Изобразяване на синусоидални величини с комплекси.

При анализа на синусоидални режими в линейни електрически вериги най-често се използва **метод с комплексни образи** (символичен метод).

синусоидална величина
- ток
- напрежение

→

комплексна величина
- ток
- напрежение

консуматори
- резистори - **R**
- бобини - **L**
- кондензатори - **C**

→

комплексни съпротивления

Анализира се схема, в която източниците и съпротивленията са **заменени с техни комплексни образи**

Полученото решение е комплексна величина

Прави се обратно преобразуване от комплексна в синусоидална величина

Някои основни понятия, свързани с комплексните числа

- В електротехниката **имагинерната единица** се означава с ***j***, а не с ***i*** !

$$j = \sqrt{-1}$$

Комплексните числа могат да се записват по два начина:

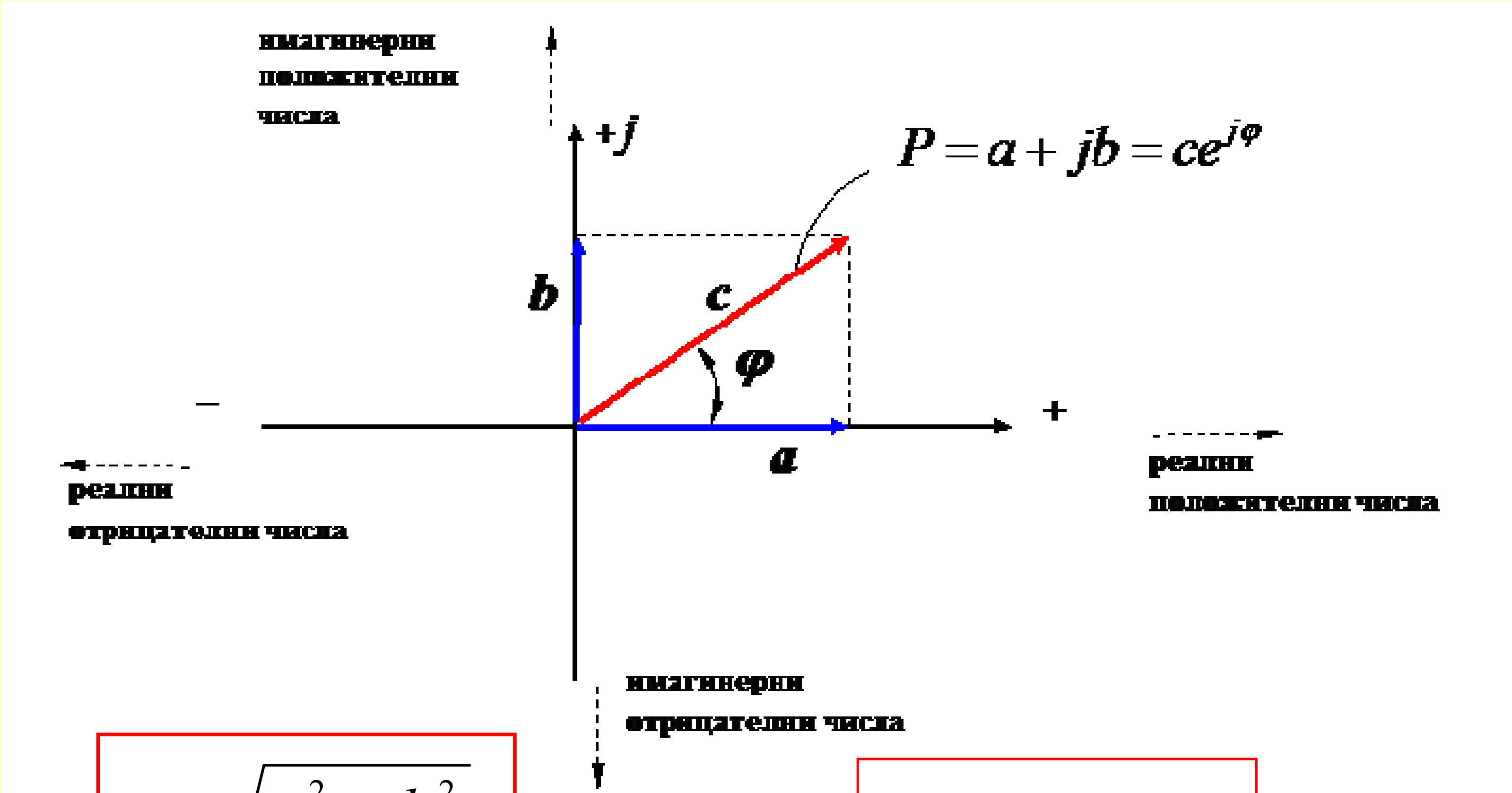
- като **алгебрична сума** на реална и имагинерна част

$$\boldsymbol{P = a + jb}$$

- в **експоненциален вид**, като произведение на модул и експонента:

$$P = ce^{j\varphi}$$

- Комплексните числа могат да се изобразяват в комплексната равнина:



$$c = \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$\varphi = arctg\,\frac{b}{a}$$

$$a = c.\cos\varphi;$$

$$b = c.\sin\varphi$$

- **<u>Комплексен образ</u>** <u>и</u> **<u>комплексна ефективна стойност</u>** <u>на синусоидална величина</u>

Ако за токът $i(t)$ е известно, че се изменя по синусоидален закон: $\boldsymbol{i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i)}$,

то неговия **<u>комплексен образ</u>** може да се запиш

като:

$$\dot{i}(t) = i_m e^{j(\omega t + \psi_i)}$$

$$\boxed{\boldsymbol{i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i)},} \rightarrow \boxed{\dot{i}(t) = i_m e^{j(\omega t + \psi_i)}}$$

Комплексният образ $\dot{i}(t)$ може да се представи и като:

$$\dot{i}(t) = i_m e^{j(\omega t+\psi_i)} = \sqrt{2}.I.e^{j\omega t}.e^{j\psi_i} = \sqrt{2}e^{j\omega t}.Ie^{j\psi_i} = \sqrt{2}e^{j\omega t}.\dot{I}$$

където $\boxed{\dot{I} = Ie^{j\psi_i}}$

е **<u>комплексна ефективна стойност</u>** на синусоидалната величина.

Често тази стойност се нарича за по-кратко **<u>комплекс</u>** на синусоидалната величина.

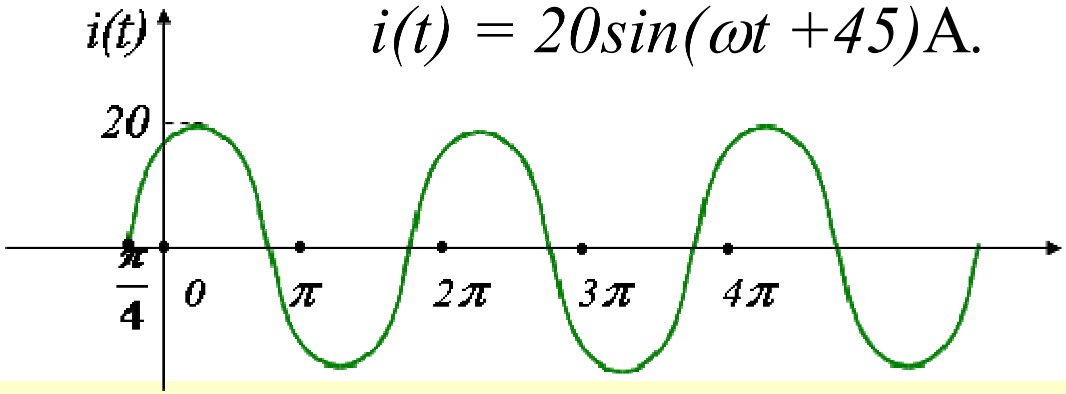
Но в една верига всяка синусоидално изменяща се с честота ω величина съдържа в комплексния си образ един и същи коефициент $\sqrt{2}e^{j\omega t}$

Съществената информация, характеризираща синусоидалната величина се съдържа в **комплексната ефективна стойност**.

Примери: за определяне на комплексната ефективна стойност на синусоидална величина

Пример 1: Да се определи комплекса на синусоидално изменящия се ток

$$i(t) = 20\sin(\omega t + 45)\text{A}.$$



Комплексната ефективна стойност (комплекса) се определя като: $\dot{I} = Ie^{j\psi_i}$.

