Теория на игрите

1 Предмет и задачи на теорията на игрите

2 Основни понятия и определения

2.1 Конфликтни ситуации

2.2 Игра

2.3 Двойна игра и множествена игра

2.4 Ход в играта

2.5 Стратегия на играта

2.6 Оптимална стратегия

2.7 Крайна игра

2.8 Игра с нулева сума

2.9 Антагонистична игра

2.10 Ограничения на ТИ

3 Антагонистични матрични игри

Нека A има m възможни стратегии $(A_1, A_2, \dots, A_m)$

B има n възможни стратегии $(B_1, B_2, \dots, B_n)$

a_{ij} е печалбата на A (загубата на B), ако A е избрал стратегия i, а

B е избрал стратегия j.

Матричен вид на играта

A_i \ B_j	B_1	B_2	…	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}		
A_2				
…				
A_m				a_{mn}

4 Принцип на минимакса

Примерна матрична игра (Пример 1)

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	3	4	5	2	3
A_2	1	8	4	3	4
A_3	10	3	1	7	6
A_4	4	5	3	4	8

Принцип на минимаска: ***Да се постъпва така, че да се осигури максимална печалба при най-неблагоприятно поведение на противника.***

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	3	4	5	2	3	2
A_2	1	8	4	3	4	1
A_3	10	3	1	7	6	1
A_4	4	5	3	4	8	3
β_j	10	8	5	7	8	

$\alpha = 3$ - ***максимин*** или ***долна цена на играта***

$\beta = 5$ - ***минимакс*** или ***горна цена на играта***

A_4 и B_3 - ***минимаксни стратегии***

Пример 2

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	2	4	7	5	2
A_2	7	6	8	7	6
A_3	5	3	4	1	1
β_j	7	6	8	7	

(A_2, B_2) - “седлова точка”, $\alpha = \beta = v$ (цена на играта)

(A_2, B_2) - ***оптимални чисти стратегии***.

Пример 3 – Конфликт „Работодател – профсъюз”

Предложения на профсъюза - „Предложение 1”, „Предложение 2” и „Предложение 3”

Предложения на работодателя - „Договор А”, „Договор В” и „Договор С”

Матрицата на играта (матрицата на печалбите) е:

Предложение	**Договор**		
	A	**B**	**C**
1	8.5	7.0	7.5
2	12.0	9.5	9.0
3	9.0	11.0	8.0

Решение:

Предложение	**Договор**			
	A	**B**	**C**	α_i
1	8.5	7.0	7.5	7.0
2	12.0	9.5	9.0	9.0
3	9.0	11.0	8.0	8.0
β_j	12.0	11.0	9.0	

Следователно играта има седлова точка.

„Предложение 2” и „Договор 3” са седлова точка

$\alpha = \beta = v$

$v = 9$ - цена на играта

Пример 4

При същите условия сега матрицата на играта има вида:

Предложение	Договор		
	A	B	C
1	9.5	12.0	7.0
2	7.0	8.5	6.5
3	6.0	9.0	10.0

Определяме минимаксните стратегии на играта:

Предложение	Договор			
	A	B	C	α_i
1	9.5	12.0	7.0	7.0
2	7.0	8.5	6.5	6.5
3	6.0	9.0	10.0	6.0
β_j	9.5	12.0	10.0	

Играта няма седлова точка.

5 Смесени стратегии

Смесени стратегии на A и B:

$$S_A = (p_1, p_2, ..., p_m), \quad S_B = (q_1, q_2, ..., q_n)$$

където $p_1, p_2, ..., p_m$ са вероятностите играчът A да избере стратегия $A_1, A_2, ..., A_m$

$q_1, q_2, ..., q_n$ са вероятностите играчът B да избере стратегия $B_1, B_2, ..., B_n$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$$

Основна теорема от ТИ: Всяка крайна игра на две страни с нулева сума има поне едно решение – двойка оптимални смесени стратегии (S_A^*, S_B^*) и съответна цена на играта v.

