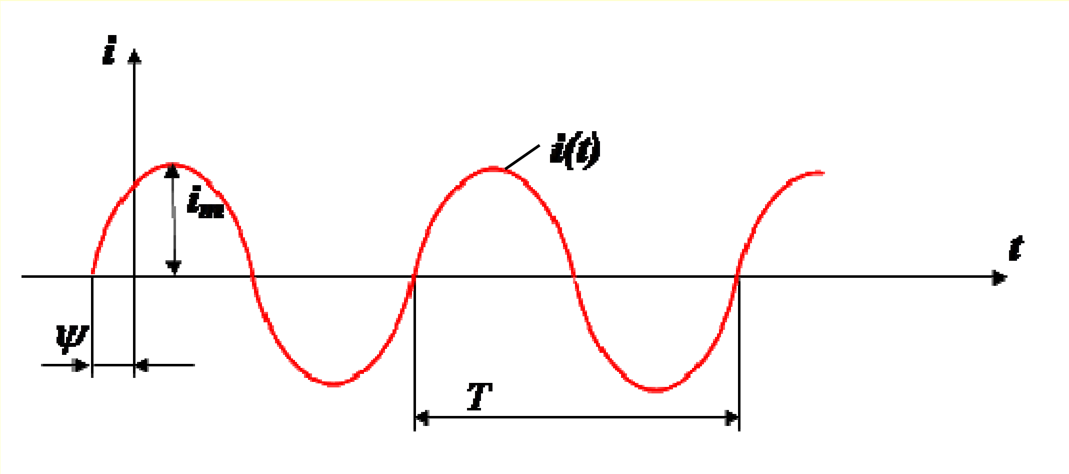
# Синусоидални режими в линейни електрически вериги.

**1. Синусоидален ток** - Ток, който се изменя във времето по **синусоидален** зак

$$i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi) = i_m \sin(\frac{2\pi}{T}t + \psi)$$




$i_m$ - **амплитуда**

$T$ – **период** $[T] = \mathrm{s}$ ;

$f$ - **честота** $[f] = \mathrm{Hz}$ ; $f = \frac{1}{T}$

$\omega$ - **ъглова честота** $[\omega] = rad/s$,

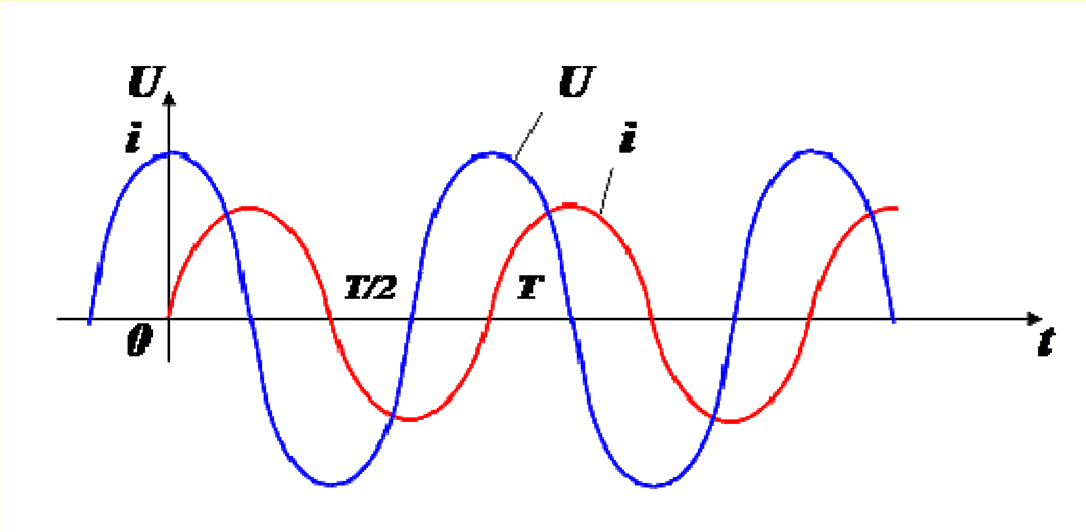
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

θ- **фаза**, $\theta = \omega.t + \psi$ , $[\theta] = rad$ ;

$\psi$ - **начална фаза** (за $t = 0$) , $\psi = \theta$ $[\psi] = rad$

**Извод:** Синусоидално изменящите се ток и напрежение се характеризират от три величини: **амплитуда, ъглова скорост и фаза**.

# Синусоидални режими в линейни електрически вериги.

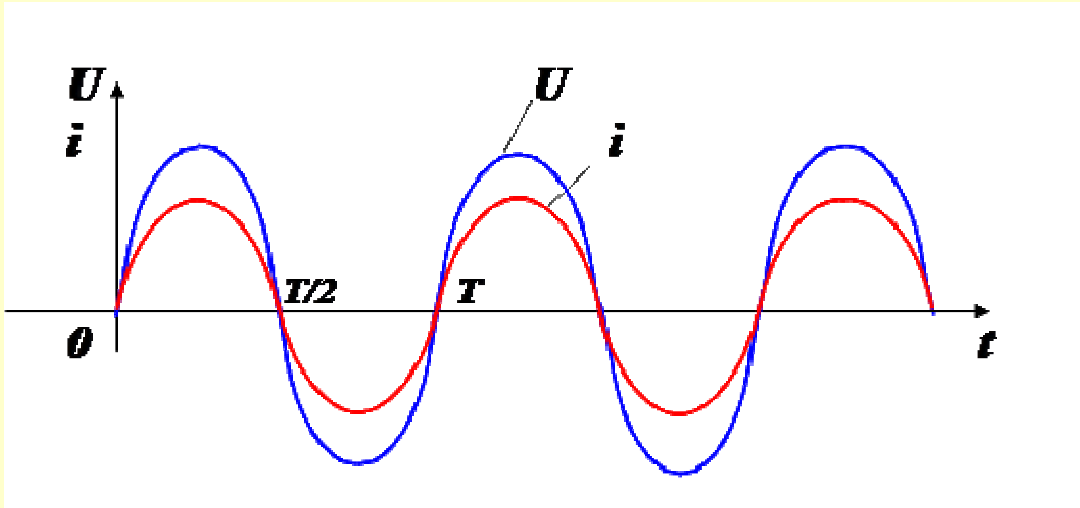



Ако две синусоидални величини се изменят с **една и съща честота** се наричат **изохронни**.

$$i(t) = i_m.\sin(\omega t + \Psi i)$$

$$u(t) = u_m.\sin(\omega t + \Psi u)$$

$$\varphi = \theta u - \theta i = \Psi u - \Psi i$$




Ако $\varphi > 0$ **напрежението изпреварва тока;**

*при* $\varphi < 0$ **токът изпреварва напрежението;**

*при* $\varphi = 0$**– има** ***резонанс***

## <u>Основни характеристики на синусоидални величини.</u>

**а) Средната стойност** на една синусоидална функция е нула, затова под средна стойност се разбира **<u>средното за полупериод</u>** значение на функцията:

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_{cp}=0.637 i_m}$$

# Основни характеристики на синусоидални величини.

б) **Ефективна стойност** на една синусоидална функция е средно - квадратичната стойност на функцията:

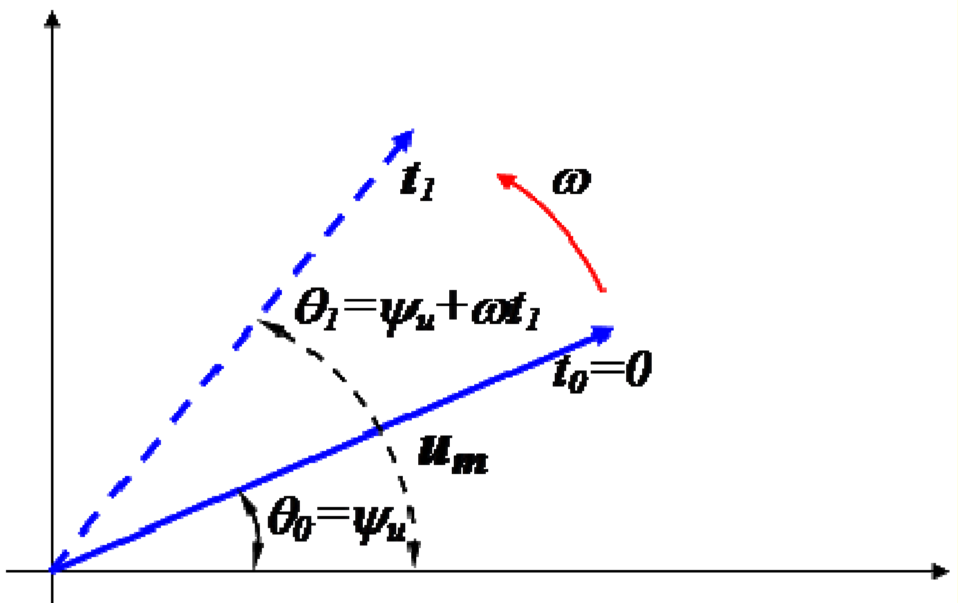
Ефективната стойност на синусоидален ток ***i(t)*** е числено равна на стойността на постоянен ток ***I***, който за време равно на периода ***T***, отделя същото количество топлина, колкото и синусоидалния ток ***i(t)***.

