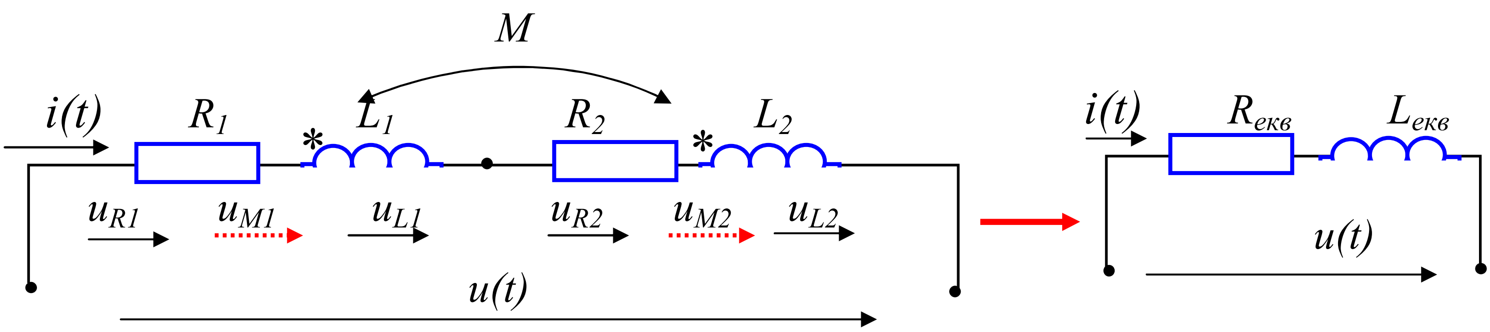
17 Въпрос

Последователно и паралелно съединение на два индуктивно свързани пасивни елемента. Преобразуване на триполюсно съединение с индуктивна връзка.

Последователно съединение на два индуктивно свързани пасивни елемента.

1. Съгласувано свързване.

Нека разгледаме две последователно свързани бобини *"1"* и *"2"*, съответно със съпротивления R_1 и R_2 и индуктивности L_1 и L_2.



фиг.10а

На фиг. 10а е показан вариант, в който бобините *"1"* и *"2"* са свързани така, че края на първата се свързва с началото на втората. Тогава токът $i(t)$ е еднакво ориентиран по отношение на началото и края на намотките (т. е. и в двете бобини токът тече от началото към края на намотката). На схемата едноименните изводи (например началото на намотката) са означени със символа *"* "*. Такова свързване се нарича **съгласувано свързване**.

Тогава в резултат на протичане на тока $i(t)$ през бобината *"1"* в бобина *"2"* се индуктира допълнително напрежение $u_{M2}(t)$ със същата посока, като тази на тока. Съответно в резултат на протичане на тока $i(t)$ през бобината *"2"* в бобина *"1"* се индуктира допълнително напрежение $u_{M1}(t)$ със същата посока, като тази на тока. Така общото напрежение на участъка се определя като:

$$u(t) = u_{R_1}(t) + u_{L_1}(t) + u_{M_1}(t) + u_{R_2}(t) + u_{L_2}(t) + u_{M_2}(t) =$$

$$R_1 i(t) + L_1 \frac{di}{dt} + M\frac{di}{dt} + R_2 i(t) + L_2\frac{di}{dt} + M\frac{di}{dt} =$$

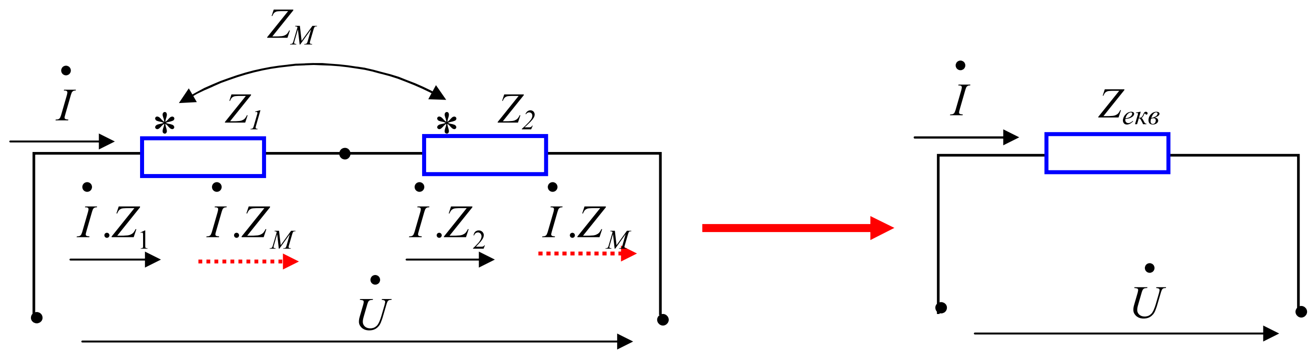
$$(R_1 + R_2).i(t) + (L_1 + L_2 + 2M).\frac{di}{dt} = R_{екв}.i(t) + L_{екв}.\frac{di}{dt}$$

Следователно двете последователно свързани бобини могат да се заменят с една еквивалентна с параметри:

$$\boxed{\begin{aligned} R_{екв} &= R_1 + R_2 \\ L_{екв} &= L_1 + L_2 + 2M \end{aligned}}$$

Тези резултати могат да се запишат и в комплексен вид за схемата с комплекси на фиг.10 б. Ако означим съпротивленията на бобините и съпротивлението на индуктивната връзка с :

$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1; \qquad Z_2 = R_2 + j\omega L_2; \qquad Z_M = j\omega M$$



фиг. 10 б

За схемата от фиг.10 б можем да запишем:

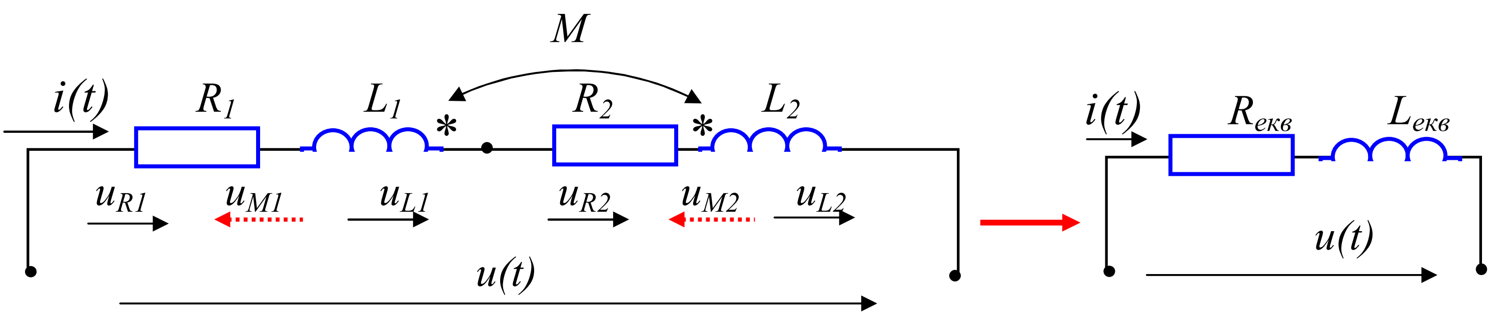
$$\dot{U} = \dot{I}(R_1 + j\omega L_1) + \dot{I}.j\omega M + \dot{I}(R_2 + j\omega L_2) + \dot{I}.j\omega M = \dot{I}Z_1 + \dot{I}.Z_M + \dot{I}Z_2 + \dot{I}.Z_M$$

$$\Rightarrow \dot{U} = \dot{I}(Z_1 + Z_2 + 2Z_M) = \dot{I}Z_{екв}$$

където: $\boxed{Z_{екв} = Z_1 + Z_2 + 2Z_M}$

2. Несъгласувано свързване.

Нека разгледаме двете последователно свързани бобини *"1"* и *"2"*, но свързани така, че края на първата се свързва с края на втората (фиг.11а). Тогава токът $i(t)$ е различно ориентиран по отношение на началото и края на намотките (в първата бобина токът тече от края към началото на намотката, а във втората от началото към края). На схемата едноименните изводи (например началото на намотката) са означени със символа *"* "*. Такова свързване се нарича **несъгласувано свързване**.



фиг.11а

Тогава в резултат на протичане на тока $i(t)$ през бобината *"1"* в бобина *"2"* се индуктира допълнително напрежение $u_{M2}(t)$ с посока, обратна на тази на тока. Съответно в резултат на протичане на тока $i(t)$ през бобината *"2"* в бобина *"1"* се индуктира допълнително напрежение $u_{M1}(t)$ с посока, обратна на тази на тока. Така общото напрежение на участъка се определя като:

$$u(t) = u_{R_1}(t) + u_{L_1}(t) - u_{M_1}(t) + u_{R_2}(t) + u_{L_2}(t) - u_{M_2}(t) =$$

$$R_1 i(t) + L_1\frac{di}{dt} - M\frac{di}{dt} + R_2 i(t) + L_2\frac{di}{dt} - M\frac{di}{dt} =$$

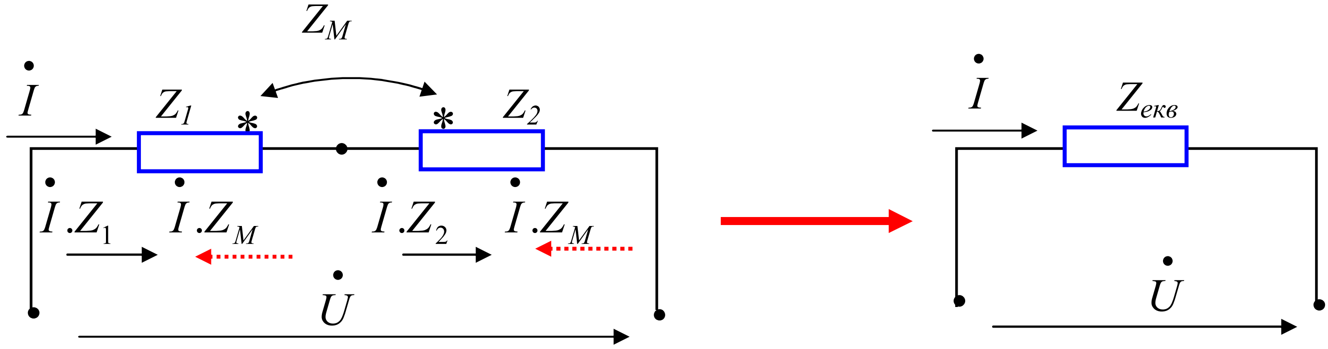
$$(R_1 + R_2).i(t) + (L_1 + L_2 - 2M).\frac{di}{dt} = R_{екв}.i(t) + L_{екв}.\frac{di}{dt}$$

