

---

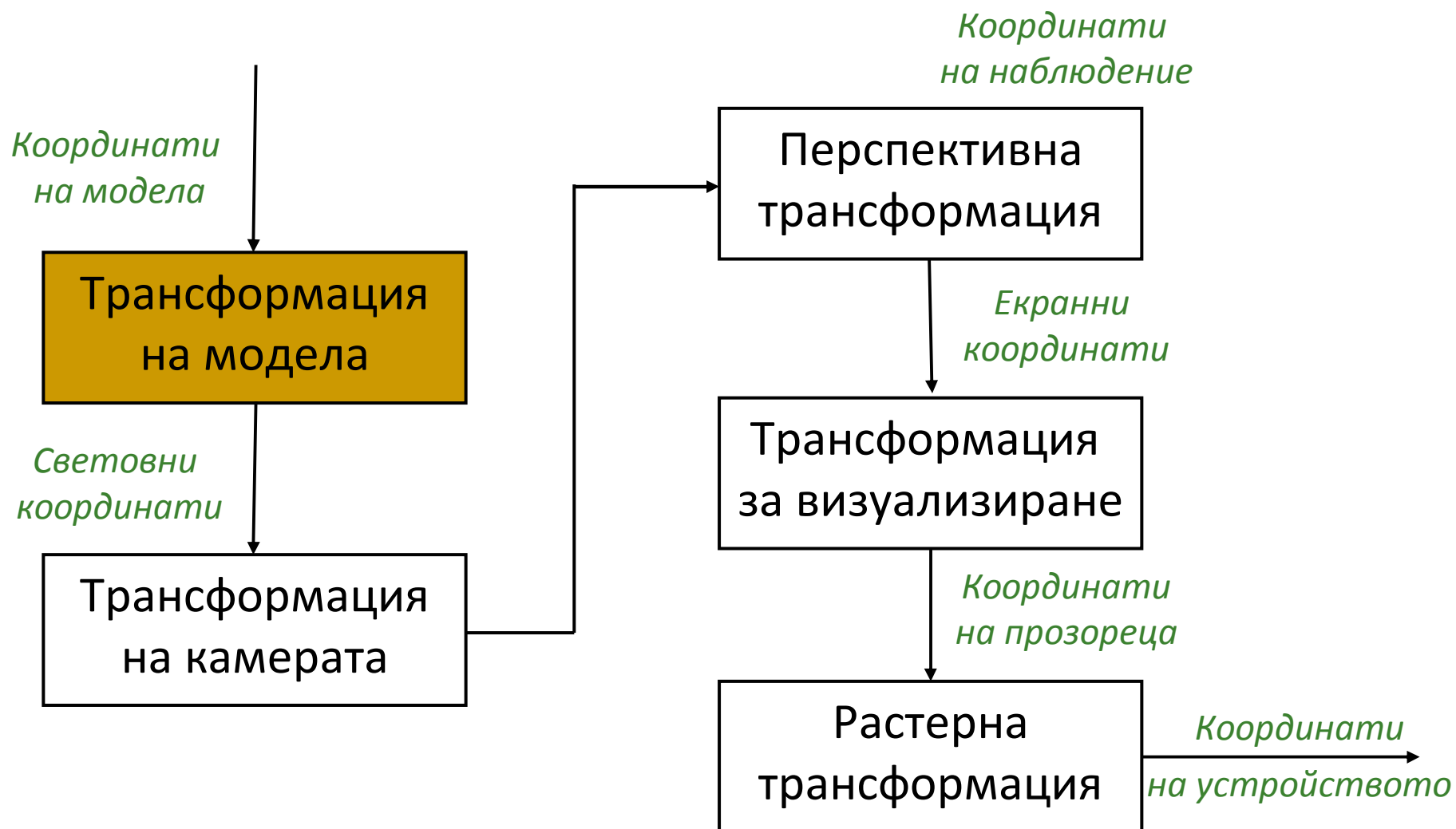
# Компютърна графика

---

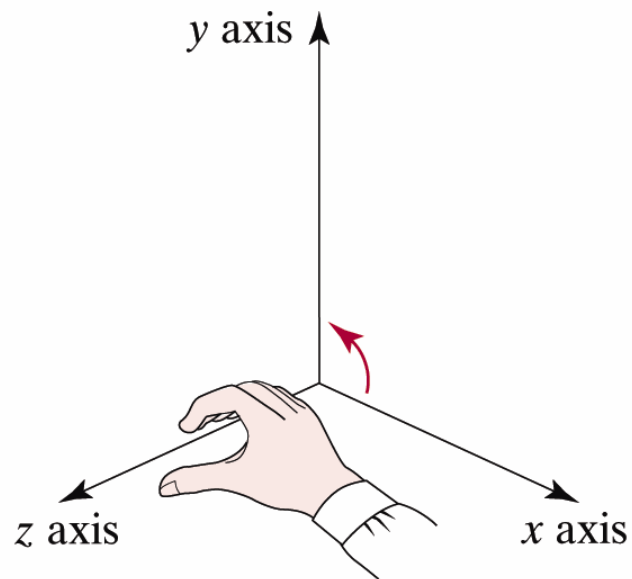
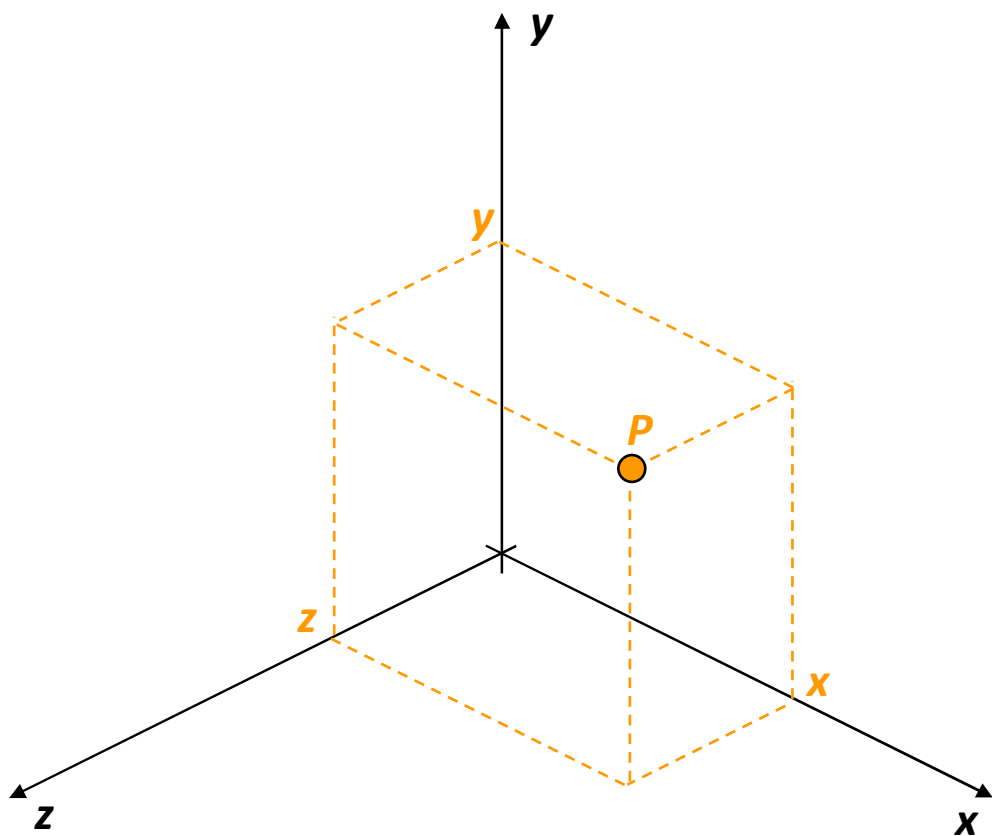
## 3D трансформации

доц. Милена Лазарова, кат. КС, ФКСУ

# Основен графичен конвейер



# Координатна система – 3D

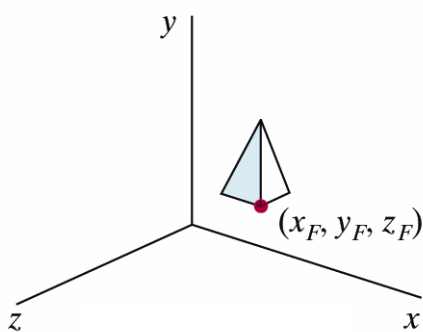


дясно ориентирана КС

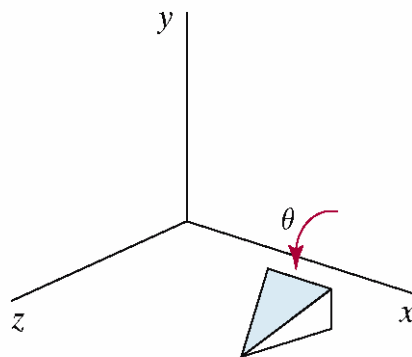
...