# <u>Изобразяване на синусоидални величини с вектори.</u>

Синусоидалната величина може да се представи **<u>посредством вектор</u>**,

- с големина равна на **<u>амплитудата</u>**,
- който се **<u>върти</u>** по посока обратна на часовниковата стрелка **<u>със скорост $\omega$.</u>**

$$u(t) = u_m sin(\omega t + \psi_u)$$

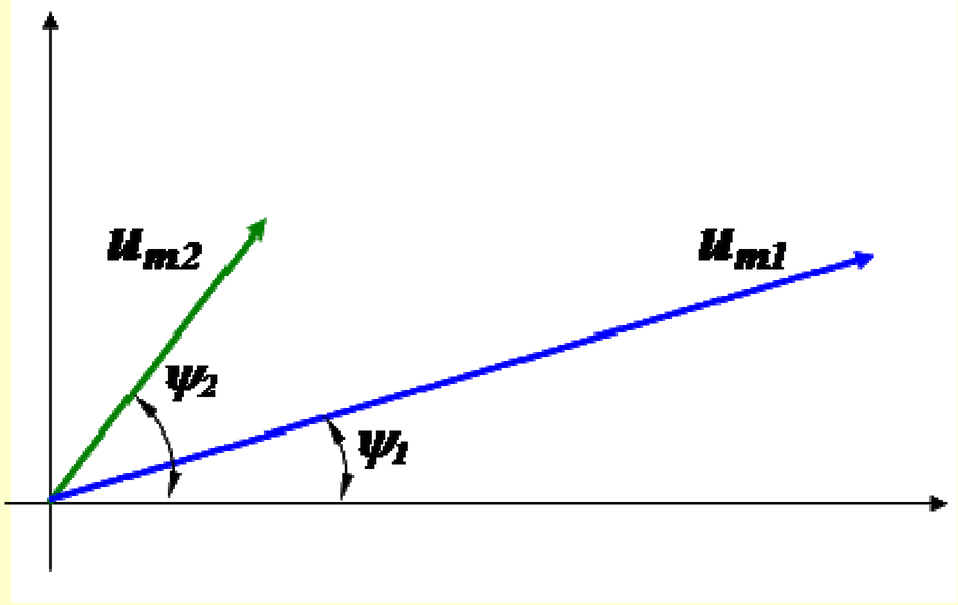



фиг.2

- В **<u>момента $t_0=0$</u>**, векторът сключва с абсцисната ос ъгъл, равен на началната фаза $\psi_u$.
- В **<u>момента $t_1$</u>**, векторът се е завъртял по посока обратна на часовниковата стрелка и сключва с абсцисната ос ъгъл, равен на фазата: $\theta_1 = \psi_u + \omega t_1$

**<u>Векторна диаграма </u>** – съвкупност от векторните изображения на токовете и напреженията в една и съща електрическа верига.

Ако имаме няколко синусоидални величини с **еднакви честоти** <u>можем да получим резултантна синусоидална величина чрез действия с вектори</u> като ги разглеждаме **<u>за момента $t_0=0$</u>.**




**Пример:**

Да се определи напрежението:

$$u(t) = u_m sin(\omega t+\psi_u),$$

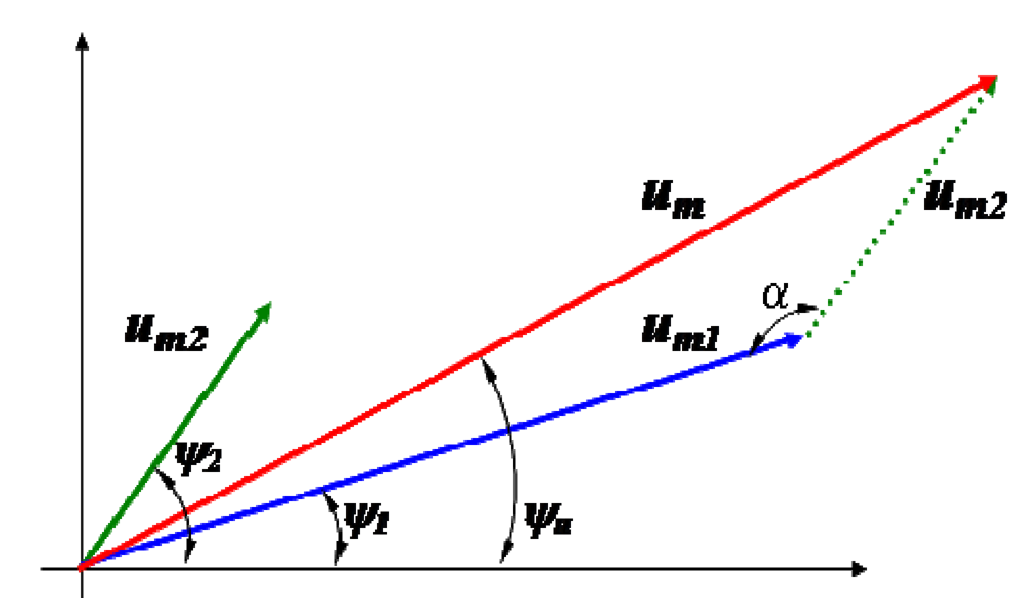
ако $u(t)= u_1(t)+ u_2(t),$

където:

$$u_1(t)=u_{m1}sin(\omega t+\psi_1);$$

$$u_2(t) = u_{m2}sin(\omega t+\psi_2)$$

# Решение - Векторна диаграма



фиг.3

*u₁(t), u₂(t)* и *u(t)* - вектори

$\alpha = 180-(\psi_2 - \psi_1)$

$\cos(180-\alpha) = -\cos(\alpha)$

$$u_m = \sqrt{u_{m1}^2 + u_{m2}^2 - 2u_{m1}u_{m2}\cos\alpha} =$$

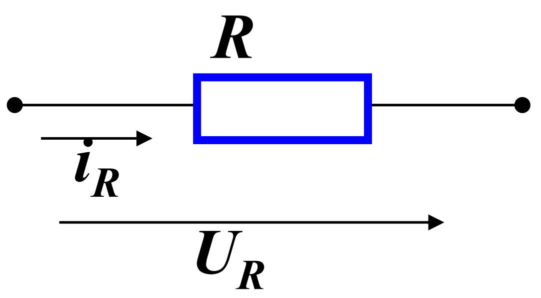
$$= \sqrt{u_{m1}^2 + u_{m2}^2 - 2u_{m1}u_{m2}\cos(180 - (\psi_2 - \psi_1))} =$$

$$= \sqrt{u_{m1}^2 + u_{m2}^2 + 2u_{m1}u_{m2}\cos(\psi_2 - \psi_1)}$$

## <u>Влияние на параметрите R, L и C при синусоидален режим</u>

Съставни елементи на веригите за синусоидален ток са:

- активните съпротивления - резистори със съпротивление ***R***.



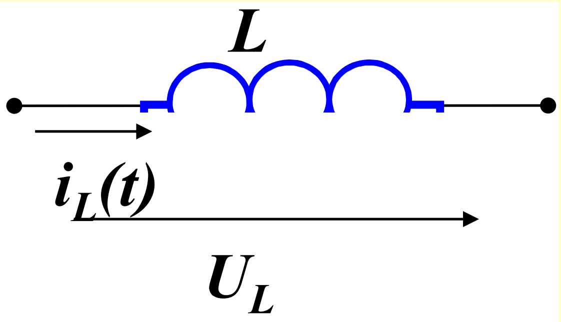

$$R.G = 1$$

$$[R] = \Omega \; ; \quad [G] = S$$

Посредством резисторите **енергията се отделя във вид на топлина.**

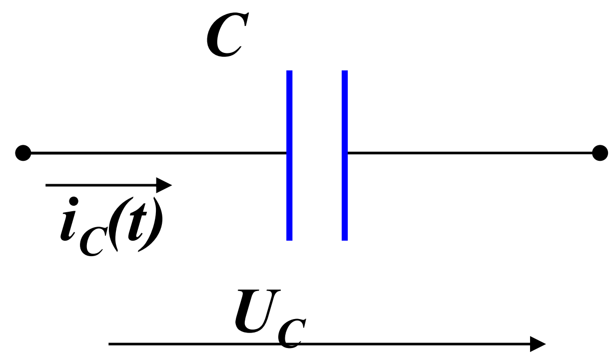
•**<u>реактивните</u>** съпротивления:

бобини с индуктивност ***L***




$$\boxed{U_L = \frac{\partial \Psi}{\partial t} = L\frac{\partial i}{\partial t}}$$

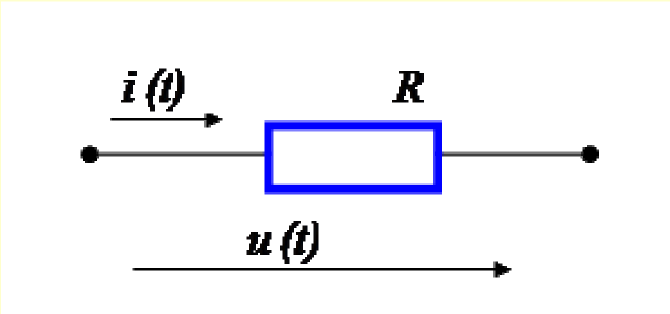
кондензатори с капацитет ***C***




$$\boxed{i_C = \frac{\partial q}{\partial t} = C\frac{\partial U_C}{\partial t}}$$

В реактивните елементи <u>не се отделя енергия във вид на топлина</u>, но **<u>периодически се запасява</u>** в електрическо ( в ***C***) или магнитно ( в ***L*** ) поле.

