Динамично програмиране

1 Основи на динамичното програмиране

Постановка: Операция, разделена на n последователни стъпки (етапи)

Показател за ефективност W

$W = \sum_{i=1}^{n} w_i$, където w_i е печалбата на i стъпка.

x_i се нарича "стъпково управление"

Управление x на операцията като цяло:

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$

Търси се управление $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, при което $W^* = \max_{x \in X} \{ W(x) \}$.

Пример 1.

Планира се дейността на k предприятия за период от n години. В началото на периода са отделени общо средства M за всички предприятия .

В началото на i година на всички предприятия се отделят средства:

$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ik})$ за $i = 1,...,n$

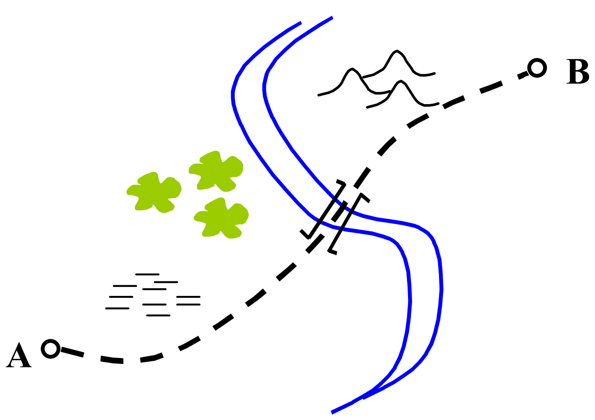
Управление на цялата операция:

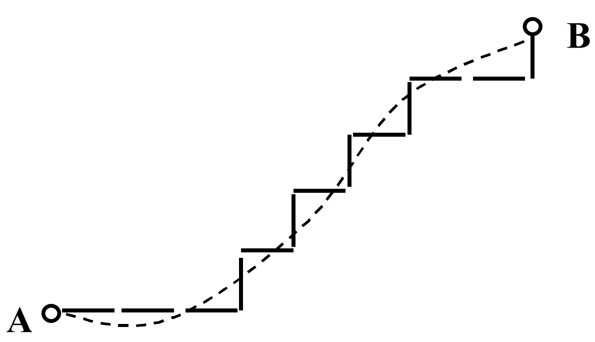
$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$

Трябва да се намери такова разпределение на средствата по предприятия и години, че общата печалба да е максимална.

Пример 2.

Трябва да се построи участък от ж.п. магистрала от пункт А до пункт В.





2 Принцип на динамичното програмиране

Динамичното програмиране се изпълнява в *две фази*:

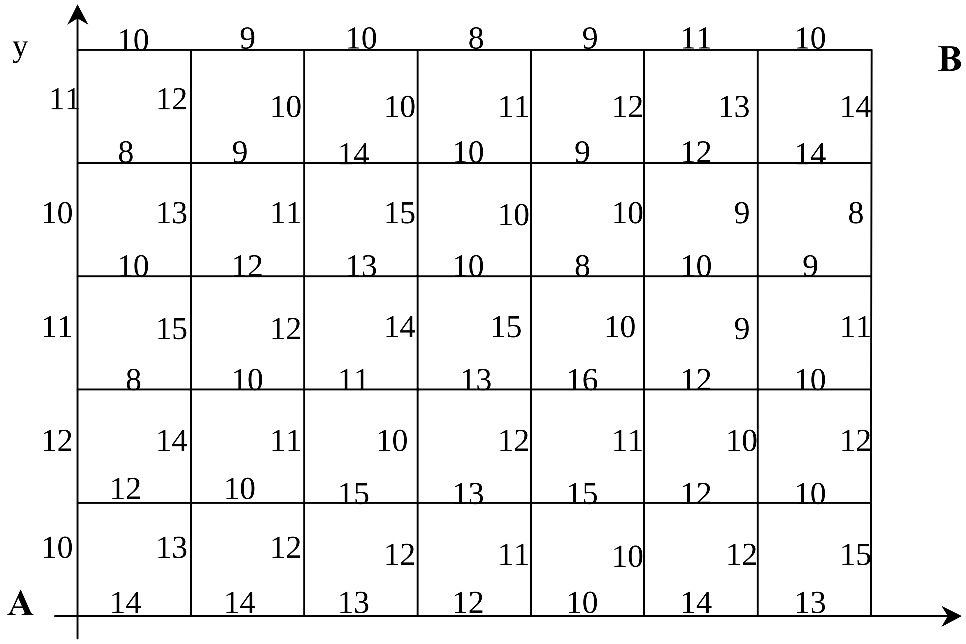
- ***Условна оптимизация (придвижване от стъпка n до стъпка 1)***
- ***Действителна оптимизация (придвижване от стъпка 1 до стъпка n)***

