Задачата за раницата

1 Постановка на задачата

Раницата може да побере предмети с общо тегло до Q кг. Налице са n на брой предмети, всеки в единствен екземпляр с тегло q_i и стойност c_i. Кои предмети да се вземат в раницата, така че общата им стойност да е максимална, без общото им тегло да надхвърля Q?

Нека общият капацитет на раницата е $Q = 35$ (кг), а теглото и стойността на всеки предмет са зададени с таблица 1:

Таблица 1

Предмет	Тегло q_i (кг)	Стойност c_i (в лв)
1	**4**	**7**
2	**7**	**10**
3	**11**	**15**
4	**12**	**20**
5	**16**	**27**
6	**20**	**34**

2 Дефиниране на задачата като задача от линейното програмиране

Управляеми променливи: $x_i = \begin{cases} 1, & \text{ако предметът се включва} \\ 0, & \text{в противен случай} \end{cases}$

Трябва да се намери максимум на функцията $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$

при ограничения $\sum_{i=1}^{n} q_i x_i \le Q$, за $x_i = 0$ или 1

Получава се задача от целочисленото програмиране.

3

Дефиниране на задачата като задача от динамичното програмиране

Задачата е опростен вариант на задачата за натоварването – запълването на раницата може да се представи като процес от n стъпки, като на всяка стъпка се решава да се вземе или не предмет i, т.е. $x_i = 1$ или 0.

Състоянието на системата се характеризира с теглото S, което е останало до пълното натоварване на раницата. За всяка стойност на S трябва да се намери $W_i(S)$ - общата максимална стойност на предметите, ако трябва да се донатовари раницата и да се определи стойност на $x_i(S) = 1$, ако предметът се добавя в раницата или $x_i(S) = 0$ в противен случай.

Математическият модел е същият, като този на задачата за натоварването.

Рекурентната зависимост е $W_i(S, x_i) = c_i x_i + W_{i+1}(S - q_i x_i)$.

Условната оптимална печалба на всяка стъпка е:

$$W_i(S) = \max_{x \le S} \left\{ c_i x + W_{i+1}(S - q_i x) \right\},$$

а условното оптимално управление $x_i(S)$ е тази стойност на x, за която е достигната максималната стойност на $W_i(S)$.

4 Решение на задачата като задача от динамичното програмиране

Решението на задачата е обобщено в таблицата по-долу, като изчисленията са аналогични на изчисленията от задачата за натоварването.

Таблица 2

S	i=6		i=5		i=4		i=3		i=2		i=1	
	x_6	W_6	x_5	W_5	x_4	W_4	x_3	W_3	x_2	W_2	x_1	W_1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	10		
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	10		
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	10		
10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	10		
11	0	0	0	0	0	0	1	15	0	15		
12	0	0	0	0	1	20	0	20	0	20		
13	0	0	0	0	1	20	0	20	0	20		
14	0	0	0	0	1	20	0	20	0	20		
15	0	0	0	0	1	20	0	20	0	20		
16	0	0	1	27	0	27	0	27	0	27		
17	0	0	1	27	0	27	0	27	0	27		
18	0	0	1	27	0	27	0	27	0	27		
19	0	0	1	27	0	27	0	27	1	30		
20	1	34	0	34	0	34	0	34	0	34		
21	1	34	0	34	0	34	0	34	0	34		
22	1	34	0	34	0	34	0	34	0	34		
23	1	34	0	34	0	34	1	35	1	37		
24	1	34	0	34	0	34	1	35	1	37		
25	1	34	0	34	0	34	1	35	1	37		
26	1	34	0	34	0	34	1	35	1	37		
27	1	34	0	34	0	34	1	42	1	44		
28	1	34	0	34	1	47	0	47	0	47		
29	1	34	0	34	1	47	0	47	0	47		
30	1	34	0	34	1	47	0	47	0	47		
31	1	34	0	34	1	47	1	49	0	49		
32	1	34	0	34	1	54	0	54	0	54		
33	1	34	0	34	1	54	0	54	0	54		
34	1	34	0	34	1	54	0	54	0	54		
35	1	34	0	34	1	54	0	54	1	57	0	57

След действителната оптимизация се получава оптималното решение:

$$x_1^* = 0 \qquad x_2^* = 1 \qquad x_3^* = 0 \qquad x_4^* = 1 \qquad x_5^* = 1 \qquad x_6^* = 0$$

при стойност на целевата функция $W^* = 57$.