# 1.Синусоидален ток в активно съпротивление

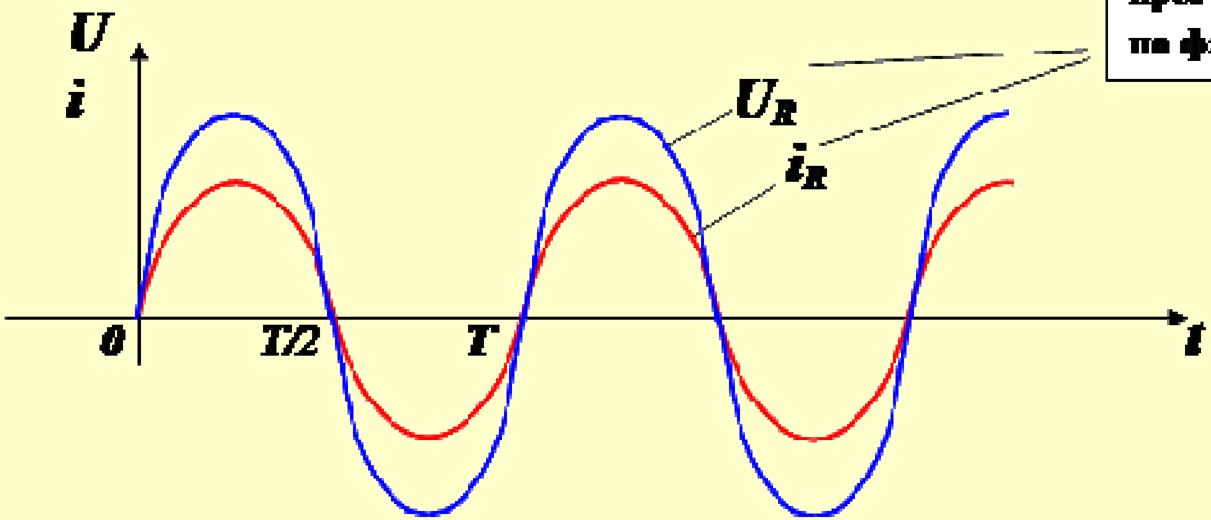



$$i(t) = i_m \sin \omega t$$

$$u(t) = R.i(t) = u_m \sin \omega t,$$

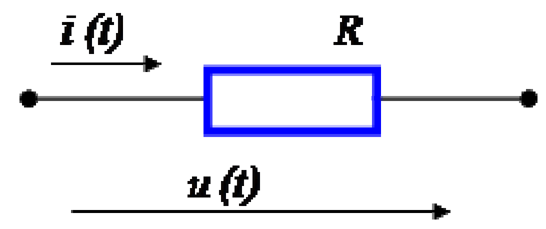
*където*

$$u_m = R.i_m$$




**Напрежението и тока през резистора съвпадат по фаза.**

# Мощност в *R*




**<u>Моментната мощност *p(t)*</u>** се определя като:

$$p(t) = u(t).i(t) = u_m \sin \omega t.i_m \sin \omega t = \frac{u_m i_m}{2}(1 - \cos 2\omega t) = U.I(1 - \cos 2\omega t)$$

$$\Rightarrow p(t) = U.I(1 - \cos 2\omega t)$$

**<u>Средната за периода *T* мощност</u>** може да се определи като:

$$P_{cp} = \int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T U.I(1 - \cos 2\omega t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T U.I.dt - \frac{1}{T}\int_0^T \cos 2\omega t.dt$$

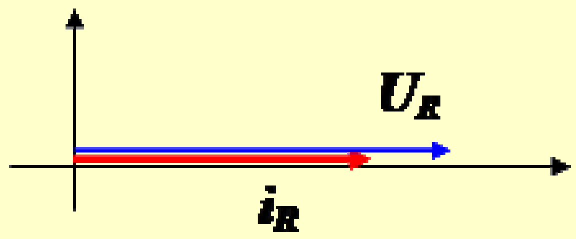
*но* $\frac{1}{T}\int_0^T \cos 2\omega t.dt = 0$

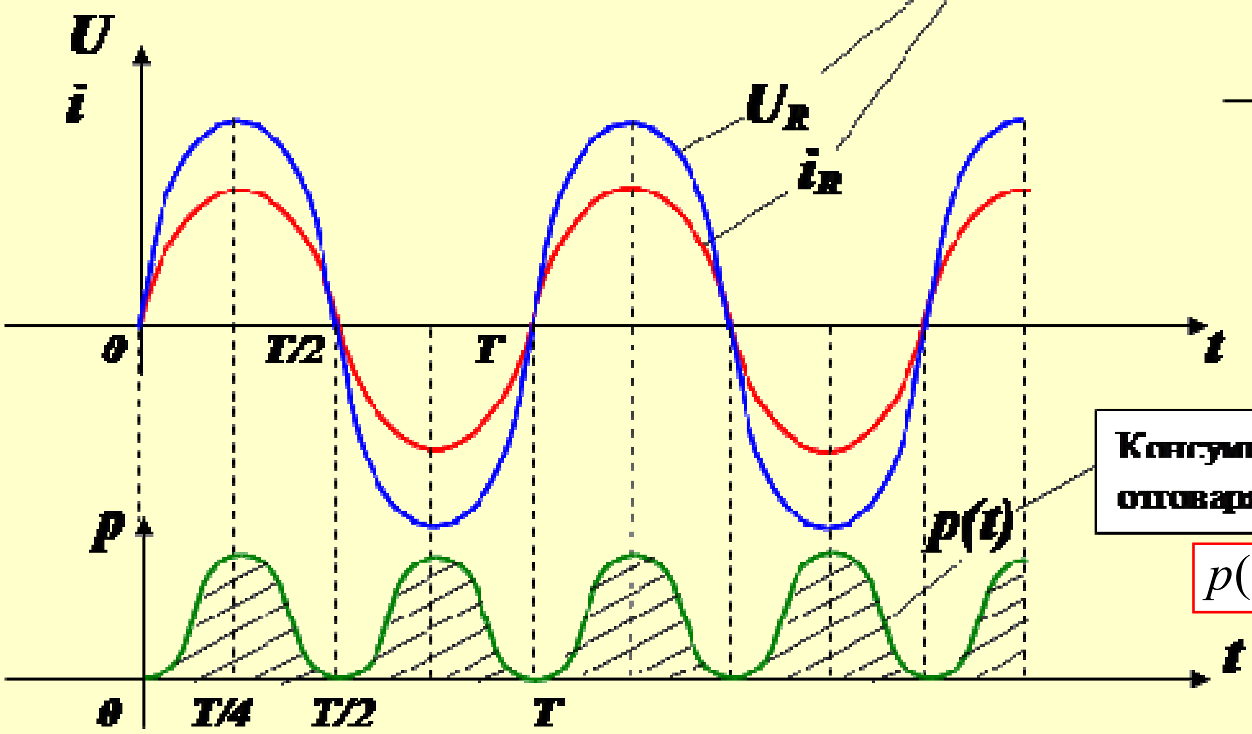
$$\Rightarrow P_{cp} = \frac{1}{T}U.I.T = U.I$$

$$\boxed{P_{cp} = U.I}$$

Напрежението и тока през резистора съвпадат по фаза.

**Векторна диаграма**



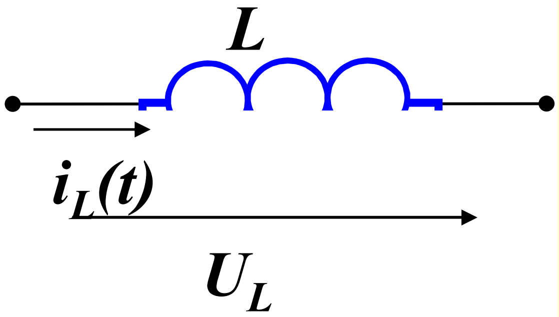




фиг.1

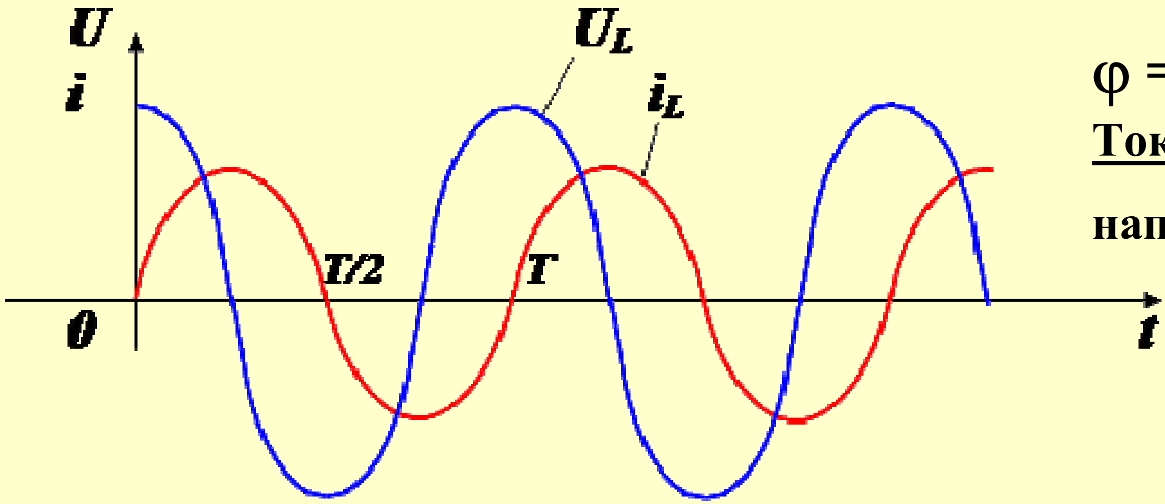
Консумираната в резистора мощност отговаря на защрихованата площ

$$p(t) = U.I(1 - \cos 2\omega t)$$

# 2.Синусоидален ток в бобина



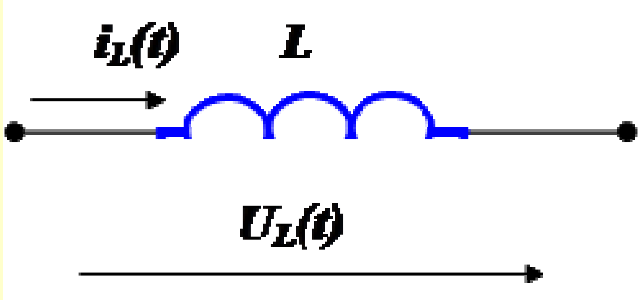

$$\boxed{U_L = \frac{\partial \Psi}{\partial t} = L\frac{\partial i}{\partial t}}$$




