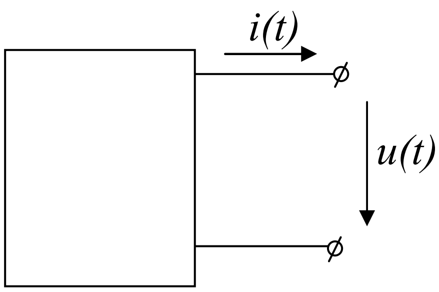
15. Въпрос

Токов резонанс в R, L, C двуполюсник от паралелен тип. Резонанс при всички честоти

Токов резонанс

Резонансът във верига с паралелни клонове с разнородни реактивни съпротивления се нарича токов (паралелен резонанс).По отношение на външната верига двуполюсникът в който има токов резонанс <u>има поведение на активна проводимост.</u> Следователно е в сила фазовото условие за резонанс $\varphi = 0$.

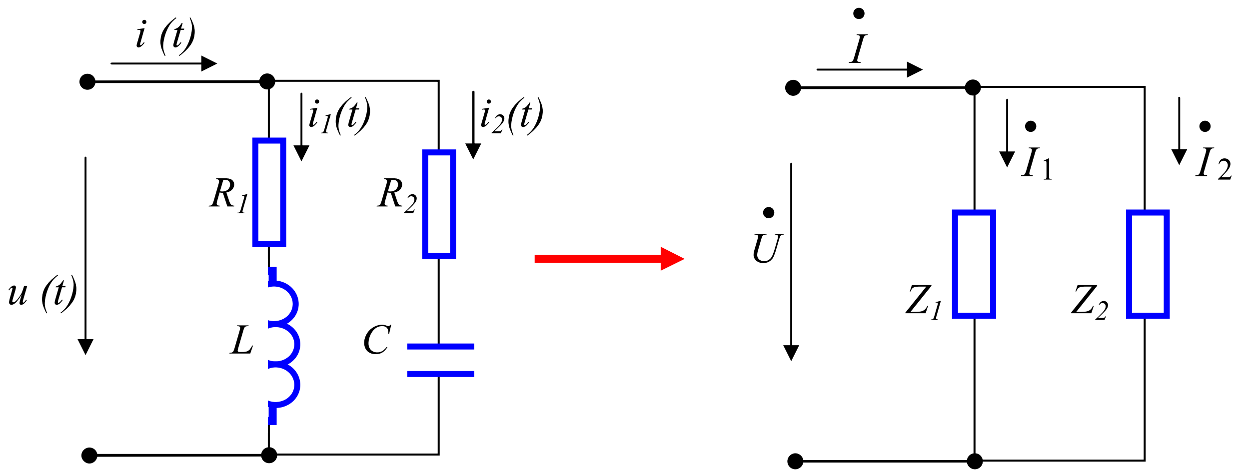


$$u(t) = u_m sin(\omega t + \psi_u),$$
$$i(t) = i_m sin(\omega t + \psi_i)$$

Фазово условие за резонанс

$$\boxed{\varphi = \psi_u - \psi_i = 0}$$

Нека разгледаме схемата на фиг.1 и да анализираме веригата при наличие на резонанс.



фиг.1

За тази схема можем да запишем:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2;$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_1} = \frac{\dot{U}}{R_1 + j\omega L} = \frac{\dot{U}}{R_1 + j\omega L} \cdot \frac{(R_1 - j\omega L)}{(R_1 - j\omega L)} = \dot{U}\left(\frac{R_1}{R_1^2 + \omega^2 L^2} - j\frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2}\right) = \dot{U}.Y_1$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{Z_2} = \frac{\dot{U}}{R_2 - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{\dot{U}}{R_2 - j\frac{1}{\omega C}} \cdot \frac{(R_2 + j\frac{1}{\omega C})}{(R_2 + j\frac{1}{\omega C})} = \dot{U}\left(\frac{R_2}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} + j\frac{1/\omega C}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}\right) = \dot{U}.Y_2$$

Следователно:
$$\boxed{\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{U}(Y_1 + Y_1) = \dot{U}\, Y_{екв} = \dot{U}(G_{екв} - jB_{екв})}$$

където:

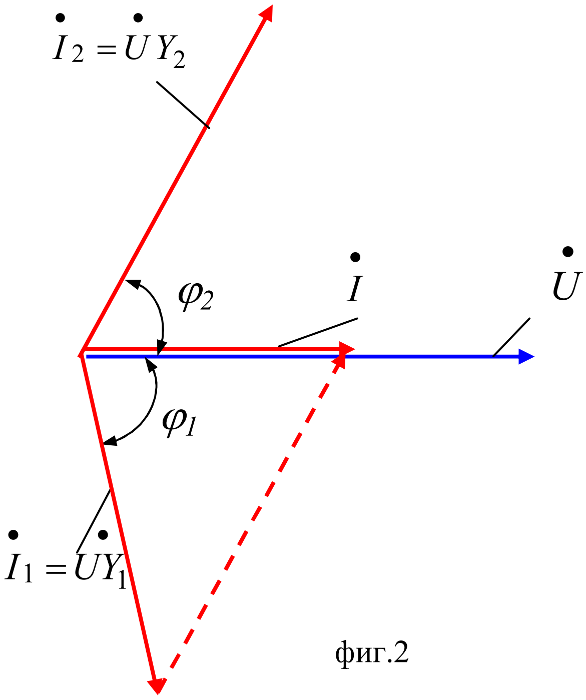
$$G_{екв} = \frac{R_1}{R_1^{\,2} + \omega^2 L^2} + \frac{R_2}{R_2^{\,2} + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}};$$

$$B_{екв} = \frac{\omega L}{R_1^{\,2} + \omega^2 L^2} - \frac{1/\omega C}{R_2^{\,2} + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}}$$

За да има веригата поведение на активна проводимост е необходимо $Y = G_{екв} - \cancelto{0}{jB_{екв}}$, т.е. реактивната проводимост $B_{екв} = 0$

$$\boldsymbol{\varphi = 0} \;\Rightarrow\; \boxed{\boldsymbol{B_{екв}} = 0}$$ - **условие за токов резонанс**

На фиг.2 е показана векторната диаграма при токов резонанс в тази верига:



фиг.2

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = I_1 e^{j\varphi_1} + I_2 e^{j\varphi_2}$$

(токът през бобината изостава от напрежението на ъгъл $\boldsymbol{\varphi_1}$, а през кондензатора избързва с ъгъл $\boldsymbol{\varphi_2}$

Общият ток $\boldsymbol{I}$ **съвпада по фаза** с входното напрежение $\boldsymbol{U}$

Допълнителна забележка

Входното съпротивление на по-голямата част от потребителите на ел.енергия има индуктивен характер. За да се намали големината на тока, а от там и загубите на енергия в генераторите и свързващите проводници (за сметка на реактивната съставка на тока) паралелно на консуматорите се включват кондензаторни батерии. Това е особено съществено за мощни потребители. По- икономически изгодно е кондензаторните батерии да се включват на по-високо напрежение ($Ic = U.\omega C$).Ъгълът φ между напрежението и тока се регулира обикновено до $\cos\varphi$ = 0,9÷0,95

От условието за токов резонанс $\boldsymbol{B_{екв}} = 0$, следва че променяйки параметрите $R,\ L, C$ и честотата ω на схемата може да се достигне до резонанс ако:

$$B_{екв} = \frac{\omega L}{R_1^{\,2} + \omega^2 L^2} - \frac{1/\omega C}{R_2^{\,2} + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}} = 0.$$

Определяне на резонансната честота ω_p за веригата

За да има токов резонанс в разглежданата верига е необходимо да е в сила равенството:

$$\frac{\omega L}{R_1^2+\omega^2L^2}=\frac{1/\omega C}{R_2^2+\dfrac{1}{\omega^2C^2}}. \qquad \textbf{\textit{(1)}}$$