Следователно двете последователно свързани бобини могат да се заменят с една еквивалентна с параметри:

$$\boxed{\begin{aligned} R_{екв} &= R_1 + R_2 \\ L_{екв} &= L_1 + L_2 - 2M \end{aligned}}$$

Тези резултати могат да се запишат и в комплексен вид за схемата с комплекси на фиг.11 б. Ако означим съпротивленията на бобините и съпротивлението на индуктивната връзка с :

$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1; \qquad Z_2 = R_2 + j\omega L_2; \qquad Z_M = j\omega M$$



фиг. 11 б

За схемата от фиг.10 б можем да запишем:

$$\dot{U} = \dot{I}(R_1 + j\omega L_1) - \dot{I}.j\omega M + \dot{I}(R_2 + j\omega L_2) - \dot{I}.j\omega M = \dot{I}Z_1 - \dot{I}.Z_M + \dot{I}Z_2 - \dot{I}.Z_M$$

$$\Rightarrow \dot{U} = \dot{I}(Z_1 + Z_2 - 2Z_M) = \dot{I}Z_{екв}$$

където: $\boxed{Z_{екв} = Z_1 + Z_2 - 2Z_M}$

<u>Извод:</u> Две последователно съединени и индуктивно свързани бобини могат да се заменят с една еквивалентна с параметри:

$$R_{екв} = R_1 + R_2$$

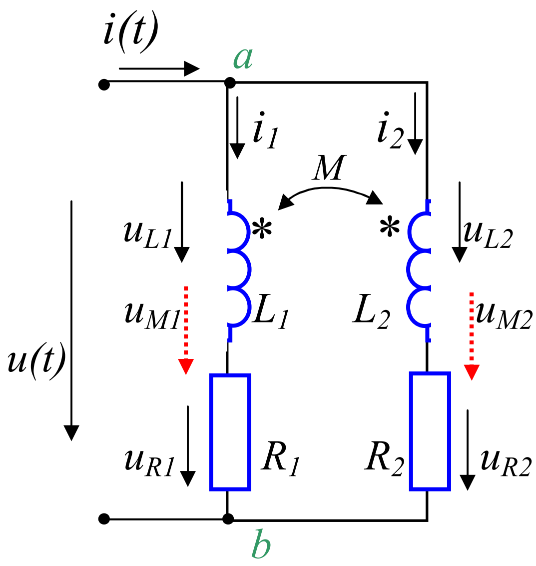
$$L_{екв} = L_1 + L_2 \pm 2M$$

Знакът пред 2M се определя от начина на свързване, съответно знакът е "+" при съгласувано и "-" при несъгласувано свързване.

<u>Паралелно съединение на два индуктивно свързани пасивни елемента.</u>

<u>1. Съгласувано свързване</u>.

Нека разгледаме две паралелно свързани бобини *"1"* и *"2"*. На фиг. 12а е показан вариант, в който едноименните им изводи на бобините *"1"* и *"2"* са свързани в една и съща точка (например началото и на двете намотки е в точка "а") Такова свързване се нарича **<u>съгласувано свързване</u>**. При такова свързване токовете $i_1(t)$ и $i_2(t)$ са еднакво ориентирани спрямо началото и края на намотките (т. е. и в двете бобини токът тече от началото към края на намотката).



фиг.12а

В резултат на протичане на тока $i_1(t)$ през бобината "1" в бобина "2" се индуктира допълнително напрежение $u_{M2}(t)$ със същата посока, като тази на тока $i_2(t)$. Съответно в резултат на протичане на тока $i_2(t)$ през бобината "2" в бобина "1" се индуктира допълнително напрежение $u_{M1}(t)$ със същата посока, като тази на тока $i_1(t)$. Следователно, ако запишем система уравнения по законите на Кирхоф ще получим:

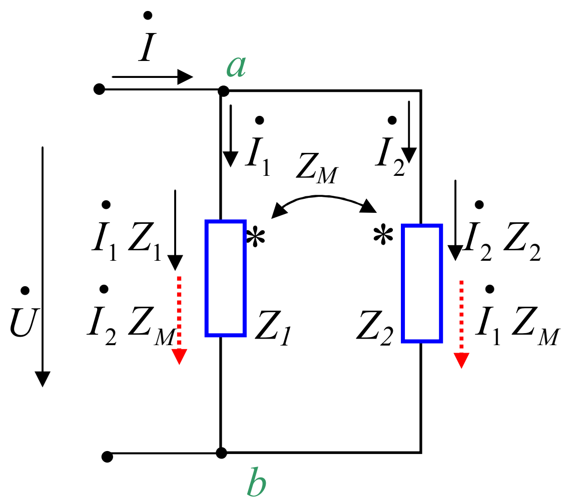
$$i(t) = i_1(t) + i_{2_1}(t)$$
$$u(t) = u_{R_1}(t) + u_{L_1}(t) + u_{M_1}(t)$$
$$u(t) = u_{R_2}(t) + u_{L_2}(t) + u_{M_2}(t)$$

или

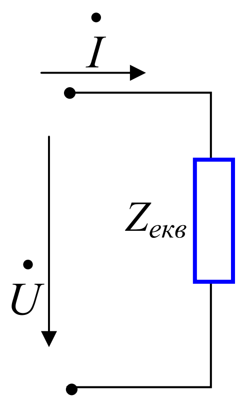
$$i(t) = i_1(t) + i_{2_1}(t)$$
$$u(t) = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$
$$u(t) = R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$

При синусоидален режим можем да изследваме паралелното съединение, като използваме комплекси (фиг. 12 б). Ако означим съпротивленията на бобините и съпротивлението на индуктивната връзка с :

$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1; \qquad Z_2 = R_2 + j\omega L_2; \qquad Z_M = j\omega M$$



фиг. 12 б



фиг. 12 в

Тогава за веригата от фиг. 12 б можем да запишем:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \qquad\qquad \dot{I} - \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 0$$

$$\dot{U} = \dot{I}_1 (R_1 + j\omega L_1) + \dot{I}_2 .j\omega M \qquad \text{или} \qquad \dot{I}_1 Z_1 + \dot{I}_2 .Z_M = \dot{U}$$

$$\dot{U} = \dot{I}_2 (R_2 + j\omega L_2) + \dot{I}_1 .j\omega M \qquad\qquad \dot{I}_1 Z_M + \dot{I}_2 .Z_2 = \dot{U}$$

Следователно:

$$\dot{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \dot{U} & Z_M \\ \dot{U} & Z_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_1 & Z_M \\ Z_M & Z_2 \end{vmatrix}} = \frac{\dot{U}(Z_2 - Z_M)}{Z_1 Z_2 - Z_M{}^2} \qquad \text{и} \qquad \dot{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} Z_1 & \dot{U} \\ Z_M & \dot{U} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_1 & Z_M \\ Z_M & Z_2 \end{vmatrix}} = \frac{\dot{U}(Z_1 - Z_M)}{Z_1 Z_2 - Z_M{}^2}$$

Тогава от : $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$ се получава: $\dot{I} = \dfrac{\dot{U}(Z_1 + Z_2 - 2Z_M)}{Z_1 Z_2 - Z_M{}^2}$. Следователно можем да определим еквивалентното съпротивление (фиг.12в). като:

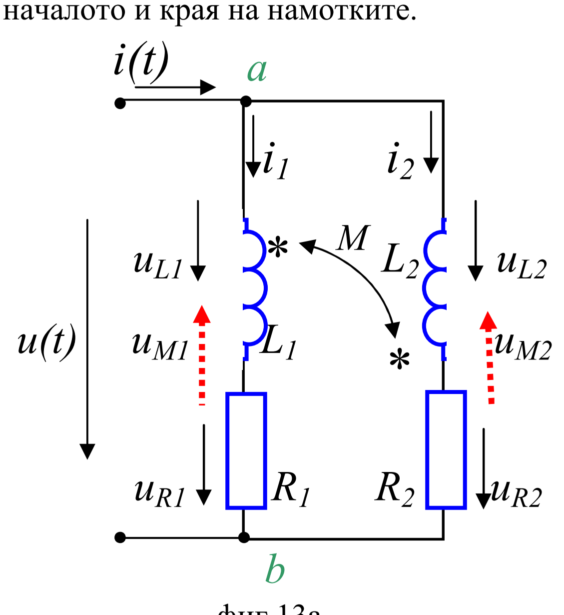
$$\boxed{Z_{екв} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Z_1 Z_2 - Z_M{}^2}{Z_1 + Z_2 - 2Z_M}}$$

--- еквивалентно съпротивление при **съгласувано свързване**

2. Несъгласувано свързване.

На фиг. 13а е показан вариант, в който разноименните им изводи на бобините *"1"* и *"2"* са свързани в една и съща точка (например началото на бобина *"1"* и края на бобина *"2"* са свързани в точка "a") Такова свързване се нарича **несъгласувано свързване**.

При този начин на свързване токовете $i_1(t)$ и $i_2(t)$ са различно ориентирани спрямо началото и края на намотките.



фиг.13а

Следователно в бобините *"1"* и *"2"* се индуктират допълнителни напрежения $u_{M1}(t)$ и $u_{M2}(t)$ с посока, обратна тази на токовете, които протичат през тях.

