Комплексна форма на основните закони за електрически вериги.

При анализа на синусоидални режими в линейни електрически вериги най-често се използва **метод с комплексни образи** (символичен метод).

синусоидална величина
- ток
- напрежение

→

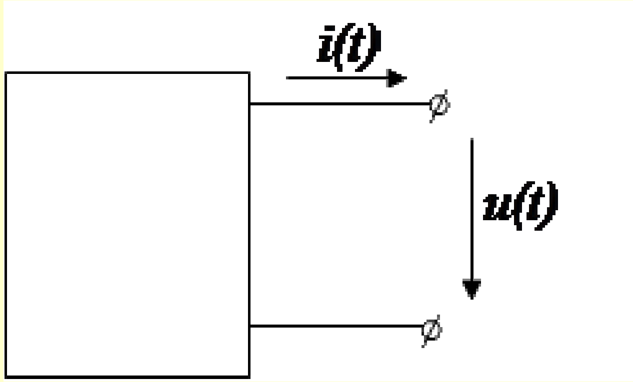
комплексна величина
- ток
- напрежение

консуматори
- резистори - **R**
- бобини - **L**
- кондензатори - **C**

→

комплексни съпротивления

Мощности при синусоидални режими

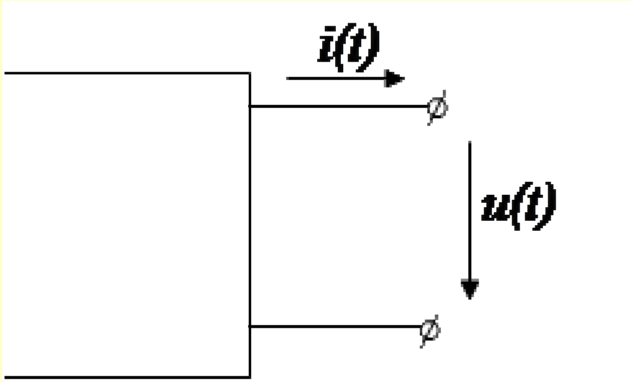


$$u(t) = u_m \sin(\omega t + \psi_u),$$
$$i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i) = i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi)$$

$$\psi_u = 0 \longrightarrow \begin{array}{l} u(t) = u_m \sin \omega t \\ i(t) = i_m \sin(\omega t - \varphi) \end{array}$$

1. Моментна мощност - ***p(t)***

Активна мощност- *P*



$u(t) = u_m sin\,\omega t$

$i(t) = i_m sin(\omega t - \varphi)$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t).dt = \frac{1}{T}\int_0^T U.I[\cos\varphi - \cos(2\omega t - \varphi)].dt =$$

$$U.I\cos\varphi - \frac{1}{T}U.I\int_0^T \cos(2\omega t - \varphi).dt$$

0 - интеграл на хармонична функция

$$\boxed{\Rightarrow P = U.I\cos\varphi}$$

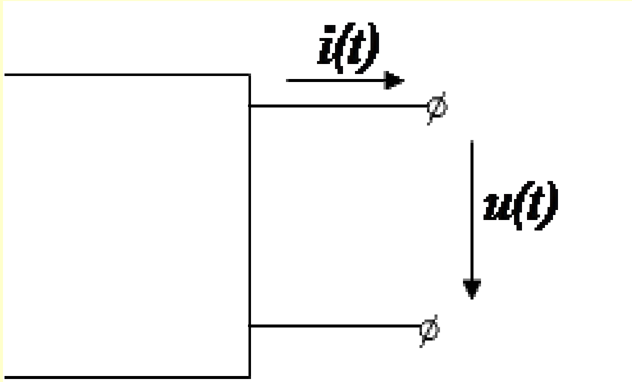
[P]=W

Активната мощност <u>физически представлява енергията, която се отделя за единица време във вид на топлина</u> за участъка от верига с активно съпротивление ***R***