$\varphi = \psi_u - \psi_i = 90 - 0 = 90$

**Токът изостава по фаза** от **напрежението** на четвърт период

# Мощност в *L*




**Моментната мощност *p(t)***:

$$p(t) = i(t).u_L(t) = i_m \sin\omega t.u_m \cos\omega t = \frac{u_m i_m}{2}\sin 2\omega t$$

$$\Rightarrow p(t) = U.I \sin 2\omega t$$

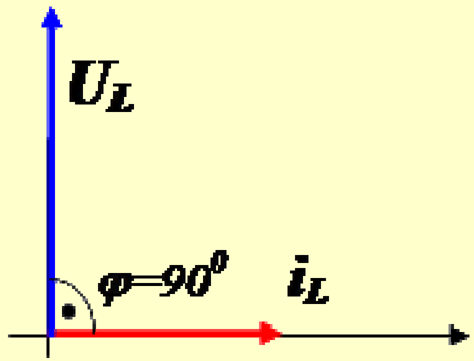
Мощността в бобината е **хармонична функция** с честота 2ω.

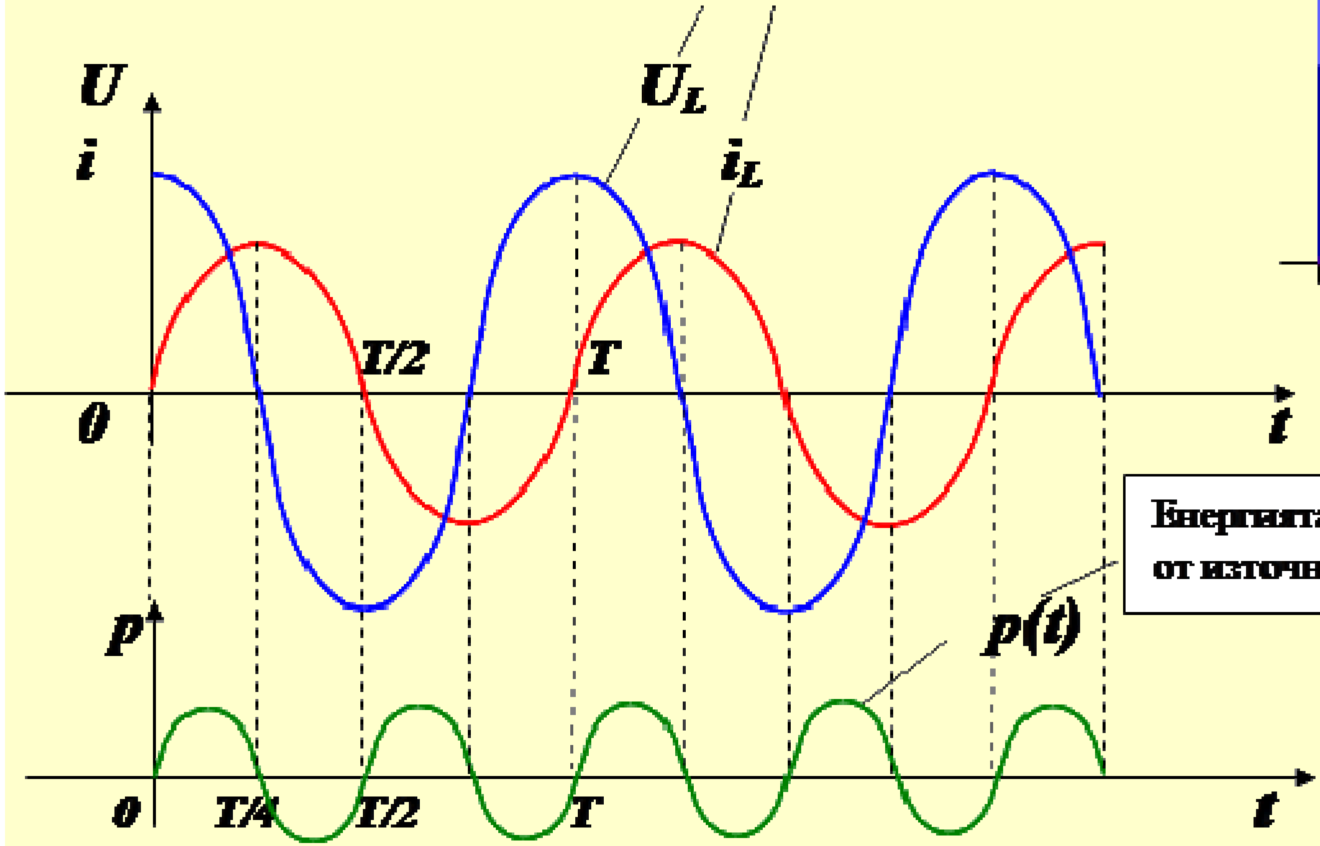
Тогава **средната за периода *T* мощност е нула**:

$$P_{cp} = \int_0^T p(t).dt = \int_0^T U.I\sin 2\omega t.dt = 0$$

т.е. **енергията не се консумира**, а само **пулсира с удвоена честота** от източника към бобината и обратно токът през бобината <u>изостава по фаза</u> от напрежението на четвърт период ($\varphi = 90^0$)

## Векторна диаграма



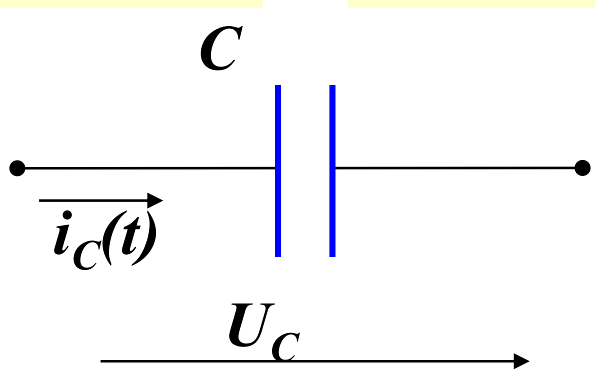




фиг.2

Енергията <u>пулсира с двойна честота</u> от източника към бобината и обратно.

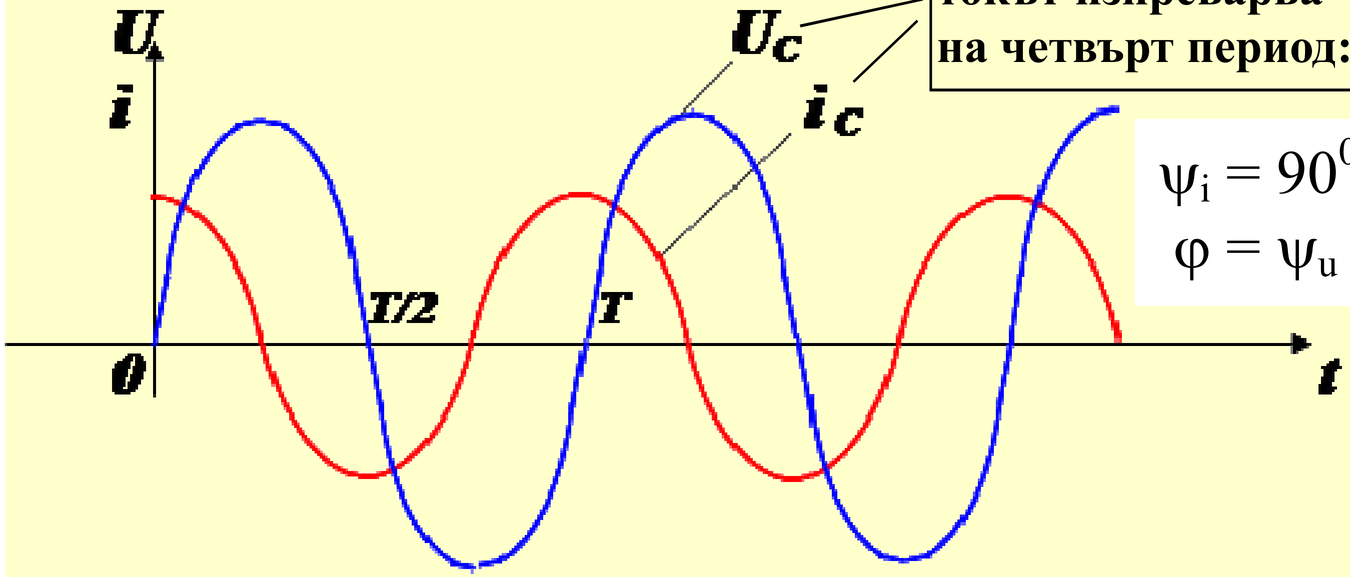
$$p(t) = U.I \sin 2\omega t$$
$$P_{cp} = 0$$

# 3.Синусоидален ток в кондензатор




$$i_C = \frac{\partial q}{\partial t} = C\,\frac{\partial U_C}{\partial t}$$

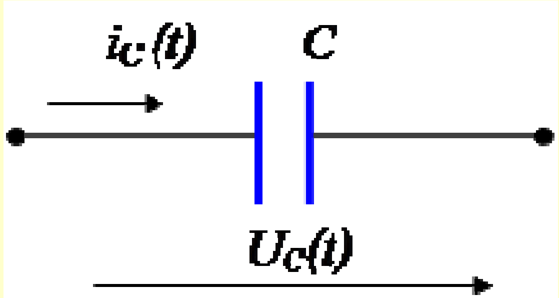
токът изпреварва по фаза напрежението на четвърт период: φ = - 90




$\psi_i = 90^0$.