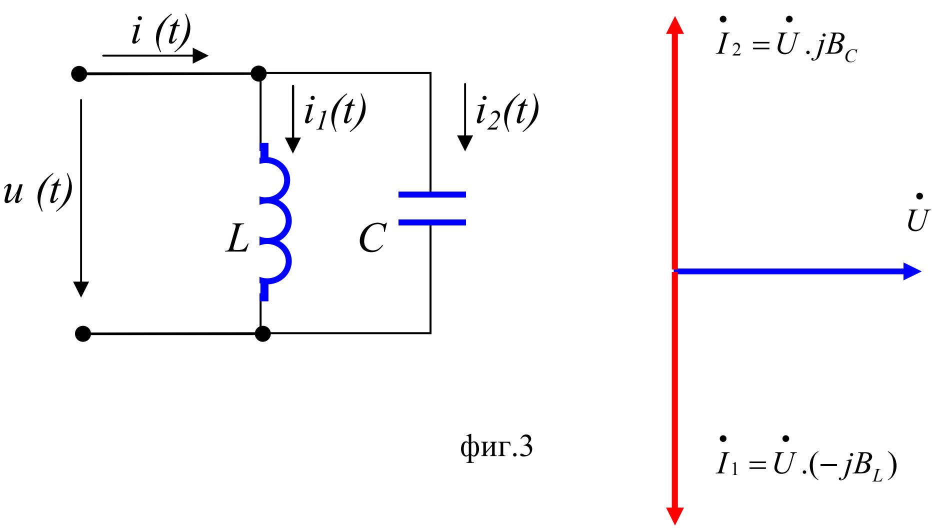
Ще разгледаме няколко частни случая:

1. Идеализиран и практически неизпълним вариант на <u>контур без загуби</u>, когато съпротивленията са $R_1=R_2=0$. Тогава: $\dfrac{1}{\omega_p L}=\omega_p C$ и резонансната честота е:

$$\boxed{\omega_p=\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

резонансната честота в <u>контур без загуби</u> $(R_1=R_2=0)$

На фиг.3 е показана идеализираната схема и съответстващата векторна диаграма за този случай, а на фиг. 4 честотните характеристики на съпротивленията B_L, B_C и B_C, както и ефективните стойности на токовете I_1, I_2 и I.



фиг.3

$$\boxed{\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=0}$$

Токовете през бобината $\dot{I}_1$ и през кондензатора $\dot{I}_2$ са с равна големина и обратна посока.

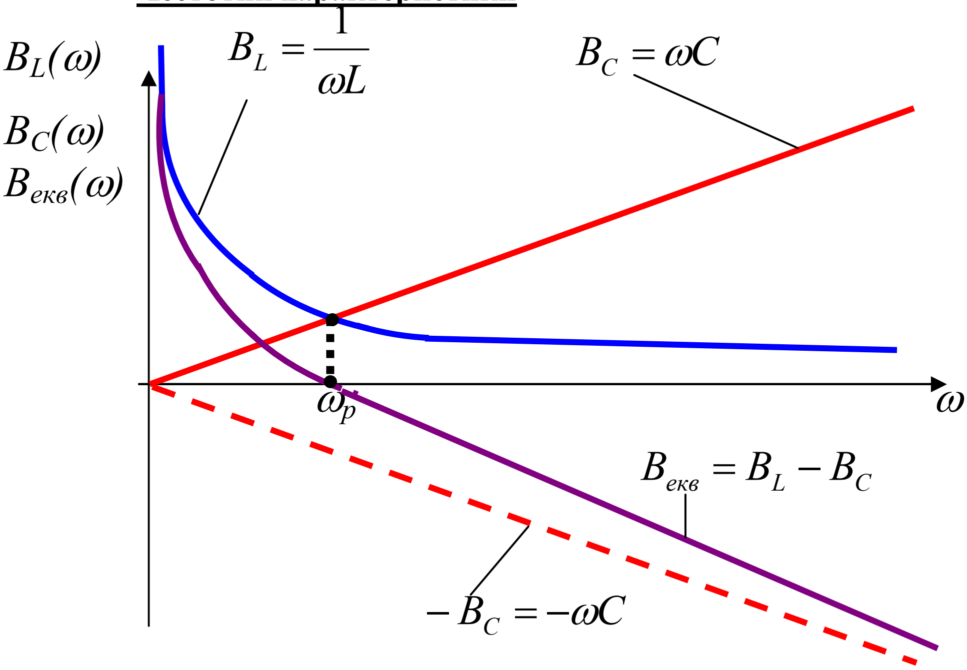
В този случай:

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}}{j\omega L}=\dot{U}.(-j\frac{1}{\omega L})=\dot{U}.(-jB_L);$$

$$\dot{I}_2=\frac{\dot{U}}{-j\dfrac{1}{\omega C}}=\dot{U}.j\omega C=\dot{U}(jB_C)$$

От полученото по-горе условие $\dfrac{1}{\omega_p L}=\omega_p C$ следва, че при резонансна честота проводимостите на двата клона $B_L=\dfrac{1}{\omega_p L}$ и $B_C=\omega_p C$ са чисто реактивни и равни помежду си $B_L=B_C$ и следователно двата тока през бобината $\dot{I}_1$ и през кондензатора $\dot{I}_2$ са с равна големина и обратна посока, а сумата им $\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=0$.