$$P = U.I\cos\varphi = I^2 z.\cos\varphi = I^2 R$$

$$R = z.\cos\varphi$$

Реактивна мощност- *Q*



$u(t) = u_m \sin \omega t$

$i(t) = i_m \sin(\omega t - \varphi)$

$$\boxed{Q = U.I \sin \varphi}$$

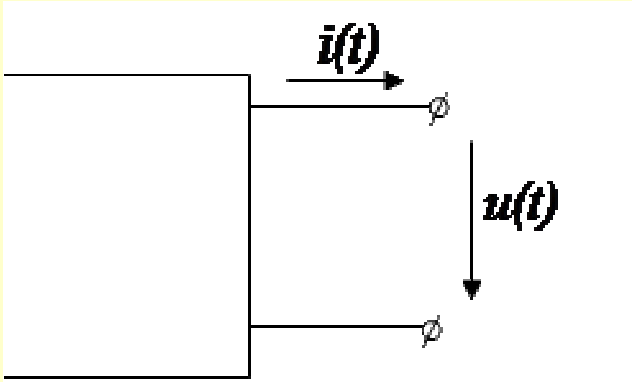
Реактивната мощност ***Q*** е енергия, която се обменя между източника и консуматора (за време равно на периода ***T*** се предава 2 пъти от генератора към консуматора и обратно)

$$\boxed{Q = U.I \sin \varphi = I^2 z. \sin \varphi = I^2 X}$$

[Q]=VAr

От триъгълника на съпротивленията е известно, че $X = z. \sin \varphi; \quad X = X_L - X_C$

<u>Пълна мощност- ***S***</u>



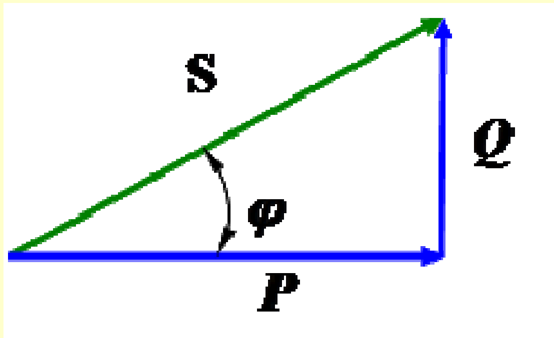
$$u(t) = u_m \sin \omega t$$
$$i(t) = i_m \sin(\omega t - \varphi)$$

$$\boxed{S = U.I}$$

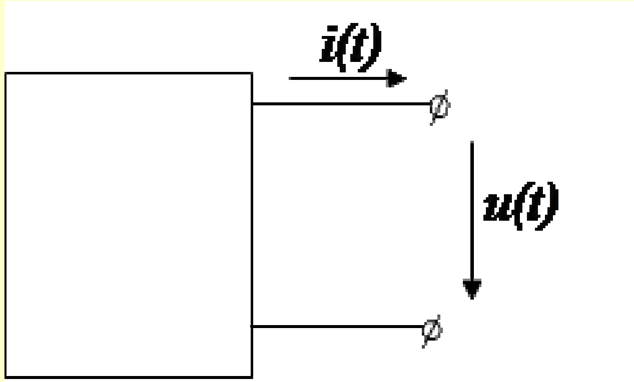
[S]=VA

Пълната мощност ***S*** характеризира тази мощност, която източника би отдавал на потребителя при $\boldsymbol{\cos\varphi = 1}$