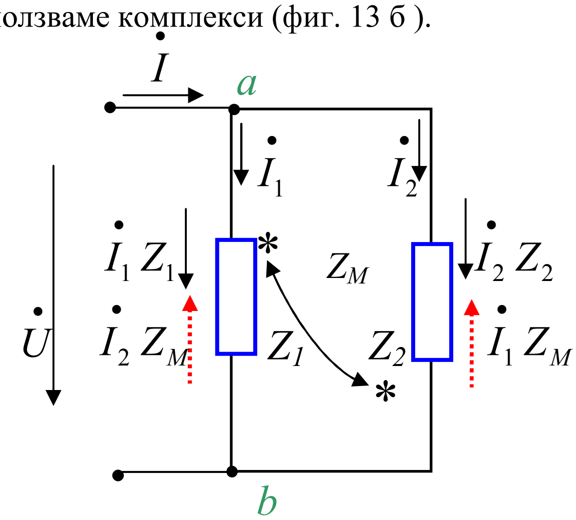
Следователно, ако запишем система уравнения по законите на Кирхоф ще получим:

$$i(t) = i_1(t) + i_{2_1}(t)$$
$$u(t) = u_{R_1}(t) + u_{L_1}(t) - u_{M_1}(t)$$
$$u(t) = u_{R_2}(t) + u_{L_2}(t) - u_{M_2}(t)$$

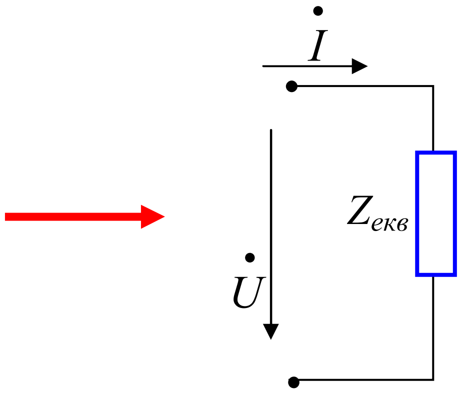
или

$$i(t) = i_1(t) + i_{2_1}(t)$$
$$u(t) = R_1 i_1(t) + L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt}$$
$$u(t) = R_2 i_2(t) + L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt}$$

При синусоидален режим можем да изследваме паралелното съединение, като използваме комплекси (фиг. 13 б).



фиг. 13 б



фиг. 13 в

Тогава за веригата от фиг. 13 б можем да запишем:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$$
$$\dot{U} = \dot{I}_1(R_1 + j\omega L_1) - \dot{I}_2 . j\omega M$$
$$\dot{U} = \dot{I}_2(R_2 + j\omega L_2) - \dot{I}_1 . j\omega M$$

или

$$\dot{I} - \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 0$$
$$\dot{I}_1 Z_1 - \dot{I}_2 . Z_M = \dot{U}$$
$$-\dot{I}_1 Z_M + \dot{I}_2 . Z_2 = \dot{U}$$

Следователно:

$$\dot{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \dot{U} & -Z_M \\ \dot{U} & Z_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_1 & -Z_M \\ -Z_M & Z_2 \end{vmatrix}} = \frac{\dot{U}(Z_2 + Z_M)}{Z_1 Z_2 - Z_M{}^2}$$

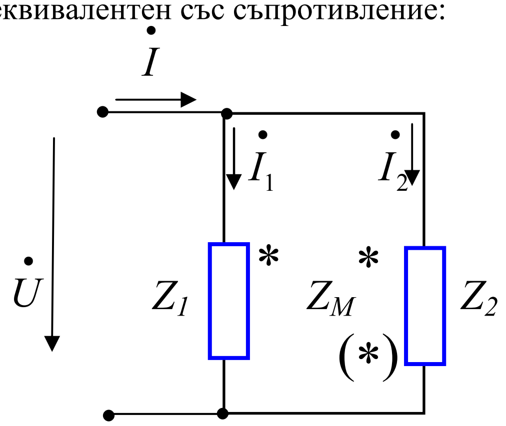
и

$$\dot{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} Z_1 & \dot{U} \\ -Z_M & \dot{U} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_1 & -Z_M \\ -Z_M & Z_2 \end{vmatrix}} = \frac{\dot{U}(Z_1 + Z_M)}{Z_1 Z_2 - Z_M{}^2}$$

Тогава от : $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$ се получава: $\dot{I} = \dfrac{\dot{U}(Z_1 + Z_2 + 2Z_M)}{Z_1 Z_2 - Z_M{}^2}$. Следователно можем да определим еквивалентното съпротивление (фиг.13в). като:

$$Z_{екв} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Z_1 Z_2 - Z_M{}^2}{Z_1 + Z_2 + 2Z_M}$$ --- еквивалентно съпротивление при **несъгласувано свързване**

<u>Извод:</u> Два паралелно съединени и индуктивно свързани елемента могат да се заменят с един еквивалентен със съпротивление:



$$Z_{екв} = \frac{Z_1 Z_2 - Z_M{}^2}{Z_1 + Z_2 \underset{(+)}{-} 2Z_M}$$

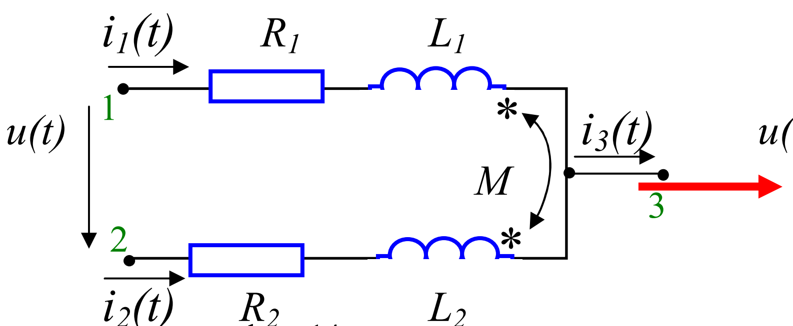
Знакът пред $2Z_M$, в знаменателя се определя от начина на свързване, съответно знакът е "-" при съгласувано и "+"при несъгласувано свързване.

<u>Преобразуване на триполюсно съединение с индуктивна връзка.</u>

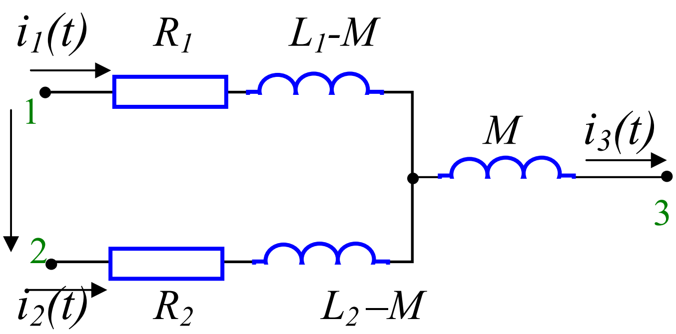
Участък от електрическа верига, в който две индуктивно свързани бобини имат и електрическа връзка в един от краищата си се нарича **<u>триполюсно съединение с индуктивна връзка</u>** (фиг. 14).

<u>Едноименните изводи са свързани в една и съща точка</u>

На фиг. 14 е показан вариант, в който едноименните изводи на бобините *"1"* и *"2"* са свързани в една и съща точка (например началото и на двете намотки е в точка "*3*")



фиг. 14



фиг. 15

Тази схема може да се замени с еквивалентната схема от фиг.15, в която индуктивната връзка е отстранена но токовете $i_1(t)$, $i_2(t)$ и $i_3(t)$, които протичат в трите клона на веригата са същите. Променят се индуктивностите в клон *"1"* и *"2"*, а в клон *"3"* се появява нова индуктивност.

Доказателство

При синусоидален режим използваме комплексни образи и записваме система уравнения съгласно законите на Кирхоф. Съпротивленията са съответно:

$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1; \qquad Z_2 = R_2 + j\omega L_2; \qquad Z_M = j\omega M$$

При такова свързване токовете $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ са еднакво ориентирани спрямо началото и края на намотките (т. е. и в двете бобини токът тече от началото към края на намотката) и допълнителните напрежения в резултат на индуктивната връзка имат същата посока като тази на тока в съответния клон . Тогава:

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\dot{I}_2 = \dot{I}_3 - \dot{I}_1; \qquad \dot{I}_1 = \dot{I}_3 - \dot{I}_2}$$

$$\dot{U}_{13} = \dot{I}_1 (R_1 + j\omega L_1) + \dot{I}_2 . j\omega M$$

$$\dot{U}_{23} = \dot{I}_2 (R_2 + j\omega L_2) + \dot{I}_1 . j\omega M$$

Заместваме токовете $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ и получаваме:

$$\dot{U}_{13} = \dot{I}_1 (R_1 + j\omega L_1) + (\dot{I}_3 - \dot{I}_1). j\omega M$$

$$\dot{U}_{23} = \dot{I}_2 (R_2 + j\omega L_2) + (\dot{I}_3 - \dot{I}_2). j\omega M$$

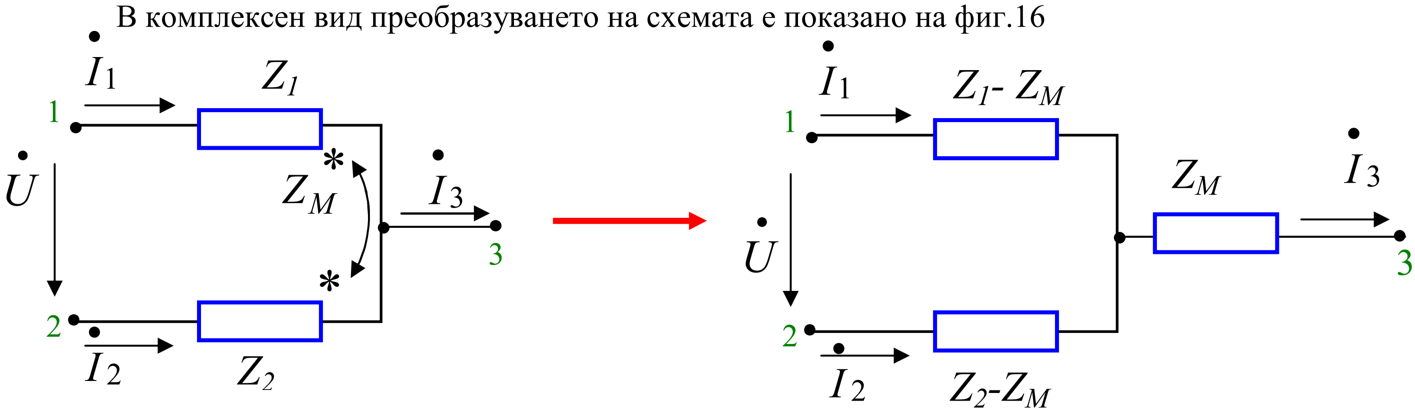
Следователно можем да запишем:

$$\dot{U}_{13} = \dot{I}_1 R_1 + \dot{I}_1 j\omega (L_1 - M) + \dot{I}_3 . j\omega M$$

$$\dot{U}_{23} = \dot{I}_2 R_2 + \dot{I}_2 j\omega (L_2 - M) + \dot{I}_3 . j\omega M$$

Получените уравнения отговарят на еквивалентната схема от фиг. 15, в която няма индуктивна връзка.