# 3D трансформации

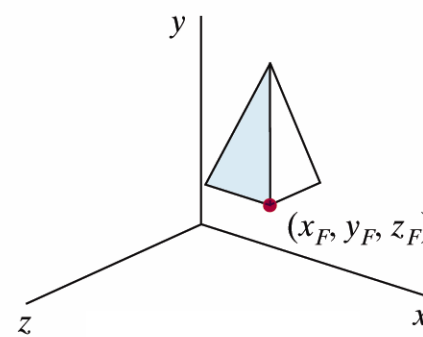
- Трансформациите в компютърната графика се използват за промяна на разположението и формата на обектите
  - преместване, ротация, мащабиране



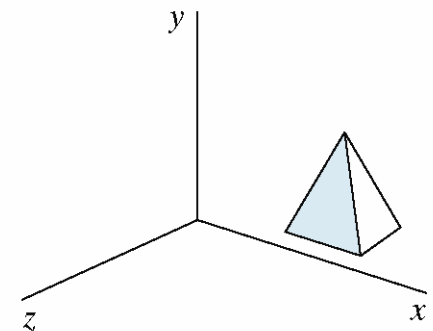
*транслация*



*ротация*



*мащабиране*

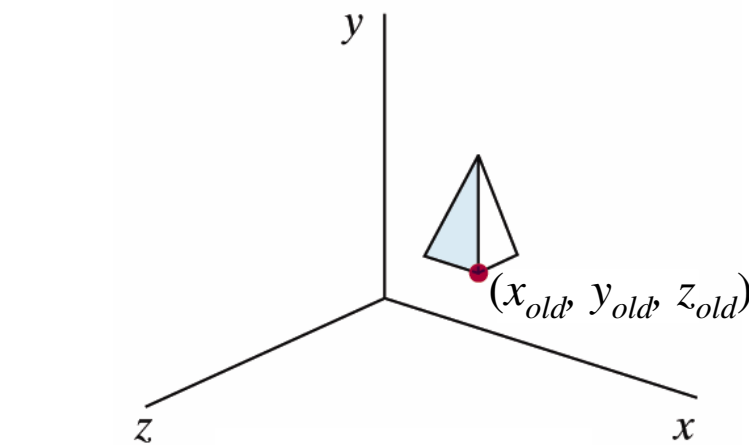


# 3D трансляция

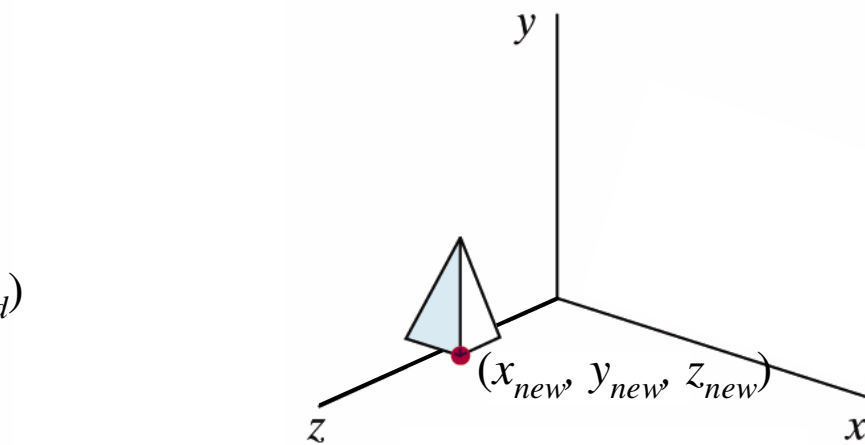
- Преместване на обект от една позиция в друга

$$x_{new} = x_{old} + dx, y_{new} = y_{old} + dy, z_{new} = z_{old} + dz$$

където точка с координати  $(x_{old}, y_{old}, z_{old})$  се премества в нова позиция с координати  $(x_{new}, y_{new}, z_{new})$  с коефициенти на трансляция  $dx, dy, dz$



Начална  
позиция



Позиция след  
транслация

# 3D мащабиране

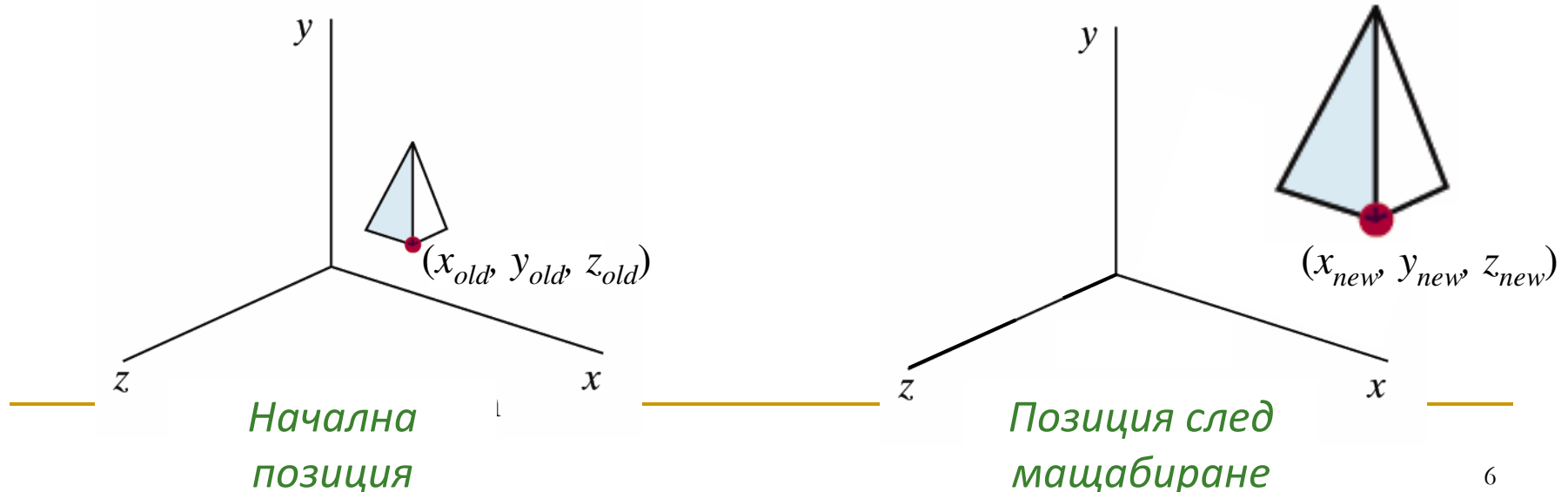
## ■ Промяна на размерите на обекта

- всички координати се умножават със скаларна стойност

$$x_{new} = S_x \cdot x_{old}, y_{new} = S_y \cdot y_{old}, z_{new} = S_z \cdot z_{old}$$