Честотни характеристики



фиг.4

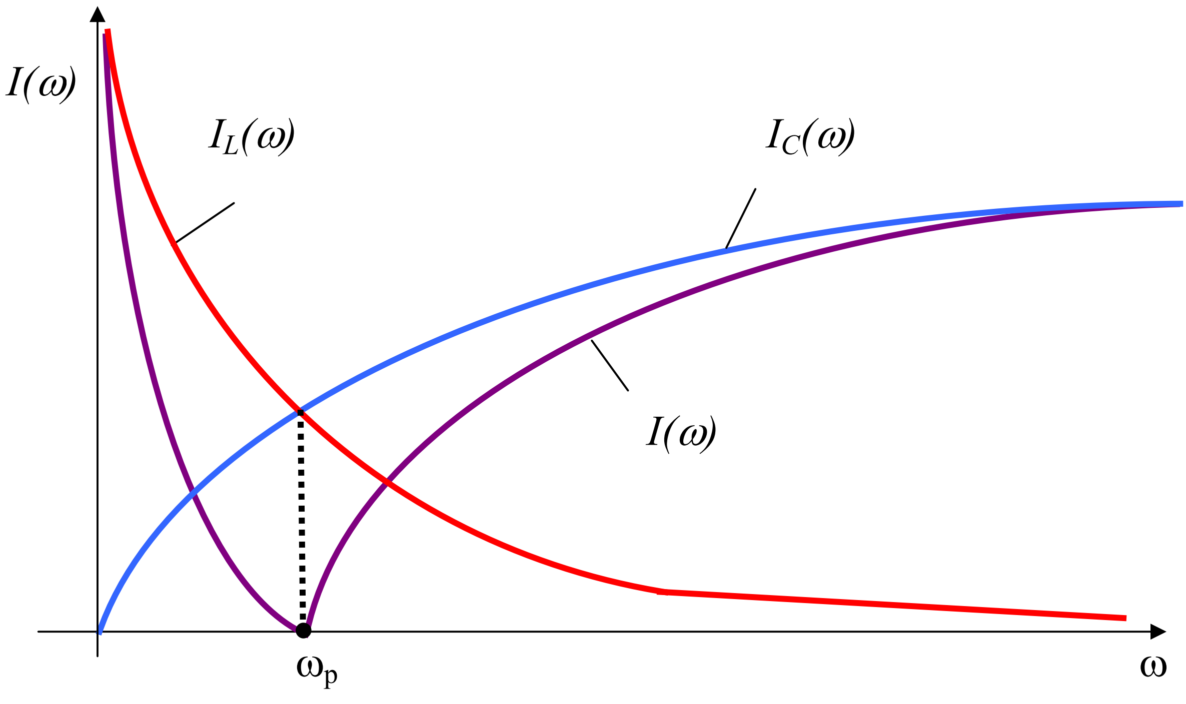
$$B_L = \frac{1}{\omega L}; \quad B_C = \omega L$$

$$B_{екв} = B_L - B_C$$

$\boldsymbol{\omega < \omega_p \Rightarrow}$ проводимостта има индуктивен характер

$\boldsymbol{\omega = \omega_p \Rightarrow B_{екв} = 0; \quad I=0}$

$\boldsymbol{\omega > \omega_p \Rightarrow}$ проводимостта има капацитивен характер



фиг.5

2. Частен случай, когато $R_2=0$, $R_1 << \omega L$ Тогава: $R_2 = 0$, $R_1 \approx 0$ и $\frac{1}{\omega_p L} \approx \omega_p C$ и резонансната честота е:

$$\boxed{\omega_p \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Токът I може да се окаже нищожно малък в сравнение с I_1 и I_2.