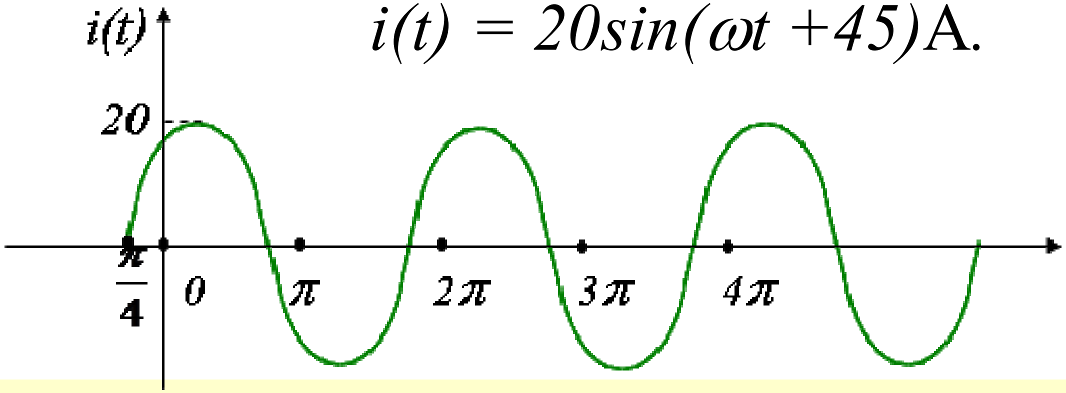
Ефективната стойност е $I = \dfrac{i_m}{\sqrt{2}} = \dfrac{20}{\sqrt{2}}$ началната фаза $\psi_i = 45^0$.

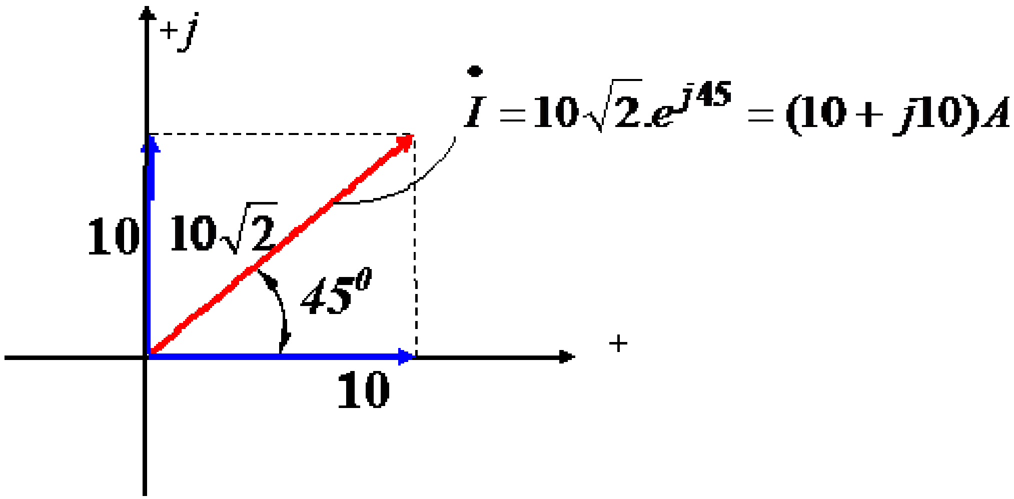
$$\dot{I} = \frac{20}{\sqrt{2}}e^{j45} = 10\sqrt{2}.e^{j45} =$$

$$= 10\sqrt{2}.(\cos 45 + j\sin 45) = 10\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}) = (10 + j10)A$$

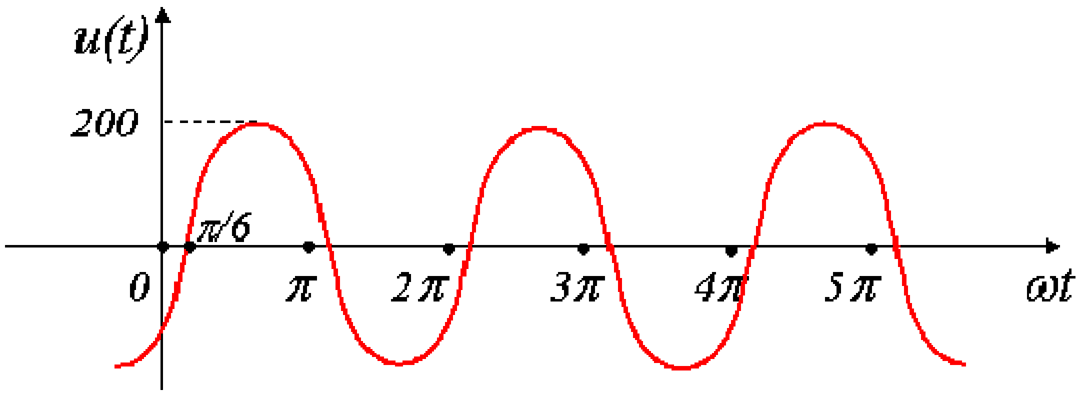
Можем да изобразим този ток в комплексната равнина

$$i(t) = 20\sin(\omega t + 45)\text{A}.$$





Пример 2: Да се определи комплекса на синусоидално изменящото се напрежение $u(t) = 200\sin(\omega t - 30^0)$V.



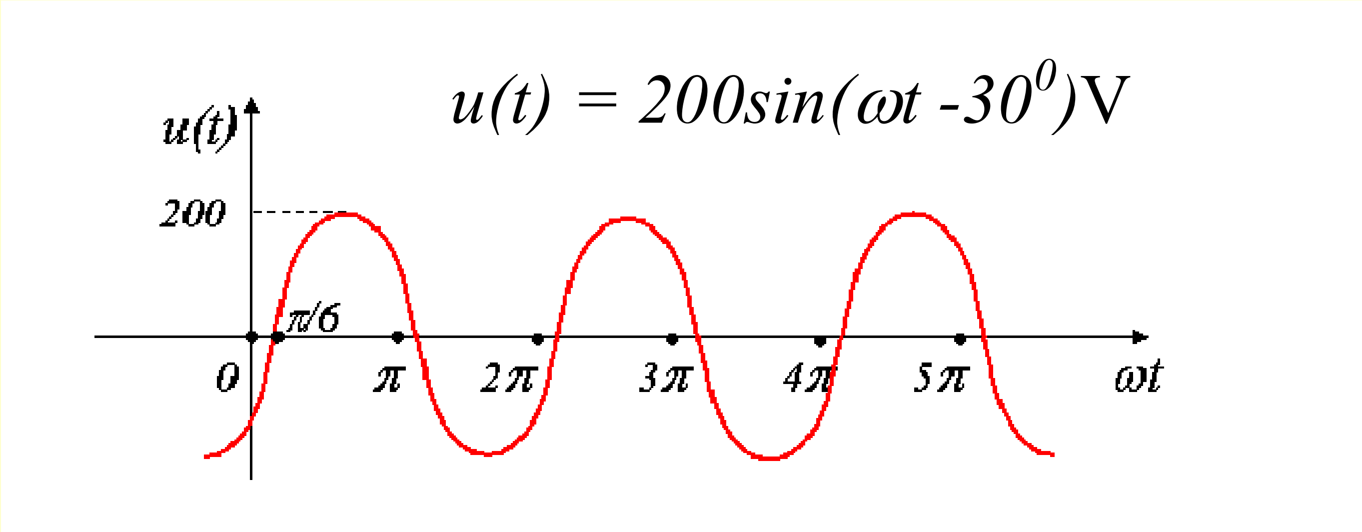
Комплексната ефективна стойност (комплекса) се определя като: $\dot{U} = Ue^{j\psi_u}$

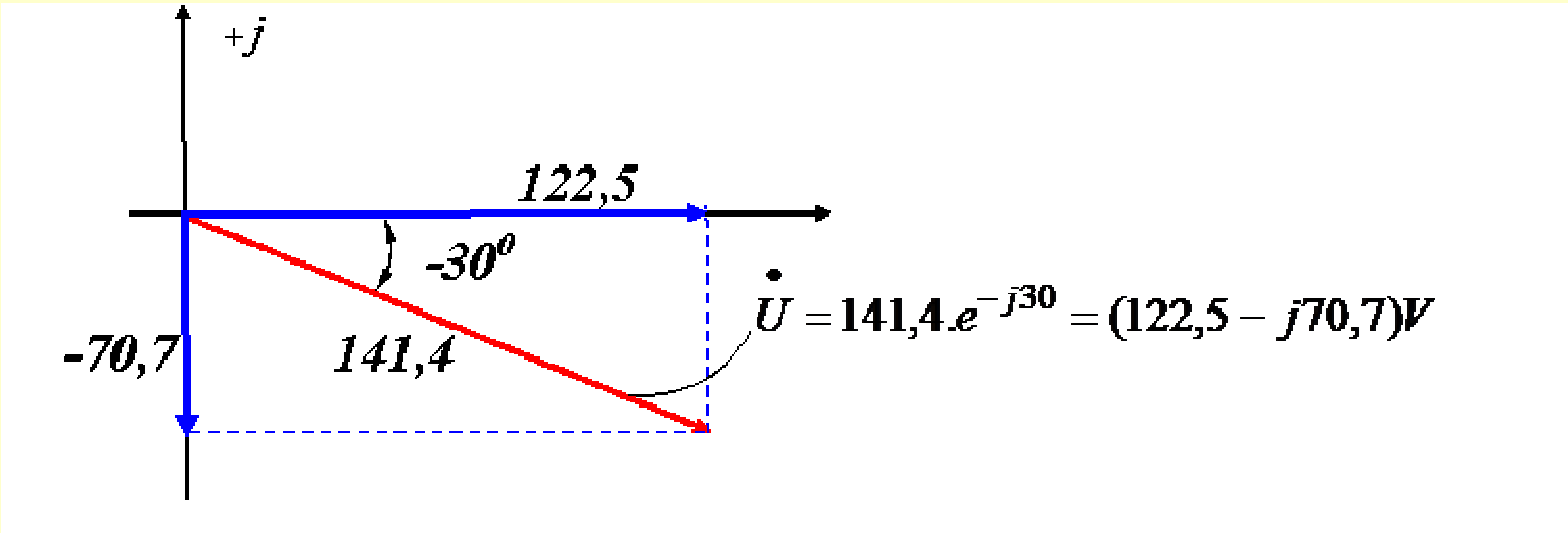
Ефективната стойност е $U = \dfrac{u_m}{\sqrt{2}} = \dfrac{200}{\sqrt{2}}$, а началната фаза $\boldsymbol{\psi_u} = -30^0$.

