ .$$



<u>Извод:</u> Резонансната крива на тока зависи изключително много от $\boldsymbol{Q}$ фактора на веригата. Колкото по-малко е съпротивлението $\boldsymbol{R}$ в контура, т.е. колкото $\boldsymbol{Q}$ фактора е по-голям толкова кривата на тока е по- остра (пикообразна). На фиг.12 са показани граничните честоти ω_1 и ω_2, за които ефективната стойност на тока става $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Те определят честотната лента



$$\frac{I(\omega_1)}{I_p} = \frac{I(\omega_2)}{I_p} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$

$$\omega_1 \le \omega \le \omega_2 \quad \Leftrightarrow \frac{I}{I_p} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$$

фиг.12

В точките на гранични честоти ω_1 и ω_2, отделената в резистора мощност е равна на половината от максималната мощност отделена при резонанс.

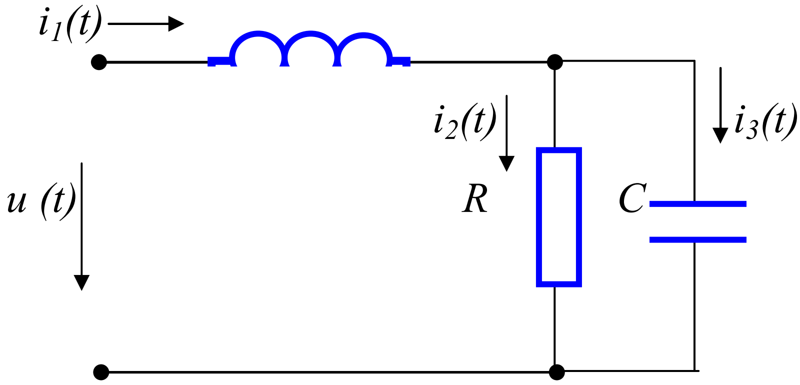
<u>Доказателство</u>

$$P(\omega_p) = I_p^2 R$$

$$P(\omega_1) = I(\omega_1)^2 R = (\frac{I_p}{\sqrt{2}})^2 R = \frac{{I_p}^2}{2} R = \frac{P(\omega_p)}{2}$$

<u>Пример за определяне на резонансен параметър:</u> Да се определи стойността на капацитета С (фиг.13) за която във веригата има напрежителен резонанс.

f=160Hz,
R = 10Ω, L=5 mH,



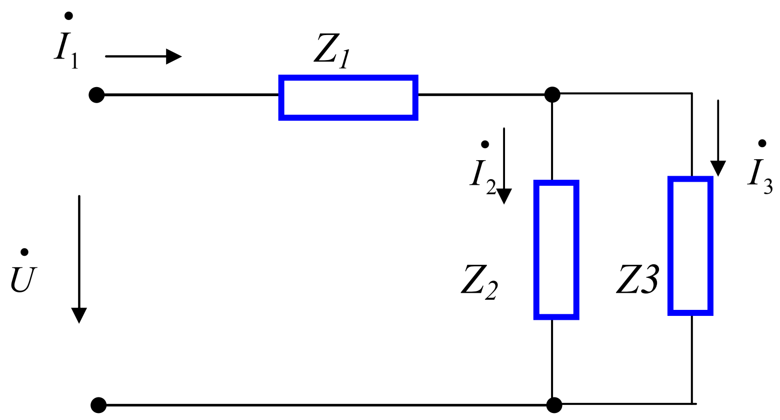
фиг.13

<u>Решение</u>

За да има резонанс във веригата е необходимо еквивалентното реактивно съпротивление да бъде нула, т. е

$$X_{екв} = 0$$

Определяме еквивалентното съпротивление на веригата:



фиг.14

$$\omega = 2\pi f = 2\pi.160 \approx 1000 = 10^3\, rad/s$$

$$Z_1 = j\omega L = j.10^3.5.10^{-3} = j5\Omega$$

$$Z_2 = R = 10\Omega$$

$$Z_3 = -j\frac{1}{\omega C} = -jX_C$$

$$Z_{екв} = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

$$\Rightarrow \quad Z_{екв} = j5 + \frac{10.(-jX_C)}{10 - jX_C} = j5 + \frac{10.(-jX_C)(10 + jX_C)}{(10 - jX_C)(10 + jX_C)} =$$

$$= j5 + \frac{10.(-jX_C)(10 + jX_C)}{100 + X_C{}^2} = j5 - j\frac{100.X_C}{100 + X_C{}^2} + \frac{10.X_C{}^2}{100 + X_C{}^2} =$$

$$= \frac{10.X_C{}^2}{100 + X_C{}^2} + j(5 - \frac{100.X_C}{100 + X_C{}^2}) = R_{екв} + jX_{екв}$$

където $R_{екв} = \dfrac{10.X_C{}^2}{100 + X_C{}^2}$; $\quad X_{екв} = (5 - \dfrac{100.X_C}{100 + X_C{}^2})$

но за да има резонанс $X_{екв} = (5 - \dfrac{100.X_C}{100 + X_C{}^2}) = 0$

$$\Rightarrow 5(100 + X_C{}^2) - 100X_C = 0$$

$$\Rightarrow 5X_C{}^2 - 100X_C + 500 = 0$$

$$\Rightarrow X_C{}^2 - 20X_C + 100 = 0$$

$$\Rightarrow X_C = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 400}}{2} = 10\Omega$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{10^3 10} = 10^{-4} F = 100.10^{-6} F = 100\mu F$$