3. Частен случй, когато $R_2=0$, $R_1 \neq 0$. Тогава: резонансната честота се определя от израза:

$$\boxed{\frac{\omega L}{R_1^2+\omega^2 L^2}=\omega C}$$

4. Когато $R_1 \neq 0$ и $R_2 \neq 0$. Тогава: резонансната честота се определя от израза:

$$\frac{\omega L}{R_1^2+\omega^2 L^2}=\frac{1/\omega C}{R_2^2+\dfrac{1}{\omega^2 C^2}}$$

Следователно

$$\omega_p L(R_2^2+\frac{1}{\omega_p^2 C^2})=\frac{1}{\omega_p C}(R_1^2+\omega_p^2 L^2)$$

$$\Rightarrow \omega_p L R_2^2+\frac{L}{\omega_p C^2}=\frac{R_1^2}{\omega_p C}+\frac{\omega_p L^2}{C}$$

$$\Rightarrow \omega^2{}_p L R_2^2+\frac{L}{C^2}=\frac{R_1^2}{C}+\frac{\omega^2{}_p L^2}{C}$$

$$\Rightarrow \omega^2{}_p (L R_2^2-\frac{L^2}{C})=\frac{R_1^2}{C}-\frac{L}{C^2}$$

$$\Rightarrow \omega_p=\sqrt{\frac{1}{LC}\frac{R_1^2-\dfrac{L}{C}}{(R_2^2-\dfrac{L}{C})}}=\frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{R_1^2-\dfrac{L}{C}}{(R_2^2-\dfrac{L}{C})}}$$

Но $\dfrac{1}{\sqrt{LC}}=\omega_0$ (резонансната честота на контур без загуби) и ако въведем вълново съпротивление $\rho=\sqrt{\dfrac{L}{C}}$, получаваме:

$$\boxed{\omega_p=\omega_0\sqrt{\frac{R_1^2-\rho^2}{R_2^2-\rho^2}}}$$

Нека разгледаме следните случаи:

1. Ако едновременно $\left| \begin{matrix} R_1 < \rho \\ R_2 > \rho \end{matrix} \right.$ или $\left| \begin{matrix} R_1 > \rho \\ R_2 < \rho \end{matrix} \right.$ то за ω_p се получава имагинерна стойност и следователно получаването на резонанс е невъзможно посредством регулиране на честотата.
2. Ако едновременно $\left| \begin{matrix} R_1 < \rho \\ R_2 < \rho \end{matrix} \right.$ или $\left| \begin{matrix} R_1 > \rho \\ R_2 > \rho \end{matrix} \right.$ то за ω_p се получава реална стойност и получаването на резонанс е възможно посредством регулиране на честотата.
3. Ако $R_1 = R_2 \neq \rho$, то $\omega_p=\omega_0$
4. Ако $R_1 = R_2 = \rho$, то във веригата се получава **резонанс при всички честоти** (условието (1) се превръща в тъждество при всички честоти)

Доказателство:

Определяме входното съпротивление на веригата:

$$R_1 = R_2 = R = \rho$$

$$\Rightarrow Z_1 = R + j\omega L$$

$$\Rightarrow Z_2 = R - j\frac{1}{\omega C}$$

$$\Rightarrow Z_{екв} = \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

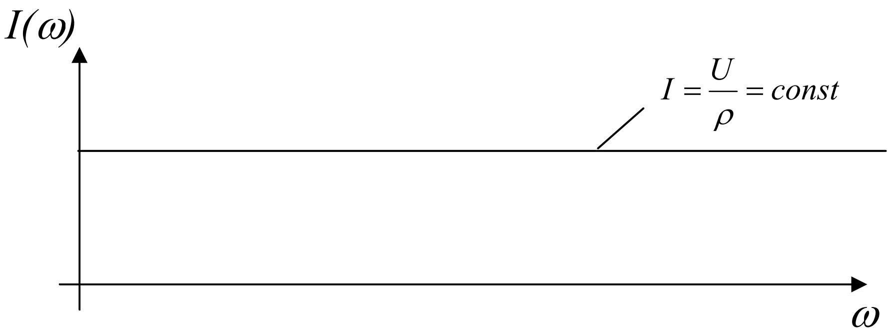
$$\Rightarrow \quad Z_{екв} = \frac{(R + j\omega L)(R - j\frac{1}{\omega C})}{R + j\omega L + R - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{R^2 + \frac{L}{C} + jR(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{2R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} =$$

$$= \frac{R^2 + \rho^2 + jR(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{2R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{2\rho^2 + j\rho(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{2\rho + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{\rho[2\rho + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})]}{2\rho + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \rho$$

