Симплекс алгоритъм

1 Въведение в Симплекс алгоритъма

Стъпка 1. Избират се m променливи, задаващи допустимо базисно решение. Изключват се тези променливи от израза за целевата функция L.

Стъпка 2. Проверява се дали може да се подобри стойността на L, като се зададе положителна стойност на някоя от свободните променливи (по **симплекс критерий 1**), например x_j. Ако може, към стъпка 3; ако не – край на изчисленията.

Стъпка 3. Намира се максималната стойност, която може да получи избраната на стъпка 2 променлива x_j (по **симплекс критерий 2**). Стойността на x_j може да се увеличава дотогава, докато една от базисните променливи, например x_k, стане равна на 0. Намерената променлива x_k се изключва от базиса и от израза за L, а в новия базис се въвежда x_j.

Стъпка 4. Пререшава се системата от уравнения спрямо новите базисни променливи и се преминава към стъпка 2.

2 Пример за прилагане на симплекс-алгоритъма (пример 1)

Да се максимизира $L = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$ при ограничения:

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 15 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 120 \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \le 100 \\ x_i \ge 0,\ i = 1,...,4 \end{array} \right.$$

Въвеждат се допълнителни променливи x_5, x_6, x_7 (за да се получат равенства) и x_0 за целевата функция L:

$$x_0 - 4x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 11x_4 = 0 \qquad (ред\ 0)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15 \qquad (ред\ 1)$$

$$7x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 120 \qquad (ред\ 2)$$

$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 + x_7 = 100 \qquad (ред\ 3)$$

<u>Стъпка 1.</u> **Избор на начално базисно решение** - от допълнителните променливи: x_5, x_6, x_7. При $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ (свободни променливи), базисните са:

$$x_5 = 15,\ x_6 = 120,\ x_7 = 100,\quad а\quad x_0 = 0$$

И Т Е Р А Ц И Я 1

Стъпка 2. Избор на свободна променлива за включване в поредния базис

Симплекс-критерий 1: Ако в ред 0 има свободни променливи с отрицателни коефициенти, от тях се избира променливата x_j с максимална абсолютна стойност.

Ако всички свободни променливи имат положителни или нулеви коефициенти, достигнато е оптималното решение.

За итерация 1 се избира нова базисна променлива $x_j = x_4$.

Стъпка 3. Определяне на максималната стойност на x_j

Симплекс-критерий 2:

- Изчисляват се отношенията на числата, намиращи се в дясната част на редове 1, 2,…, към коефициентите пред новата базисна променлива x_j.
- Избира се отношението с минимална стойност и в новото базисно решение x_j се приравнява на него. Базисната променлива x_k, отговаряща на това отношение, в новото решение става свободна променлива (приравнява се на 0).
- Ако коефициентите пред x_j във всички редове са отрицателни, задачата има **неограничена стойност** на целевата функция.

Базисни променливи	Стойности в поредното решение	Коефициенти пред x_4	Стойности на отношенията	Избрана променлива
x_5	**15**	**1**	**15**	
x_6	**120**	**2**	**60**	
x_7	**100**	**15**	**6.67**	$x_4 = 6.67$ $x_7 = 0$

Стъпка 4. Смяна на базиса – пререшаване на уравненията спрямо новите базисни променливи.

- В уравнението, в което се сменя базисната променлива (ред 3), коефициентът пред новата базисна променлива трябва да стане **1** (за примера ред 3 се дели на **15**):

$$\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + x_4 + \frac{1}{15}x_7 = \frac{20}{3}$$

- В останалите уравнения новата базисна променлива трябва да се изключи (коефициентите пред x_4 трябва да станат 0):
  - Ред **3** се умножава с **11** и се събира с ред **0**;
  - Ред **3** се умножава с **-1** и се събира с ред **1**;
  - Ред **3** се умножава с **-2** и се събира с ред **2**;

$$x_0 - \frac{9}{5}x_1 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{5}{3}x_3 + \frac{11}{15}x_7 = \frac{220}{3} \qquad (\text{ред } 0)$$

$$\frac{4}{5}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + x_5 - \frac{1}{15}x_7 = \frac{25}{3} \qquad (\text{ред } 1)$$

$$\frac{33}{5}x_1 + \frac{13}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3 + x_6 - \frac{2}{15}x_7 = \frac{320}{3} \qquad (\text{ред } 2)$$

$$\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + x_4 + \frac{1}{15}x_7 = \frac{20}{3} \qquad (\text{ред } 3)$$

При свободни променливи $x_1 = x_2 = x_3 = x_7 = 0$ се получава ново базисно решение:

$$x_0 = \frac{220}{3},\quad x_5 = \frac{25}{3},\quad x_6 = \frac{320}{3},\quad x_4 = \frac{20}{3}$$

ИТЕРАЦИЯ 2

Стъпка 2. Избор на свободна променлива за включване в поредния базис

От x_1, x_2, x_3 се избира x_1 по симплекс критерий 1.