$$\Rightarrow \dot{U} = \frac{200}{\sqrt{2}} e^{j(-30)} = 141{,}4e^{j(-30)} =$$

$$= 141{,}4[\cos(-30) + j\sin(-30)] = 141{,}4(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}) = (122.5 - j70.7)V$$

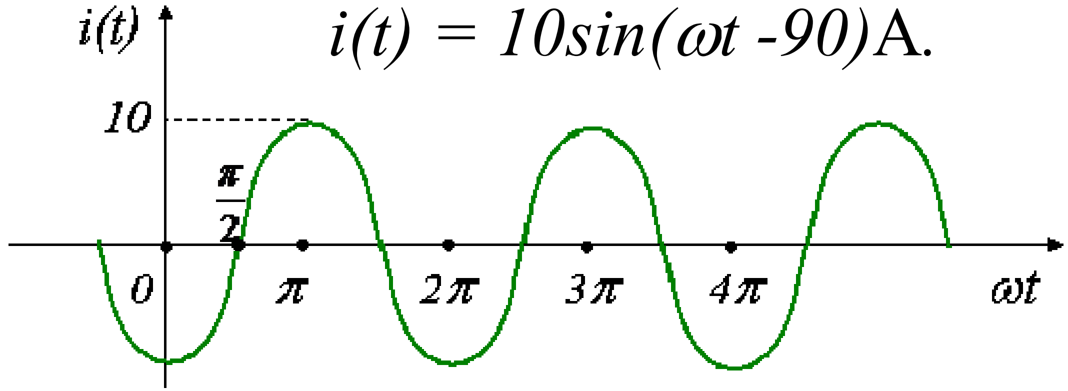
Можем да изобразим това напрежение в комплексната равнина:





Пример 3: Да се определи комплекса на синусоидално изменящия се ток

$$i(t) = 10\sin(\omega t - 90)\text{A}.$$



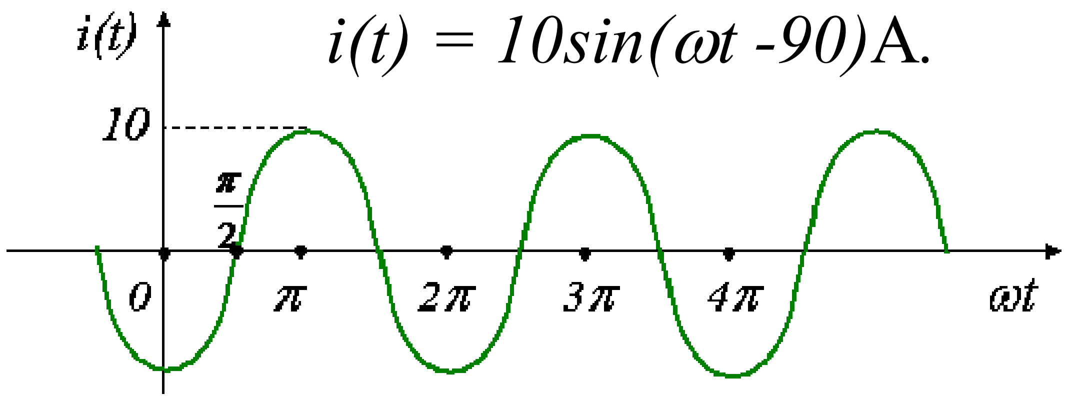
Комплексната ефективна стойност (комплекса) се определя като: $\dot{I} = Ie^{j\psi_i}$.

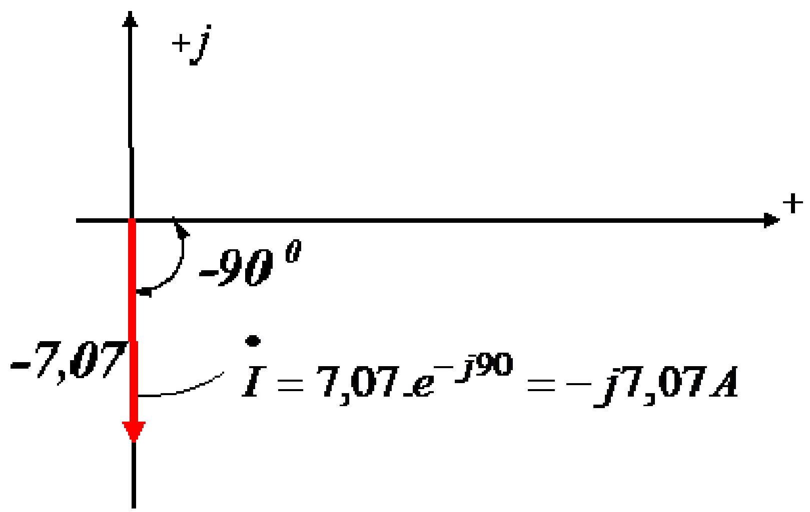
Ефективната стойност е $I = \dfrac{i_m}{\sqrt{2}} = \dfrac{10}{\sqrt{2}}$, а началната фаза $\psi_i = -90^0$

$$\Rightarrow \quad \dot{I} = \frac{10}{\sqrt{2}}e^{-j90} = 7{,}07.e^{-j90} =$$

$$= 7{,}07[\cos(-90) + j\sin(-90)] = 7{,}07(0 - j) = -j7{,}07\,A$$

Можем да изобразим този ток в в комплексната равнина:





<u>Обратно преобразуване от **комплексен образ** в **синусоидална величина**</u>:

Ако за токът $i(t)$ е известно, че неговата комплексна ефективна стойност

може да се запише като: $\dot{I} = a + jb$

1. Определяме ефективната стойност и началната фаза на тока :

$$\dot{I} = a + jb = \sqrt{(a^2 + b^2)}.e^{jarctg\frac{b}{a}} = I.e^{j\psi_i},$$

ефективната стойност е $I = \sqrt{a^2 + b^2}$, а началната фаза $\psi_i = arctg\frac{b}{a}$

2. Тогава синусоидалният ток $i(t)$ се определя като:

$$i(t) = \sqrt{2}.I\sin(\omega t + \psi_i) = i_m\sin(\omega t + \psi_i)$$

Пример 1: Да се определи синусоидално изменящия се ток *i(t),* ако комплекса на този ток има вида:

$$\dot{I} = (3 + j4)A$$

За да определим синусоидално изменящия се ток *i(t)* трябва да намерим амплитудната стойност i_m и началната фаза ψ_i на тока.

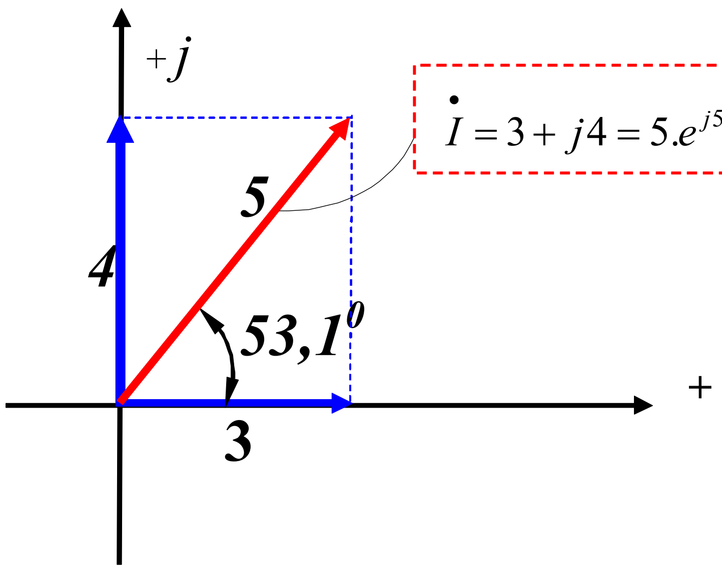
$$\dot{I} = 3 + j4 = \sqrt{3^2 + 4^2}.e^{jarctg\frac{4}{3}} = 5.e^{j53,1}A$$

Следователно **ефективната стойност на тока е I=5A, а началната фаза ψ_i =53,1^0**