- коефициенти на мащабиране  $S_x, S_y, S_z$

- **променя се не само размера, а и позицията на обекта**



# 3D ротация

- Завъртане на обекта

- в 2D: ротацията е на определен ъгъл

*спрямо началото на координатната система*

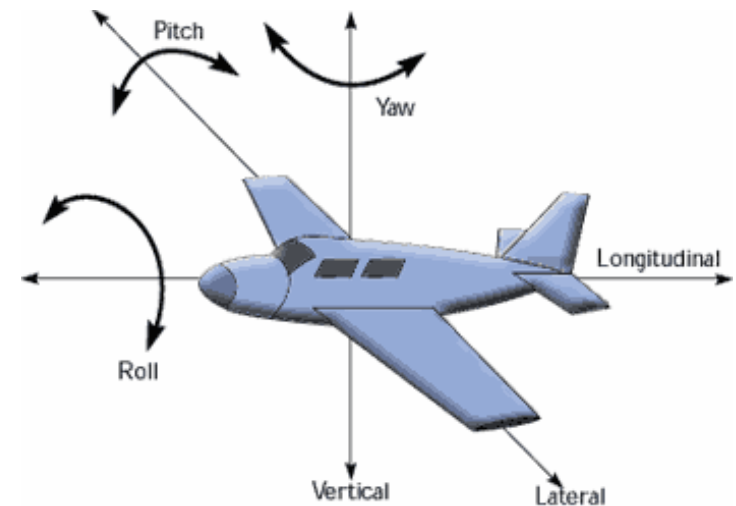
- около оста z

- в 3D: има няколко варианта

- около оста x – *pitch*

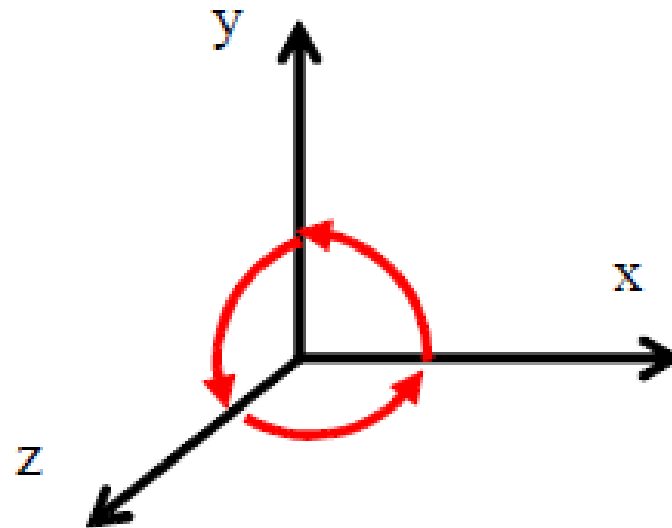
- около оста y – *yaw*

- около оста z – *roll*



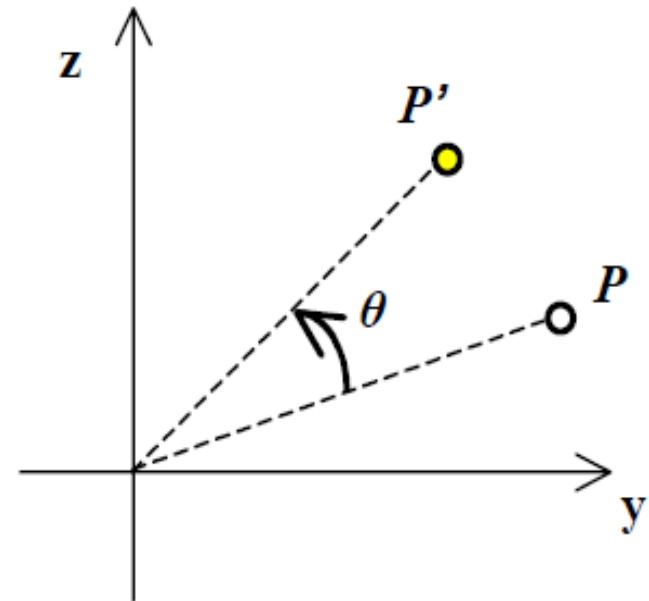
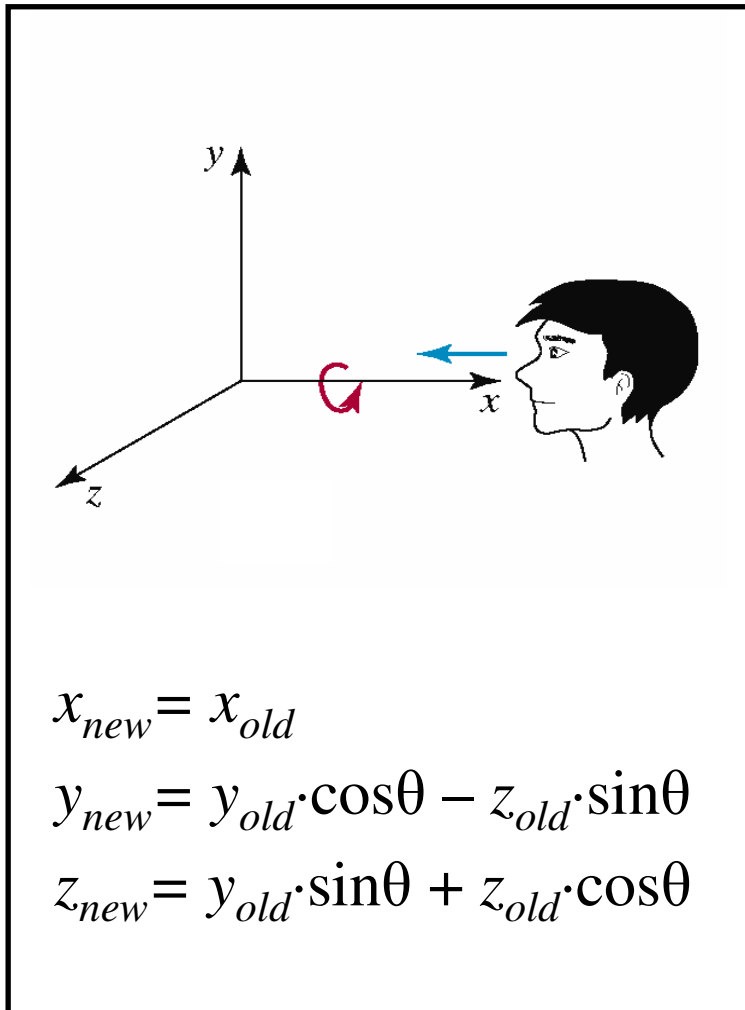
# 3D ротация

- Положителни посоки на въртене около координатните оси в тримерното пространство
  - **ОКОЛО ОС X**
    - ОТ Y КЪМ Z
  - **ОКОЛО ОС Y**
    - ОТ Z КЪМ X
  - **ОКОЛО ОС Z**
    - ОТ X КЪМ Y

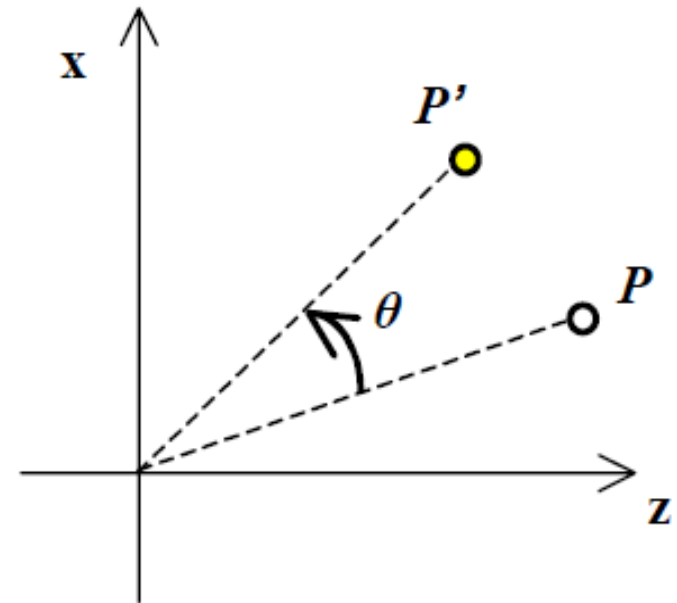
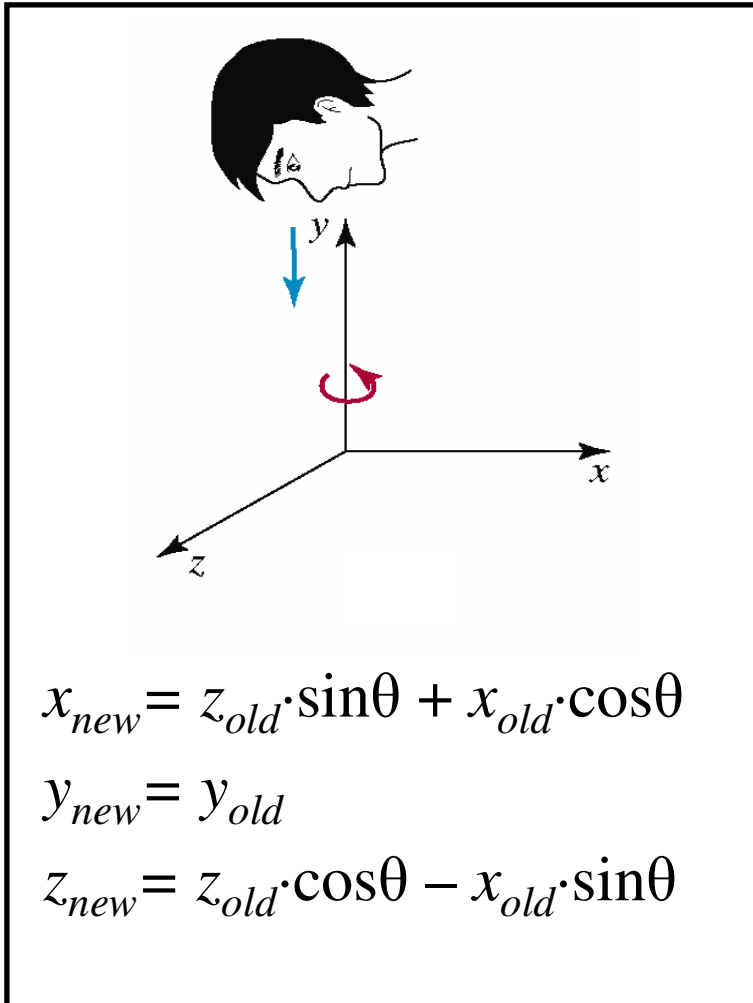