$\varphi = \psi_u - \psi_i = 0 - 90 = -90$

# Мощност в *C*




**Моментната мощност *p(t)*** се определя като:

$$p(t) = i_C(t).u_C(t) = i_m \cos \omega t.u_m \sin \omega = \frac{u_m i_m}{2} \sin 2\omega t$$

$$\Rightarrow p(t) = U.I \sin 2\omega t$$

Следователно **<u>мощността в кондензатора е хармонична функция</u>** с честота 2ω.

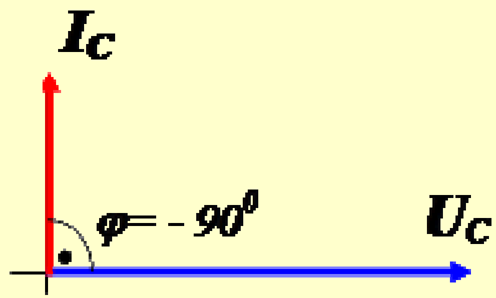
Тогава **средната за периода *T* мощност е нула**:

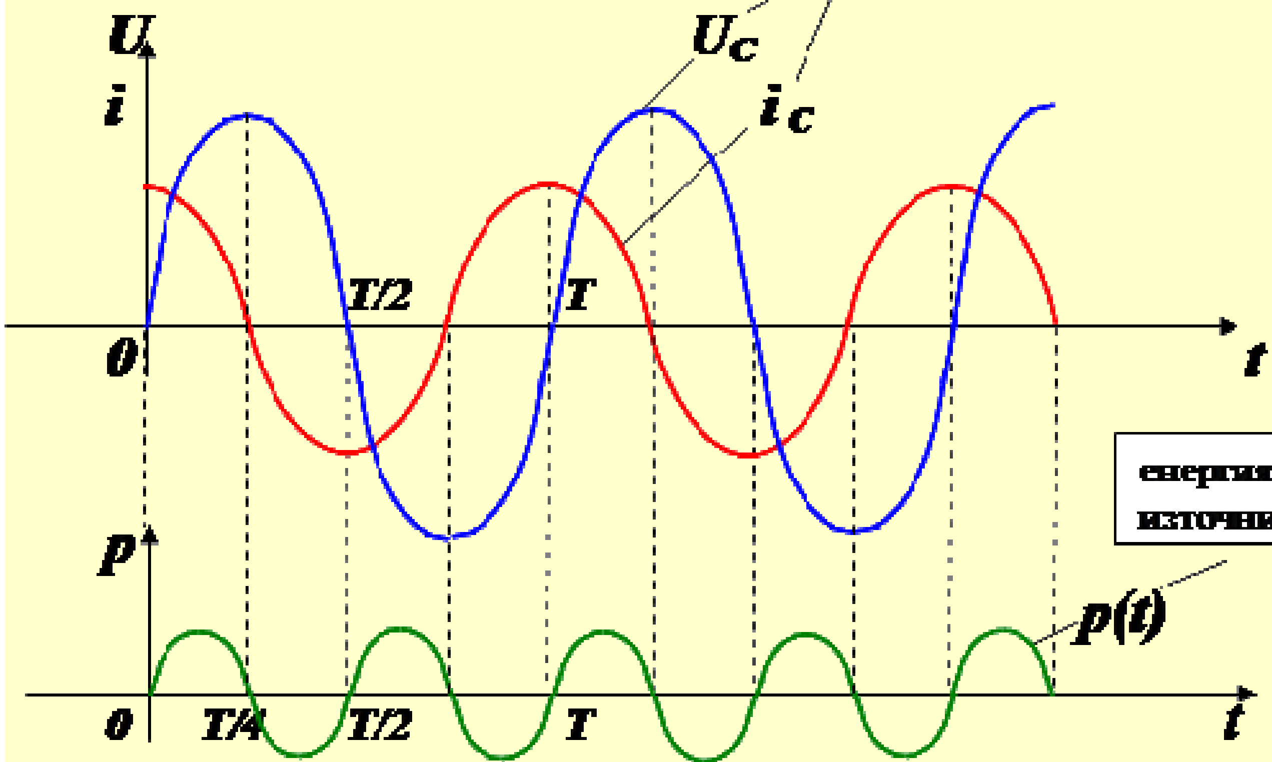
$$P_{cp} = \int_0^T p(t).dt = \int_0^T U.I \sin 2\omega t.dt = 0$$

т.е. **енергията не се консумира**, а само **пулсира с удвоена честота** от източника към кондензатора и обратно.

**токът изпреварва по фаза напрежението на четвърт период: $\varphi = -90^0$**

**Векторна диаграма**



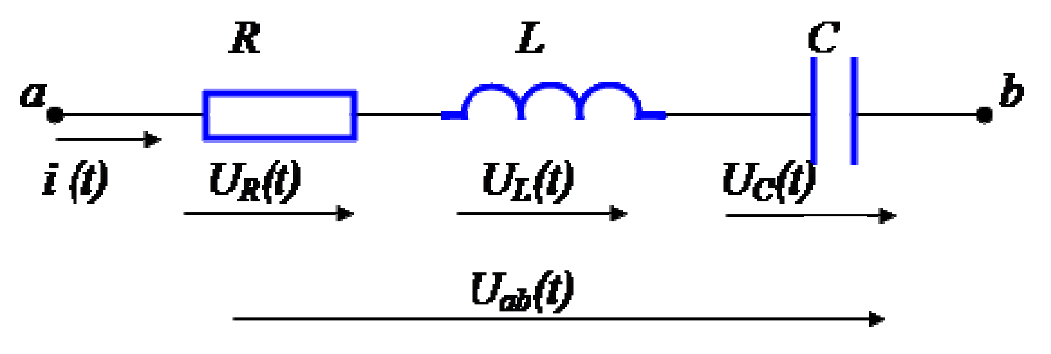

фиг.3

**енергията пулсира с удвоена честота от източника към кондензатора и обратно.**

$$p(t) = U.I \sin 2\omega t$$

$$P_{cp} = 0$$

# <u>Синусоидален режим в R, L, C двуполюсник от последователен тип.</u>




$i(t) = i_m \sin\omega t$ (за удобство $\psi_i = 0$)

$$u_R(t) = Ri(t)$$

$$u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

$$u_{ab}(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) =$$

$$= Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt =$$

$$= R.i_m \sin\omega t + \omega L.i_m \sin(\omega t + 90^0) + \frac{1}{\omega C} i_m \sin(\omega t - 90^0)$$

но $sin(\alpha - 90^0) = - sin(\alpha + 90^0)$ и $X_L = \omega L$; $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$

$$\Rightarrow u_{ab}(t) = R.i_m \sin\omega t + (X_L - X_C).i_m \sin(\omega t + 90^0) =$$

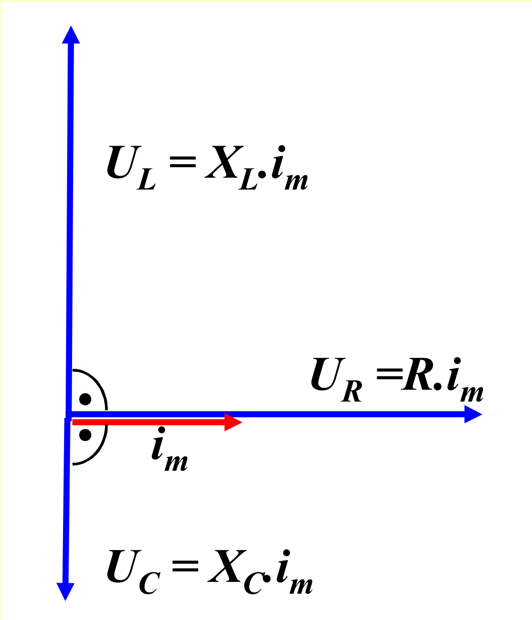
$$= R.i_m \sin\omega t + X.i_m \sin(\omega t + 90^0) = u_m \sin(\omega t + \psi_u) = u_m \sin(\omega t + \varphi)$$