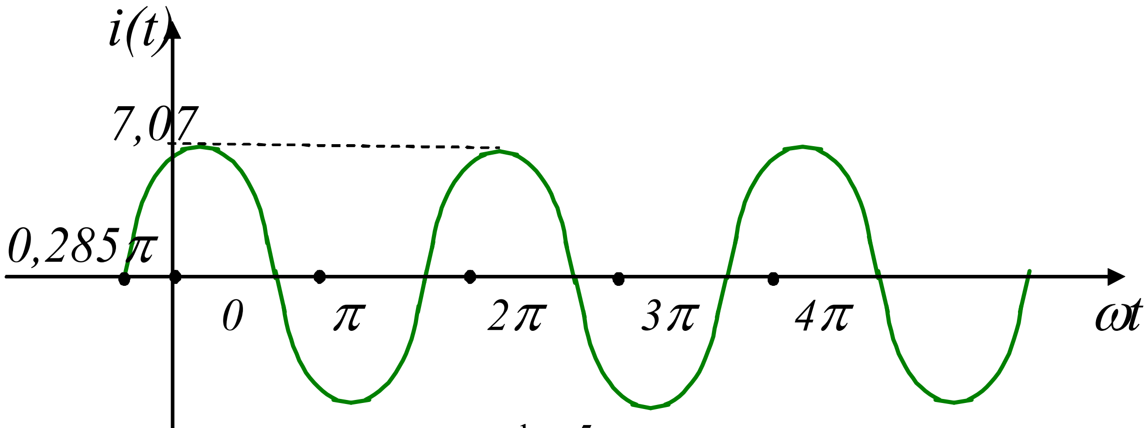
Тогава амплитудата $i_m = 5\sqrt{2} = 7,07\,A$

$$\boxed{i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i) = 7,07\sin(\omega t + 53,1^0)\,A}$$

Можем да изобразим този ток в в комплексната равнина:



Синусоидално изменящият се ток е представен на фиг.5. (Ъгълът ψ_i в радиани се определя като $\psi_i = 51{,}3.\dfrac{\pi}{180} = 0.285\pi\ rad$)



фиг.5

Пример 2: Да се определи синусоидално изменящия се ток *i(t),* ако комплекса на този ток има вида:

$$\dot{I} = (3 - j3)A$$

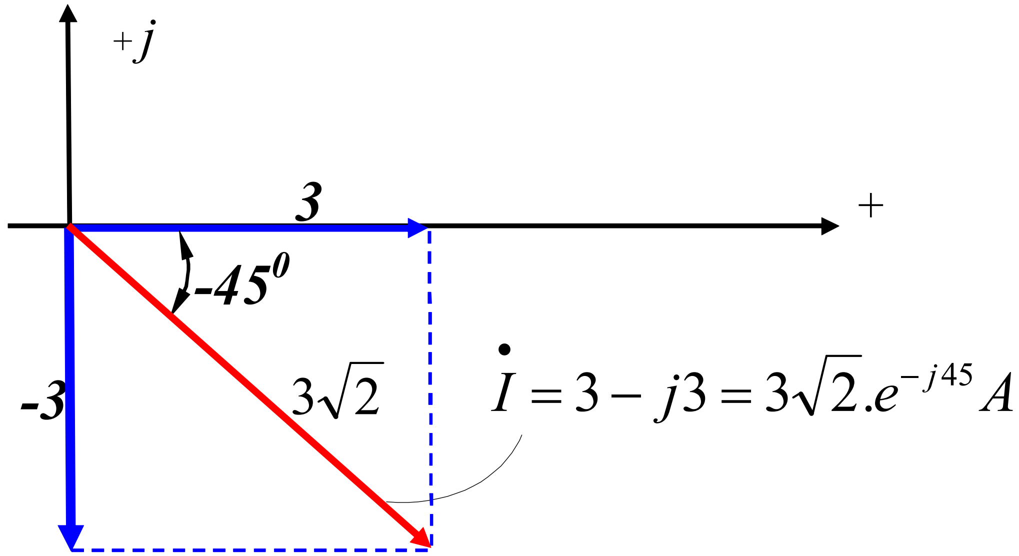
Решение

$$\dot{I} = 3 - j3 = \sqrt{3^2 + 3^2}.e^{jarctg\frac{-3}{3}} = 3\sqrt{2}.e^{-j45}A$$

Следователно ефективната стойност на тока е $I = 3\sqrt{2}A$, а началната фаза ψ_i =53,1^0

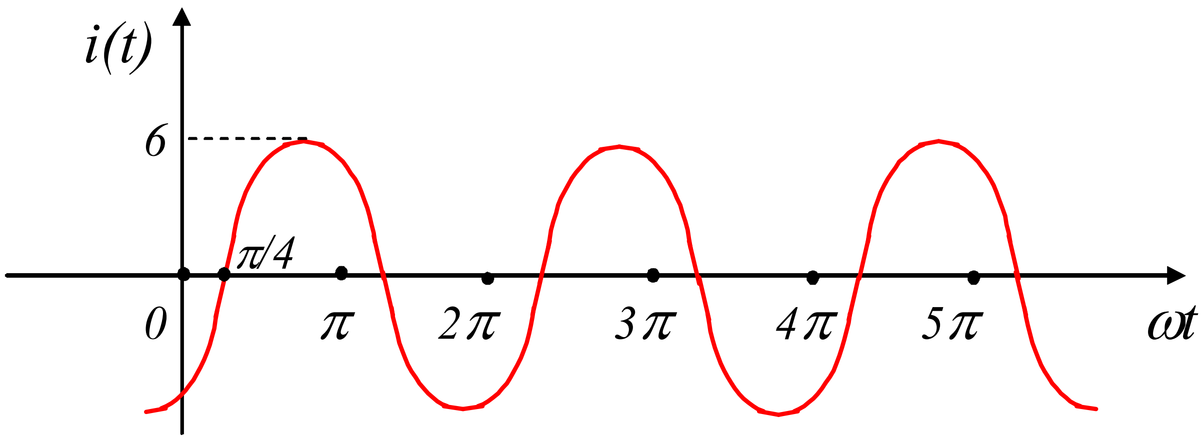
$$i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i) = 6\sin(\omega t - 45^0)A$$

Можем да изобразим този ток в в комплексната равнина (фиг.6):



фиг.6

Синусоидално изменящият се ток е представен на фиг.7. (Ъгълът ψ_i в радиани се определя като $\psi_i = -45\frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{4}\, rad$)



фиг.7

Пример 3: Да се определи синусоидално изменящото се напрежение $u(t)$, ако комплекса на това напрежение има вида:

$$\dot{U} = j100V$$

Решение

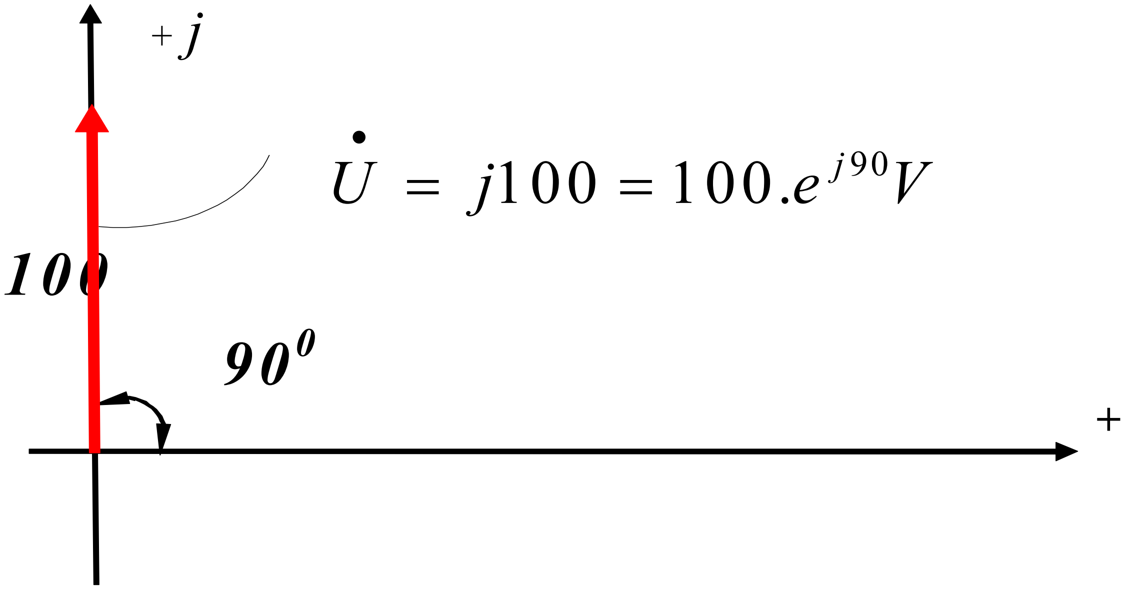
Комплексната ефективна стойност, записана в експоненциален вид позволява да се определят **ефективната стойност и началната фаза:**

$$\dot{U} = j100 = \sqrt{100^2}.e^{jarctg\frac{100}{0}} = 100.e^{j90}V$$

Следователно ефективната стойност на напрежението е $U = 100V$, а началната фаза $\psi_u = 90^0$. Тогава амплитудата $u_m = U\sqrt{2} = 100\sqrt{2} = 141V$