В комплексен вид преобразуването на схемата е показано на фиг.16

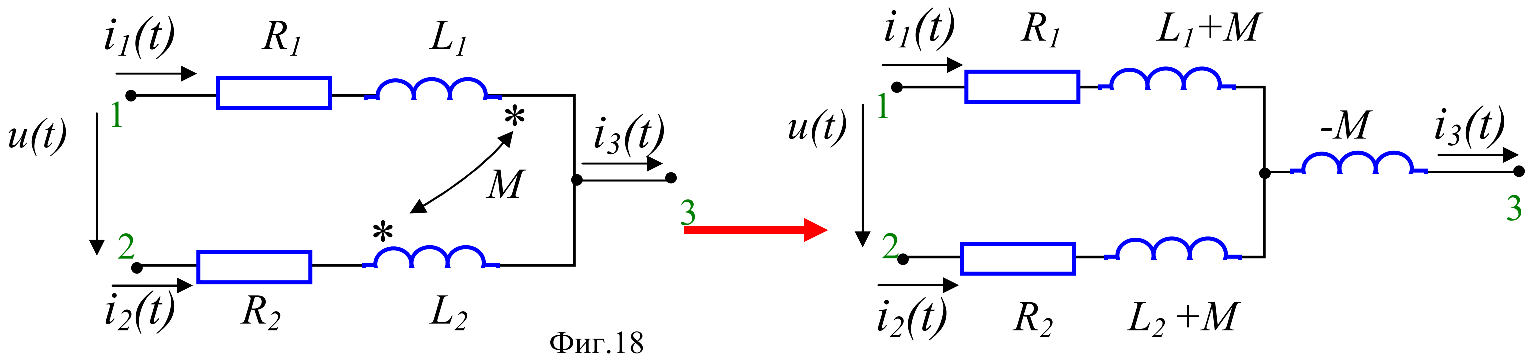


фиг.16

Разноименните изводи са свързани в една и съща точка

На фиг. 17 е показана вариант, в който разноименните изводи на бобините *"1"* и *"2"* са свързани в една и съща точка (например началото на бобината *"1"* и края на бобината *"2"* са свързани в точка "*3*")

Тази схема може да се замени с еквивалентната схема от фиг.18, в която е отстранена индуктивната връзка, но токовете $i_1(t)$, $i_2(t)$ и $i_3(t)$, които протичат в трите клона на веригата са същите.



Фиг.18

Доказателство

При този начин на свързване токовете $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ са различно ориентирани спрямо началото и края на намотките и допълнителните напрежения в резултат на индуктивната връзка имат посока обратна на тази на тока в съответния клон . Тогава:

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{I}_2 = \dot{I}_3 - \dot{I}_1; \qquad \dot{I}_1 = \dot{I}_3 - \dot{I}_2}$$

$$\dot{U}_{13} = \dot{I}_1(R_1 + j\omega L_1) - \dot{I}_2 . j\omega M$$

$$\dot{U}_{23} = \dot{I}_2(R_2 + j\omega L_2) - \dot{I}_1 . j\omega M$$

Заместваме токовете $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ и получаваме:

$$\dot{U}_{13} = \dot{I}_1(R_1 + j\omega L_1) - (\dot{I}_3 - \dot{I}_1). j\omega M$$

$$\dot{U}_{23} = \dot{I}_2(R_2 + j\omega L_2) - (\dot{I}_3 - \dot{I}_2). j\omega M$$

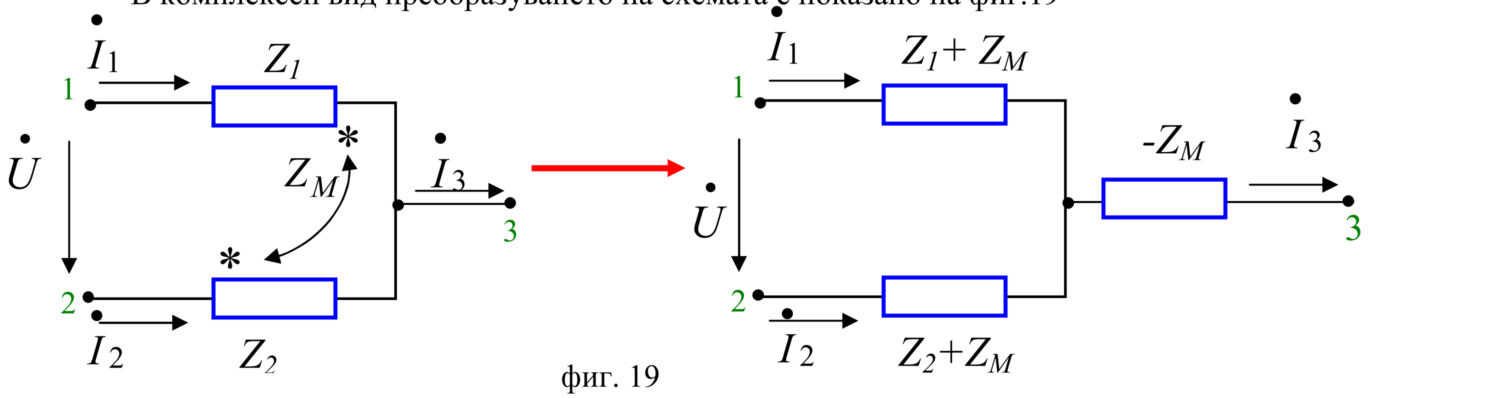
Следователно можем да запишем:

$$\dot{U}_{13} = \dot{I}_1 R_1 + I_1 j\omega(L_1 + M) - \dot{I}_3 . j\omega M$$

$$\dot{U}_{23} = \dot{I}_2 R_2 + \dot{I}_2 j\omega(L_2 + M) - \dot{I}_3 . j\omega M$$

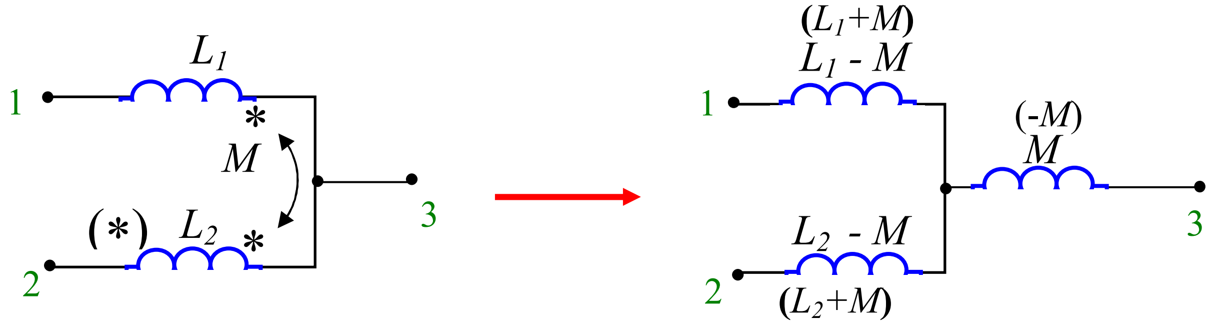
Получените уравнения отговарят на еквивалентната схема от фиг. 18, в която няма индуктивна връзка.

В комплексен вид преобразуването на схемата е показано на фиг.19



фиг. 19

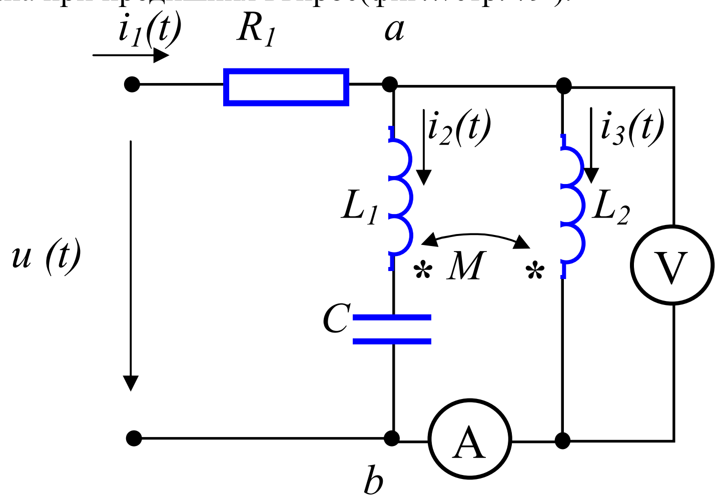
<u>Извод:</u> Триполюсно съединение с индуктивна връзка може да се замени с еквивалентната схема, в която индуктивната връзка е отстранена но токовете, които протичат в трите клона на веригата са същите:



Знакът пред M се определя от начина на свързване, съответно изразът без скоби е при едноименни изводи в общата точка, а изразът в скобите е при разноименни изводи в общата точка. <u>Посоките на токовете нямат значение за преобразуването.</u>

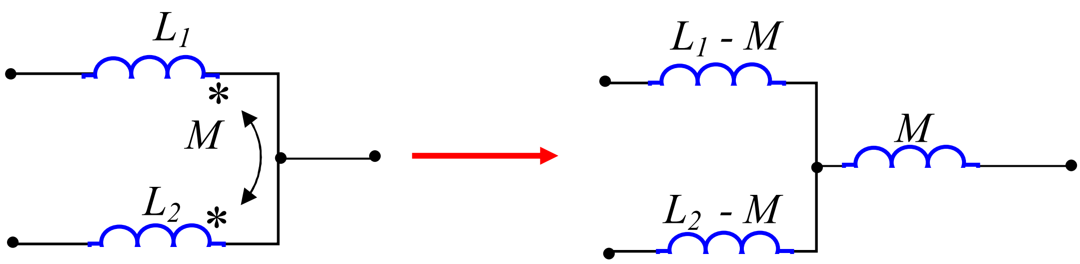
<u>Пример за анализ на верига с индуктивни връзки посредством отстраняване на индуктивната връзка:</u>

Да се определят токовете $i_1(t)$, $i_2(t)$ и $i_3(t)$ и показанията на уредите за веригата, разгледана при предишния въпрос(фиг.7/стр. 79).