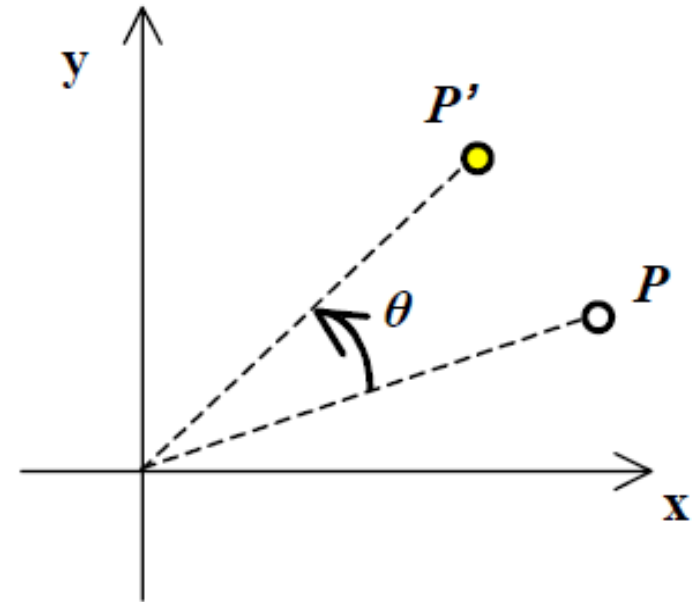
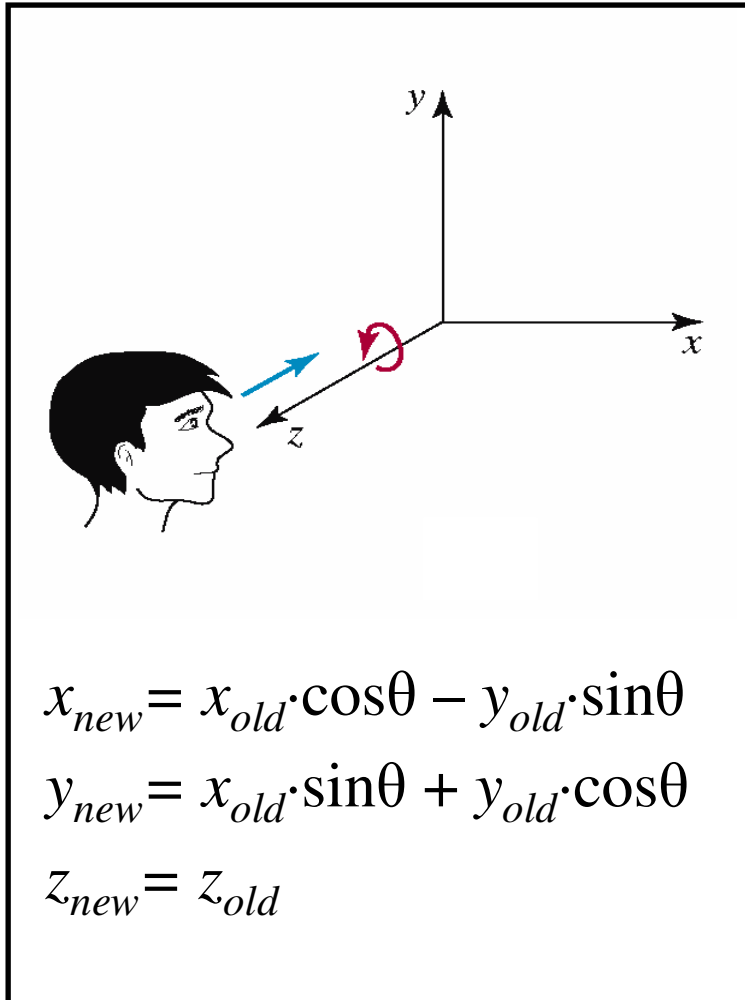
# 3D ротация около оста x



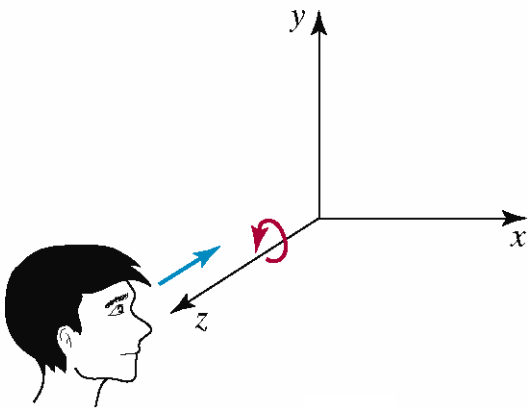
# 3D ротация около оста y



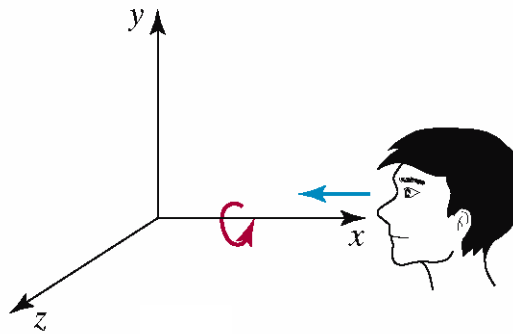
# 3D ротация около оста z



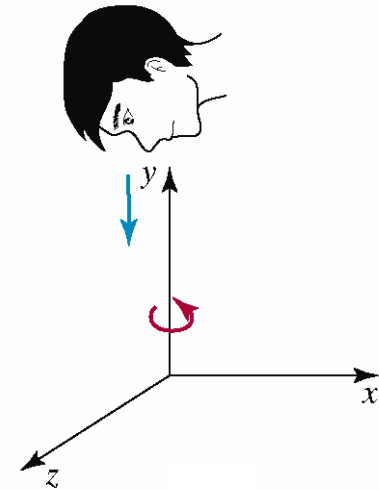
# 3D ротация



$$\begin{aligned}x_{new} &= x_{old} \cdot \cos\theta - y_{old} \cdot \sin\theta \\y_{new} &= x_{old} \cdot \sin\theta + y_{old} \cdot \cos\theta \\z_{new} &= z_{old}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}x_{new} &= x_{old} \\y_{new} &= y_{old} \cdot \cos\theta - z_{old} \cdot \sin\theta \\z_{new} &= y_{old} \cdot \sin\theta + z_{old} \cdot \cos\theta\end{aligned}$$