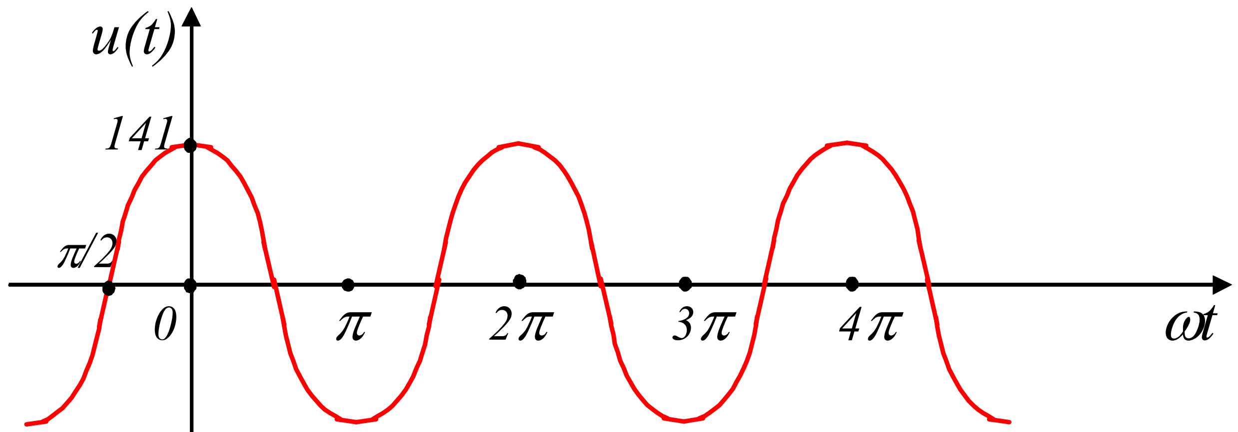
$$\boxed{u(t) = u_m \sin(\omega t + \psi_u) = 141\sin(\omega t + 90^0)V}$$

Можем да изобразим това напрежение в комплексната равнина (фиг.8):



фиг.8

Синусоидално изменящото се напрежение $u(t)$ е представено на фиг.9. (Ъгълът ψ_u в радиани се определя като $\psi_u = 90\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{2}\ rad$)



фиг.9

Умножение на комплексна величина **с имагинерната единица**

Ако умножим комплексно число с имагинерната единица j, това е равносилно на завъртане на величината на ъгъл 90^0 в комплексната равнина.

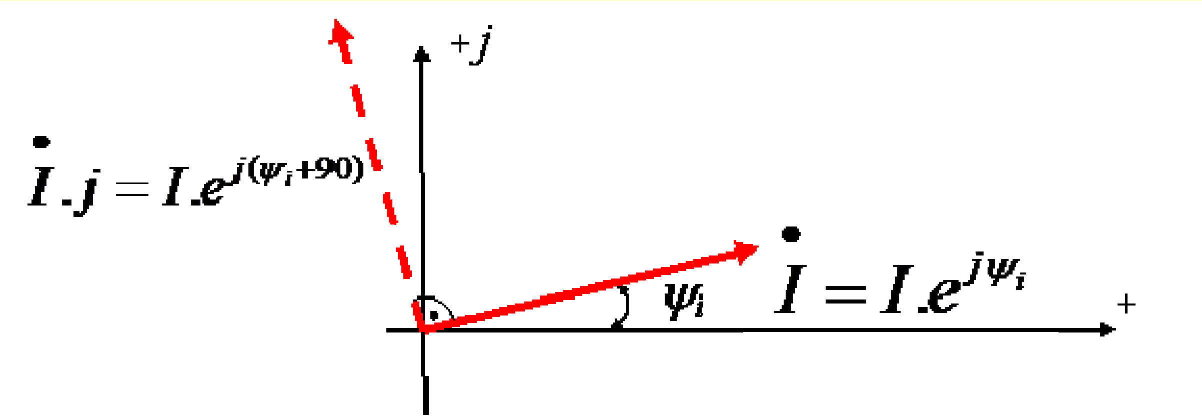
Доказателство:

Имагинерната единица j, записана в експоненциален вид се представя като:

$$j = 0 + j.1 = \sqrt{0^2 + 1^2}\,e^{jarctg\frac{1}{0}} = 1e^{j90}.$$

Ако умножим $\dot{I} = I.e^{j\psi_i}$ с имагинерната единица, получаваме:

$$\dot{I}.j = I.e^{j\psi_i}.1.e^{j90} = I.e^{j(\psi_i+90)}.$$

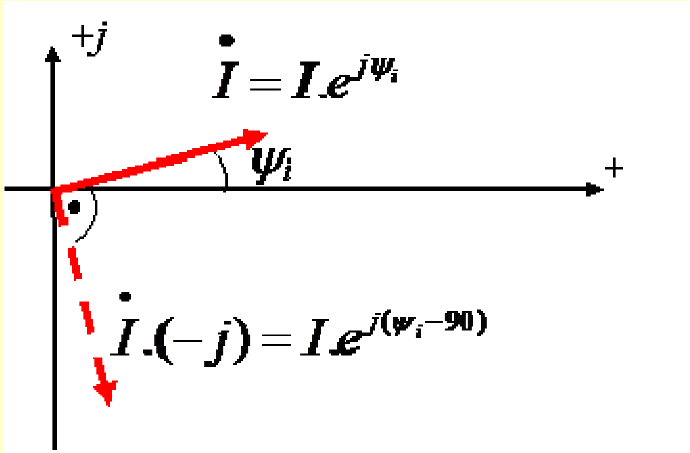


Аналогично, ако умножим комплексно число с $(-j)$, това е равносилно на **завъртане на величината на ъгъл -90^0** в комплексната равнина.

Доказателство:

$$-j = 0 - j.1 = \sqrt{0^2 + 1^2}\, e^{jarctg\frac{-1}{0}} = 1e^{j-90}.$$

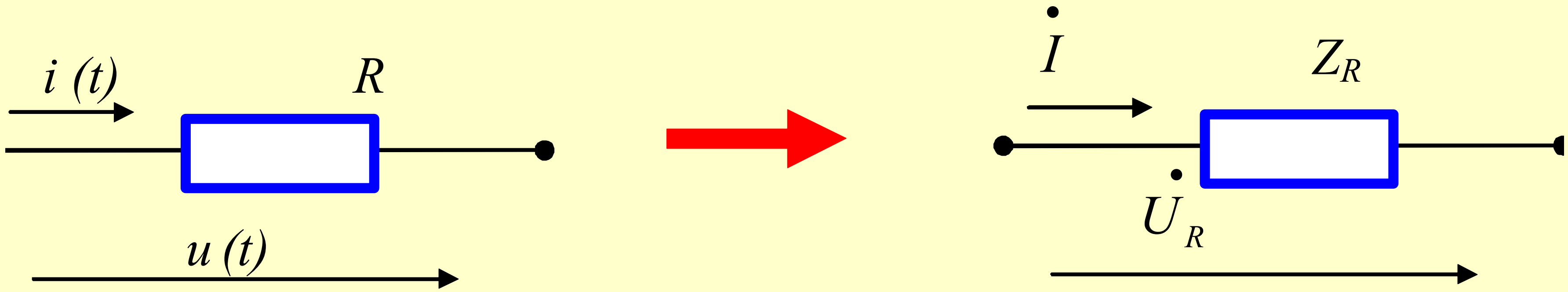
$$\Rightarrow \dot{I}.(-j) = I.e^{j\psi_i}.1.e^{-j90} = I.e^{j(\psi_i - 90)}.$$



Комплексни съпротивления

Елемент	Комплексно съпротивление
Резистор със съпротивление $\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{Z_R = R}$
Бобина с индуктивност $\boldsymbol{L}$	$\boldsymbol{Z_L = jX_L = j\omega L}$
Кондензатор с капацитет $\boldsymbol{C}$	$Z_C = -jX_C = -j\dfrac{1}{\omega C}$

