Мрежови модели – транспортна задача

1 Класическа транспортна задача

Производители: m на брой, всеки с капацитет $S_i \ (i = 1,...,m)$

Потребители: n на брой, всеки със заявка $D_j \ (j = 1,...,n)$

Транспортни разходи: c_{ij} за единица доставена продукция от i производител до j потребител

Задача: Да се определи кои потребители от кои производители да бъдат снабдявани и в какви количества, така че да се осигурят минимални транспортни разходи.

1.1 Математически модел

Управляеми променливи:
x_{ij} - количество продукция, доставяна от i производител до j потребител

Да се минимизира функцията $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

при ограничения:

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le S_i, \ \ i = 1,...,m$ (Ограничения от доставките) /1/

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge D_j, \ \ j = 1,...,n$ (Ограничения от заявките) /2/

$x_{ij} \ge 0$

Условие за наличие на допустими решения: $\sum_{i=1}^{m} S_i \ge \sum_{j=1}^{n} D_j$

1.2 Матрична форма на постановката на транспортната задача

Ако умножим $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq D_j, \quad j = 1,\dots,n$ с **-1**, ще се получи:

$$\sum_{i=1}^{m} - x_{ij} \leq -D_j, \quad j = 1,\dots,n$$

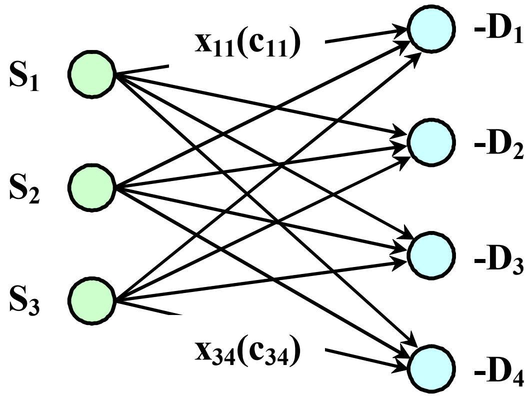
И тогава дефиницията на транспортната задача може да се представи със следната таблица, която представлява матрицата на инциденциите на мрежа (граф):

Количества пренасяна продукция

		$x_{11}\ x_{12}\ \dots\ x_{1n}$	$x_{21}\ x_{22}\ \dots\ x_{2n}$	...	$x_{m1}\ x_{m2}\ \dots\ x_{mn}$	
Производители	1	1 1 ... 1				$\leq S_1$
	2		1 1 ... 1			$\leq S_2$
	...			...		...
	m				1 1 ... 1	$\leq S_m$
Потребители	1	-1	-1		-1	$\leq -D_1$
	2	-1	-1		-1	$\leq -D_2$
	...	...	...	...	...	...
	n	-1	-1		-1	$\leq -D_n$
		$c_{11}\ c_{12}\ \dots\ c_{1n}$	$c_{21}\ c_{22}\ \dots\ c_{2n}$		$c_{m1}\ c_{m2}\ \dots\ c_{mn}$	$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

1.3 Еквивалентна мрежа на транспортната задача

Мрежов модел - във всички ограничения коефициентите пред управляемите променливи са само **+1** или **–1**.



1.4 Таблично представяне на транспортната задача

Потребители

		1	2	...	n	S_i
Доставчици	1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	S_1
	...			c_{ij} x_{ij}		...
	m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}		c_{mn} x_{mn}	S_m
	D_j	D_1	D_2	...	D_n	

2 Симплекс метод за решаване на транспортната задача

Основна задача: Да се **минимизира** функцията $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ при ограничения:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i, \quad i = 1,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = D_j, \quad j = 1,\dots,n$$

$x_{ij} \geq 0$;

Приемаме, че $\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j$ (ако това не е така, може да се въведе един фиктивен потребител със заявка $\sum_{i=1}^{m} S_i - \sum_{j=1}^{n} D_j$ и всички $c_{ij} = 0$). Тогава /1/ и /2/ също стават равенства.

При $\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j$ броят на независимите ограничения е $n + m - 1$.

Двойствена задача: Да се **максимизира** функцията $\sum_{i=1}^{m} S_i v_i + \sum_{j=1}^{n} D_j w_j$ при ограничения $v_i + w_j \leq c_{ij}$ за всички дъги (i, j), където v_i, w_j не са ограничени по знак.