Следователно **получаваме, че съпротивлението на веригата не зависи от честоттата!**

$$\boxed{\begin{aligned} &Z_{екв} = \rho = R \\ &I = \frac{U}{z} = \frac{U}{\rho} = const \end{aligned}}$$

за всяка честота кривата на тока е права успоредна на абсцисната ос

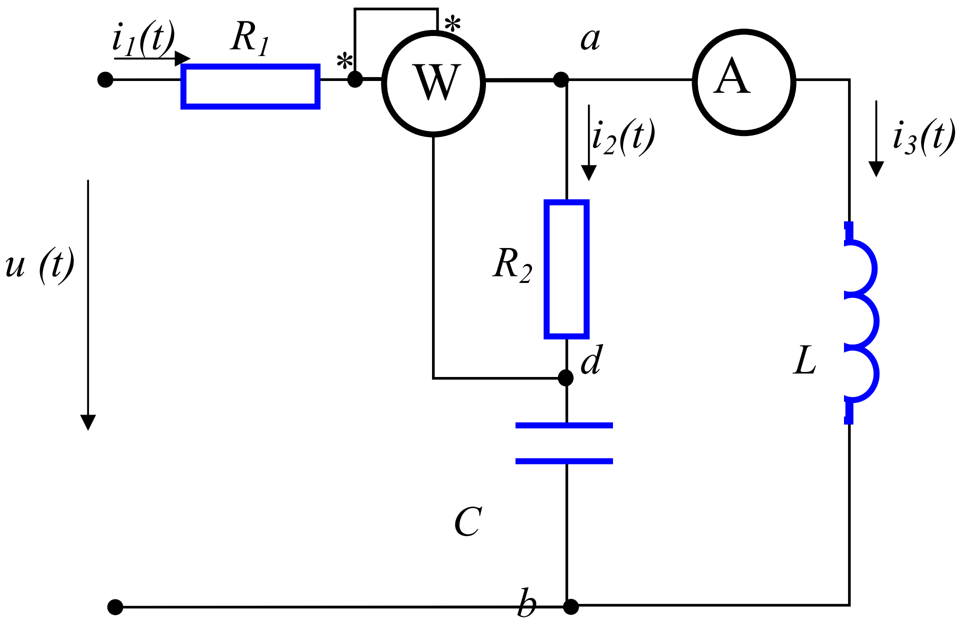


Забележка

Получените резултати за резонанс при всички честоти са валидни, само ако параметрите на веригата не зависят от честотата. Поради повърхностния ефект, при който съпротивлението и индуктивността се променят с промяната на честотата, такъв режим се осъществява само за ограничен честотен обхват.

<u>Пример за определяне на резонансен параметър:</u>

1. Да се определи стойността на капацитета С, за която във веригата (фиг.6) има резонанс.



$fp=80Hz$,
$R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 5\Omega$,
$L=20\ mH$,

2.Ако е известно напрежението на входа на веригата:

$u(t) = 141\sin(\omega t-53)V$,

да се определят показанията на уредите.

фиг.6

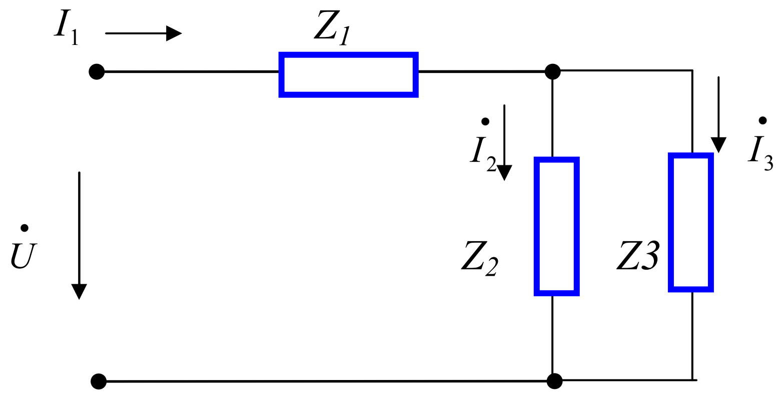
Решение

1. <u>Определяне на капацитета при резонанс</u>

Във веригата, между възли "a" и "b" има паралелно свързани капацитивен и индуктивен клон. Следователно е възможен токов резонанс. Условието за токов резонанс е реактивната проводимост на паралелния участък да бъде нула:

$$B_{ab} = 0$$

Определяме еквивалентното съпротивление на веригата:



фиг.7

$$\omega = 2\pi f = 2\pi.80 \approx 500 = 5.10^2\, rad/s$$

$$Z_1 = R_1 = 10\Omega$$

$$Z_2 = R_2 - j\frac{1}{\omega C} = (5 - jX_C)\Omega$$

$$Z_3 = j\omega L = j5.10^2 20.10^{-3} = 10\Omega$$

$$Z_{ab} = \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

$$\Rightarrow \quad Z_{ab} = \frac{(5 - jX_C)j10}{5 + j(10 - X_C)} = \frac{(10X_C + j50)}{[5 + j(10 - X_C)]} \frac{[5 - j(10 - X_C)]}{[5 - j(10 - X_C)]} =$$

$$= \frac{50X_C + j250 - j100X_C + 500 + j10X_C{}^2 - 50X_C}{25 + (10 - X_C)^2} =$$

$$= \frac{500}{25 + (10 - X_C)^2} + j\frac{250 - 100X_C + 10X_C{}^2}{25 + (10 - X_C)^2} = G_{ab} - jB_{ab}$$

където $G_{ab} = \dfrac{500}{25 + (10 - X_C)^2}$; $\quad B_{ab} = \dfrac{250 - 100X_C + 10X_C{}^2}{25 + (10 - X_C)^2}$

но за да има резонанс $B_{ab} = \dfrac{250 - 100X_C + 10X_C{}^2}{25 + (10 - X_C)^2} = 0$

$$\Rightarrow 250 - 100X_C + 10X_C{}^2 = 0$$

$$\Rightarrow X_C = \frac{100 \pm \sqrt{10000 - 10000}}{20} = 5\Omega$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{5.10^2 5} = 4.10^{-4}F = 400.10^{-6}F = 400\mu F$$

$$\boxed{\Rightarrow C = 400\mu F}$$

2. <u>Определяне показанията на уредите</u>

Напрежението на източника е:

u(t) = 141sin(ωt-53)V

Следователно комплексното напрежение на източника се определя като:

$$\dot{U} = Ue^{j\psi_u} = \frac{u_m}{\sqrt{2}}e^{j\psi_u} = \frac{141}{\sqrt{2}}e^{-j53} =$$

$$100.[\cos(-53) + j\sin(-53)] = 100.(0,6 - j0,8) = (60 - j80)V$$

Еквивалентното съпротивление на веригата е:

$$Z_{екв} = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

$$\Rightarrow \quad Z_{екв} = 10 + \frac{(5 - j5).(j10)}{5 - j5 + j10} = 10 + \frac{(1 - j).(j10)}{1 + j} =$$

$$10 + \frac{10(1 + j)}{1 + j} = 10 + 10 = 20\Omega$$

Определяме комплекса на входния ток $\dot{I}_1$.

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_{ek}} = \frac{60 - j80}{20} = (3 + j4)A$$

Определяме комплексите на токовете в двата паралелни клона $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$.Използваме формулата за разпределянето на общия ток $\dot{I}_1$ по двата паралелни клона.

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = (3 + j4)\frac{j10}{5 - j5} = \frac{(-40 + j30)}{5 - j5} = \frac{(-8 + j6)}{1 - j} =$$

$$\frac{(-8 + j6)}{1 - j}\frac{(1 + j)}{(1 + j)} = \frac{(-8 + j6 - 8j - 6)}{2} = (7 - j)A$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 3 + j4 - 7 + j = (-4 + 5j)A$$

Амперметърът е включен в клон 3. Следователно

$$I_A = I_3 = \sqrt{(-4)^2 + 5^2} = \sqrt{41} = 6{,}4A$$

$$P_W = \mathrm{Re}[\dot{U}_{ad}\overset{*}{I}_1] = \mathrm{Re}[\dot{I}_2 R_2 \overset{*}{I}_1] = \mathrm{Re}[(7 - j)5(3 - j4)] =$$

$$= \mathrm{Re}[(35 - j5)(3 - j4)] = 35.3 - 5.4 = 85W$$