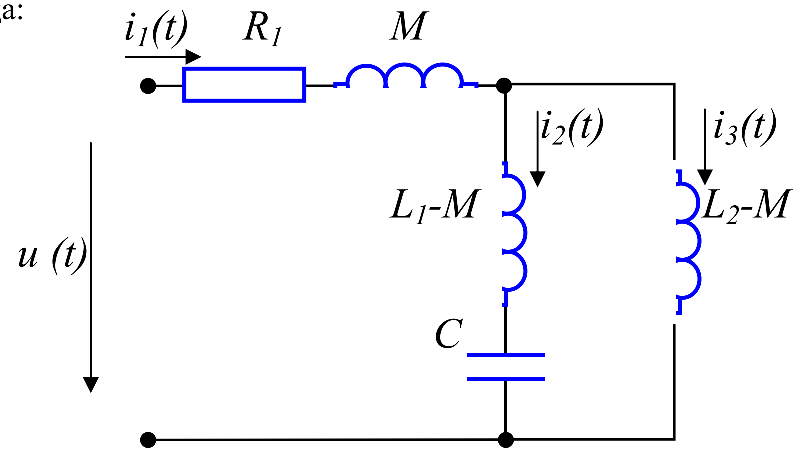


<u>Решение</u>

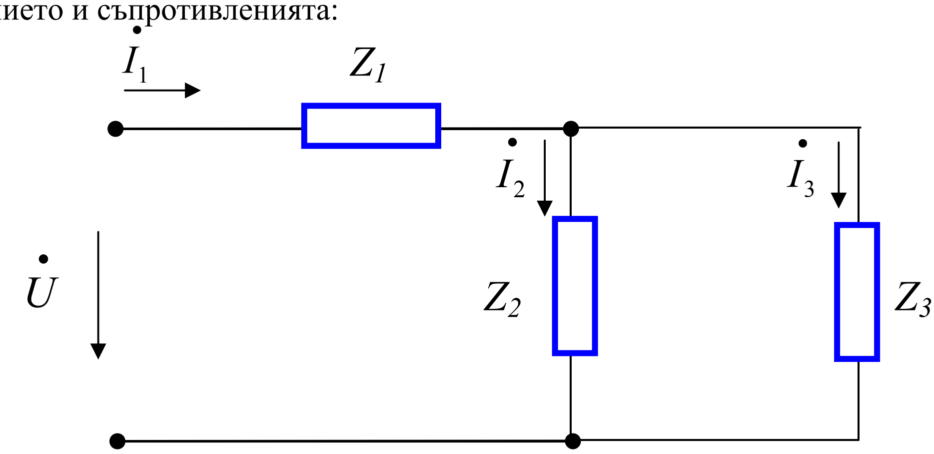
В разглежданата схема едноименните изводи на бобините са свързани в една и съща точка (края на бобина *"1"* и края на бобина *"2"* са свързани в точка "а"). преобразуването е от вида:



1. Отстраняваме индуктивната възка чрез преобразуване. След преобразуването схемата ще има вида:



2. Съставяме новата схема с комплексни образи и определяме на комплексите на напрежението и съпротивленията:



1.Напрежението на източника е:

$u(t) = 141\sin(\omega t+90)V$

Следователно комплексното напрежение на източника се определя като:

$$\dot{U} = Ue^{j\psi_u} = \frac{u_m}{\sqrt{2}}e^{j\psi_u} = \frac{141}{\sqrt{2}}e^{j90} =$$

$$100.[\cos(90) + j\sin(90)] = 100.(0 + j) = j100V$$

2.Комплексни съпротивления за честота $f=160\ Hz$:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi.160 \approx 1000 = 10^3\, rad/s$$

$$Z_1 = R_1 + j\omega M = (10 + j.10^3 10.10^{-3}) = (10 + j10)\ \Omega$$

$$Z_2 = j\omega(L_1 - M) - j\frac{1}{\omega C} = j.10^3.(40-10).10^{-3} - j\frac{1}{10^3.100.10^{-6}} = j30 - j10 = j20\ \Omega$$

$$Z_3 = j\omega(L_2 - M) = j.10^3(30-10).10^{-3} = j20\ \Omega$$

3. Определяме еквивалентното съпротивление за схемата:

$$Z_{екв} = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

$$\Rightarrow\quad Z_{екв} = 10 + j10 + \frac{j20.j20}{j40} = 10 + j10 + j10 = (10 + j20)\Omega$$

4. Определяме комплекса на входния ток $\dot{I}_1$.

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_{ek}} = \frac{j100}{10+j20} = \frac{j10}{1+j2} = \frac{j10(1-j2)}{(1+j2)(1-j2)} =$$

$$\frac{j10(1-j2)}{5} = \frac{20+j10}{5} = (4+2j)A$$

5. Определяме токовете в двата паралелни клона $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$. Използваме формулата за разпределянето на общия ток $\dot{I}_1$ по двата паралелни клона:

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{Z_3}{Z_2+Z_3} = (4+2j)\frac{j20}{j40} = (4+2j)\frac{1}{2} = (2+j)A$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 4+2j-2-j = (2+j)A$$

Получаваме същите стойности за токовете, както при решението без отстраняване на индуктивната връзка.

6. Определяме напрежението на волтметъра

Напрежението на волтметъра може да се определи **<u>само на базата на изходната схема.</u>** Волтметърът показва ефективната стойност на напрежението $u_{ab}(t)$, а при преобразуването възел "a" вече не е на същото място. Следователно определяме напрежението от схемата при наличие на индуктивна връзка, като отчитаме, че токовете $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$ са еднакво ориентирани спрямо едноименните изводи :

$$U_V = U_{ab}$$

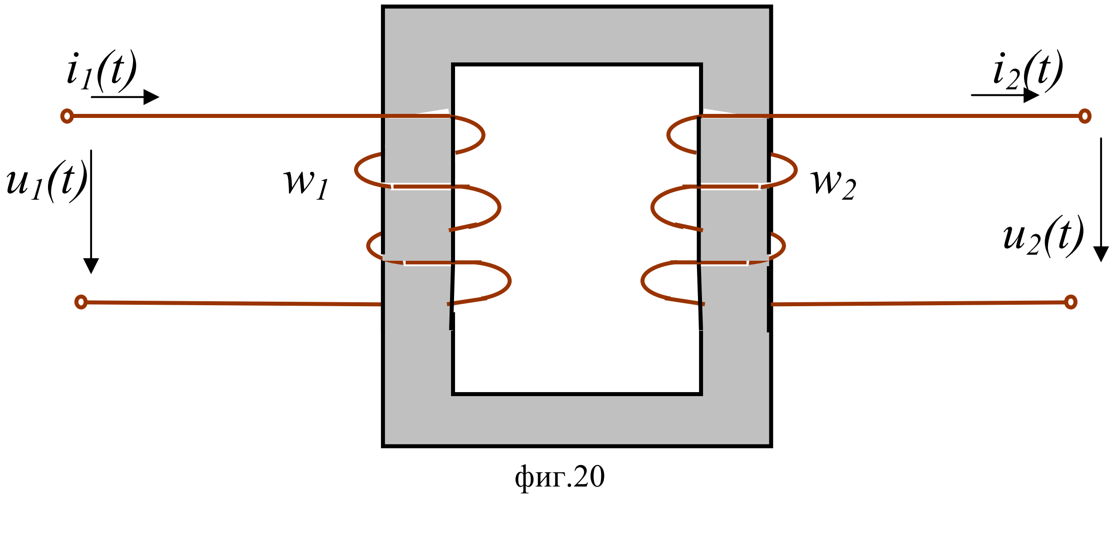
$$\dot{U}_{ab} = Z_{L_2}.\dot{I}_3 + Z_M.\dot{I}_2 = j\omega L_2.\dot{I}_3 + j\omega M.\dot{I}_2 = (2+j)j30 + (2+j)j10 = (-40+j80)V$$

$$\Rightarrow U_V = U_{ab} = \sqrt{(-40)^2+80^2} = 40\sqrt{5} = 89{,}44V$$

<u>18 Въпрос</u>

<u>Трансформаторно съединение. Уравнения на линеен трансформатор. Еквивалентни заместващи схеми. Векторна диаграма.</u>

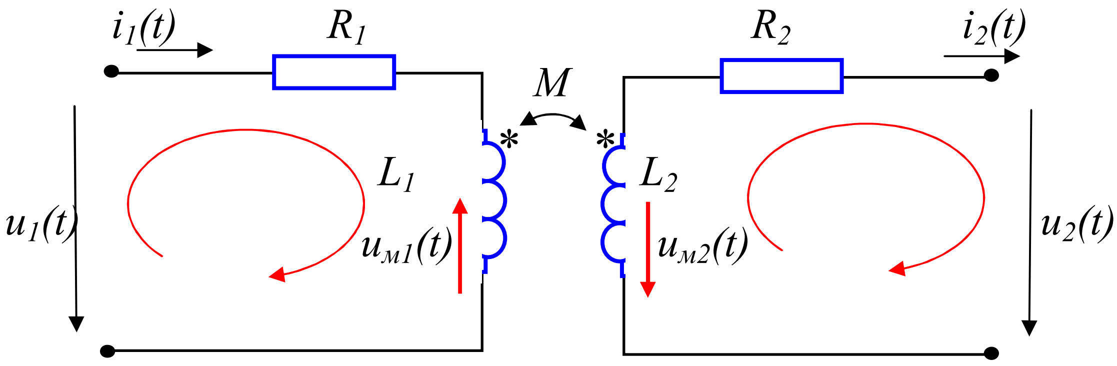
Трансформаторното съединение е съединение на две намотки (първична и вторична, разположени върху общо ядро- фиг.20), при което връзката между тях се осъществява само посредством **<u>променливо</u>** магнитно поле. Енергията се предава от първичната към вторичната намотка на базата на взаимна индукция.