3 Примери за решаване на задачи по метода на динамичното програмиране

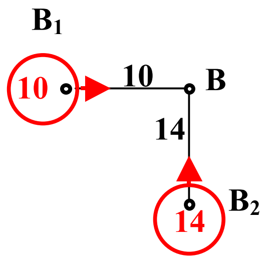
3.1 Намиране на оптимален път между два пункта – комбинаторна задача (пример 2)

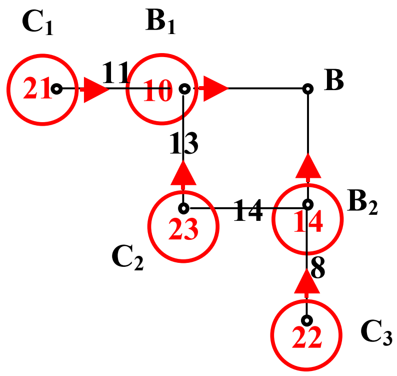
Пътът е управляема система S, преместваща се от А към В и състоянието й се характеризира на всяка стъпка с две координати:

- източна x, $x \in [0,7]$
- северна y, $y \in [0,5]$

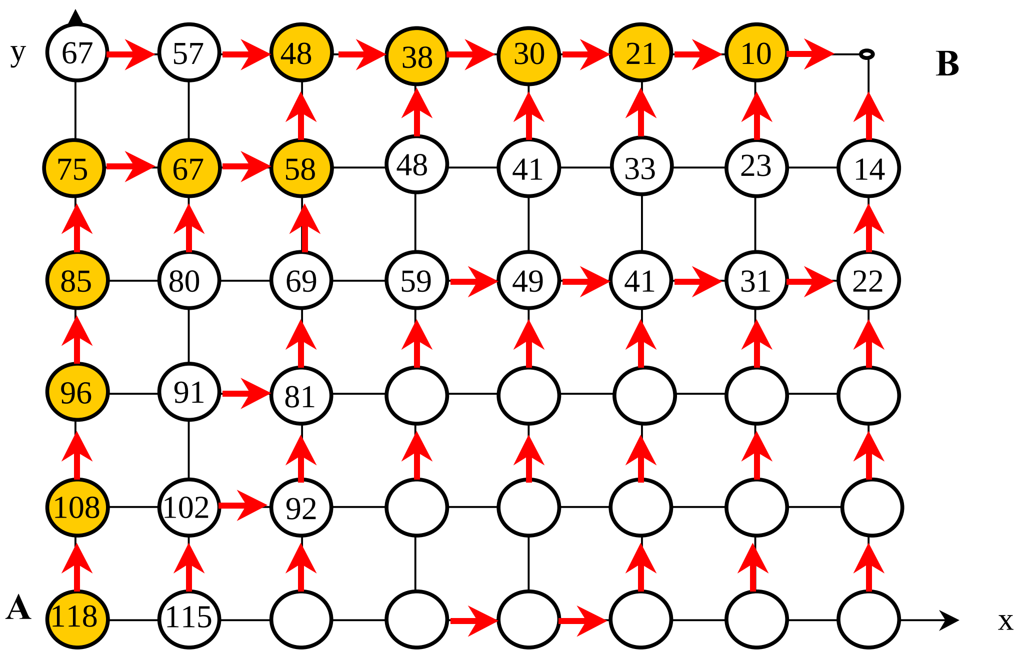


Първа фаза – условна отпимизация





- Оптимизация на *последната* стъпка
- Оптимизация на *предпоследната* стъпка. Стъпка10 може да е завършила в точка C_1, в C_2 или в C_3.
- Оптимизация на поредна стъпка
- На стъпка 1 се получава условна оптимална печалба, равна на действителната оптимална печалба $W = 118$.



