Задачата за търговския пътник

Търговски пътник трябва да посети n града, всеки само по един път, като започне пътуването си от град 1 и завърши пак в него.Търси се маршрут с минимални транспортни разходи (или минимален път).

1 Математически модел

Нека да приемем, че градовете са възли в граф, а пътищата между тях са дъгите на графа. Да означим транспортните разходи (разстоянието) между градовете i и j с c_{ij}. При това:

- $c_{ij} \neq c_{ji}$ (в общия случай)
- $c_{ij} = \infty$ (ако няма път между градовете i и j)
- $c_{ii} = \infty$ за $i = 1,...,n$

Управляеми променливи – булеви променливи:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако маршрутът включва прехода от град } i \text{ в град } j \\ 0, & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Целева функция: да се минимизира функцията $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

Ограничения – произлизат от изискването пътникът да пристигне във всеки град точно един път и да го напусне точно един път***:***

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,...,n \qquad \text{(Да напусне всеки град само веднаж)}$$

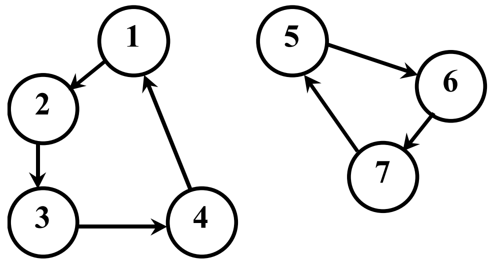
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1,...,n \qquad \text{(Да влезе във всеки град само веднаж)}$$

Получава се модел, който математически се описва точно като модела на **задачата за назначенията**, но решението трябва да е ***цикъл***.

Например, решава се задачата като задача за назначенията и се получава решение:

$x_{12} = x_{23} = x_{34} = x_{41} = x_{56} = x_{67} = x_{75} = 1$

Това може да се представи графически така:



Получава се недопустимо решение, състоящо се от два ***подцикъла***.

2 Метод на клоните и границите за решаване на задачата за търговския пътник

- В началото на всяка итерация t има списък от задачи за назначенията, които се различават по това, че в тях различни величини $c_{ij} = \infty$ (пресича се път от град i до град j). Известна е и горна оценка за стойността на целевата функция x_0^t.
- Преди първата итерация се избира цикъл $x_{12} = x_{23} = x_{34} = ... = x_{n1} = 1$ и горна оценка на целевата функция $x_0^1 = c_{12} + c_{23} + c_{34} + ... + c_{n1}$.
- Списъкът от задачи съдържа само една (по зададените условия).

На всяка итерация t се изпълняват следните стъпки:

Стъпка 1. Прекратяват се изчисленията, ако списъкът от задачи е празен. В противен случай се избира една задача и се изключва от списъка.

Стъпка 2. Решава се избраната задача като задача за назначенията. Ако оптималната стойност на целевата функция $x_0 \geq x_0^t$, то се приема $x_0^{t+1} = x_0^t$ и се връща към стъпка 1. В противен случай – към стъпка 3.

Стъпка 3. Ако полученото решение е цикъл, решението се запомня, приема се $x_0^{t+1} = x_0$ и се преминава към стъпка 1. В противен случай – към стъпка 4.

Стъпка 4. В полученото решение се избира подцикъл с минимален брой променливи (градове). За всяка променлива x_{ij} от този подцикъл се съставя една задача за назначенията със съответна стойност $c_{ij} = \infty$ и се добавя към списъка от задачи (всички останали c_{ij} остават както в предишната итерация). Приема се $x_0^{t+1} = x_0^t$ и се преминава към стъпка 1.

3 Пример

От град \ В град	1	2	3	4	5
1	∝	10 1	25	25	10
2	1	∝	10 1	15	2
3	8	9	∝	20 1	10
4	14	10	24	∝	15 1
5	10 1	8	25	27	∝

Преди първата итерация:

$$x_{12} = x_{23} = x_{34} = x_{45} = x_{51} = 1$$

$$x_0^1 = c_{12} + c_{23} + c_{34} + c_{45} + c_{51} = 65$$

Списък от задачи – само една.