фиг.20

Уравнения на линеен трансформатор

На фиг. 21 е показана схема, на линеен трансформатор. Параметрите на първичната намотка са R_1 и L_1, а на вторичната R_2 и L_2. Взаимната индуктивност е означена с M.



фиг. 21

Токовете на първичната и вторичната намотки са различно ориентирани спрямо едноименните изводина двете бобини. Следователно напреженията на взаимоиндукция ще имат посока, обратна на посоката на тока в съответния контур. По законите на Кирхоф можем да запишем:

$$\begin{cases} u_1(t) = u_{R_1}(t) + u_{L_1}(t) - u_{M_1}(t) \\ -u_2(t) = u_{R_2}(t) + u_{L_2}(t) - u_{M_2}(t) \end{cases}$$

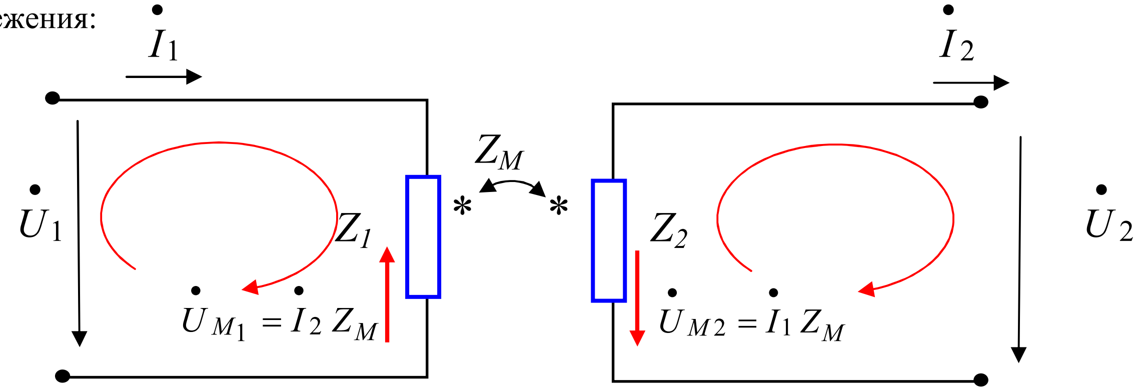
където $\quad u_{R_1}(t) = R_1 i_1(t);\quad u_{L_1}(t) = L_1 \dfrac{di_1}{dt};\quad u_{M_1}(t) = M\dfrac{di_2}{dt}$

$$u_{R_2}(t) = R_2 i_2(t);\quad u_{L_2}(t) = L_2 \frac{di_2}{dt};\quad u_{M_2}(t) = M\frac{di_1}{dt}$$

Така системата уравнения (1) на трансформатора има вида:

$$\boxed{\begin{cases} u_1(t) = R_1 i_1(t) + L_1 \dfrac{di_1}{dt} - M\dfrac{di_2}{dt} \\ -u_2(t) = R_2 i_2(t) + L_2 \dfrac{di_2}{dt} - M\dfrac{di_1}{dt} \end{cases}} \qquad (1)$$

За синусоидален режим може да работим с комплексна схема и комплексни токове и напрежения:



Системата уравнения (2) на трансформатора в комплексен вид се записва като :

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{I}_1(R_1 + j\omega L_1) - \dot{I}_2\, j\omega M = \dot{I}_1\, Z_1 - \dot{I}_2\, Z_M \\ -\dot{U}_2 = \dot{I}_2(R_2 + j\omega L_2) - \dot{I}_1\, j\omega M = \dot{I}_2\, Z_2 - \dot{I}_1\, Z_M \end{cases} \qquad (2)$$

Еквивалентна схема на линеен трансформатор

Ако към уравненията на трансформатора (1) прибавим и извадим една и съща величина, съответно: $M\frac{di_1}{dt}$ за първото уравнение и $M\frac{di_2}{dt}$ за второто уравнение, ще получим:

$$\begin{cases} u_1(t) = R_1 i_1(t) + L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt} + (M\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_1}{dt}) = R_1 i_1(t) + (L_1 - M)\frac{di_1}{dt} + M(\frac{di_1}{dt} - \frac{di_2}{dt}) \\ -u(t) = R_2 i_2(t) + L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt} + (M\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_2}{dt}) = R_2 i_2(t) + (L_2 - M)\frac{di_2}{dt} - M(\frac{di_1}{dt} - \frac{di_2}{dt}) \end{cases}$$

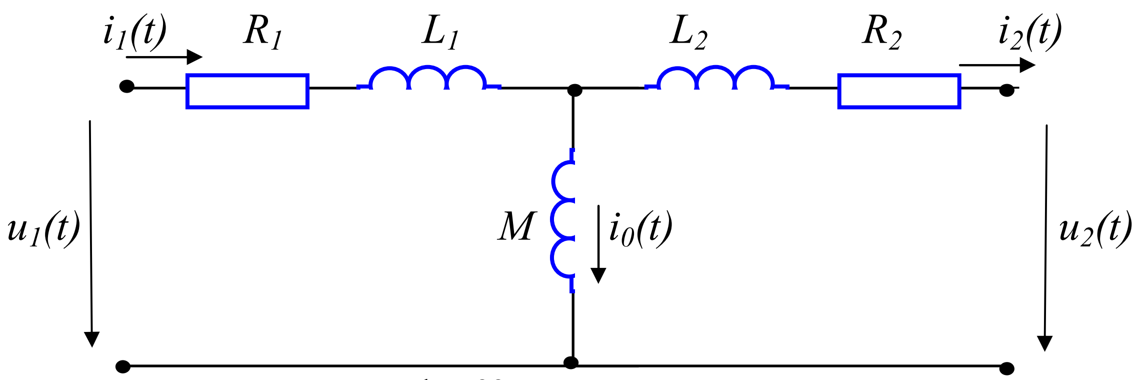
Ако означим с i_0 ток, определен като:

$$i_0 = i_1 - i_2$$

и съответно неговата производна $\frac{di_0}{dt} = \frac{di_1}{dt} - \frac{di_2}{dt}$,

получаваме системата уравнения (3), която отговаря на Т-образна заместваща схема на линеен трансформатор, показана на фиг.22.

$$\begin{cases} u_1(t) = R_1 i_1(t) + (L_1 - M)\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_0}{dt} \\ -u(t) = R_2 i_2(t) + (L_2 - M)\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_0}{dt} \end{cases} \qquad (3)$$

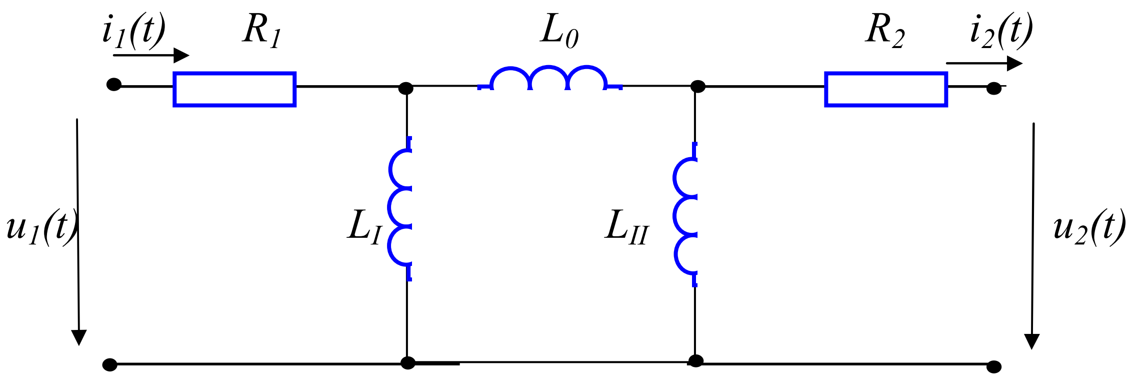


фиг.22

До същата заместваща схема може да се достигне и ако се използва системата уравнения в комплексен вид (2), като в този случай към първото уравнение се прибавя нулевата сума $\dot{I}_1\, Z_M - \dot{I}_2\, Z_M$, а към второто $\dot{I}_2\, Z_M - \dot{I}_1\, Z_M$. Така бихме получили системата (4), която съответства на Т-образна заместваща от фиг.22.

$$
\begin{cases}
\dot{U}_1 = \dot{I}_1[R_1 + j\omega(L_1 - M)] + \dot{I}_0\, j\omega M = \dot{I}_1(Z_1 - Z_M) + \dot{I}_0\, Z_M \\
-\dot{U}_2 = \dot{I}_2[R_2 + j\omega(L_2 - M)] - \dot{I}_0\, j\omega M = \dot{I}_2(Z_2 - Z_M) - \dot{I}_0\, Z_M
\end{cases} \qquad (4)
$$

В практиката се използва и още една заместваща схема П-образна заместваща схема,която е показана на фиг. 23.

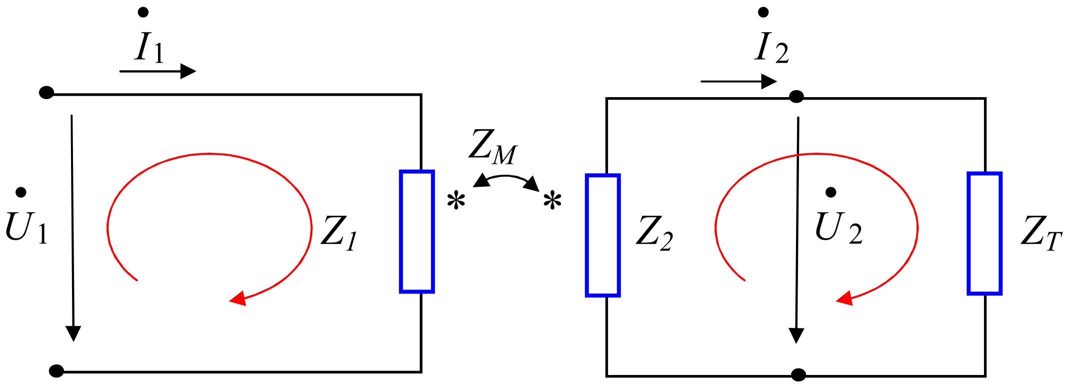


фиг. 23

Параметрите на тази схема се определят като:

$$
L_0 = \frac{L_1L_2 - M^2}{M}; \quad L_I = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_2 - M}; \quad L_{II} = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 - M}
$$

Векторна диаграма на натоварен трансформатор



фиг. 24

Нека разгледаме трансформатор (фиг. 24) на изводите на вторичната намотка, на който е включен товар $Z_T = R_T + j\omega L_T$.