Теорема за двойственост: $x_{ij}^*(v_i^* + w_j^* - c_{ij}) = 0$

За поредно базисно решение на основната задача е вярно $v_i + w_j = c_{ij}$ за всяка **базисна** променлива x_{ij}, а коефициентите на **свободните** променливи в израза за целевата функция се определят от $v_i + w_j - c_{ij}$.

И ако за някоя свободна променлива $v_i + w_j - c_{ij} > 0$, тя може да се въведе в базиса.

Алгоритъм

1) Избира се начално допустимо базисно решение от $\boldsymbol{n+m-1}$ дъги.
2) За всички базисни променливи $\boldsymbol{x_{ij}}$ се определят стойности на двойствените променливи $\boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{w_j}$, така че $\boldsymbol{v_i + w_j = c_{ij}}$, а за свободните променливи се изчисляват оценките $\boldsymbol{v_i + w_j - c_{ij}}$.
3) Ако всички оценки за свободните променливи са отрицателни, край на алгоритъма. Иначе се избира тази свободна променлива, която има максимална положителна оценка. Определя се коя дъга да се изключи от базиса, за да се въведе новоизбраната променлива.
4) Променят се потоците по останалите базисни маршрути (намира се ново базисно решение) и се преминава към стъпка 2.

<u>Пример 1</u>

Итерация 1

Стъпка 1. Избор на начално базисно решение

Потребители

		1	2	3	4	S_i
	1	2 6	3	11	7	6
Доставчици	2	1	0 1	6	1	1
	3	5 1	8 4	15 3	9 2	10
	D_j	7	5	3	2	

Избират се $m+n-1=3+4-1=6$ дъги, задаващи начално базисно решение.

Общите разходи са:

$$2\times 6+0\times 1+5\times 1+8\times 4+$$
$$15\times 3+9\times 2=112$$

Потребители

		1	2	3	4	S_i
	1	2 6-1	3 +1	11	7	6
Доставчици	2	1	0 1	6	1	1
	3	5 1+1	8 4-1	15 3	9 2	10
	D_j	7	5	3	2	

Опит да се въведе дъга $(1,2)$ в базиса.

Общите разходи ще се увеличат с $3+5$ и ще намалеят с $2+8$.

Базисни променливи са:

$x_{11},\ x_{22},\ x_{31},\ x_{32},\ x_{33},\ x_{34}$

Стъпка 2.

Уравненията за двойствените променливи са:

$$\begin{cases} v_1 + w_1 = 2 \\ v_2 + w_2 = 0 \\ v_3 + w_1 = 5 \\ v_3 + w_2 = 8 \\ v_3 + w_3 = 15 \\ v_3 + w_4 = 9 \end{cases}$$

Система от 6 уравнения със 7 неизвестни – полагаме $v_3 = 0$ и получаваме:

$$w_1 = 5, \; w_2 = 8, \; w_3 = 15, \; w_4 = 9,$$

$$v_1 = -3, \; v_2 = -8$$

Оценките за свободните променливи са $(v_i + w_j - c_{ij})$:

x_{12}	$-3 + 8 - 3 = 2$	Избираме променлива x_{12}.
x_{13}	$-3 + 15 - 11 = 1$	
x_{14}	$-3 + 9 - 7 = -1$	
x_{21}	$-8 + 5 - 1 = -4$	
x_{23}	$-8 + 15 - 6 = 1$	
x_{24}	$-8 + 9 - 1 = 0$	

Стъпка 3. Каква максимална стойност може да получи x_{12}? Определя се цикъл, започващ от x_{12} и минаващ само през базисни променливи:

$$x_{12} \to x_{11} \to x_{31} \to x_{32} \to x_{12}$$

Потокът по дъга x_{12} се увеличава, в ред 1 и стълб 2 трябва да намалява, следователно максималната стойност на x_{12} е 4, а променлива x_{32} трябва да се изключи от базиса.

Стъпка 4. Преразпределение на потоците спрямо новия базис

Потребители

Доставчици		1	2	3	4	S_i
	1	$\boxed{2}$ 2	$\boxed{3}$ 4	$\boxed{11}$	$\boxed{7}$	6
	2	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$ 1	$\boxed{6}$	$\boxed{1}$	1
	3	$\boxed{5}$ 5	$\boxed{8}$	$\boxed{15}$ 3	$\boxed{9}$ 2	10
	D_j	7	5	3	2	

Общите разходи са **104**.