Стъпка 3. Изчисления по симплекс критерий 2 - за включване на x_1 в новия базис.

Базисни променливи	Стойности в поредното решение	Коефициенти пред x_1	Стойности на отношенията	Избрана променлива
x_5	**25/3**	**4/5**	**125/12**	$x_1 = 125/12$ $x_5 = 0$
x_6	**320/3**	**33/5**	**1600/99**	
x_4	**20/3**	**1/5**	**100/3**	

Стъпка 4. Преобразуване на системата уравнения.

$$x_0 + \frac{1}{6}x_2 - \frac{11}{12}x_3 + \frac{9}{4}x_5 + \frac{7}{12}x_7 = \frac{1105}{12} \qquad (\text{ред } 0)$$

$$x_1 + \frac{5}{6}x_2 + \frac{5}{12}x_3 + \frac{5}{4}x_5 - \frac{1}{12}x_7 = \frac{125}{12} \qquad (\text{ред } 1)$$

$$-\frac{7}{6}x_2 - \frac{13}{12}x_3 - \frac{33}{4}x_5 + x_6 + \frac{5}{12}x_7 = \frac{455}{12} \qquad (\text{ред } 2)$$

$$\frac{1}{6}x_2 + \frac{7}{12}x_3 + x_4 - \frac{1}{4}x_5 + \frac{1}{12}x_7 = \frac{55}{12} \qquad (\text{ред } 3)$$

При свободни променливи $x_2 = x_3 = x_5 = x_7 = 0$ се получава трето базисно решение:

$$x_0 = \frac{1105}{12},\ x_1 = \frac{125}{12},\ x_6 = \frac{455}{12},\ x_4 = \frac{55}{12}$$

<u>И Т Е Р А Ц И Я 3</u>

<u>Стъпка 2.</u> Избор на свободна променлива за включване в поредния базис

По симплекс критерий 1 може да се избира само x_3.

<u>Стъпка 3.</u> Изчисления по симплекс критерий 2 - за включване на x_3 в новия базис.

Базисни променливи	Стойности в поредното решение	Коефициенти пред x_3	Стойности на отношенията	Избрана променлива
x_1	**125/12**	**5 / 12**	**25**	
x_6	**455/12**	**-13 / 12**	**-**	
x_4	**55/12**	**7 / 12**	**55 / 7**	$x_3 = 55/7$ $x_4 = 0$

<u>Стъпка 4.</u> Преобразуване на системата уравнения.

$$x_0 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{11}{7}x_4 + \frac{13}{7}x_5 + \frac{5}{7}x_7 = \frac{695}{7} \qquad (ред\ 0)$$

$$x_1 + \frac{5}{7}x_2 - \frac{5}{7}x_4 + \frac{10}{7}x_5 - \frac{1}{7}x_7 = \frac{50}{7} \qquad (ред\ 1)$$

$$-\frac{6}{7}x_2 + \frac{13}{7}x_4 - \frac{61}{7}x_5 + x_6 + \frac{4}{7}x_7 = \frac{825}{7} \qquad (ред\ 2)$$

$$\frac{2}{7}x_2 + x_3 + \frac{12}{7}x_4 - \frac{3}{7}x_5 + \frac{1}{7}x_7 = \frac{55}{7} \qquad (ред\ 3)$$

При $x_2 = x_4 = x_5 = x_7 = 0$ се получава базисно решение:

$x_1 = \frac{50}{7},\ x_3 = \frac{55}{7},\ x_6 = \frac{825}{7}$ и стойност на целевата функция $L = x_0 = \frac{695}{7}$

<u>И Т Е Р А Ц И Я 4</u>

<u>Стъпка 2.</u> Избор на свободна променлива за включване в поредния базис

В ред 0 няма свободни променливи с отрицателни коефициенти, следователно **последното решение е оптималното**.

3 Избор на начално базисно решение

- ***I случай:*** Всички ограничения са от вида:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \text{, където } b_i \ge 0, \quad i = 1,2,\dots,m$$

Въвеждат се m допълнителни променливи и те се включват в началното базисно решение.

- ***II случай:*** Ограниченията са от смесен тип:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \ge b_m$$

Привеждат се във вида $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ с допълнителни променливи и ако

във всяко уравнение i има по една променлива, която влиза само в него и то с коефициент +1, тези променливи образуват началния базис.

- ***III случай:*** Не е налице условието от случай II, въвеждат се **изкуствени** променливи:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i = b_i, \quad y_i \ge 0$$

Началният базис се образува само от **изкуствените** променливи y_i, но в крайното решение трябва всички $y_i = 0$.