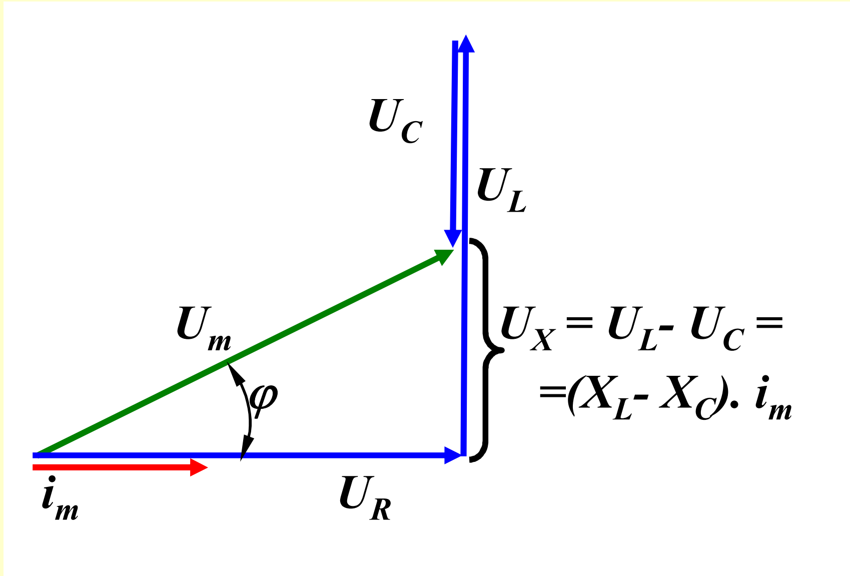
$\varphi = \psi_u - \psi_i$

но $\psi_i = 0$

$\Rightarrow \varphi = \psi_u$

**Векторна диаграма:** $\boldsymbol{U = U_R + U_L + U_C}$

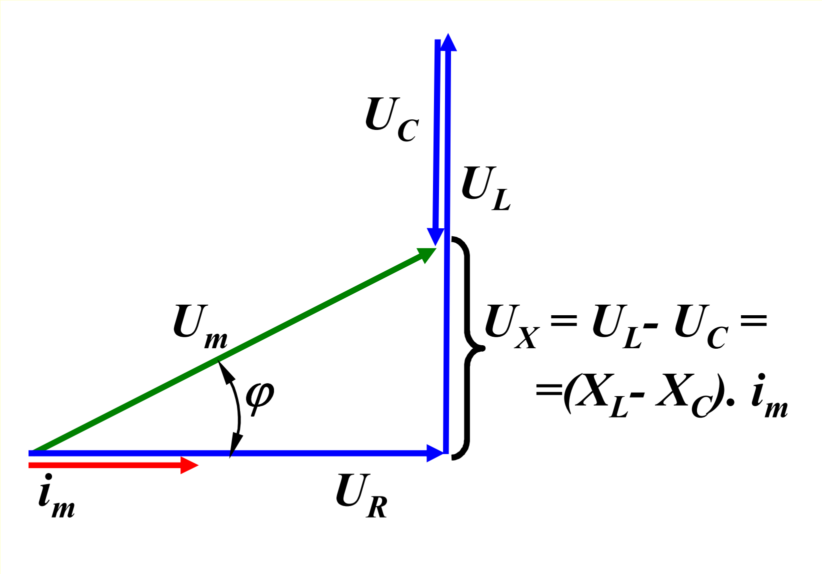


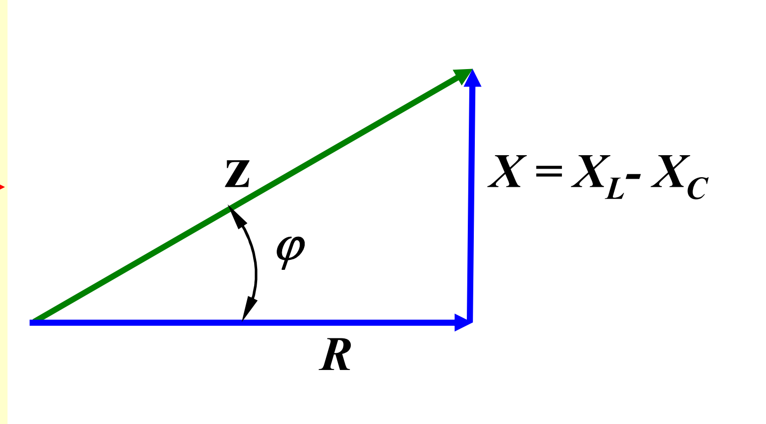




Общото напрежение е **<u>геометрична, а не алгебрична сума</u>** от напреженията на отделните елементи:

$$\boxed{U_m = \sqrt{U_R^2 + U_X^2}}$$

# Триъгълник на съпротивленията




$$U_m = \sqrt{U_R^2 + U_X^2}$$

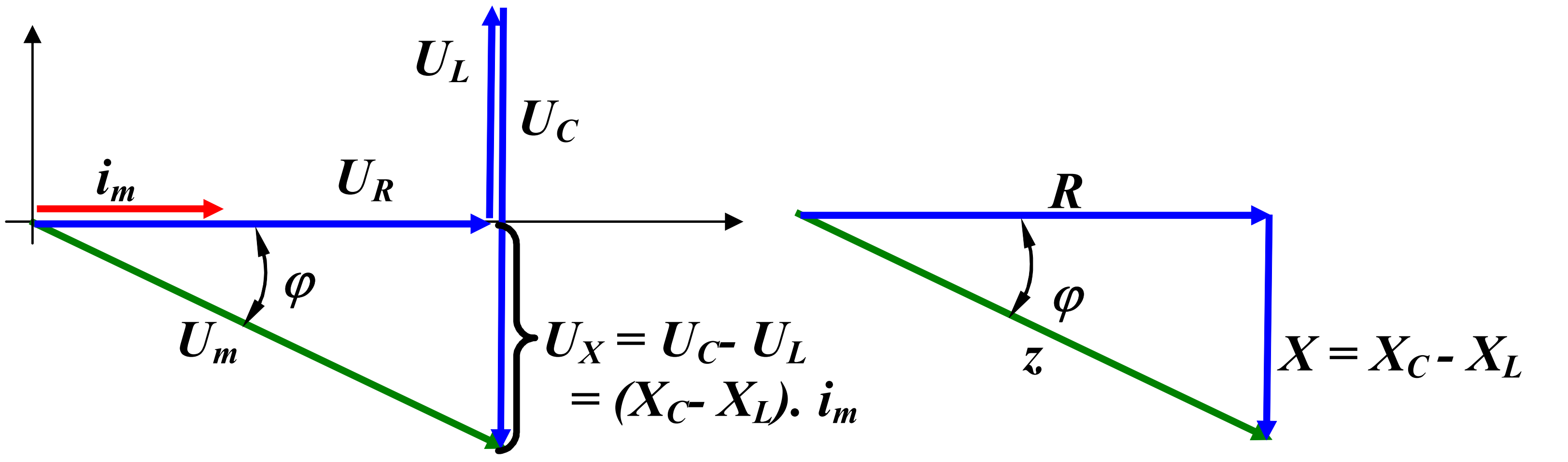
$$U_m^2 = i_m^2 R^2 + i_m^2 (X_L - X_C)^2 = i_m^2 z^2$$

$$z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

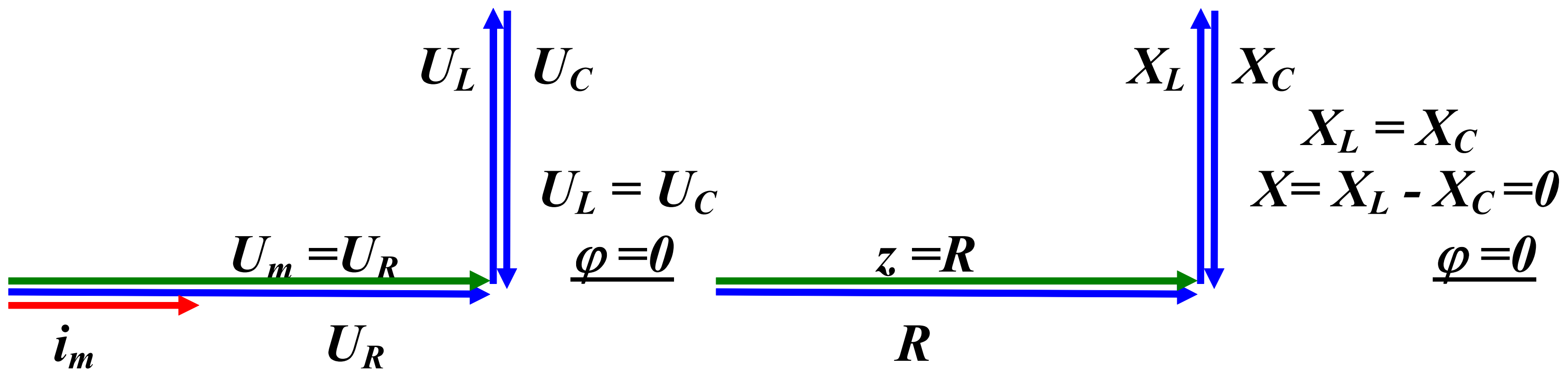
$$\varphi = arctg\frac{X}{R} = arctg\frac{X_L - X_C}{R}$$

и съответно:

$$R = z.\cos\varphi; \quad X = z.\sin\varphi$$




$X_L < X_C$ и $\varphi < 0$ (т.е. съпротивлението има **капацитивен** характер)




$X_L = X_C$ и $\varphi = 0$ (т.е. съпротивлението е чисто активно $z = R$)

Разгледаните съотношения могат да се използват при анализ на **съвсем прости вериги**

1. Определя се реактивното съпротивление на веригата

$$X = X_L - X_C \rightarrow \begin{cases} X_L = \omega L \\ X_C = \dfrac{1}{\omega C} \end{cases}$$