Ако са известни:

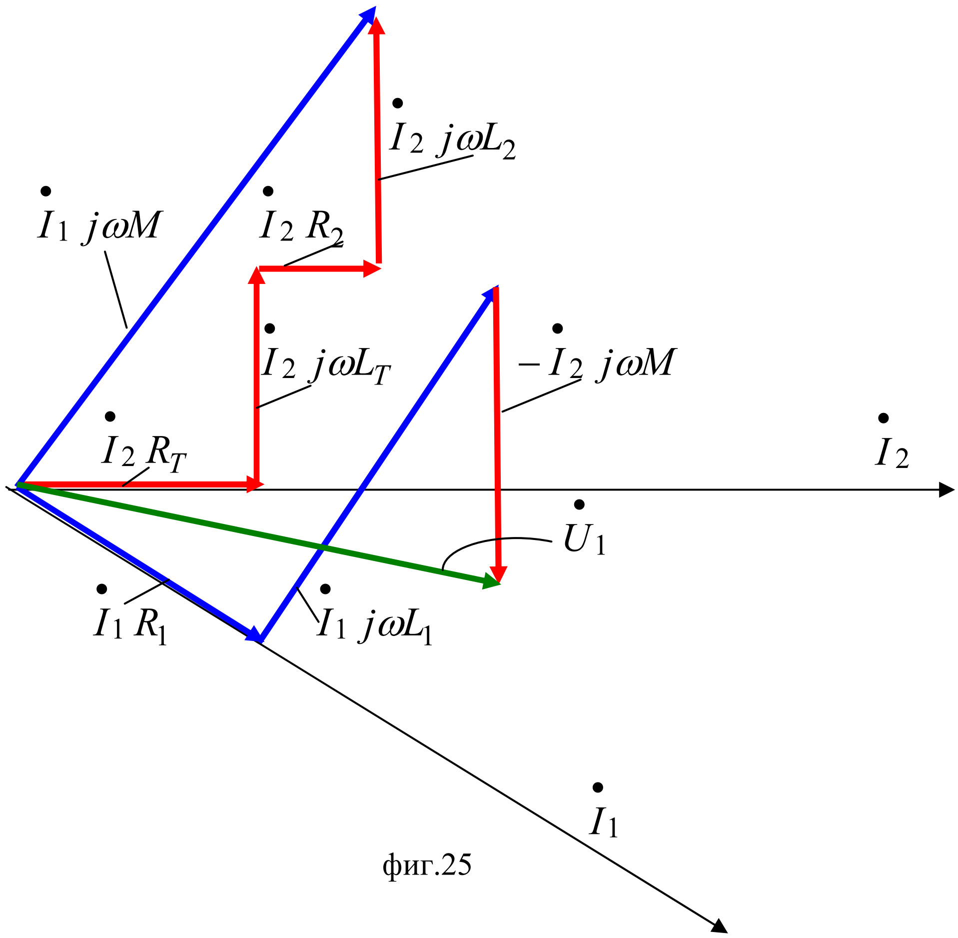
$Z_1 = R_1 + j\omega L_1;$ съпротивление на първичната намотка

$Z_2 = R_2 + j\omega L_2;$ съпротивление на вторичната намотка

$Z_M = j\omega M$ съпротивление на индуктивната връзка

можем да запишем системата (5) и да начертаем векторната диаграма (фиг.25), съответстваща на тези уравнения.

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_1 - \dot{I}_2 Z_M \\ \dot{0} = \dot{I}_2 Z_2 + \dot{I}_2 Z_T - \dot{I}_1 Z_M \quad \Rightarrow \dot{I}_1 Z_M = \dot{I}_2 Z_2 + \dot{I}_2 Z_T \end{cases} \qquad (5)$$



фиг.25

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 R_1 + \dot{I}_1\, j\omega L_1 - \dot{I}_2\, j\omega M$$

$$\dot{0} = \dot{I}_2 R_2 + \dot{I}_2\, j\omega L_2 + \dot{I}_2 R_T + \dot{I}_2\, j\omega L_T - \dot{I}_1\, j\omega M$$

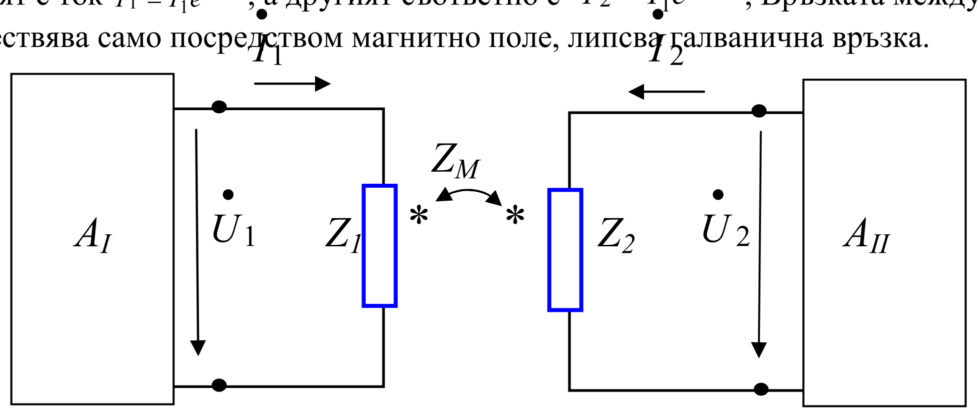
$$\Rightarrow \dot{I}_1\, j\omega M = \dot{I}_2 R_2 + \dot{I}_2\, j\omega L_2 + \dot{I}_2 R_T + \dot{I}_2\, j\omega L_T$$

При построяването на диаграмата за репер се приема токът $\dot{I}_2$. Построяват се напреженията $\dot{I}_2 R_T$, $\dot{I}_2\, j\omega L_T$, $\dot{I}_2 R_2$, $\dot{I}_2\, j\omega L_2$ от второто уравнение на системата (5), чиято сума е равна на напрежението на взаимоиндукция $\dot{I}_1\, j\omega M$. От него определяме посоката на тока $\dot{I}_1$ (изостава на 90^0). След като вече е известна посоката на $\dot{I}_1$, построяваме напреженията от първото уравнение $\dot{I}_1 R_1$, $\dot{I}_1\, j\omega L_1$, $-\dot{I}_2\, j\omega M$. Тяхната сума определя напрежението $\dot{U}_1$.

19 Въпрос

Предаване на мощност по индуктивен път.

Нека в една електрическа верига има два индуктивно свързани елемента (фиг.26), единият с ток $\dot{I}_1 = I_1 e^{j\psi_1}$, а другият съответно с $\dot{I}_2 = I_1 e^{j\psi_2}$, Връзката между тях се осъществява само посредством магнитно поле, липсва галванична връзка.



фиг.26

Напреженията от взаимна индукция са съответно:

$$\dot{U}_{M1} = \dot{I}_2 Z_M = \dot{I}_2\, j\omega M$$

$$\dot{U}_{M2} = \dot{I}_1 Z_M = \dot{I}_1\, j\omega M$$

Можем да определим комплексните мощности за двата индуктивносвързани елемента: за първия - $\dot{S}_{M1} = \dot{U}_{M1} \overset{*}{I}_1$, а за втория $\dot{S}_{M2} = \dot{U}_{M2} \overset{*}{I}_2$. Нека разгледаме тези мощности, като целта е да ги разделим на сума от реална и имагинерна част, т.е. активна и реактивна мощности:

$$\dot{S}_{M1} = \dot{U}_{M1} \overset{*}{I}_1 = Z_M \dot{I}_2 \overset{*}{I}_1 = j\omega M.I_2 e^{j\psi_2}.I_1 e^{-j\psi_1} =$$
$$e^{j90}\omega M.I_2 e^{j\psi_2}.I_1 e^{-j\psi_1} = \omega M.I_2 I_1 e^{(\psi_2 - j\psi_1 + 90)}$$

$$\Rightarrow \dot{S}_{M1} = P_{M1} + jQ_{M1} = \omega M.I_1 I_2[\cos(\psi_2 - \psi_1 + 90) + j\sin(\psi_2 - \psi_1 + 90)]$$

Правим същото разглеждане и за втория елемент

$$\dot{S}_{M2} = \dot{U}_{M2} \overset{*}{I}_2 = Z_M \dot{I}_1 \overset{*}{I}_2 = j\omega M.I_1 e^{j\psi 1}.I_2 e^{-j\psi 2} =$$
$$e^{j90}\omega M.I_1 e^{j\psi_1}.I_2 e^{-j\psi_2} = \omega M.I_1 I_2 e^{(\psi_1 - j\psi_2 + 90)}$$

$$\Rightarrow \dot{S}_{M2} = P_{M2} + jQ_{M2} = \omega M.I_1 I_2[\cos(\psi_1 - \psi_2 + 90) + j\sin(\psi_1 - \psi_2 + 90)]$$

като отчетем, че:

$\cos(\alpha + 90) = -\sin\alpha$ и $\sin(\alpha + 90) = \cos\alpha$ получаваме:

$$\left|\begin{array}{l} \dot{S}_{M1} = -\omega M.I_1 I_2 \sin(\psi_2 - \psi_1) + j\omega M.I_1 I_2 \cos(\psi_2 - \psi_1) \\ \dot{S}_{M2} = -\omega M.I_1 I_2 \sin(\psi_1 - \psi_2) + j\omega M.I_1 I_2 \cos(\psi_1 - \psi_2) \end{array}\right.$$

Но $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$; $\sin(-\alpha + 90) = -\sin\alpha$.Следователно получаваме:

$P_{M_1} = -P_{M_2}$ $Q_{M_1} = Q_{M_2}$	независимо, че между елементите няма галванична връзка **между тях се обменя активна мощност** и то така, че двете мощности са равни по големина и обратни по знак.