1. Комплексно съпротивление на резистор **Z_R=R**



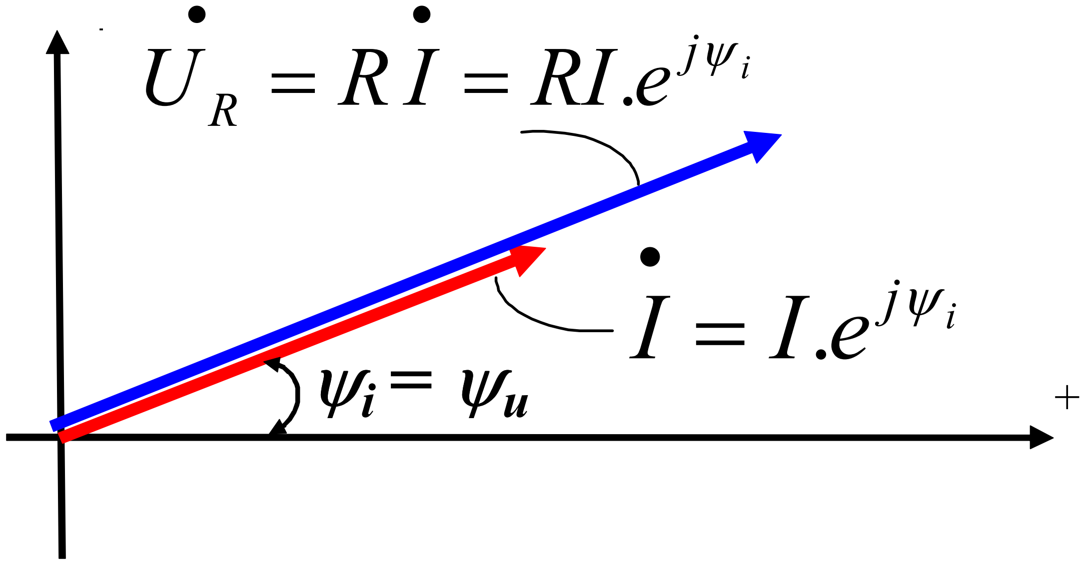
$$i(t) = i_m \sin \omega t \quad\longrightarrow\quad \dot{I} = \frac{i_m}{\sqrt{2}} e^{j0}$$

$$u(t) = R.\, i(t) = R\, i_m \sin \omega t \quad\longrightarrow\quad \dot{U}_R = \frac{R i_m}{\sqrt{2}} e^{j0} = R.\dot{I}$$

$$\dot{U}_R = R.\dot{I}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_R = R}$$

<u>**Векторна диаграма**</u>

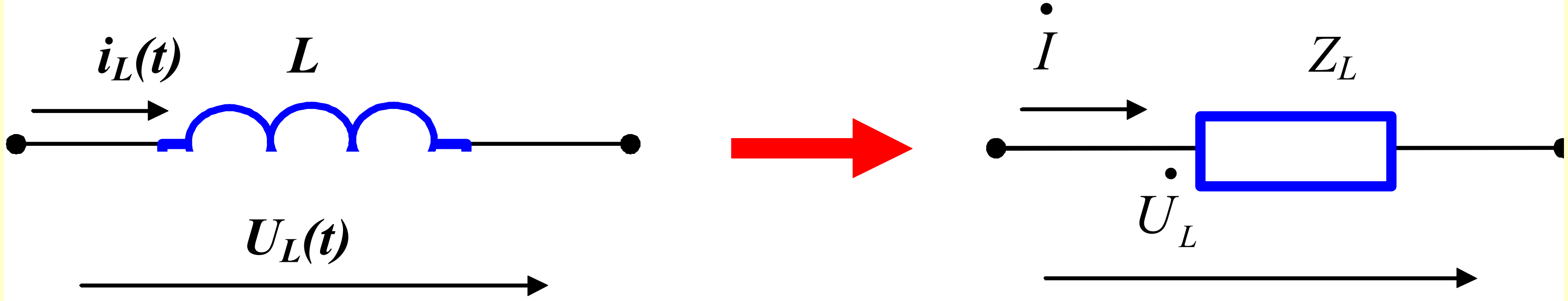


$$Z_R = R$$

$$\dot{U}_R = R.\dot{I}$$

$$\psi_i = \psi_u$$

2. Комплексно съпротивление на бобина $\underline{Z_L = jX_L = j\omega L}$



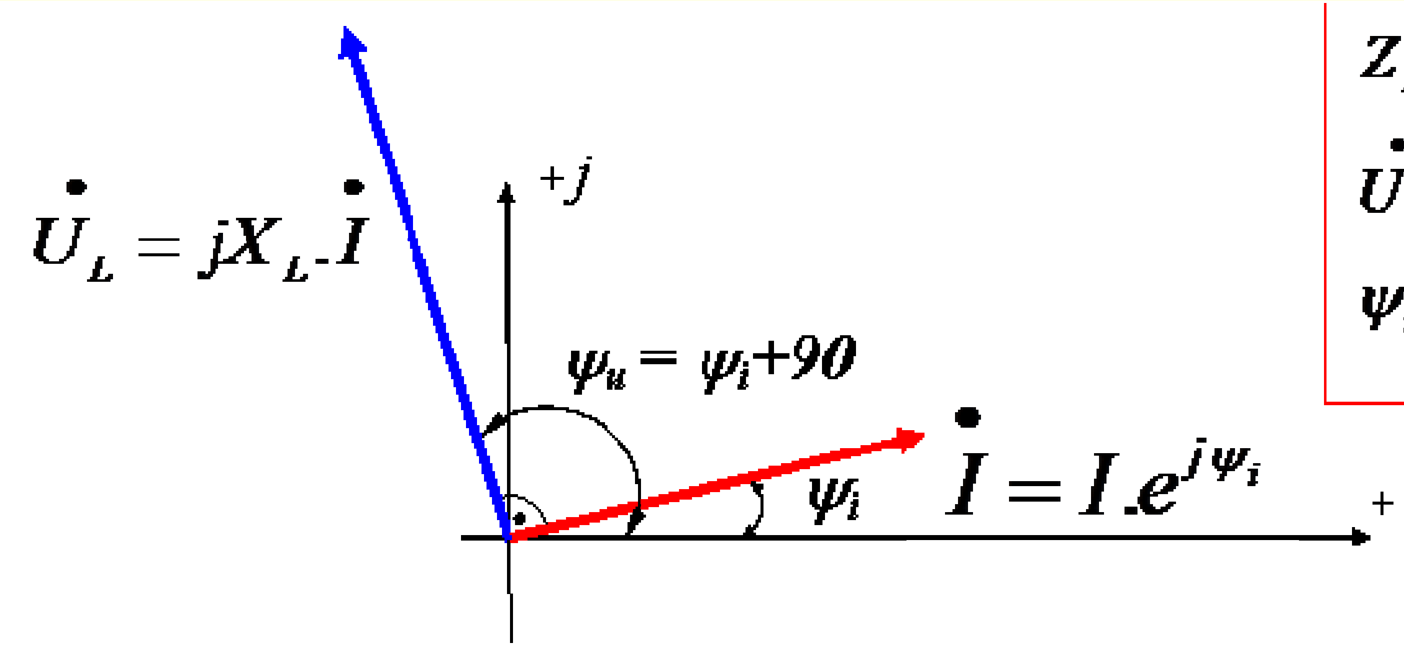
$$i(t) = i_m \sin \omega t \longrightarrow \dot{I} = \frac{i_m}{\sqrt{2}} e^{j0}$$

$$u_L(t) = \omega L\, i_m \sin(\omega t + 90) \longrightarrow \dot{U}_L = \frac{\omega L i_m}{\sqrt{2}} e^{j90} = \omega L.\dot{I}.j$$

$$\dot{U}_L = j\omega L.\dot{I} = jX_L.\dot{I}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_L = j\omega L = jX_L}$$

Векторна диаграма

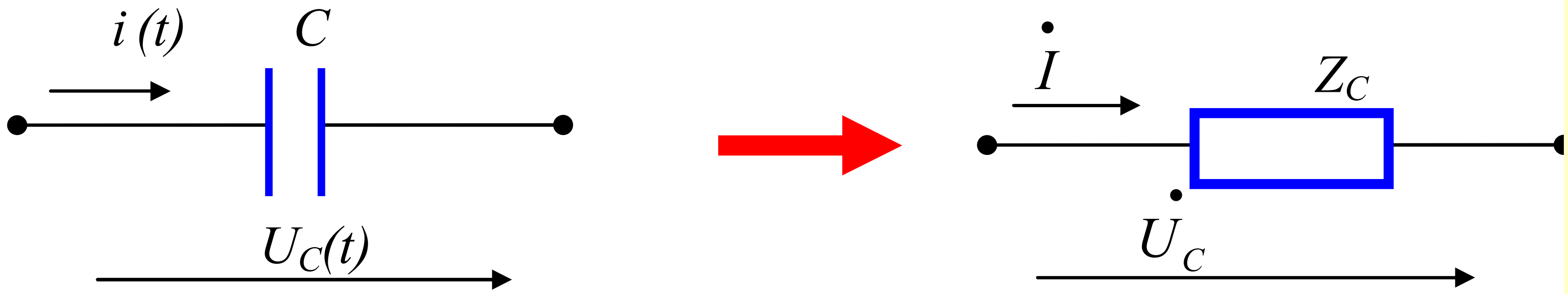


$$Z_L = jX_L = j\omega L$$

$$\dot{U}_L = jX_L\,\dot{I}$$

$$\psi_u = \psi_i + 90^0$$

3. Комплексно съпротивление на кондензатор $$\boxed{Z_C = -jX_C = -j\frac{1}{\omega C}}$$