6 Определяне на оптималните смесени стратегии

6.1 Опростяване на играта

Изключват се стратегиите, които имат доминиращи или дублиращи стратегии.

Пример 5:

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	4	7	2	3	4
A_2	3	5	6	8	9
A_3	4	4	2	2	8
A_4	3	6	1	2	4
A_5	3	5	6	8	9

- A_5 има дублираща A_2 - премахваме A_5 (или A_2)
- A_4 има доминираща A_1 - премахваме A_4
- B_3 е доминираща над B_4 и B_5 - премахваме B_4 и B_5
- B_1 е доминираща над B_2 - премахваме B_2
- A_1 и A_3 се дублират – премахваме A_3

Остава игра (2x2).

6.2 Свеждане на задачата за решаване на играта до задача от линейното програмиране

Дадена е матрична игра без седлова точка $\lfloor a_{ij} \rfloor$. Предполагаме, че всички $a_{ij} > 0$.

Търсим (S_A^*, S_B^*).

6.2.1 Определяне на S_A^*

A прилага S_A^*, а B - чисти стратегии $B_1, B_2, ..., B_n$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} p_1 + a_{21} p_2 + ... + a_{m1} p_m \geq v \\ a_{12} p_1 + a_{22} p_2 + ... + a_{m2} p_m \geq v \\ ... \\ a_{1n} p_1 + a_{2n} p_2 + ... + a_{mn} p_m \geq v \end{vmatrix} \qquad /1/$$

Делим /1/ на v и въвеждаме променливите:

$$x_1 = \frac{p_1}{v}, \quad x_2 = \frac{p_2}{v}, \quad ..., \quad x_m = \frac{p_m}{v}, \qquad /2/$$

където $x_i \geq 0$ (защото $p_i \geq 0$ и $v \geq 0$)

Получаваме ограничения:

$$\begin{vmatrix} a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + ... + a_{m1} x_m \geq 1 \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{m2} x_m \geq 1 \\ ... \\ a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + ... + a_{mn} x_m \geq 1 \end{vmatrix} \qquad /3/$$

Понеже $p_1 + p_2 + ... + p_m = 1$ и $x_i \geq 0$, то

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = \frac{1}{v} \qquad /4/$$

Но v е гарантираната печалба на A, следователно ще търсим минимум на $\frac{1}{v}$.

Получава се задачата: Да се намерят неотрицателни стойности на x_i $(i = 1,2,...,m)$, които да удовлетворяват условията – неравенства /3/ и превръщат в минимум линейната функция $L = x_1 + x_2 + ... + x_m$

Изчисляваме x_i и $v = \dfrac{1}{L_{min}}$, а от тях и p_i.

6.2.2 Определяне на S_B^*

Аналогично:

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + ... + a_{1n}q_n \le v \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + ... + a_{2n}q_n \le v \\ ... \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + ... + a_{mn}q_n \le v \end{array}\right. \qquad /5/$$

Разделяме неравенствата /5/ на v и въвеждаме променливите:

$$y_1 = \frac{q_1}{v}, \quad y_2 = \frac{q_2}{v}, \quad ..., \quad y_n = \frac{q_n}{v}, \qquad /6/$$

където $y_i \ge 0$ (защото $q_i \ge 0$ и $v \ge 0$). Получават се ограниченията:

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \le 1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \le 1 \\ ... \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + ... + a_{mn}y_n \le 1 \end{array}\right. \qquad /7/$$

И отново

$q_1 + q_2 + ... + q_n = 1$ и $y_j \ge 0$, и затова

$$y_1 + y_2 + ... + y_n = \frac{1}{v}$$

Да се максимизира функцията $M = y_1 + y_2 + ... + y_n$, където променливите $y_j \ge 0$ удовлетворяват ограниченията /7/.

Извод: получава се двойствена задача на основната!

Пример 6

Преговори между работодател и профсъюз, втори случай.

Предложение	Договор		
	A	B	C
1	9.5	12.0	7.0
2	7.0	8.5	6.5
3	6.0	9.0	10.0

Нека p_1, p_2, p_3 са вероятностите профсъюзът да избере предложение 1, 2 или 3, а q_1, q_2, q_3 - работодателят да избере договор 1, 2 или 3.