Итерация 1.

<u>Стъпка 1.</u> Има една задача, $x_0^1 = 65$

<u>Стъпка 2.</u> Решаваме я, получава се $x_0 = c_{15} + c_{23} + c_{34} + c_{42} + c_{51} = 60 < x_0^1$, затова към стъпка 3.

<u>Стъпка 3.</u> Решението не е цикъл – има два подцикъла:

$x_{15} = x_{51} = 1$ и $x_{23} = x_{34} = x_{42} = 1$

<u>Стъпка 4</u>. Избираме подцикъл $x_{15} = x_{51} = 1$. Към списъка от задачи внасяме 2 нови:

Задача 2: Началните условия и $c_{15} = \infty$

Задача 3: Началните условия и $c_{51} = \infty$

$x_0^2 = 65$

Итерация 2.

<u>Стъпка 1.</u> Избираме задача 2.

<u>Стъпка 2.</u> Решаваме я, получава се $x_0 = 65 = x_0^2$, затова се връщаме към стъпка 1.

$x_0^3 = 65$

Итерация 3.

<u>Стъпка 1.</u> Избираме задача 3.

<u>Стъпка 2.</u> Решаваме я, получава се $x_0 = c_{15} + c_{52} + c_{23} + c_{34} + c_{41} = 62 < x_0^3$, затова преминаваме към стъпка 3.

<u>Стъпка 3.</u> Решението е цикъл:

$x_{15} = x_{52} = x_{23} = x_{34} = x_{41} = 1$ - запомняме го. За следващата итерация $x_0^4 = 62$.

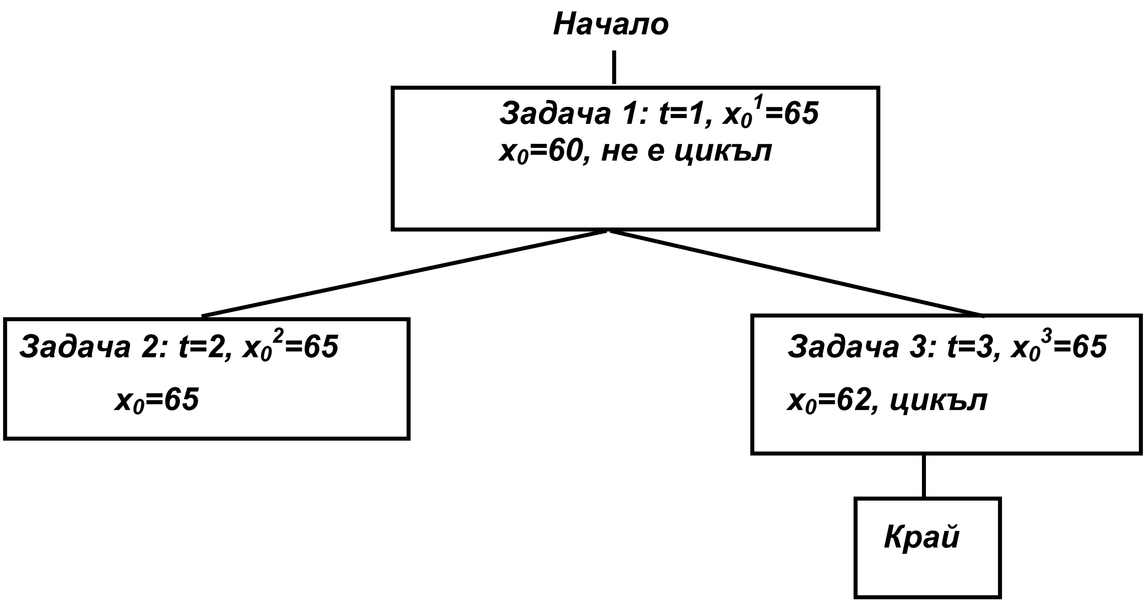
Към стъпка 1.

Итерация 4.