Пример 2:

Да се максимизира $L = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$ при ограничения:

$$2x_1 + x_2 - x_3 \ge 7$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 6$$
$$x_1 + 4x_2 = 8$$

Привеждат се до равенства с допълнителни променливи x_4 и x_5:

$$2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \qquad = 7$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad - x_5 = 6$$
$$x_1 + 4x_2 \qquad\qquad = 8$$

Въвеждат се изкуствени променливи x_6, x_7, x_8, които се включват в целевата функция с големи по абсолютна стойност отрицателни коефициенти:

$L = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - Mx_6 - Mx_7 - Mx_8$, където M е голямо число.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \quad + x_6 \quad &= 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \quad - x_5 \quad + x_7 \quad &= 6 \\ x_1 + 4x_2 \quad\quad\quad + x_8 &= 8 \end{aligned}$$

Начален базис: x_6, x_7, x_8

Решение по симплекс алгоритъма:

$$x_1 = 3\frac{1}{9},\ \ x_2 = 1\frac{2}{9},\ \ x_3 = 3\frac{1}{9}, \qquad L_{max} = 7\frac{2}{3},$$

а $x_6 = x_7 = x_8 = 0 \Rightarrow$ задачата има решение!

4 Липса на допустими решения

Ако всички ограничения са от вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$$

тогава се въвеждат допълнителни променливи, те образуват началния базис и допустими решения има. При други ограничения се въвеждат **изкуствени променливи** и ако на последната итерация някоя от тях е $\neq 0$, задачата няма допустими решения.

5 Множество от оптимални решения (алтернативни оптимални решения)

Критерий - ако на последната итерация в израза за целевата функция (ред 0) има една или повече свободни променливи с коефициенти 0.

Пример 3:

Както пример 1, но участва още една променлива в израза за целевата функция и в ограниченията - x_8:

$$\begin{aligned} \dots \quad - 2x_8 &= 0 && (\text{ред } 0) \\ \dots \quad + x_8 &= 15 && (\text{ред } 1) \\ \dots \quad + 9x_8 &= 120 && (\text{ред } 2) \\ \dots + 0.2x_8 &= 100 && (\text{ред } 3) \end{aligned}$$

На последната итерация се получава:

$$x_0 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{11}{7}x_4 + \frac{13}{7}x_5 + \frac{5}{7}x_7 + 0x_8 = \frac{695}{7} \qquad (\text{ред } 0)$$

Ако се включи x_8 в базиса, x_1 трябва да се изключи, получава се **алтернативно** оптимално решение:

$x_8 = 5.1$

$x_6 = 44.4$, останалите $x_j = 0$, целевата функция е същата $L = \dfrac{695}{7}$

$x_3 = 9.9$

6 Теорема за двойственост на симплекс алгоритъма

Основна задача

Да се максимизира функцията $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

при ограничения $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \ (i = 1,2,...,m),, \ x_j \geq 0, \quad (j = 1,2,...,n)$

Двойствена задача

Да се минимизира функцията $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

при ограничения $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \ (j = 1,2,...,n),, \ y_i \geq 0, \quad (i = 1,2,...,m)$

Ако в основната (двойствената) задача някое от ограниченията има вид на *равенство*, то съответната управляема променлива в двойствената (основната) задача *не е ограничена по знак*.

6.1 Теорема за двойственост

Ако основната и двойствената задачи имат допустими решения, то съществува оптимално решение $x_j^* \ (j = 1,...,n)$ на основната задача и $y_i^* \ (i = 1,...,m)$ на двойствената задача и е вярно $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$.

6.2 Теорема за допълнителната лабилност

Ако $x_j^*\ (j = 1,...,n)$ е решение на основната задача, а $y_i^*\ (i = 1,...,m)$ е решение на двойствената задача, то двете решения са оптимални, само ако е вярно:

$$y_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i\right) = 0,\quad i = 1,...,m$$

$$x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) = 0,\quad j = 1,...,n$$

Или ако в модела има ограничения, които са строги неравенства, съответната променлива в двойствената задача има стойност 0.

6.3 Решение на двойствената задача

Коефициентите пред допълнителните променливи в ред 0 на последната итерация на симплекс алгоритъма са равни на оптималните стойности на променливите от двойствената задача.

За пример 1:

Да се максимизира $L = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$ при ограничения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 15 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 120 \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \le 100 \\ x_j \ge 0, \ j = 1,...,4 \end{cases}$$

Двойствена задача:

Да се минимизира $M = 15y_1 + 120y_2 + 100y_3$ при ограничения:

$$\begin{cases} y_1 + 7y_2 + 3y_3 \ge 4 \\ y_1 + 5y_2 + 5y_3 \ge 5 \\ y_1 + 3y_2 + 10y_3 \ge 9 \\ y_1 + 2y_2 + 15y_3 \ge 11 \\ y_i \ge 0, \ i = 1,...,3 \end{cases}$$

На последната итерация на основната задача ред 0 има вида:

$$x_0 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{11}{7}x_4 + \frac{13}{7}x_5 + 0x_6 + \frac{5}{7}x_7 = \frac{695}{7} \qquad (ред\ 0)$$

Допълнителните променливи в основната задача са x_5, x_6, x_7, следователно оптималните стойности на двойствените променливи са:

$$y_1^* = \frac{13}{7}, \ y_2^* = 0, \ y_3^* = \frac{5}{7}$$