Втора фаза – действителна отпимизация

Следват се указанията на резултатите от условната оптимизация, започвайки от точка A, за да се получи действителното оптимално управление с общи разходи:

$$W = 118$$

$$x^* = (n,n,n,n,e,e,n,e,e,e,e,e)$$ (n – север, e - изток)

3.2 Задача за разпределение на ресурсите – нелинейна задача (пример 3)

3.2.1 Постановка на задачата

Налице са налични средства K, които трябва да се разпределят между n предприятия $P_1, P_2, ..., P_n$.

Всяко предприятие P_i при вложени средства x носи доход $f_i(x)$.

Как да се разпределят средствата, за да се получи максимален доход (печалба)?

Изкуствено разделение на стъпки: на първата стъпка се предоставят средства на предприятие P_1, на втората – на P_2 и т.н.

Управляемата система са разпределяните средства. Състоянието на системата се характеризира с едно число S - *количеството все още невложени средства*.

3.2.2 Модел на задачата

На всяка i стъпка се търси - условно оптимално управление $x_i(S)$

- условна оптимална печалба $W_i(S)$,

ако в началото на стъпката са налице средства S.

<u>Условна оптимизация</u>

- Последна, n-стъпка

Останалите средства S се влагат се в последното предприятие.

Условното оптимално управление е $x_n(S)$, а

условната оптимална печалба е $W_n(S) = f_n(S)$.

- Предпоследна, $n-1$-стъпка

Останали са средства S.

На стъпка $n-1$ се отделят за предприятие P_{n-1} средства x,

за стъпка n ще останат средства $S-x$.

Обща печалба: $f_{n-1}(x) + W_n(S-x)$.

Търси се стойност на x, за която тази печалба да е максимална:

$$W_{n-1}(S) = \max_{x \le S} \{f_{n-1}(x) + W_n(S-x)\}$$

- Стъпка i

Условна оптимална печалба за стъпка i и за всички останали стъпки до края на операцията:

$$W_i(S) = \max_{x \le S} \{f_i(x) + W_{i+1}(S-x)\}$$

- Стъпка 1

$$W_1(K) = \max_{x \le K} \{f_1(x) + W_2(K - x)\} = W^*$$

W^* е максималната печалба за операцията.

Действителна оптимизация

Изпълняват се “препоръките” от условната оптимизация:

- x_1^* приема тази стойност, за която е достигната максималната стойност $W_1(K)$. В първото предприятие се влагат средствата x_1^*.
- За втората стъпка са останали средства $K - x_1^*$.
  Определя се $x_2^* = x_2(K - x_1^*)$.
- За третата стъпка са останали средства $K - x_1^* - x_2^*$.
  Определя се $x_3^* = x_3(K - x_1^* - x_2^*)$ и т.н. до стъпка n.

3.2.3 Числен пример

$n = 5$, $K = 10$, функциите $f_i(x)$ са зададени таблично (Таблица 1).

Таблица 1.

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$
1	0.5	0.1	0.6	0.3	1.0
2	1.0	0.5	1.1	0.6	1.2
3	1.4	1.2	1.2	1.3	1.3
4	2.0	1.8	1.4	1.4	1.3
5	2.5	2.5	1.6	1.5	1.3
6	2.8	2.9	1.7	1.5	1.3
7	3.0	3.5	1.8	1.5	1.3
8	3.0	3.5	1.8	1.5	1.3

Процесът на оптимизация може да се онагледи с построяване на таблица (Таблица 2).

Таблица 2.