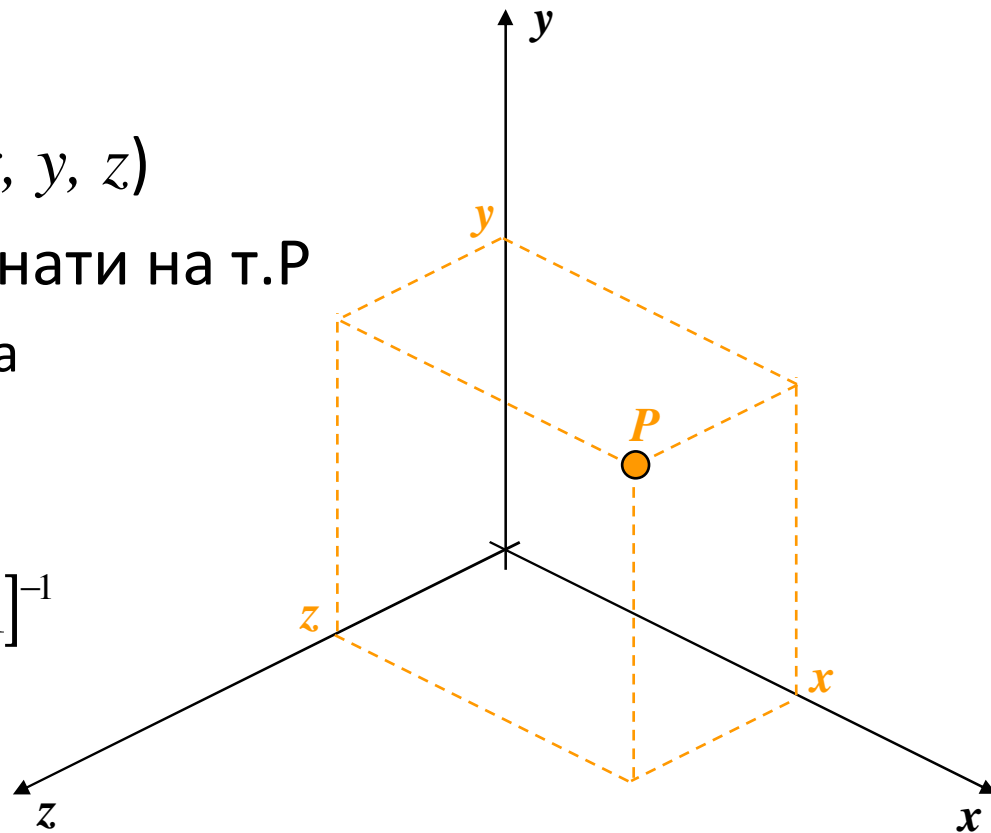


$$\begin{aligned}x_{new} &= z_{old} \cdot \sin\theta + x_{old} \cdot \cos\theta \\y_{new} &= y_{old} \\z_{new} &= z_{old} \cdot \cos\theta - x_{old} \cdot \sin\theta\end{aligned}$$

# Хомогенни координати

- Хомогенни координати на точка в тримерното пространство
  - т.Р с координати  $(x, y, z)$
  - хомогенни координати на т.Р
    - вектор с 4 елемента

$$\mathbf{P}(x, y, z) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = [x \ y \ z \ 1]^{-1}$$



---

# Хомогенни координати

- Използване на хомогенни координати в компютърна графика
  - геометричните трансформации се представят с матрици
  - необходимите изчисления се извършват с матрични умножения

# 3D трансляция

- 3D трансляция

$$\begin{bmatrix} x_{new} \\ y_{new} \\ z_{new} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- *Матрица за 3D трансляция*

$$P_{new} = T(dx, dy, dz) \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# 3D мащабиране

- 3D мащабиране

$$\begin{bmatrix} x_{new} \\ y_{new} \\ z_{new} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- *Матрица за 3D мащабиране*

$$P_{new} = S(Sx, Sy, Sz).P$$

$$\begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# 3D ротация

■ 3D ротация около оста x

$$\begin{bmatrix} x_{new} \\ y_{new} \\ z_{new} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

■ *Матрица за 3D ротация около оста x*

$$P_{new} = R_x(\theta) \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# 3D ротация

■ 3D ротация около оста  $y$

$$\begin{bmatrix} x_{new} \\ y_{new} \\ z_{new} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

■ *Матрица за 3D ротация около оста  $y$*

$$P_{new} = R_y(\theta) \cdot P$$
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# 3D ротация

■ 3D ротация около оста z

$$\begin{bmatrix} x_{new} \\ y_{new} \\ z_{new} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

■ *Матрица за 3D ротация около оста z*

$$P_{new} = R_z(\theta) \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Обратни трансформации

- Транслация  $T(dx, dy, dz)$ 
  - обратна с  $T^{-1}(-dx, -dy, -dz)$
- Мащабиране  $S(S_x, S_y, S_z)$ 
  - обратна с  $S^{-1}(1/S_x, 1/S_y, 1/S_z)$
- Ротация  $R(\theta)$ 
  - обратна с  $R^{-1}(-\theta)$

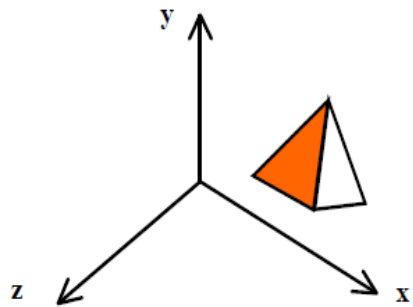
---

# Ротация около произволна ос

- ***Ротация около ос, успоредна на една от основните координатни оси***
  - трансляция на оста на ротация до съответната координатна ос
  - ротация на зададения ъгъл  $\theta$
  - обратна трансляция на оста на ротация до първоначалното ѝ положение

# Ротация около произволна ос

- Пример: ротация около ос, успоредна на оста x



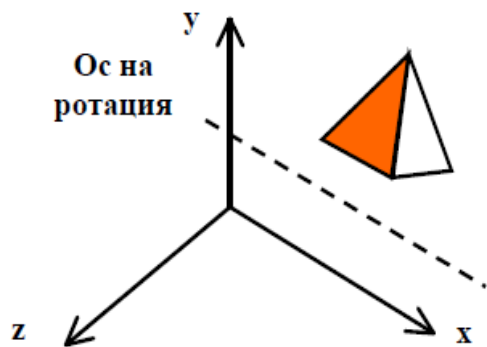
Начално положение

Всяка точка от обекта ще се преобразува с трансформацията

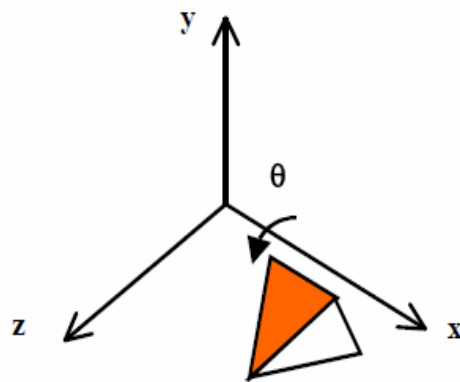
$$P_{\text{new}} = T^{-1} \cdot R_x(\theta) \cdot T \cdot P$$

**Обща преобразуваща матрица**

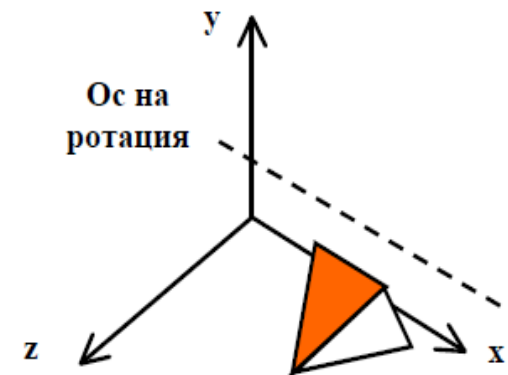
$$M = T^{-1} \cdot R_x(\theta) \cdot T$$



транслация на оста на ротация до оста x



ротация на ъгъл  $\theta$



обратна транслация на оста на ротация до начално положение

---

# Ротация около произволна ос

## ■ Ротация около произволна права

- ъгъл на ротация  $\theta$
- ос на ротация: зададен с

- точка  $P = (x, y, z)$

и направляващ вектор  $d = (dx, dy, dz)$

или

- две точки  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  и  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ,  
тогава  $d = P_2 - P_1$