Ако $p_1, p_2, p_3 \geq 0$ и $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, то стратегията (p_1, p_2, p_3) е смесена стратегия на профсъюза.

Аналогично предполагаме, че $q_1, q_2, q_3 \geq 0$, $q_1 + q_2 + q_3 = 1$ и (q_1, q_2, q_3) е смесена стратегия на работодателя.

Ако профсъюзът избере стратегия (p_1, p_2, p_3), печалбата му спрямо всяка от стратегиите на работодателя ще е:

$$9.5\,p_1 + 7\,p_2 + 6\,p_3 \geq v$$

$$12\,p_1 + 8.5\,p_2 + 9\,p_3 \geq v$$

$$7\,p_1 + 6.5\,p_2 + 10\,p_3 \geq v$$

Делим неравенствата на v и въвеждаме променливите:

$$x_1 = \frac{p_1}{v}, \quad x_2 = \frac{p_2}{v}, \quad x_3 = \frac{p_3}{v}$$

Тогава задачата ще има вида:

Да се намерят неотрицателни стойности на променливите x_1, x_2, x_3, които да удовлетворяват условията

$$9.5\,x_1 + 7\,x_2 + 6\,x_3 \geq 1$$

$$12\,x_1 + 8.5\,x_2 + 9\,x_3 \geq 1$$

$$7\,x_1 + 6.5\,x_2 + 10\,x_3 \geq 1$$

и да превръщат в **минимум** функцията $L = x_1 + x_2 + x_3$

От гледна точка на работодателя ще се получи двойствената задача:

Да се намерят неотрицателни стойности на променливите y_1, y_2, y_3, които да удовлетворяват условията

$$9.5y_1 + 12y_2 + 7y_3 \le 1$$

$$7y_1 + 8.5y_2 + 6.5y_3 \le 1$$

$$6y_1 + 9y_2 + 10y_3 \le 1$$

и да превръщат в **максимум** функцията $M = y_1 + y_2 + y_3$

Пример 7

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	2	-3	4	-3
A_2	-3	4	-5	-5
A_3	4	-5	6	-5
β_j	4	4	6	

$\alpha = -3$, $\beta = 4$, $S_A{*} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $S_B{*} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $v = 0$

6.3 Числени методи – метод на Браун-Робинзон

Пример за прилагане на алгоритъма

+5	B_1	B_2	B_3
A_1	7	2	9
A_2	2	9	0
A_3	9	0	11

Означения:

k - номер на партията

i - избрана стратегия на A

B_1, B_2, B_3 - натрупани загуби при стратегии на B

j - избрана стратегия на B

A_1, A_2, A_3 - натрупани печалби при стратегии на A

$\underline{v}$ - долна цена на играта (натрупана загуба на B / k)

$\overline{v}$ - горна цена на играта (натрупана печалба на A / k)

v - цена на играта ($v = (\underline{v} + \overline{v}) / 2$)

k	i	B_1	B_2	B_3	j	A_1	A_2	A_3	$\underline{v}$	$\overline{v}$	v
1	3	9	$\underline{0}$	11	2	2	$\overline{9}$	0	0.00	9.00	4.50
2	2	11	$\underline{9}$	11	2	4	$\overline{18}$	0	4.50	9.00	6.75
3	2	13	18	$\underline{11}$	3	13	$\overline{18}$	11	3.67	6.00	4.84
4	2	15	27	$\underline{11}$	3	$\overline{22}$	18	22	4.00	5.50	4.13
5	1				3						5.30
6	3				2						5.17
7	1				2						4.79
8	2				2						5.30
9	2				3						4.78
10	1				1						5.10
11	3				2						4.87
12	2				2						5.20
13	2				3						4.84
14	1				1						5.07
15	3				2						4.90
…											

Решение на играта:

$$v = 5, \quad p_1 = \frac{4}{15}, \quad p_2 = \frac{7}{15}, \quad p_3 = \frac{4}{15}$$