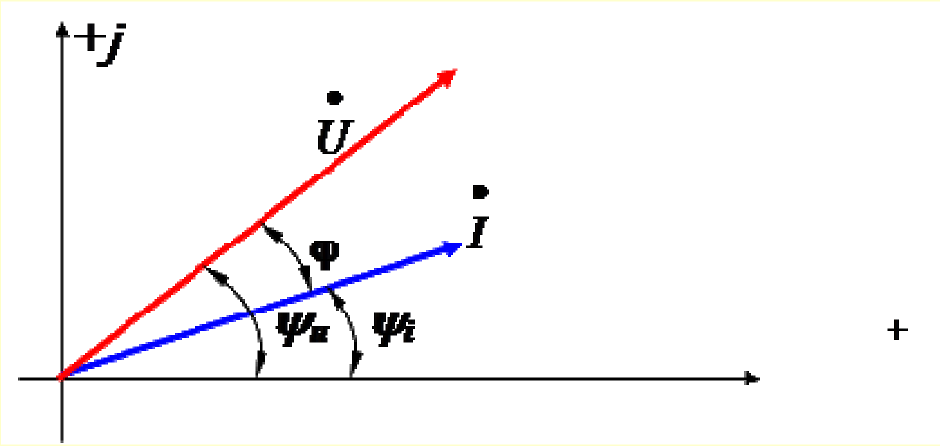
$$\boxed{S^2 = P^2 + Q^2}$$



Комплексна мощност- $\dot{S}$



$$u(t) = u_m \sin \omega t$$
$$i(t) = i_m \sin(\omega t - \varphi)$$



$$\dot{U} = U e^{j\psi_u}$$
$$\dot{I} = I e^{j\psi_i}$$
$$\overset{*}{I} = I e^{-j\psi_i}$$

$$\dot{S} = \dot{U} . \overset{*}{I} = U e^{j\psi_u} . I e^{-j\psi_i} = U I e^{j(\psi_u - \psi_i)} = U I e^{j\varphi} =$$
$$= U I \cos\varphi + U I \sin\varphi = P + jQ$$

$$P = \mathrm{Re}[\dot{S}]$$
$$Q = \mathrm{Im}[\dot{S}]$$

Пример 1. Анализ на синусоидални режими с използване на законите на Кирхоф (Метод с клонови токове).

Да се определят токовете $i_1(t)$, $i_2(t)$ и $i_3(t)$за веригата от фиг.3 ако е известно:

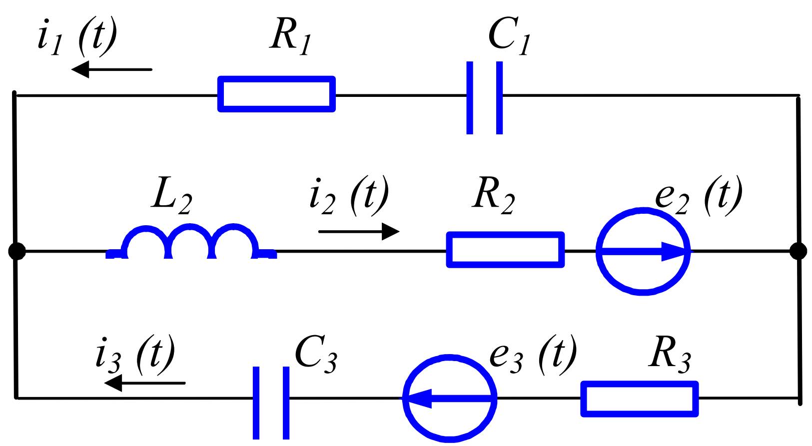
$e_2(t)=71sin(1000t+45)V$

$e_2(t)=113sin(1000t+90)V$

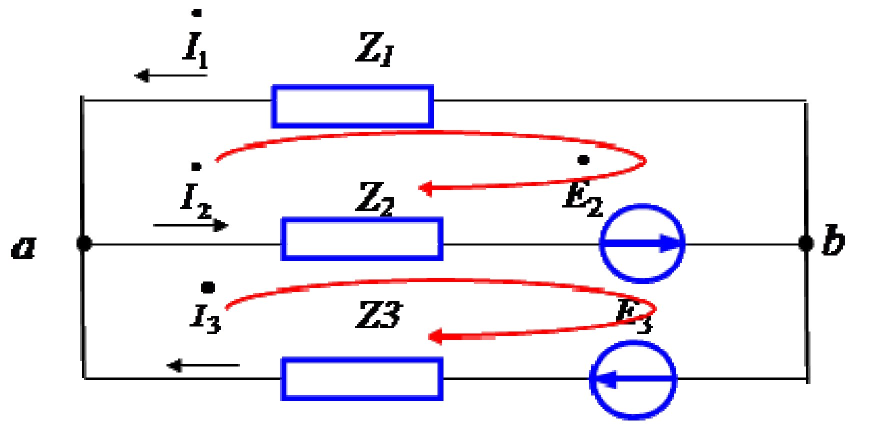
$R_1 = R2=5\Omega$, $R_3 =10\Omega$,

$L_2=10\ mH$,

$C_1=200\mu F$, $C_3=125\mu F$,.



Решение



фиг.4

$$\omega = 1000 = 10^3 \, rad/s$$

$$Z_1 = R_1 - j\frac{1}{\omega C_1} = 5 - j\frac{1}{10^3.200.10^{-6}} = (5 - j5)\Omega$$

$$Z_2 = R_2 + j\omega L_2 = 5 + j.10^3.10.10^{-3} = (5 + j10)\Omega$$

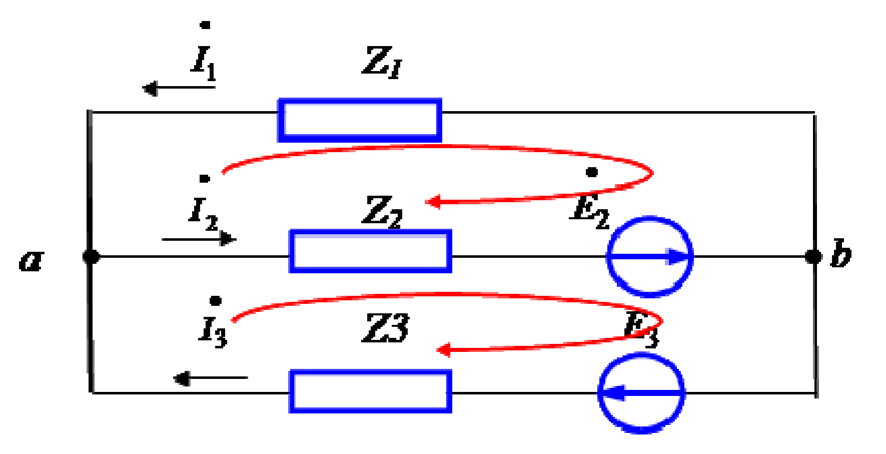
$$Z_3 = R_3 - j\frac{1}{\omega C} = 10 - j\frac{1}{10^3.125.10^{-6}} = (5 - j8)\Omega$$

$$\dot{E}_2 = E_2 e^{j\psi_{e2}} = \frac{e_{2m}}{\sqrt{2}} e^{j\psi_{e2}} = \frac{71}{\sqrt{2}} e^{j45} =$$

$$50.(\cos 45 + j\sin 45) = 50.(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}) = (35{,}5 + j35{,}5)V$$

$$\dot{E}_3 = E_3 e^{j\psi_{e3}} = \frac{e_{3m}}{\sqrt{2}} e^{j\psi_{e3}} = \frac{80}{\sqrt{2}} e^{j90} =$$

$$80.(\cos 90 + j\sin 90) = 80.(0 + j) = j80V$$



фиг.4

2. Определяме брой клонове и брой възли във веригата:

- брой възли *n=2,*
- брой клонове *m=3*

3. Записваме система уравнения по метода с клонови токове:

•*n-1=1* уравнения по I закон на Кирхоф

•*k=m-n+1=2* уравнения по II закон на Кирхоф

за възел ”*a*”:

$$-\dot{I}_1+\dot{I}_2-\dot{I}_3=0$$

за двата контура :

$$-\dot{I}_1 Z_1-\dot{I}_2 Z_2=-\dot{E}_2$$

$$\dot{I}_2 Z_2+\dot{I}_3 Z_3=\dot{E}_2+\dot{E}_3$$

4. Заместваме със стойности и решаваме системата:

$$\begin{cases} -\dot{I}_1+\dot{I}_2-\dot{I}_3=0 \\ -\dot{I}_1(5-j5)-\dot{I}_2(5+j10)=-(35{,}5+j35{,}5) \\ \dot{I}_2(5+j10)+\dot{I}_3(10-j8)=(35{,}5+j35{,}5)+j80 \end{cases}$$

5. Получаваме комплексите на трите тока:

$$\dot{I}_1=(6{,}71-j1{,}375)=6{,}853e^{-j11{,}58}A$$

$$\dot{I}_2=(6{,}41+j2{,}34)=6{,}82e^{j20{,}04}A$$

$$\dot{I}_3=(-0{,}3+j3{,}71)=3{,}73e^{j94{,}65}A$$

$$\dot{I}_1 = (6,71 - j1,375) = 6,853e^{-j11,58} A$$

$$\dot{I}_2 = (6,41 + j2,34) = 6,82e^{j20,04} A$$

$$\dot{I}_3 = (-0,3 + j3,71) = 3,73e^{j94,65} A$$

6. Тогава моментните стойности на токовете са:

$$i_1(t) = I_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_1) = 6,85\sqrt{2}\sin(1000t - 11,58^0)A$$

$$i_2(t) = I_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_2) = 6,82\sqrt{2}\sin(1000t + 20,04^0)A$$

$$i_3(t) = I_3\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_3) = 3,73\sqrt{2}\sin(1000t + 94,65^0)A$$

Пример 2. Да се направи баланс на мощностите за веригата

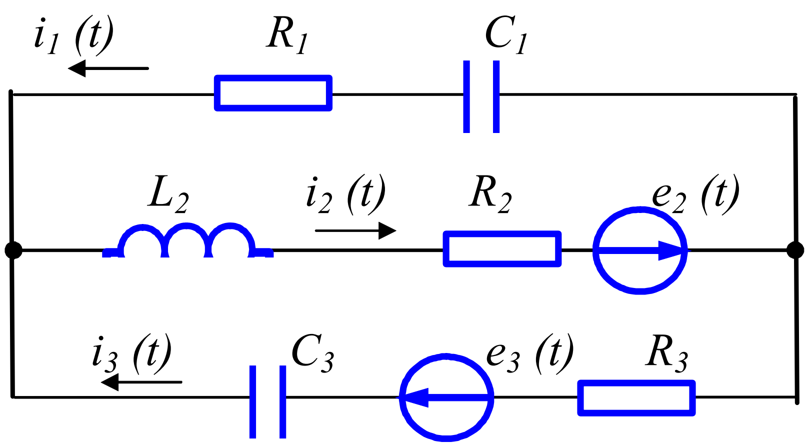
$e_2(t)=71\sin(1000t+45)V$

$e_2(t)=113\sin(1000t+90)V$

R_1 = R2=5Ω, R_3 =10Ω,

L_2=10 mH,

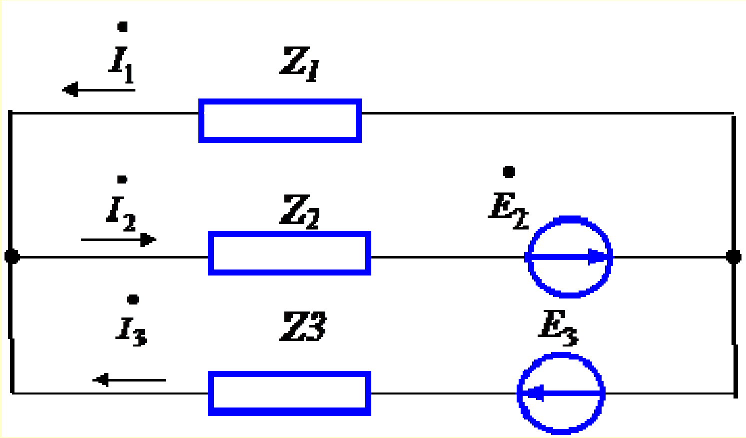
C_1=200μF, C_3=125μF,.