S	*i=5*		*i=4*		*i=3*		*i=2*		*i=1*	
	$x_5(S)$	$W_5(S)$	$x_4(S)$	$W_4(S)$	$x_3(S)$	$W_3(S)$	$x_2(S)$	$W_2(S)$	$x_1(S)$	$W_1(S)$
1	*1*	*1.0*	*0*	*1.0*	*0*	*1.0*	*0*	*1.0*		
2	*2*	*1.2*	*1*	*1.3*	*1*	*1.6*	*0*	*1.6*		
3	*3*	*1.3*	*2*	*1.6*	*2*	*2.1*	*0*	*2.1*		
4	*4*	*1.3*	*3*	*2.3*	*2*	*2.4*	*0*	*2.4*		
5	*5*	*1.3*	*3*	*2.5*	*1*	*2.9*	*0*	*2.9*		
6	*6*	*1.3*	*4*	*1.6*	*2*	*3.4*	*5*	*3.5*		
7	*7*	*1.3*	*5*	*2.7*	*2*	*3.6*	*5*	*4.1*		
8	*8*	*1.3*	*5*	*2.8*	*4*	*3.7*	*5*	*4.6*		
9	*9*	*1.3*	*6*	*2.8*	*5*	*3.9*	*7*	*5.1*		
10	*10*	*1.3*	*7*	*2.8*	*5*	*4.1*	*7*	*5.6*	*2*	*5.6*

<u>Условна оптимизация</u>

Стъпка 5: при останали налични средства S (с вариращи стойности от 1 до K) те всички се влагат в последното предприятие; $W_5(S) = f_5(S)$ (от Таблица 1).

Стъпка i, налични средства S: строи се помощна таблица (Таблица 3).

Таблица 3

x	$S-x$	$f_i(x)$	$W_{i+1}(S-x)$	$f_i(x)+W_{i+1}(S-x)$

Например за $i=4$, $S=1$

x	$S-x$	$f_4(x)$	$W_5(S-x)$	$f_4(x)+W_5(S-x)$
0	*1*	*0*	*1.0*	*1.0*
1	*0*	*0.3*	*0*	*0.3*

Максимална стойност за $f_4(x)+W_5(S-x)$ се постига при $x=0$, следователно условното оптимално управление е $x_4(1)=0$ при условна оптимална печалба $W_4(1)=1.0$.

Например за $i = 3$, $S = 7$

x	$S - x$	$f_3(x)$	$W_4(S - x)$	$f_3(x) + W_4(S - x)$
0	7	0	2.7	2.7
1	6	0.6	2.6	3.2
2	5	1.1	2.5	3.6
3	4	1.2	2.3	3.5
4	3	1.4	1.6	3.0
5	2	1.6	1.3	2.9
6	1	1.7	1.0	2.7
7	0	1.8	0	1.8

Максимална стойност за $f_3(x) + W_4(S - x)$ се постига при $x = 2$, следователно условното оптимално управление е $x_3(7) = 2$ при условна оптимална печалба $W_3(7) = 3.6$.

Стъпка 1: Тук стойността на S не може да се варира – тя е $K = 10$. Оптималната стойност на показателя за ефективност на цялата операция е $W = 5.6$.

Действителна оптимизация

Оптималната стойност на $W = 5.6$ се получава при $x_1 = x_1^* = 2$.

За стъпка 2 има налични средства $S = K - x_1^* = 10 - 2 = 8$. При тази стойност оптималното управление за стъпка 2 е $x_2^* = 5$.

За стъпка 3 са останали средства $S = K - x_1^* - x_2^* = 10 - 2 - 5 = 3$; оптималното управление е $x_3^* = 2$.

За стъпка 4 останалите средства са $S = 1$, $x_4^* = 0$.

За стъпка 5 останалите средства са $S = 1$, $x_5^* = 1$.

Таблица 4

S	*i=5*		*i=4*		*i=3*		*i=2*		*i=1*	
	$x_5(S)$	$W_5(S)$	$x_4(S)$	$W_4(S)$	$x_3(S)$	$W_3(S)$	$x_2(S)$	$W_2(S)$	$x_1(S)$	$W_1(S)$
1	*1*	*1.0*	*0*	*11.0*	*0*	*1.0*	*0*	*1.0*		
2	*2*	*1.2*	*1*	*1.3*	*1*	*1.6*	*0*	*1.6*		
3	*3*	*1.3*	*2*	*1.6*	*2*	*2.1*	*0*	*2.1*		
4	*4*	*1.3*	*3*	*2.3*	*2*	*2.4*	*0*	*2.4*		
5	*5*	*1.3*	*3*	*2.5*	*1*	*2.9*	*0*	*2.9*		
6	*6*	*1.3*	*4*	*1.6*	*22*	*3.4*	*5*	*3.5*		
7	*7*	*1.3*	*5*	*2.7*	*2*	*3.6*	*5*	*4.1*		
8	*8*	*1.3*	*5*	*2.8*	*4*	*3.7*	*5*	*4.6*		
9	*9*	*1.3*	*6*	*2.8*	*5*	*3.9*	*7*	*5.1*		
10	*10*	*1.3*	*7*	*2.8*	*5*	*4.1*	*7*	*5.6*	*2*	*5.6*