---

# Ротация около произволна ос

## ■ *Ротация около произволна права*

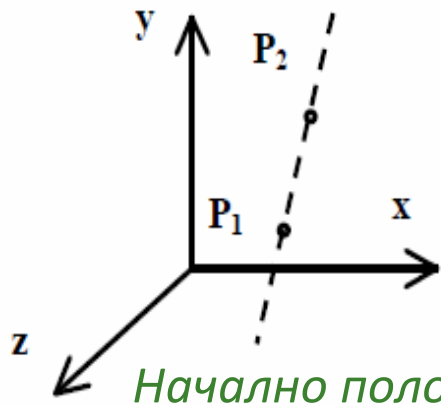
- Изравнява се оста на ротация с една от основните оси, например  $z$

1. Транслация на обекта, така че оста да мине през началото на координатната система
  2. Ротации, така че оста на ротация да съвпадне с оста  $z$
  3. Ротация около  $z$  на ъгъл  $\theta$
  4. Обратни ротации
  5. Обратна транслация
-

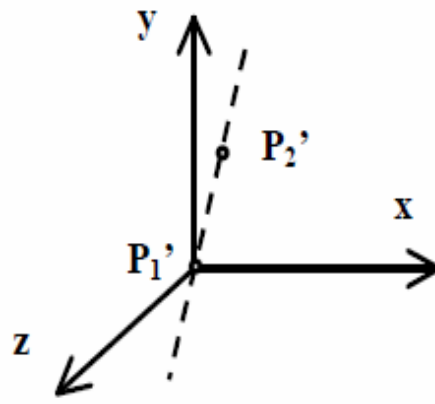


# Ротация около произволна ос

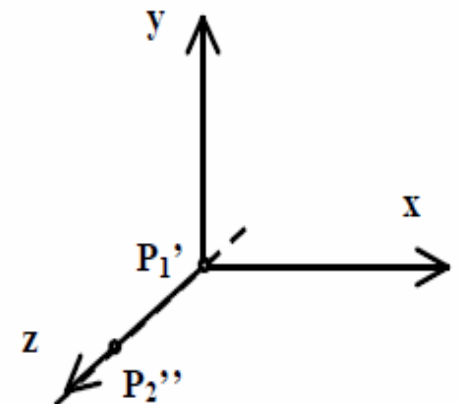
## ■ Ротация около произволна права



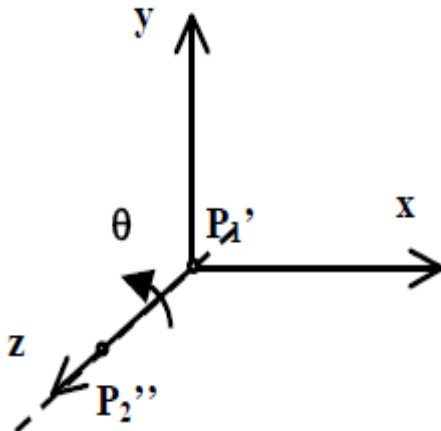
Начално положение



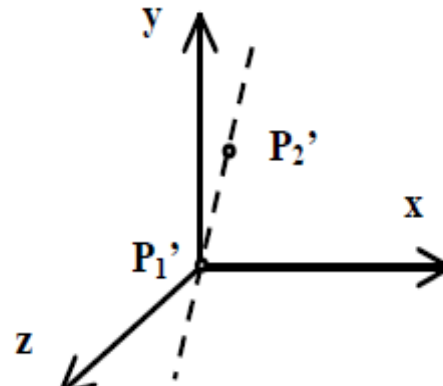
Транслация на  $m.P_1$  до  $m.O$



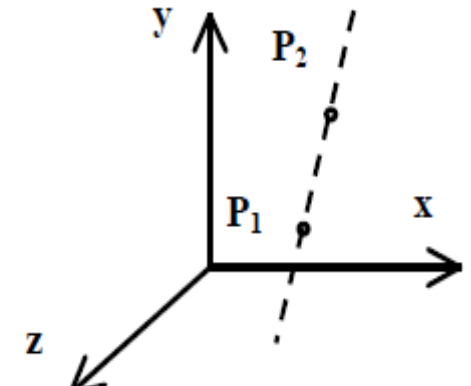
Ротация на оста до ос  $z$



Ротация на обекта  
около  $z$



Обратни ротации  
на оста



Транслация до  
начално положение

---

# Ротация около произволна ос

## ■ Ротация около произволна права

### 1. Транслация на т.Р<sub>1</sub> до началото на координатната система

- Използва се матрица на транслация

$$T(-x_1, -y_1, -z_1)$$

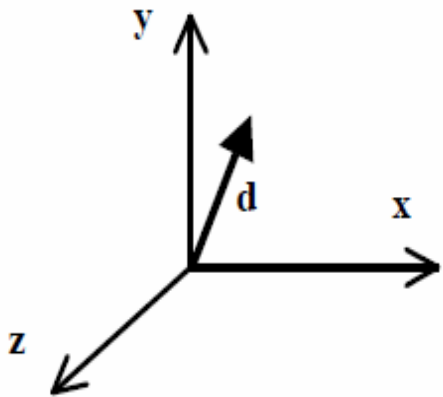
- Матрицата за обратната транслация

$$T^{-1}(x_1, y_1, z_1)$$

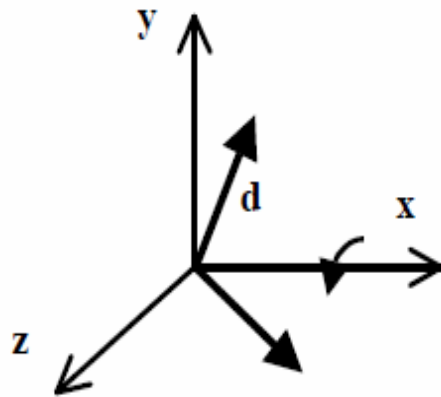
# Ротация около произволна ос

## ■ Ротация около произволна права

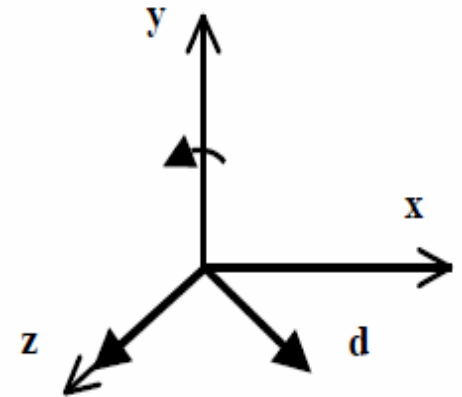
### 2. Ротации на оста до положителната посока на оста z



След трансляцията



Ротация около x  
за да легне в равнината xz



Ротация около y  
за да се изравни с оста z

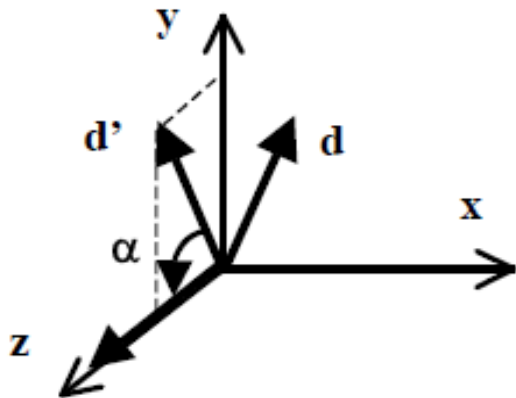
# Ротация около произволна ос

## ■ Ротация около произволна права

### 2. Ротации на оста до положителната посока на оста z

#### 2.1. Ротация около x за да легне оста на ротация в равнината xz

$$\sin \alpha = \frac{dy}{|d'|}, \quad \cos \alpha = \frac{dz}{|d'|}, \quad |d'| = v = \sqrt{dy^2 + dz^2}$$



$$\mathbf{R}_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dz}{v} & -\frac{dy}{v} & 0 \\ 0 & \frac{dy}{v} & \frac{dz}{v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_x^{-1} = \mathbf{R}_x(-\alpha)$$

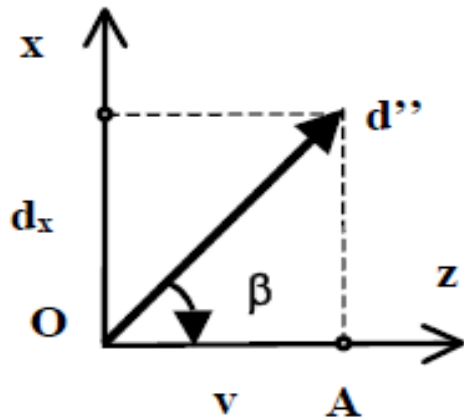
Ъгълът на ротация е равен на ъгъла между  $d'$  (проекцията на вектора  $d$  в равнината  $xz$ ) и оста  $z$ :  $d' = (0, dy, dz)$