2. Определя се импедансът на веригата

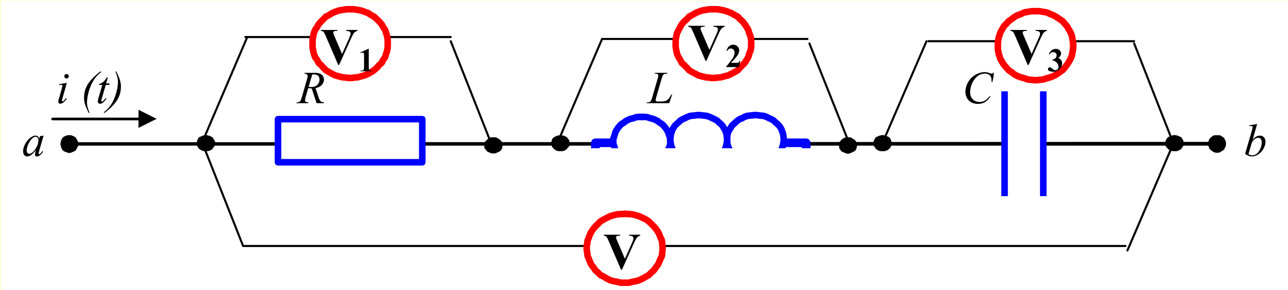
$$z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

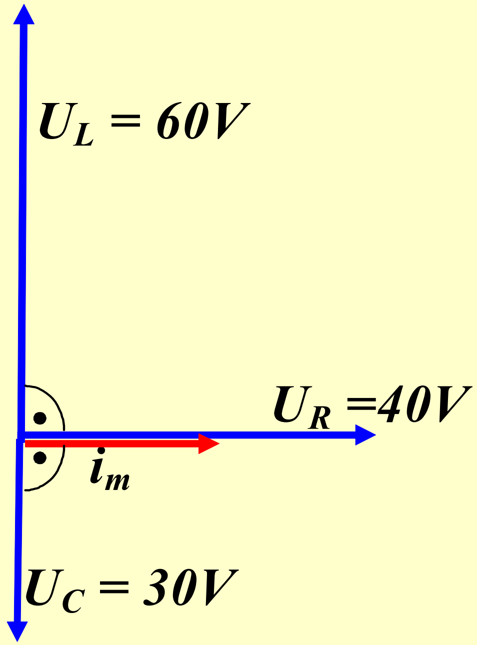
3. Определят се:

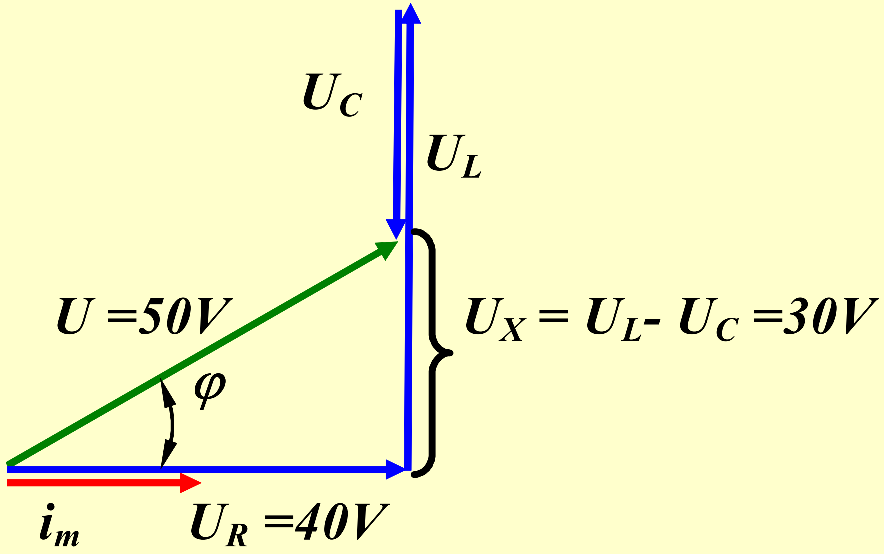
- амплитудната стойност на тока $i_m = \dfrac{U_m}{z}$
- фазовата разлика $\varphi$ между напрежението и тока $\varphi = arctg\dfrac{X}{R}$
- началната фаза на тока $\psi_i = \psi_u - \varphi$

4. Определя се тока $i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i)$

**Пример**: показанията на волтметрите **V1**, **V2** и **V3** са съответно 40V, 60V и 30V



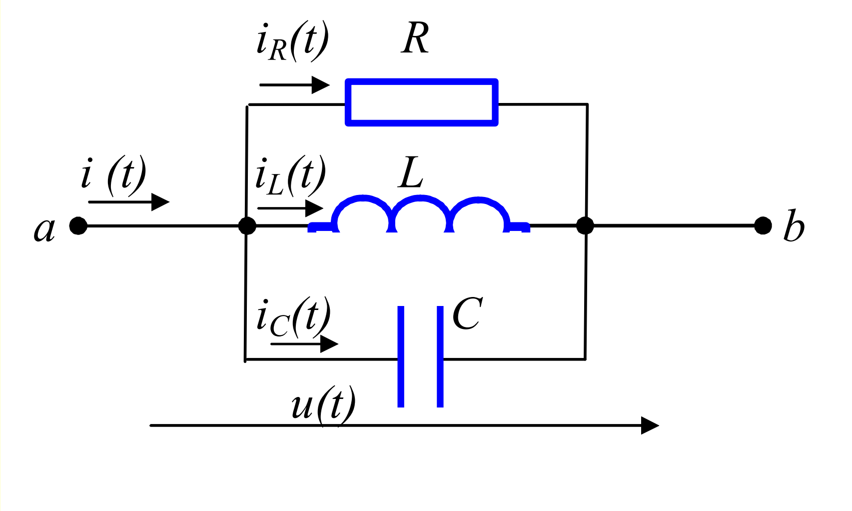




$$U = \sqrt{U_R^2 + U_X^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50V$$

$$\varphi = arctg\,\frac{U_X}{U_R} = arctg\,\frac{30}{40} = 36{,}8^0$$

Напрежението на волтметъра **V** е **50V.**

**Синусоидален режим в R, L, C двуполюсник от паралелен тип.**




$$u(t) = u_m \sin\omega t\ ,\quad (\psi_u = 0)$$

$$i_R(t) = \frac{1}{R}u(t)$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int u(t)dt$$

$$i_C(t) = C\frac{du(t)}{dt}$$

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) =$$

$$= \frac{1}{R}u(t) + \frac{1}{L}\int u(t)dt + C\frac{du(t)}{dt} =$$

$$= \frac{1}{R}.u_m \sin\omega t + \frac{1}{\omega L}u_m \sin(\omega t - 90^0) + \omega C.u_m \sin(\omega t + 90^0)$$

$$\sin(\alpha - 90) = -\sin(\alpha + 90)$$

$$G = \frac{1}{R};$$

$$B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L};$$

$$B_C = \frac{1}{X_C} = \omega C$$

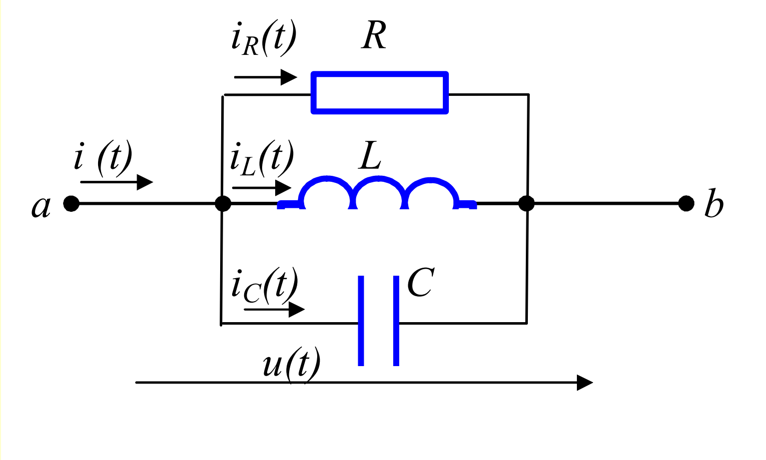
$\varphi = \psi_u - \psi_i$

но $\psi_u = 0$

$\Rightarrow \varphi = -\psi_i$

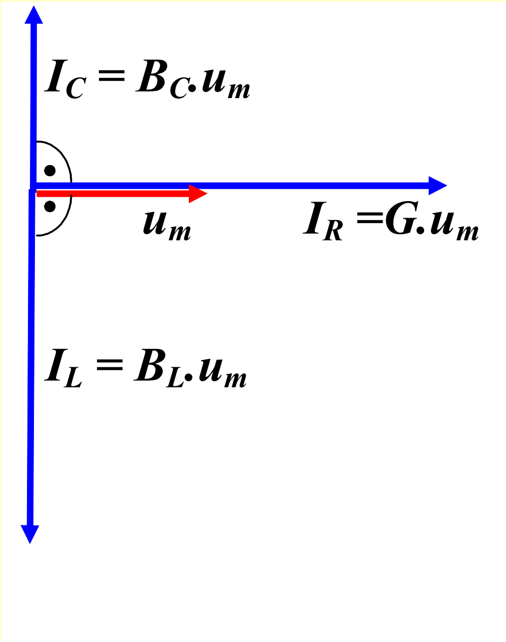
$$i(t) = G.u_m \sin\omega t + (B_L - B_C).u_m \sin(\omega t - 90^0) =$$