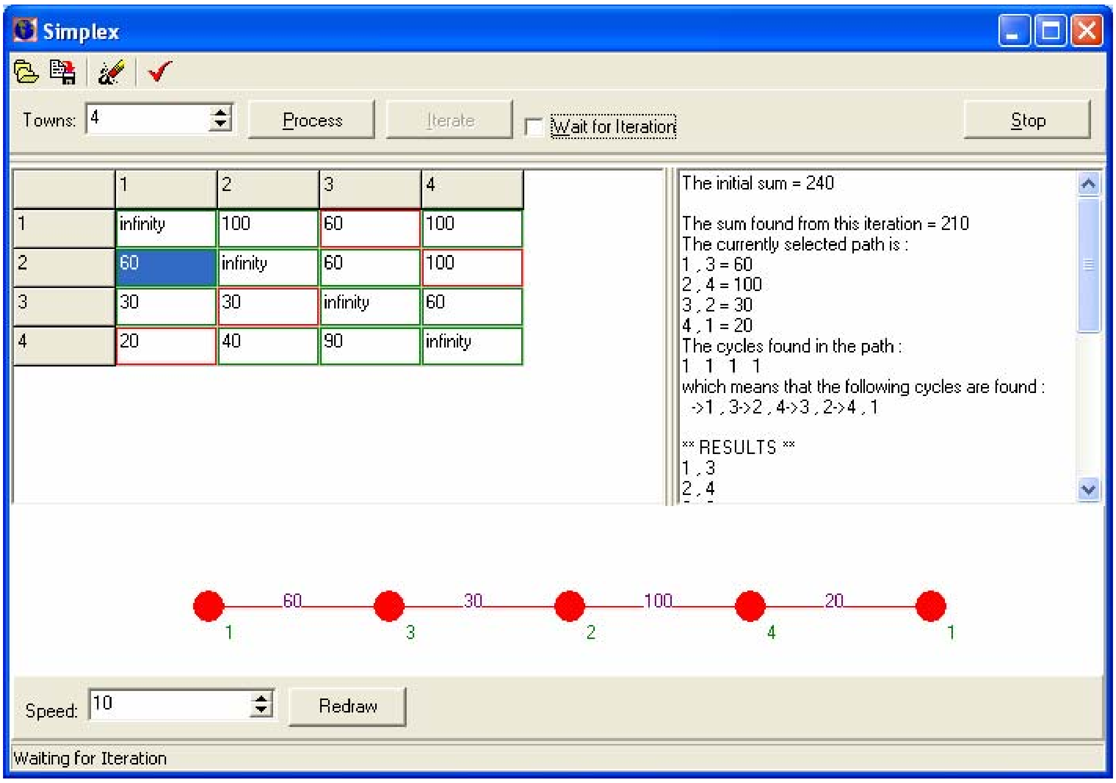
<u>Стъпка 1.</u> Списъкът от задачи е празен, текущото оптимално решение е:

$x_{15} = x_{52} = x_{23} = x_{34} = x_{41} = 1$ при стойност на целевата функция 62.

<u>Представяне на процеса на решаване на задачата във вид на дърво</u>

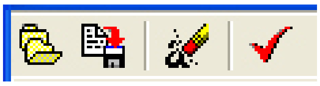


4 Упътване за работа с програмата `TT.exe`



Програмата поддържа три екрана. Първоначалният екран дава възможност за въвеждане и редактиране на матрицата с транспортните разходи. Не се допуска въвеждане на разстояния за C_{ii}. В десния екран се извежда информация за отделните стъпки, през които е преминало решението. Последният екран показва полученото крайно решение.

Панел с команди:



- *Отваряне на файл* – отваряне на файл **`*.mat`** със стойности за матрицата с транспортните разходи
- *Съхраняване на файл* – текущите стойности на матрицата с транспортните разходи се съхраняват във файл **`*.mat`**
- *Въвеждане на данни* – получава се достъп до матрицата с транспортните разходи за ръчно попълване на стойностите й
- *Попълване на матрицата* – полетата на матрицата с транспортните разходи се попълват със случайни стойности

При работата на програмата могат да се наблюдават и отделните стъпки при намиране на оптималното решение, като се маркира кутията **`'Wait for iteration'`** и след команда **`'Process'`** се натиска последователно бутонът **`'Iterate'`**.