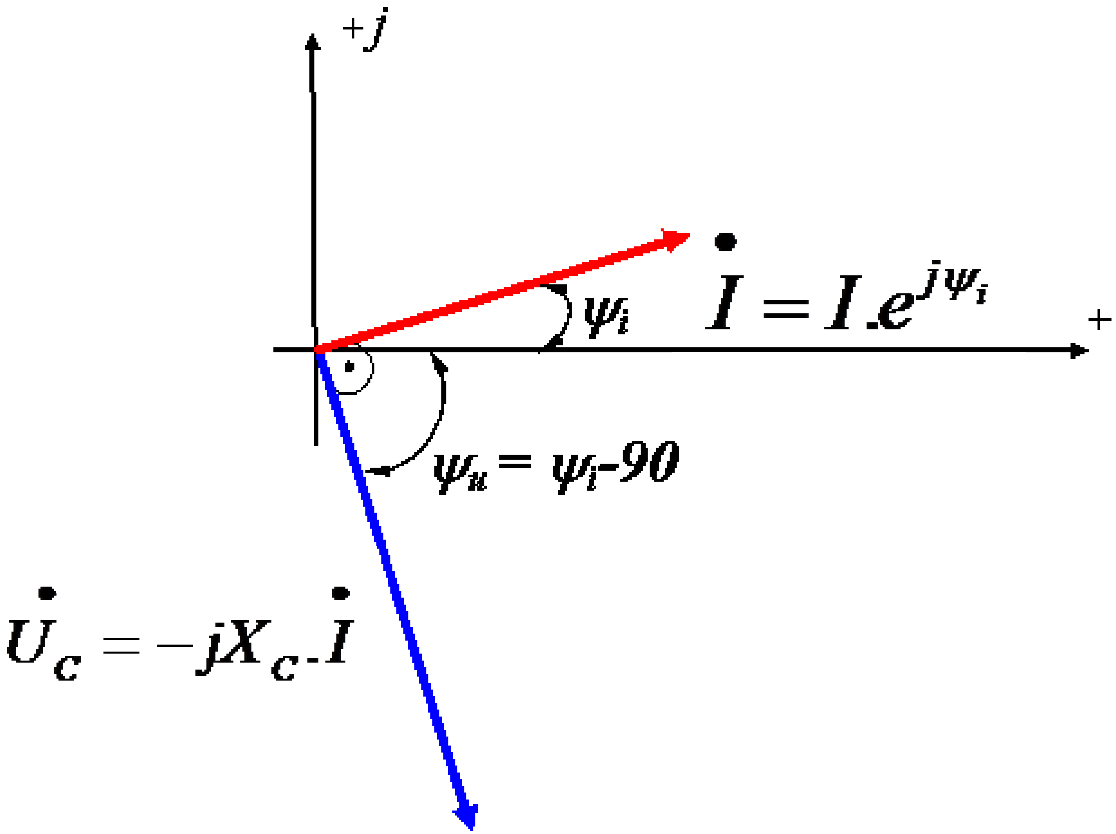
$$i(t) = i_m \sin\omega t \longrightarrow \dot{I} = \frac{i_m}{\sqrt{2}} e^{j0}$$

$$u_C(t) = i_m \frac{1}{\omega C}\sin(\omega t - 90) \longrightarrow \dot{U}_C = \frac{i_m}{\sqrt{2}} . \frac{1}{\omega C} e^{-j90} = -j\frac{1}{\omega C} . \dot{I}.$$

$$\dot{U}_C = -j\frac{1}{\omega C} . \dot{I} = -jX_C . I$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_C = -j\frac{1}{\omega C} = -jX_C}$$

Векторна диаграма

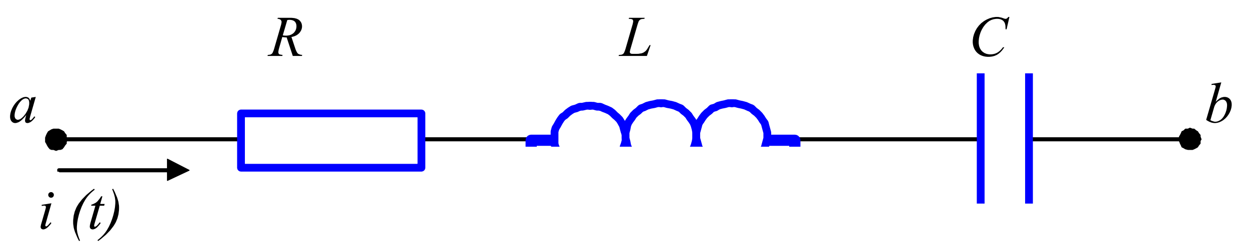


$$Z_L = -jX_C = -j\frac{1}{\omega C}$$

$$\dot{U}_C = -jX_C\,\dot{I}$$

$$\psi_u = \psi_i - 90^0$$

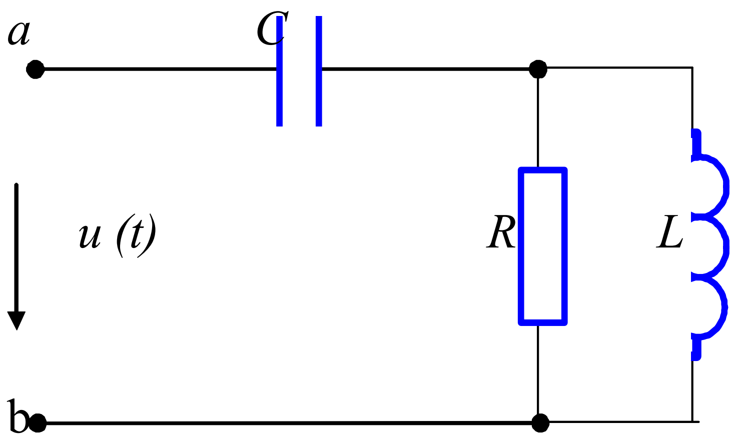
<u>Пример 1:</u> Да се определи комплексното съпротивление на участъка (фиг.10), ако е известно: $R = 10\Omega$, $L=30$ mH, $C=50\mu F$, $f=160Hz$.



фиг.10

<u>Решение</u>

Пример 2: Да се определи комплексното съпротивление на участъка (фиг.11), ако:

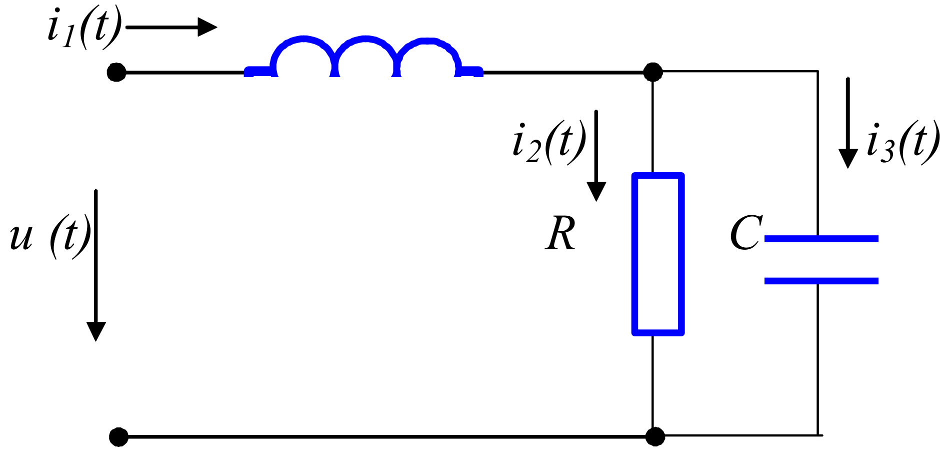


R = 20Ω, L=20 mH,
C=50μF, f=160Hz.

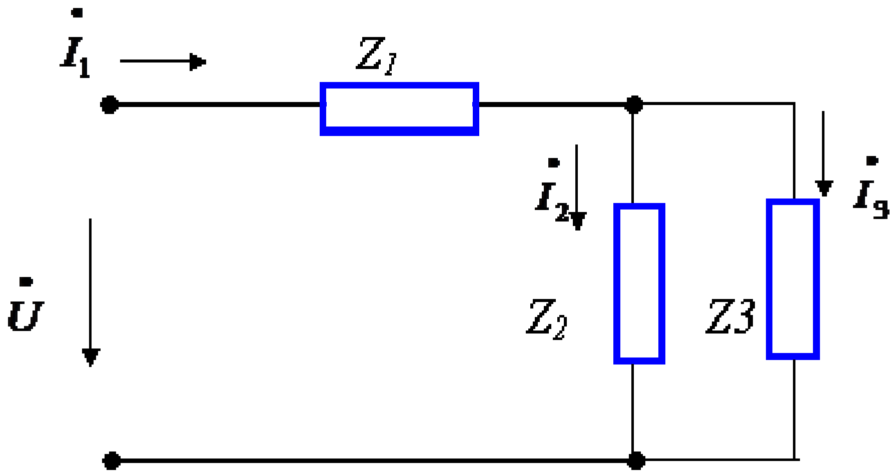
Решение

Пример 3: Да се определи комплексното съпротивление на участъка (фиг.12) и токовете $i_1(t)$, $i_2(t)$ и $i_3(t)$ ако е известно:

$u(t)=200\sin(\omega t+45)V$
$f=80Hz$,
$R = 10\Omega$, $L=20\ mH$,
$C=100\mu F$,.