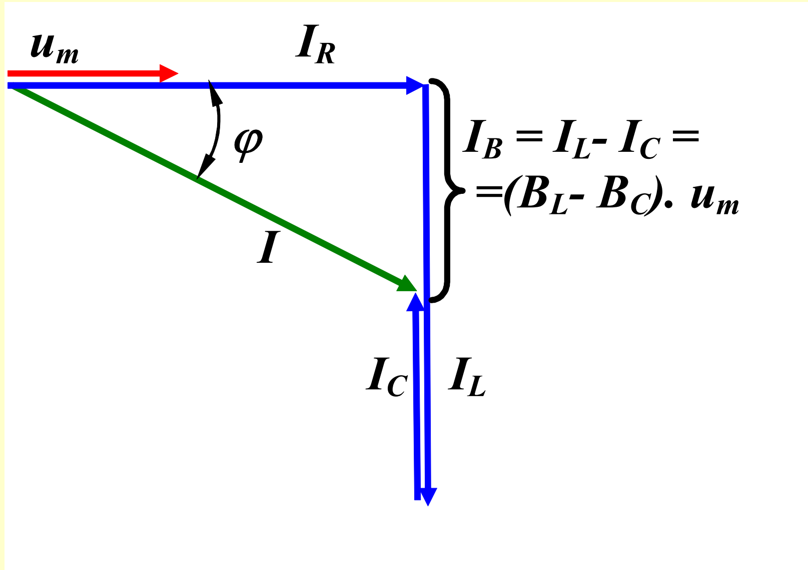
$$= G.u_m \sin\omega t + B.u_m \sin(\omega t - 90^0) = i_m \sin(\omega t + \psi_i) = i_m \sin(\omega t - \varphi)$$




**<u>Векторна диаграма</u>:** $\boldsymbol{I = I_R + I_L + I_C}$

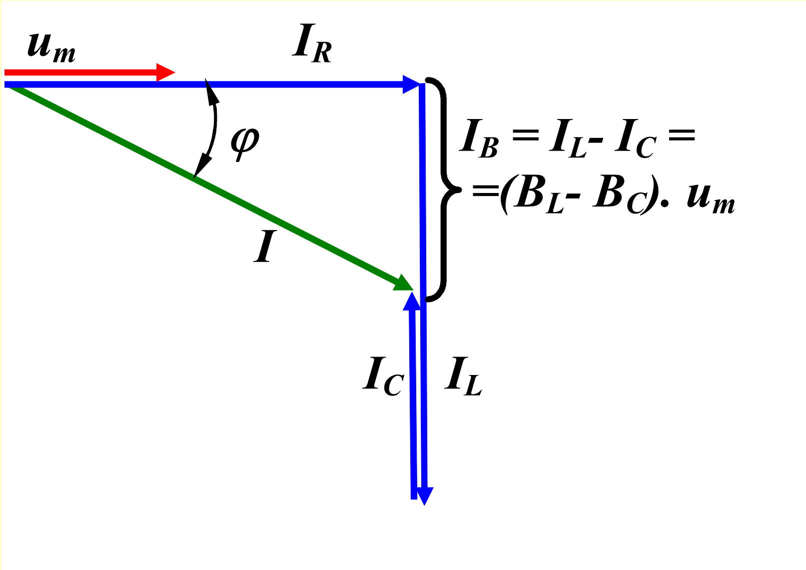
Общият ток е **<u>геометрична, а не алгебрична сума</u>** от токовете на отделните елементи:

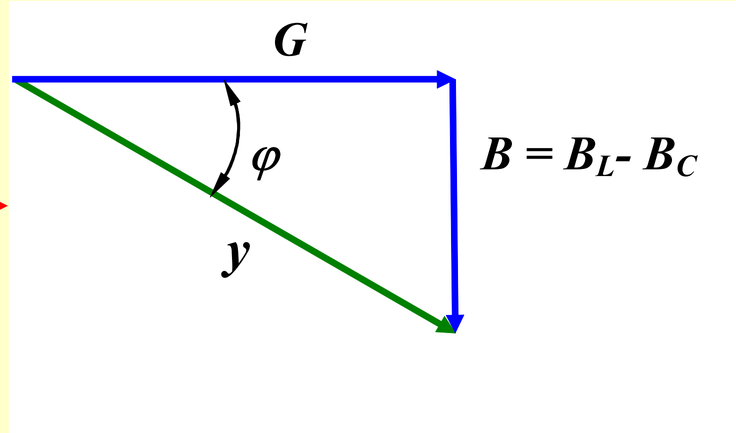



$$\boxed{I = \sqrt{I_R^2 + I_B^2}}$$

# Триъгълник на проводимостите




$$I = \sqrt{I_R^2 + I_B^2}$$

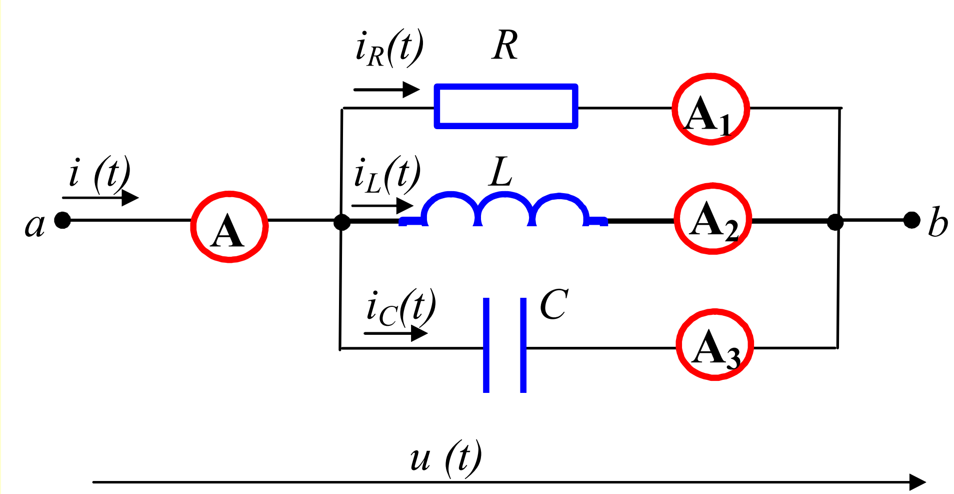
$$I^2 = u_m^2 G^2 + u_m^2 (B_L - B_C)^2 = u_m^2 y^2$$

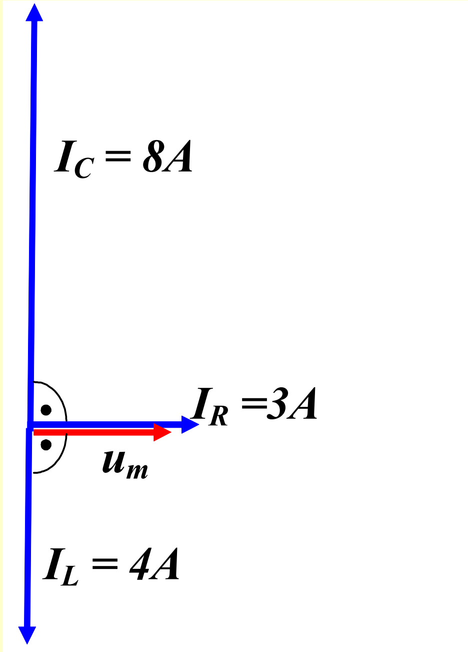
$$y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2}$$

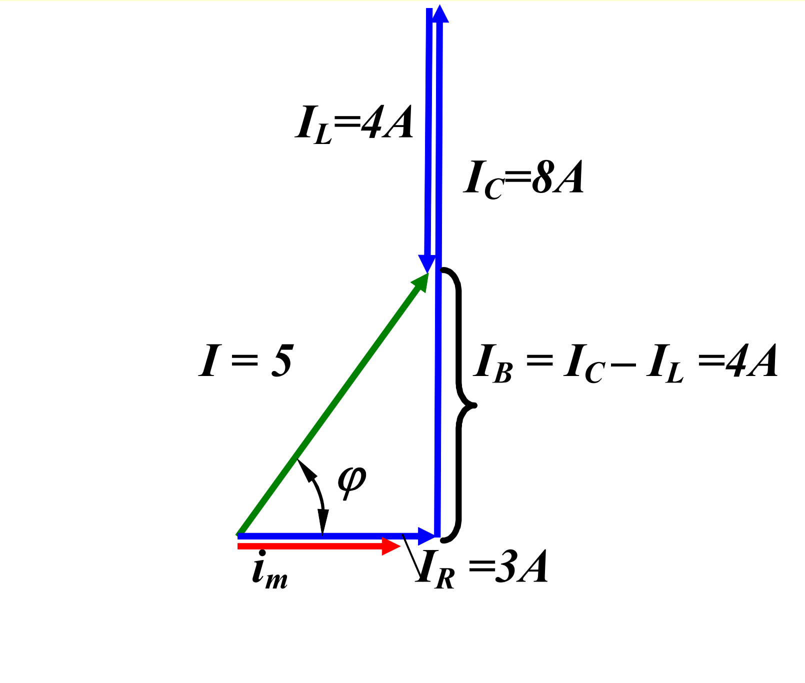
$$\varphi = arctg\frac{B}{G} = arctg\frac{B_L - B_C}{R}$$

$$G = y.\cos\varphi; \quad B = y.\sin\varphi$$

**Пример**: Да се определи показанието на амперметъра **А**, ако показанията на амперметрите **А1**, **А2** и **А3** са съответно **3А, 4А и 8А**.




$$I = \sqrt{I_R^2 + I_B^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,A$$

$$\varphi = arctg\,\frac{I_B}{I_R} = arctg\,\frac{4}{3} = 53{,}1^0$$

Токът през амперметъра **А** е **5А.**