Правило:

при **еднакво ориентирани** спрямо едноименните изводи токове:

Ако $P_{M1} = \mathrm{Re}[\dot{S}_{M_1}] \rangle\, 0$ то клон 1 прехвърля енергия към клон 2,

Ако $P_{M1} = \mathrm{Re}[\dot{S}_{M_1}] \langle\, 0$ то клон 1 приема енергия от клон 2.

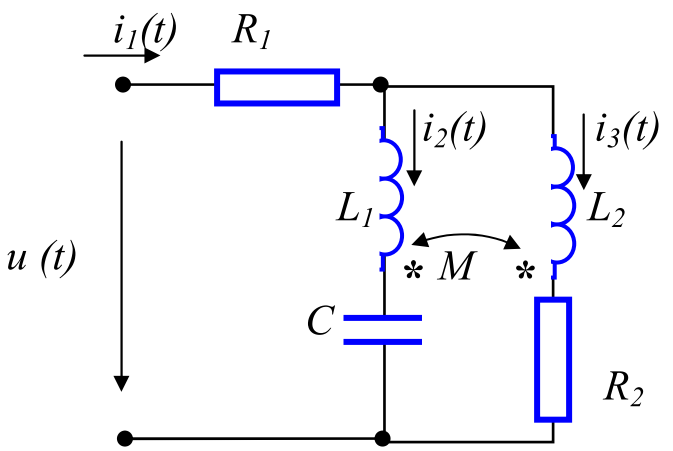
при **различно ориентирани** спрямо едноименните изводи токове:

Ако $P_{M1} = \mathrm{Re}[\dot{S}_{M_1}] \rangle\, 0$ то клон 1 приема енергия от клон 2,

Ако $P_{M1} = \mathrm{Re}[\dot{S}_{M_1}] \langle\, 0$ то клон 1 прехвърля енергия към клон 2.

Пример за определяне на мощност, предавана по индуктивен път:

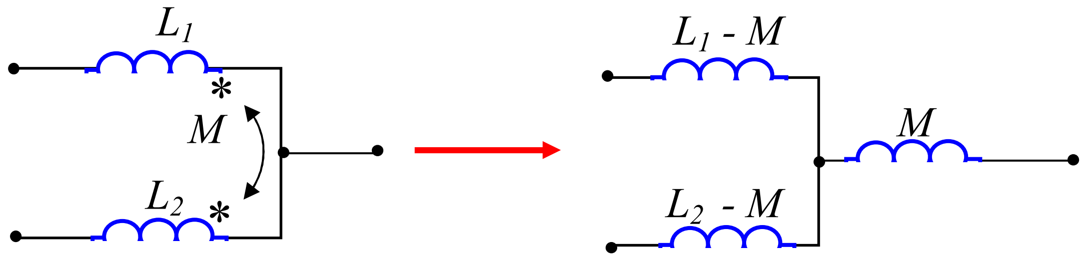
Да се определи мощността, предавана по индуктивен път за веригата показана на фигурата



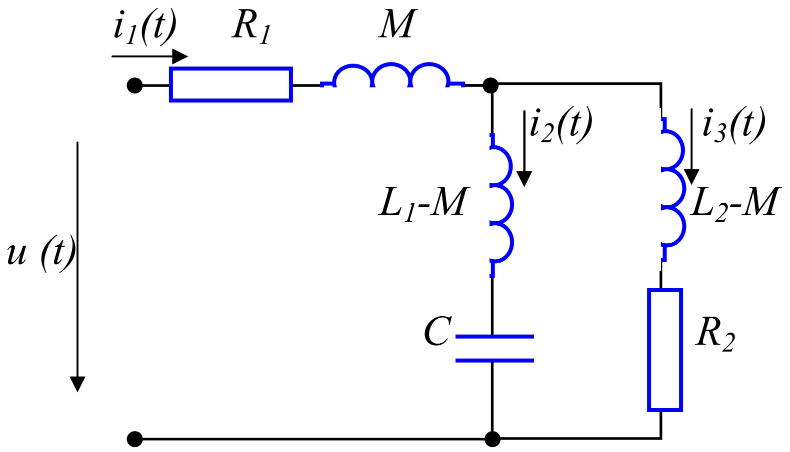
$u(t) = 200\sin(\omega t\text{-}45)V$
f=160Hz,
L_2=20 mH,
L_1= M=10 mH,
C=50 μF
R_1 = R_2=10Ω,

Решение

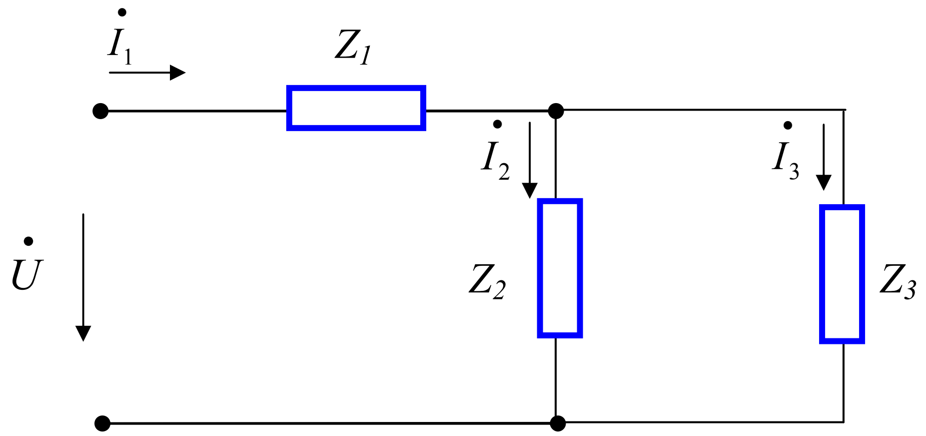
В разглежданата схема едноименните изводи на бобините са свързани в една и съща точка (края на бобина *"1"* и края на бобина *"2"* са свързани в точка "а"). Следователно имаме съгласувано свързване и преобразуването е от вида:



1. Отстраняваме индуктивната възка чрез преобразуване. След преобразуването схемата ще има вида:



2. Съставяме новата схема с комплексни образи и определяме на комплексите на напрежението и съпротивленията:



Напрежението на източника е:

$u(t) = 200sin(\omega t+45)V$

Следователно комплексното напрежение на източника се определя като:

$$\dot{U} = Ue^{j\psi_u} = \frac{u_m}{\sqrt{2}}e^{j\psi_u} = \frac{200}{\sqrt{2}}e^{j45} =$$

$$\frac{200}{\sqrt{2}}.(\cos 45 + j\sin 45) = \frac{200}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 100.(1+j) = (100+j100)V$$

Комплексни съпротивления за честота $f=160\ Hz$:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi.160 \approx 1000 = 10^3 rad/s$$

$$Z_1 = R_1 + j\omega M = (10 + j.10^3 10.10^{-3}) = (10 + j10)\ \Omega$$

$$Z_2 = j\omega(L_1 - M) - j\frac{1}{\omega C} = j.10^3.(10-10).10^{-3} - j\frac{1}{10^3.50.10^{-6}} = 0 - j20 = -j20\ \Omega$$

$$Z_3 = R_2 + j\omega(L_2 - M) = 10 + j.10^3(20-10).10^{-3} = 10 + j10\ \Omega$$

3. Определяме еквивалентното съпротивление за схемата:

$$Z_{екв} = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

$$\Rightarrow \quad Z_{екв} = 10 + j10 + \frac{-j20.(10+j10)}{10-j10} = 10 + j10 + \frac{20(-j).(1+j1)}{1-j1} =$$

$$= 10 + j10 + \frac{20.(1-j1)}{1-j1} = 10 + j10 + 20 = (30 + j10)\Omega$$

4. Определяме комплекса на входния ток $\dot{I}_1$.

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_{ek}} = \frac{100+j100}{30+j10} = \frac{10+j10}{3+j} = \frac{10(1+j)(3-j)}{(3+j)(3-j)} =$$

$$\frac{10(3+3j-j+1)}{10} == (4+2j)A$$

5. Определяме токовете в двата паралелни клона $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$. Използваме формулата за разпределянето на общия ток $\dot{I}_1$ по двата паралелни клона:

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} = (4+2j)\frac{-j20}{10-j10} = \frac{-j2(4+2j)}{1-j} =$$

$$\frac{2(2-4j)}{1-j} = \frac{2(2-4j)(1+j)}{(1-j)(1+j)} = \frac{2(2-4j)(1+j)}{2} = (6-2j)A$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 - \dot{I}_3 = 4 + 2j - 6 + 2j = (-2+4j)A$$

6. Определяме на мощността предавана по индуктивен път

$$P_{M2} = \mathrm{Re}[\dot{U}_{M2} \overset{*}{I}_2] = \mathrm{Re}[\dot{I}_3\, j\omega M.\overset{*}{I}_2] = \mathrm{Re}[(6-j2)j10.(-2-j4)] =$$
$$= \mathrm{Re}[(20+j60)(-2-j4)] = 20.(-2) + 4.60 = -40 + 240 = 200W$$

$$P_{M3} = \mathrm{Re}[\dot{U}_{M3} \overset{*}{I}_3] = \mathrm{Re}[\dot{I}_2\, j\omega M.\overset{*}{I}_3] = \mathrm{Re}[(-2+j4)j10.(6+j2)] =$$
$$= \mathrm{Re}[(-40-j20)(6+j2)] = -40.6 + 2.20 = -240 + 40 = -200W$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} P_{M2} = 200W \rangle 0 \\ P_{M3} = -200W \langle 0 \end{matrix}}$$

Отчитаме, че токовете $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$ са еднакво ориентирани спрямо едноименните изводи

<u>Следователно енергията се предава от клон «2» към клон «3»</u>