фиг.12



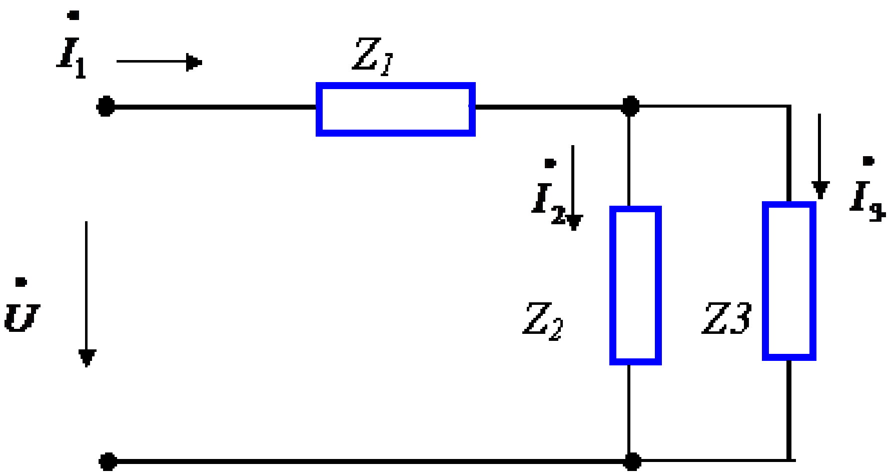
фиг.13

$$\dot{U} = \frac{200}{\sqrt{2}} e^{j45} = (100 + j100)V$$

$$Z_1 = j\omega L = j.5.10^2.20.10^{-3} = j10\Omega$$

$$Z_2 = R = 10\Omega$$

$$Z_3 = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{5.10^2.100.10^{-6}} = -j20\Omega$$



фиг.13

Решение

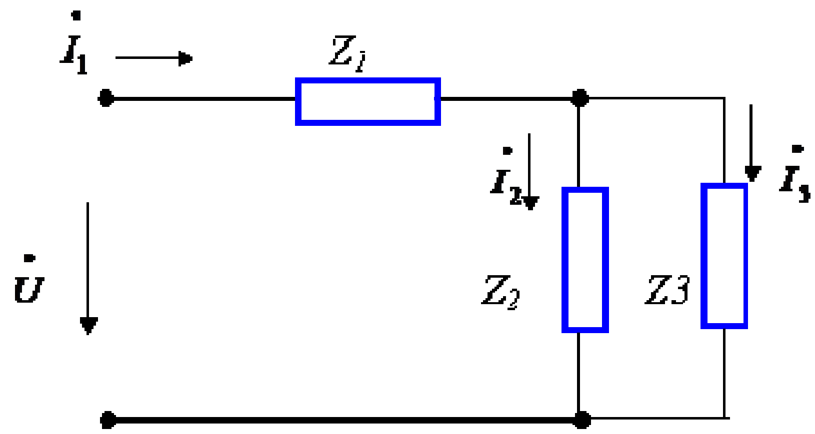
1. Определяме комплексното входно напрежение

$$u(t)=200\sin(\omega t+45)V$$

$$\dot{U}=Ue^{j\psi_u}=\frac{u_m}{\sqrt{2}}e^{j\psi_u}=\frac{200}{\sqrt{2}}e^{j45}=$$

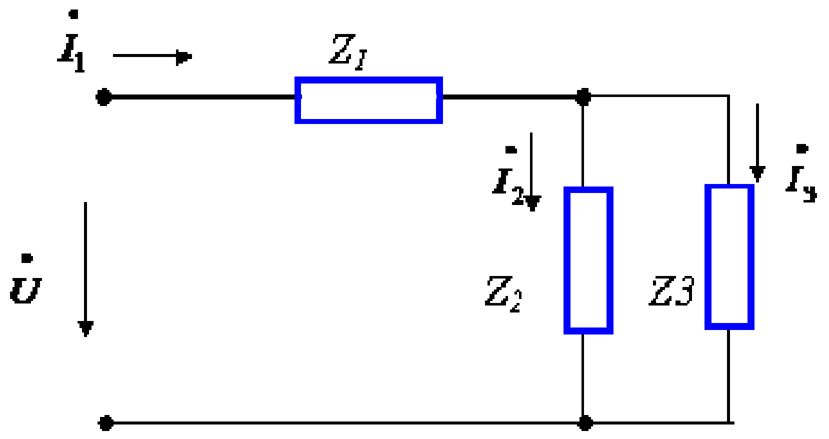
$$100\sqrt{2}.(\cos 45+j\sin 45)=100\sqrt{2}.(\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2})=(100+j100)V$$

2. Определяме еквивалентното съпротивление



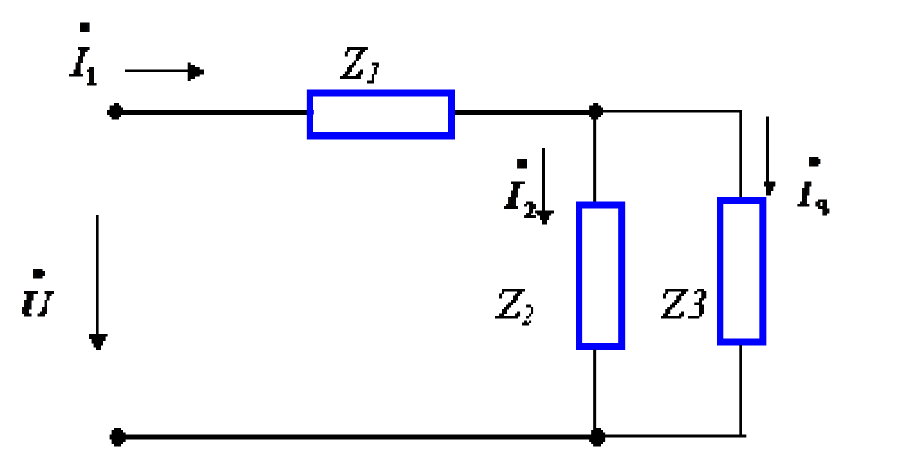
фиг.13

. Определяме комплекса на входния ток $\dot{I}_1$.



фиг.13

Определяме комплексите на токовете в двата паралелни клона $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$.



фиг.13

Определяне на моментните стойности на токовете във веригата

Получени са: $\dot{I}_1 = (14 + 2j)A$ $\dot{I}_2 = (12 - j4)A$ $\dot{I}_3 = (2 + 6j)A$

$$\dot{I}_1 = 14 + 2j = \sqrt{14^2 + 2^2}\, e^{jarctg\frac{2}{14}} = \sqrt{200} e^{j8,13} = 10\sqrt{2}.e^{j8,13} = I_1 e^{j\psi_1}$$

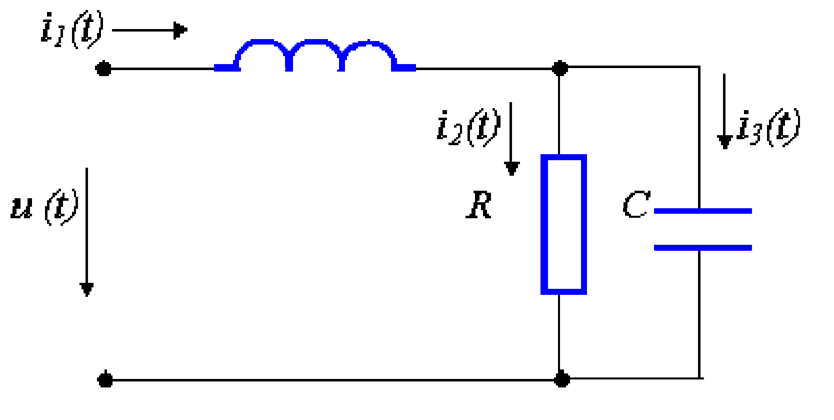
$$\Rightarrow i_1(t) = I_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_1) = 20\sin(\omega t + 8{,}13^0)A$$

$$\dot{I}_2 = 12 - 4j = \sqrt{12^2 + 4^2}\, e^{jarctg\frac{-4}{12}} = \sqrt{160} e^{-j18,43} = 4\sqrt{10}.e^{-j18,43} = I_2 e^{j\psi_2}$$

$$\Rightarrow i_2(t) = I_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_2) = 17{,}9\sin(\omega t - 18{,}43^0)A$$

$$\dot{I}_3 = 2 + 6j = \sqrt{2^2 + 6^2}\, e^{jarctg\frac{6}{2}} = \sqrt{40} e^{j71,56} = 2\sqrt{10}.e^{j71,56} = I_3 e^{j\psi_3}$$

$$\Rightarrow i_3(t) = I_3\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_3) = 8{,}94\sin(\omega t + 71{,}56^0)A$$



фиг.12

Векторна диаграма

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3$$