# Ротация около произволна ос

## ■ Ротация около произволна права

### 2. Ротации на оста до положителната посока на оста z

#### 2.2. Ротация около y за да съвпадне оста на ротация с оста z



$$\sin \beta = \frac{dx}{|d''|}, \quad \cos \beta = \frac{v}{|d''|}$$

$$\mathbf{R}_y(-\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_y^{-1} = \mathbf{R}_y(\beta)$$

Ъгълът на ротация около ос y е  $-\beta$ . След ротацията оста лежи в равнината xz, векторът  $d$  се е преобразувал до вектора  $d''$ :  $d'' = (dx, 0, v)$

# Ротация около произволна ос

## ■ Ротация около произволна права

### 3. Ротация на обекта около ос z на ъгъл $\theta$

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Обща преобразуваща матрица

$$\mathbf{R}(\theta) = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{R}_x^{-1} \cdot \mathbf{R}_y^{-1} \cdot \mathbf{R}_z \cdot \mathbf{R}_y \cdot \mathbf{R}_x \cdot \mathbf{T}$$

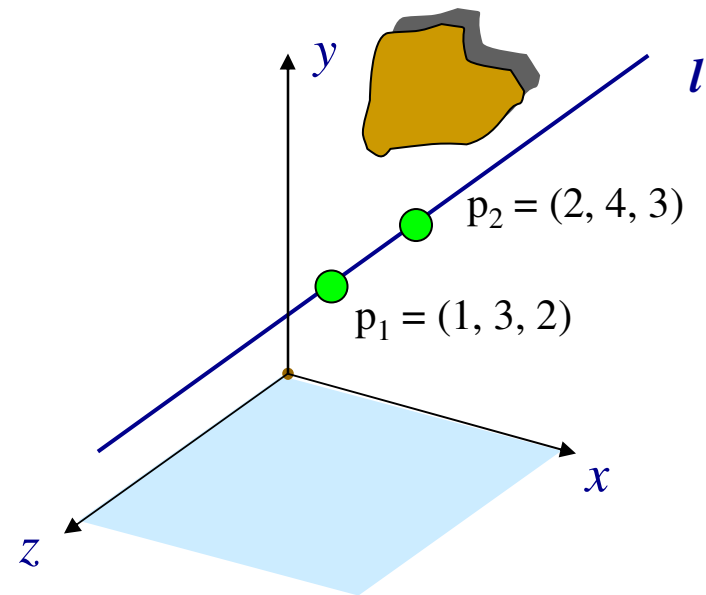
# Ротация около произволна ос

- Пример: Ротация на обект около линията, минаващ през точките  $(1, 3, 2)$  и  $(2, 4, 3)$  на ъгъл  $\theta$

- дължина на вектора  $P_1P_2$

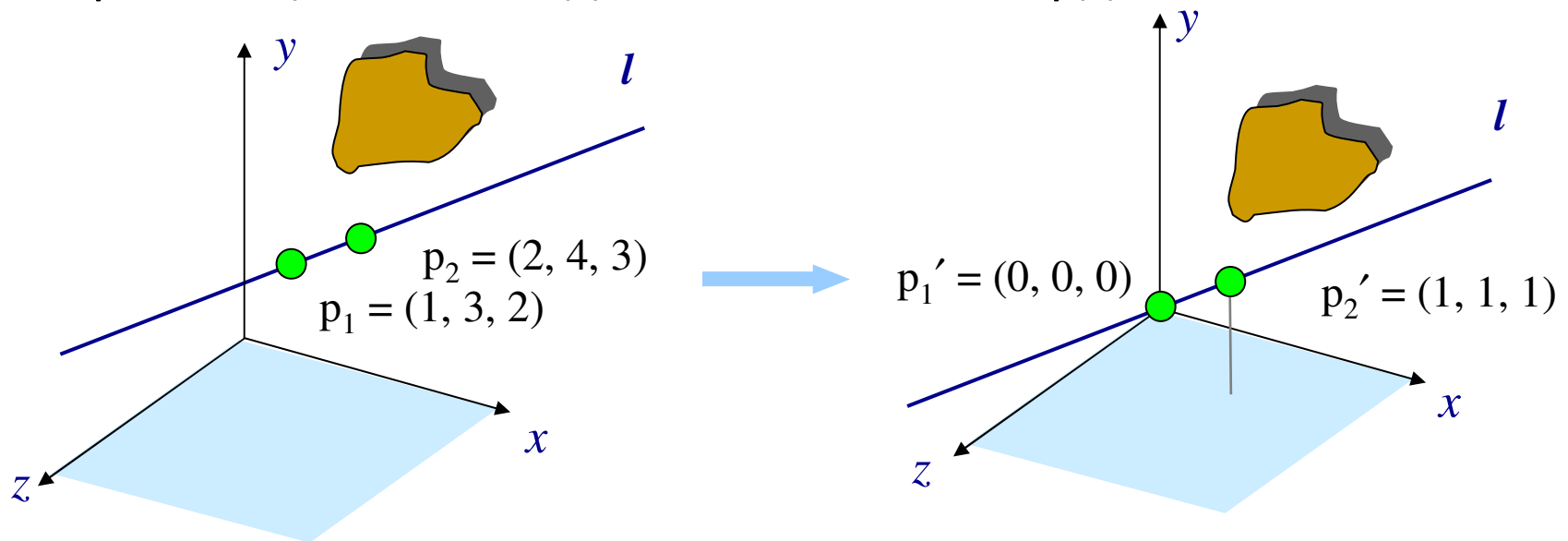
$$\|P_1P_2\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

- *дължината не се променя при трансляция и ротация*



# Ротация около произволна ос

1. Транслация на оста до началото на координатната система



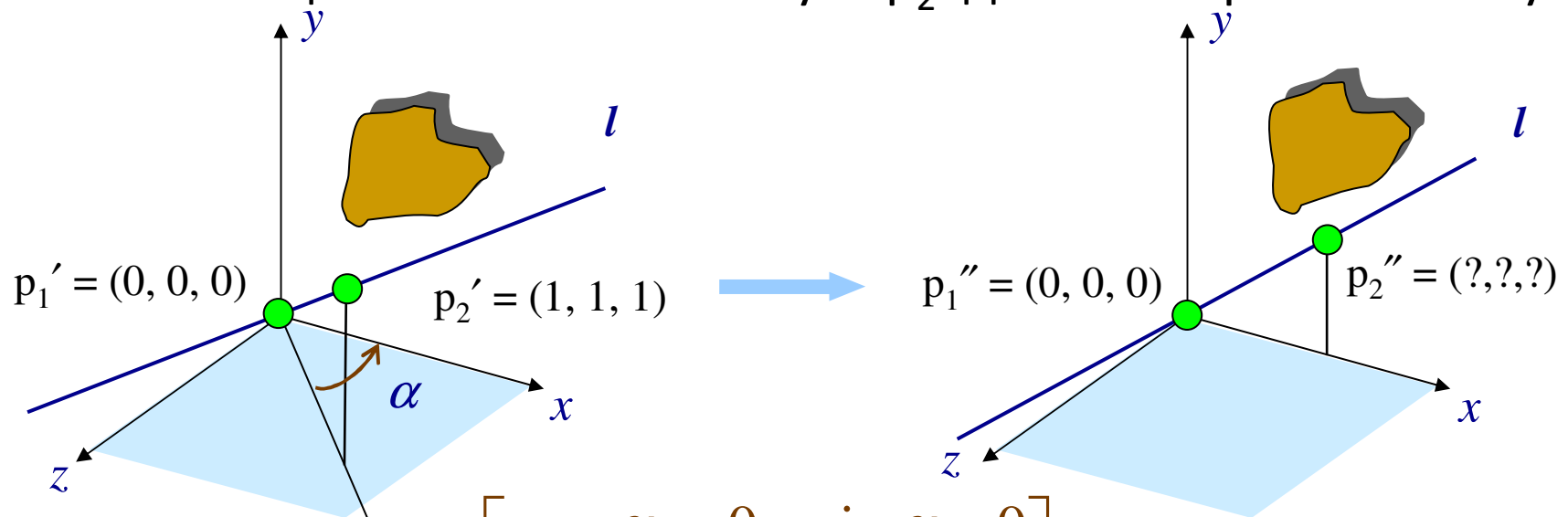
$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Ротация около произволна ос