Базисните променливи са:

$x_{11},\ x_{12},\ x_{22},\ x_{31},\ x_{33},\ x_{34}$

Итерация 2

Стъпка 2.

Сега уравненията за двойствените променливи за новия базис са:

$$\begin{vmatrix} v_1 + w_1 = 2 \\ v_1 + w_2 = 3 \\ v_2 + w_2 = 0 \\ v_3 + w_1 = 5 \\ v_3 + w_3 = 15 \\ v_3 + w_4 = 9 \end{vmatrix}$$

При $v_3 = 0$ решенията са:

$$w_1 = 5,\ w_2 = 6,\ w_3 = 15,\ w_4 = 9,$$

$$v_1 = -3,\ v_2 = -6$$

Оценките за свободните променливи са:

x_{13}	$-3 + 15 - 11 = 1$	Избираме променлива x_{23}.
x_{14}	$-3 + 9 - 7 = -1$	
x_{21}	$-6 + 5 - 1 = -2$	
x_{23}	$-6 + 15 - 6 = 3$	
x_{24}	$-6 + 9 - 1 = 2$	
x_{32}	$0 + 6 - 8 = -2$	

Стъпка 3. Цикълът е $x_{23} \to x_{22} \to x_{12} \to x_{11} \to x_{31} \to x_{33} \to x_{23}$, а максималната стойност на x_{23} е 1.

Стъпка 4. Преразпределение на потоците според новия базис:

		Потребители				
		1	2	3	4	S_i
	1	2 1	3 5	11 	7 	6
Доставчици	2	1 	0 	6 1	1 	1
	3	5 6	8 	15 2	9 2	10
	D_j	7	5	3	2	

Общите разходи са **101**.

Базисните променливи са:

$x_{11},\ x_{12},\ x_{23},\ x_{31},\ x_{33},\ x_{34}$

Итерация 3

На стъпка 2 се получава положителна оценка само за x_{13}, тя влиза в базиса със стойност 1, от базиса излиза x_{11}. Получава се:

		Потребители				
		1	2	3	4	S_i
	1	2 	3 5	11 1	7 	6
Доставчици	2	1 	0 	6 1	1 	1
	3	5 7	8 	15 1	9 2	10
	D_j	7	5	3	2	

Общите разходи са **100**.

Оптималното решение е:

$x_{12} = 5,\ x_{13} = 1,\ x_{23} = 1,$

$x_{31} = 7,\ x_{33} = 1,\ x_{34} = 2$

Итерация 4

Няма повече свободни променливи с положителни оценки, следователно последното решение е оптималното.

3 Избор на начално решение по метода на северозападния ъгъл

1) Определя се $x_{11} = min(S_1, D_1)$.

2) Ако $D_1 < S_1$, $x_{11} = D_1$, стълб 1 се зачертава, т.е. $x_{i1} = 0 \ \ (i = 2,...,m)$

   Ако $D_1 > S_1$, $x_{11} = S_1$, ред 1 се зачертава, т.е. $x_{1j} = 0 \ \ (j = 2,...,n)$

3) Изважда се x_{11} от S_1 (при $x_{11} = D_1$) или от D_1 (при $x_{11} = S_1$)

4) Определя се $x_{12} = min(S_1, D_2)$ при зачертан **стълб 1** или $x_{21} = min(S_2, D_1)$ при зачертан **ред 1**; зачертава се съответен ред/стълб, коригират се S_i, D_j.

5) Продължава се, докато не се изчерпят ресурсите и задоволят заявките.

Пример 2

	1	2	3	4	S_i
1	60	-	-	-	60
2	10	5	40	-	~~55~~ ~~45~~ 40
3	-	-	5	35	~~40~~ 35
4	-	-	-	35	35
D_j	10 ~~70~~	5	5 ~~45~~	35 ~~70~~	

Пример 3 – Начално решение за Пример 1

	1	2	3	4	S_i
1	6	-	-	-	6
2	1	0	-	-	~~1~~ 0
3	-	5	3	2	~~10~~ ~~5~~ 2
D_j	1 ~~7~~	5 ~~5~~	3	2	

Началното решение е **изродено** базисно решение, защото една от базисните променливи има стойност 0.