Създаване на линейни оптимизационни модели

1 Пример 1 – Организация на производството на мебели

1.1 Постановка на задачата

Малка фирма разполага с **12.5** единици дървен материал, за да започне производството на маси и столове.

За **1** маса трябват **2** единици дървен материал, а за **1** стол – **1** единица.

Дистрибуторът предлага по **20 лв** на маса и **15 лв** за стол, но не иска повече от **8** стола и иска поне **2** пъти повече столове от маси.

Колко маси и стола да произведе фирмата, за да си осигури максимална печалба?

1.2 Математически модел

Елементи на решението (управляеми променливи): x_1 - брой маси

x_2 - брой столове

Целева функция – печалбата от продажбата на масите и столовете:

$L = 20x_1 + 15x_2$ $\Rightarrow$ Да се максимизира!

Ограничения:

- от наличния материал: $2x_1 + x_2 \le 12.5$
- от условията на търговеца: $x_2 \le 8$, $x_2 \ge 2x_1$
- съображения от здрав разум : $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$

1.3 Задача от линейното програмиране

Да се намерят неотрицателни стойности на променливите x_1 и x_2, които да удовлетворяват ограниченията

$$2x_1 + x_2 \le 12.5$$

$$x_2 \le 8$$

$$x_2 \ge 2x_1$$

и превръщат в максимум функцията:

$$L = 20x_1 + 15x_2 .$$

2 Пример 2 – Организация на производството на бира

2.1 Постановка на задачата

Пивоварна произвежда 4 вида бира: светла, тъмна, английска и екстра.

Използва суровини: малц, хмел, мая и вода (водата е без ограничения).

Технологична таблица:

Суровина	Продукт (кг/л)				Налични количества
	Светла	Тъмна	Английска	Екстра	
Малц	0.1	0.1	0	0.3	50 кг
Хмел	0.2	0.1	0.2	0.1	150 кг
Мая	0.1	0.1	0.1	0.4	80 кг
Приход (лв/л)	0.6	0.5	0.3	0.7	

Задача: Какво количество от всеки продукт да се произведе, за да се получат максимални приходи?

2.2 Математически модел

Управляеми променливи: x_1, x_2, x_3, x_4

(количества произведени продукти от всеки вид в литри)

Целева фунция: да се максимизират общите приходи

$$L = 0.6x_1 + 0.5x_2 + 0.3x_3 + 0.7x_4$$

Ограничения: Определят се от наличните количества суровини

$$0.1x_1 + 0.1x_2 + 0x_3 + 0.3x_4 \le 50$$

$$0.2x_1 + 0.1x_2 + 0.2x_3 + 0.1x_4 \le 150$$

$$0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.1x_3 + 0.4x_4 \le 80$$

$$x_i \ge 0, \quad i = 1,2,3,4$$

2.3 Задача от линейното програмиране

Да се намерят неотрицателни стойности на променливите x_1, x_2, x_3, x_4, които да удовлетворяват ограниченията

$$0.1x_1 + 0.1x_2 + 0x_3 + 0.3x_4 \leq 50$$

$$0.2x_1 + 0.1x_2 + 0.2x_3 + 0.1x_4 \leq 150$$

$$0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.1x_3 + 0.4x_4 \leq 80$$

и превръщат в максимум функцията:

$$L = 0.6x_1 + 0.5x_2 + 0.3x_3 + 0.7x_4.$$

3 Пример 3 - Организация на производството на петролна рафинерия

3.1 Постановка на задачата

Рафинерия използва 3 вида суров нефт (**А, В, С**) за производство на **обикновен** и **супер бензин**. Могат да се използват **2 процеса на обработка**. При първия процес на обработка се използват **5** единици от суровина **А**, **7** единици – от суровина **В** и **2** единици – от суровина **С**, за да се произведат **9** единици обикновен и **7** единици супер бензин. При втория процес на обработка тези стойности са съответно **3**, **9** и **4** за производството на **5** и **9** единици обикновен и супер бензин.

Поради вече сключени договори рафинерията трябва да произведе поне **500** единици обикновен бензин и **300** единици супер бензин. Тя разполага с **1500** единици от суровина **А**, **1900** – от **В** и **1000** – от **С**.

За всяка единица **обикновен** бензин рафинерията получава приход **6** единици, а за **супер** – **9** единици.

Тези изходни данни са подредени в технологична таблица:

Суровини	**Налични количества**	**Първи процес**	**Втори процес**	**Приход**
А	**1500**	**5**	**3**	
В	**1900**	**7**	**9**	
С	**1000**	**2**	**4**	
Краен продукт	**Договорирани количества**			
Обикновен	**500**	**9**	**5**	**6**
Супер	**300**	**7**	**9**	**9**

Задача: Как да се използват запасите и двата процеса, за да се изпълнят поръчките и да се осигури максимален приход?

3.2 Математически модел

Управляеми променливи: $x_1, x_2 \quad (x_1, x_2 \geq 0)$

(брой производствени цикли за всеки от двата процеса)

Произведените количества бензин ще са:

$9x_1 + 5x_2$ от обикновения бензин

$7x_1 + 9x_2$ от бензин супер

Целева фунция: да се максимизират общите приходи

$$L = 6(9x_1 + 5x_2) + 9(7x_1 + 9x_2)$$

Ограничения:

- от наличните количества суровини:

$5x_1 + 3x_2 \le 1500$

$7x_1 + 9x_2 \le 1900$

$2x_1 + 4x_2 \le 1000$

- от задълженията по договор:

$9x_1 + 5x_2 \ge 500$

$7x_1 + 9x_2 \ge 300$

3.3 Задача от линейното програмиране

Да се намерят неотрицателни стойности на променливите x_1, x_2, които да удовлетворяват ограниченията

$5x_1 + 3x_2 \le 1500$

$7x_1 + 9x_2 \le 1900$

$2x_1 + 4x_2 \le 1000$

$9x_1 + 5x_2 \ge 500$

$7x_1 + 9x_2 \ge 300$

и превръщат в максимум функцията:

$L = 6(9x_1 + 5x_2) + 9(7x_1 + 9x_2)$.

4 Основна задача на линейното програмиране (ОЗЛП)

4.1 Стандартна форма на ОЗЛП

Да се намерят неотрицателни стойности на променливите $x_1, x_2, ..., x_n$, които да удовлетворяват ограниченията:

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ за $i = 1,2,...,m$ и да превръщат в **максимум** линейната функция

$L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ за $j = 1,2,...,n$

- **При минимизация**

Променя се знакът на L - максимизира се не L, а $(-L)$, например минимизацията на $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ е еквивалентна на максимизацията на $\sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j$. Ако V е оптималната стойност на $\sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j$, то оптималната стойност на $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ е $(-V)$.

- **При неравенства**

  - Всяко неравенство от вида $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$ може де се запише като

  $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + s = b_i$, където $s \ge 0$ е **допълнителна** променлива

  (slack variable – остатъчна променлива).

Пример:

$0.1x_1 + 0.1x_2 + 0x_3 + 0.3x_4 \le 50$ - ограничение от наличните количества малц при производството на бира. Ако означим с x_5 количеството неизползван малц, тогава

$0.1x_1 + 0.1x_2 + 0x_3 + 0.3x_4 + x_5 = 50$

  - Всяко неравенство от вида $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i$ може де се запише като

  $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - t = b_i$, където $t \ge 0$ е **допълнителна** променлива

  (surplus variable – добавъчна променлива).