Решение

Да се направи баланс на мощностите означава да се направи проверка дали **мощността на източниците е равна на мощността на консуматорите**.

$$\sum \dot{S}_{изт} = \sum \dot{S}_{конс}$$



$$\dot{I}_1 = (6{,}71 - j1{,}375) = 6{,}853e^{-j11{,}58}A$$

$$\dot{I}_2 = (6{,}41 + j2{,}34) = 6{,}82e^{j20{,}04}A$$

$$\dot{I}_3 = (-0{,}3 + j3{,}71) = 3{,}73e^{j94{,}65}A$$

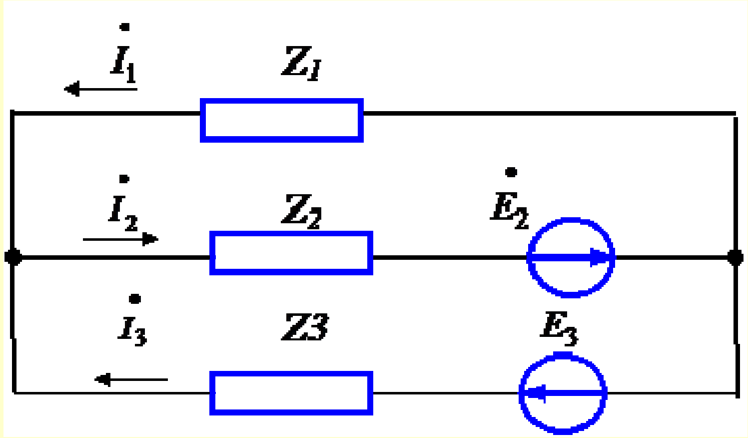
$$\dot{E}_2 = (35{,}5 + j35{,}5)V \qquad \dot{E}_3 = j80V$$

Определяме мощността на източниците $\sum \dot{S}_{изт} = \dot{S}_{E2} + \dot{S}_{E3}$

$$\dot{S}_{E_2} = \dot{E}_2.\overset{*}{I}_2 = (35{,}5 + j35{,}5)(6{,}41 - j2{,}34)$$

$$\dot{S}_{E_3} = \dot{E}_3.\overset{*}{I}_3 = j80.(-0{,}3 - j3{,}72)$$

$$\sum \dot{S}_{изт} = (606{,}4 + j120)VA$$



$$\dot{I}_1 = (6{,}71 - j1{,}375) = 6{,}853e^{-j11{,}58} A$$
$$\dot{I}_2 = (6{,}41 + j2{,}34) = 6{,}82e^{j20{,}04} A$$
$$\dot{I}_3 = (-0{,}3 + j3{,}71) = 3{,}73e^{j94{,}65} A$$

$$Z_1 = (5 - j5)\Omega$$
$$Z_2 = (5 + j10)\Omega$$
$$Z_3 = (5 - j8)\Omega$$

<u>Определяме мощността на консуматорите</u>

$$\sum \dot{S}_{конс} = Z_1 I_1^2 + Z_2 I_2^2 + Z_3 I_3^2 =$$
$$(5 - j5)(6{,}71^2 + 1{,}375^2) + (5 + j10)(6{,}41^2 + 2{,}34^2) + (10 - j8)(0{,}3^2 + 3{,}72^2) =$$
$$(606{,}4 + j120) VA$$

<u>Следователно се получава баланс на мощностите, а именно:</u>

$$\boxed{\sum \dot{S}_{изт} = \sum \dot{S}_{конс} = (606{,}4 + j120) VA}$$

$$P = \mathrm{Re}[\dot{S}] = 606{,}4 W$$
$$Q = \mathrm{Im}[\dot{S}] = 120 VAr$$