3.3 Задачата за натоварването

3.3.1 Постановка на задачата

Кораб трябва да се натовари с контейнери с няколко различни типа продукти. Общият капацитет на кораба е Q тона. За всеки контейнер са известни теглото q_i и стойността c_i. Трябва да се определи по колко броя да се вземат от всеки тип контейнер, така че да не се надвиши общата товароподемност на кораба, а стойността на натоварената стока да е максимална.

Нека общият капацитет на кораба е $Q = 10$ (тона), контейнерите са от 4 различни типа, а теглото и стойността на всеки контейнер са зададени с таблица 5:

Таблица 5

Контейнер	Тегло q_i (тона)	Стойност c_i (в хил. лв)
1	**2**	**4**
2	**8**	**10**
3	**3**	**6**
4	**4**	**8**

3.3.2 Дефиниране на задачата като задача от линейното програмиране

Ако x_i е количеството контейнери от тип i, трябва да се намери максимум на функцията $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ при ограничения $\sum_{i=1}^{n} q_i x_i \le Q$, $x_i \ge 0$, *цели числа*

Получава се задача от целочисленото програмиране.

3.3.3 Дефиниране на задачата като задача от динамичното програмиране

Управлението на стъпка i ще е количеството предмети x_i, които да се вземат на тази стъпка. Задачата има същата постановка, както задачата за разпределение на ресурсите, само функциите $f_i(x)$ се определят от стойността на $c_i x_i$.

Управляемата система S е количеството останал капацитет до запълване на кораба.

Рекурентната зависимост е $W_i(S, x_i) = c_i x_i + W_{i+1}(S - q_i x_i)$.

Условната оптимална печалба на всяка стъпка е:

$$W_i(S) = \max_{x \le S} \{c_i x + W_{i+1}(S - q_i x)\},$$

а условното оптимално управление $x_i(S)$ е тази стойност на x, за която е достигната максималната стойност на $W_i(S)$.

3.3.4 Решение на задачата като задача от динамичното програмиране

<u>Условна оптимизация</u>

При $\underline{i = 4}$ системата може да е във всяко едно от състоянията $S = 0,1,...,10$ (останали ненатоварени тонове карго), но ако е в състояние 0, 1, 2 или 3, не могат да се изберат контейнери от тип 4, защото всеки един от тях тежи 4 тона. При състояния 4, 5, 6 или 7 може да се избере $x_4 = 1$, а при състояния 8, 9 или 10 - $x_4 = 2$. Тогава $W_4(S)$ и $x_4(S)$ се определят от таблица 6:

Таблица 6

S	$W_4(S)$	$x_4(S)$
0	**0**	**0**
1	**0**	**0**
2	**0**	**0**
3	**0**	**0**
4	**8**	**1**
5	**8**	**1**
6	**8**	**1**
7	**8**	**1**
8	**16**	**2**
9	**16**	**2**
10	**16**	**2**

При $\underline{i = 3}$ стойността на $W_3(S)$ може да се изчисли от:

$$W_3(S, x_3) = c_3 x_3 + W_4(S - q_3 x_3)$$

и след това

$$W_3(S) = \max_{x \le S} \left\{ c_x x + W_4(S - q_3 x) \right\}$$

При това $q_3 = 3$ и $c_3 = 6$, така че $W_3(S, x_3) = 6x_3 + W_4(S - 3x_3)$. Състоянията на системата могат да са $S = 0,1,...,10$ и възможните стойности на x_3 се определят от състоянието. В таблица 7 недопустимите стойности за x_3 са отбелязани с *:

Таблица 7

S	$W_3(S, x_3) = 6x_3 + W_4(S - 3x_3)$				$W_3(S)$	$x_3(S)$
	x_3=0	x_3=1	x_3=2	x_3=3		
0	0+W_4(0)	*	*	*	0	0
1	0+W_4(1)	*	*	*	0	0
2	0+W_4(2)	*	*	*	0	0
3	0+W_4(3)	6+W_4(0)	*	*	6	1
4	0+W_4(4)	6+W_4(1)	*	*	8	0
5	0+W_4(5)	6+W_4(2)	*	*	8	0
6	0+W_4(6)	6+W_4(3)	12+W_4(0)	*	12	2
7	0+W_4(7)	6+W_4(4)	12+W_4(1)	*	14	1
8	0+W_4(8)	6+W_4(5)	12+W_4(2)	*	16	0
9	0+W_4(9)	6+W_4(6)	12+W_4(3)	18+W_4(0)	18	3
10	0+W_4(10)	6+W_4(7)	12+W_4(4)	18+W_4(1)	20	2

При $\underline{i = 2}$ системата отново може да е в едно от състоянията 0, 1, ..., 10, но максималната стойност на $x_2 = 1$ и то при $S \geq 8$, защото $q_2 = 8$. В таблица 8 са обобщени изчисленията за $i = 2$:

Таблица 8

S	$W_2(S,x_2) = 10x_2 + W_3(S - 8x_2)$		$W_2(S)$	$x_2(S)$
	$x_2=0$	$x_2=1$		
0	$0+W_3(0)$	*	0	0
1	$0+W_3(1)$	*	0	0
2	$0+W_3(2)$	*	0	0
3	$0+W_3(3)$	*	6	0
4	$0+W_3(4)$	*	8	0
5	$0+W_3(5)$	*	8	0
6	$0+W_3(6)$	*	12	0
7	$0+W_3(7)$	*	14	0
8	$0+W_3(8)$	$10+W_3(0)$	16	0
9	$0+W_3(9)$	$10+W_3(1)$	18	0
10	$0+W_3(10)$	$10+W_3(2)$	20	0

При $i = 1$ системата е в състояние 10 и изчисленията се правят по формулата:

$$W_1(10) = \max_{x \le 10} \left\{ c_1 x + W_2(10 - q_1 x) \right\}$$

Изчисленията за стъпка 1 са показани в таблица 9:

Таблица 9

S	$W_1(10,x_1) = 4x_1 + W_2(10 - 2x_1)$						$W_1(10)$	$x_1(10)$
	$x_1=0$	$x_1=1$	$x_1=2$	$x_1=3$	$x_1=4$	$x_1=5$		
10	**$0+W_2(10)$**	**$4+W_2(8)$**	**$8+W_2(6)$**	**$12+W_2(4)$**	**$16+W_2(2)$**	**$20+W_2(0)$**	**20**	**0, 1, 2, 3, 5**

Извод: Максималната стойност на товара е **20** (хил. лв) и тя се получава при пет различни стойности на x_1 = **0, 1, 2, 3** или **5**. Следователно задачата има *пет оптимални решения*.

Действителна оптимизация

Ако $x_1^* = 0$, то на стъпка 2 $S = 10$. Тогава $x_2^* = 0$.

На стъпка 3 състоянието на системата е отново $S = 10$ и $x_3^* = 2$.

На стъпка 4 състоянието на системата е $S = 8$ и $x_4^* = 1$.

Следователно първото оптимално решение е:

$x_1^* = 0 \qquad x_2^* = 0 \qquad x_3^* = 2 \qquad x_4^* = 1$

Другите оптимални решения се изчисляват аналогично и са:

$x_1^* = 1 \qquad x_2^* = 0 \qquad x_3^* = 0 \qquad x_4^* = 2$

$x_1^* = 2 \qquad x_2^* = 0 \qquad x_3^* = 2 \qquad x_4^* = 0$

$x_1^* = 3 \qquad x_2^* = 0 \qquad x_3^* = 0 \qquad x_4^* = 1$

$x_1^* = 5 \qquad x_2^* = 0 \qquad x_3^* = 0 \qquad x_4^* = 0$