## 2. Ротация на оста до координатна ос

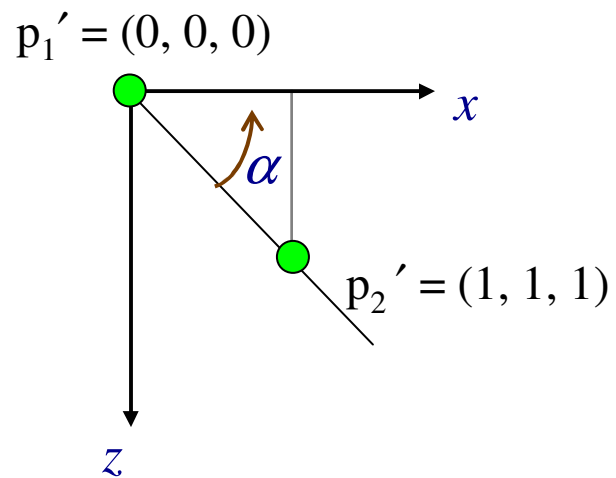
### 2.1. Ротация на ъгъл $\alpha$ около $y$ : т. $p_2'$ да лежи в равнината $xu$



$$R_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Ротация около произволна ос

□ колко е ъгъл  $\alpha$ ?



$$\alpha = \pi / 4$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

# Ротация около произволна ос

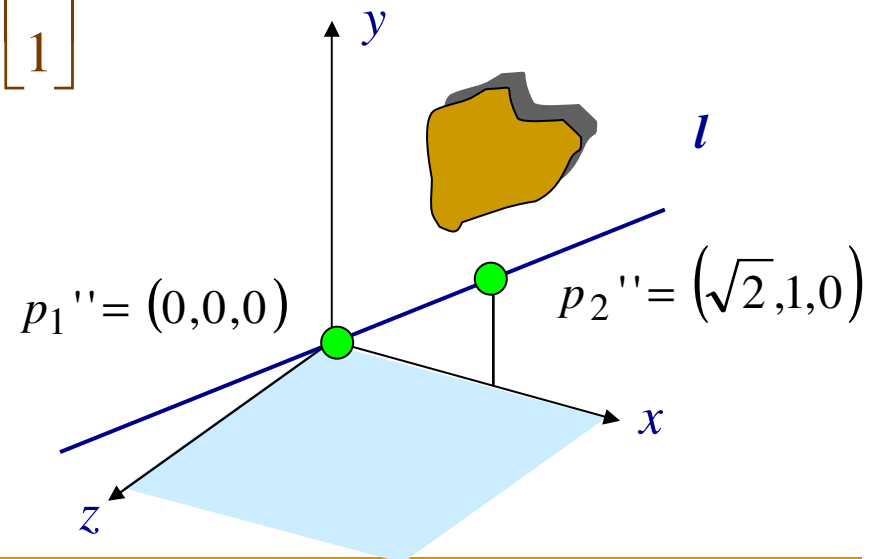
- **какви са координатите на  $p_2''$ ?**
  - изчисляват се с прилагане на ротационната матрица за  $p_2'$

$$R_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & 0 & \sin \frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \frac{\pi}{4} & 0 & \cos \frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Ротация около произволна ос

- *какви са координатите на  $p_2''$ ?*

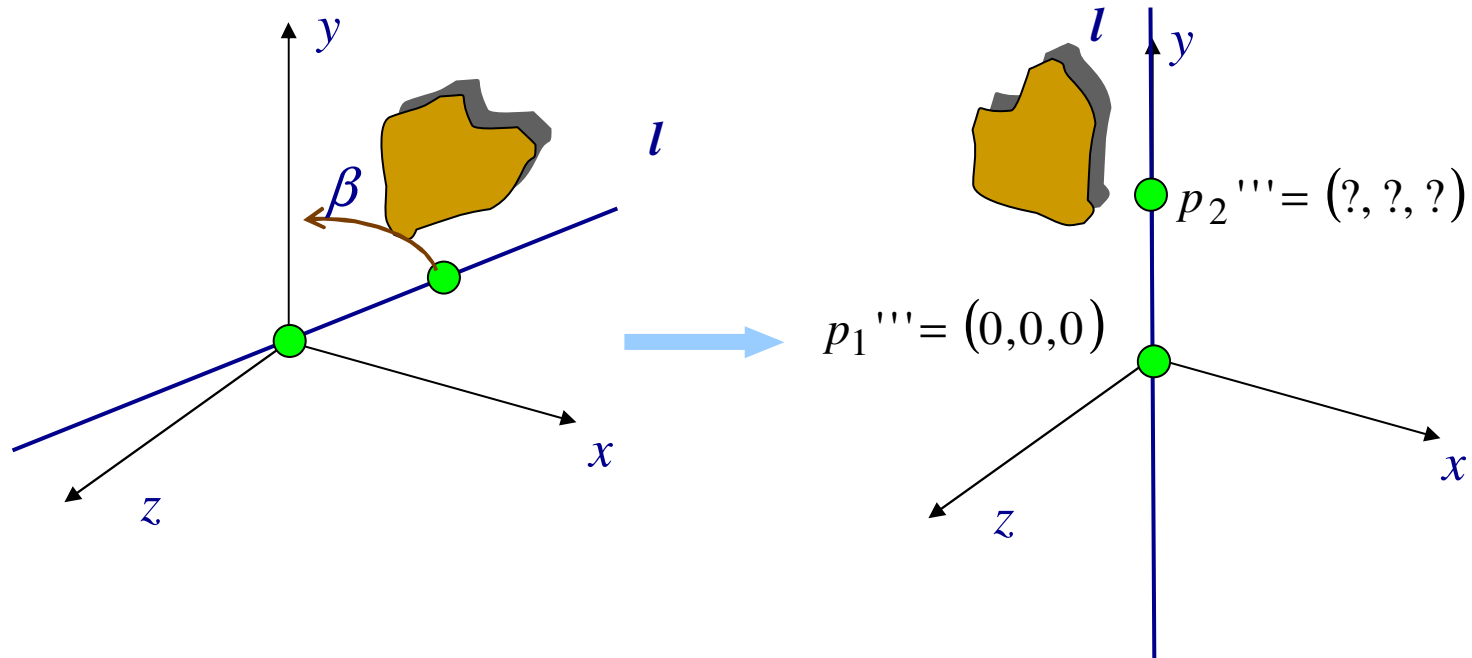
$$p_2'' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [\sqrt{2} \quad 1 \quad 0 \quad 1]$$



# Ротация около произволна ос

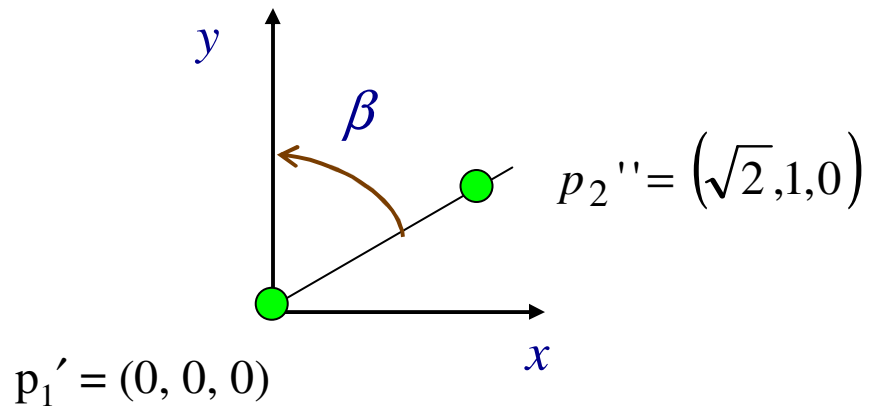
## 2. Ротация на оста до координатна ос

2.2. Ротация на ъгъл  $\beta$  около  $z$ : т.р<sub>2</sub> да лежи върху оста  $y$



# Ротация около произволна ос

□ колко е ъгъл  $\beta$ ?



$$\beta = 54^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

# Ротация около произволна ос

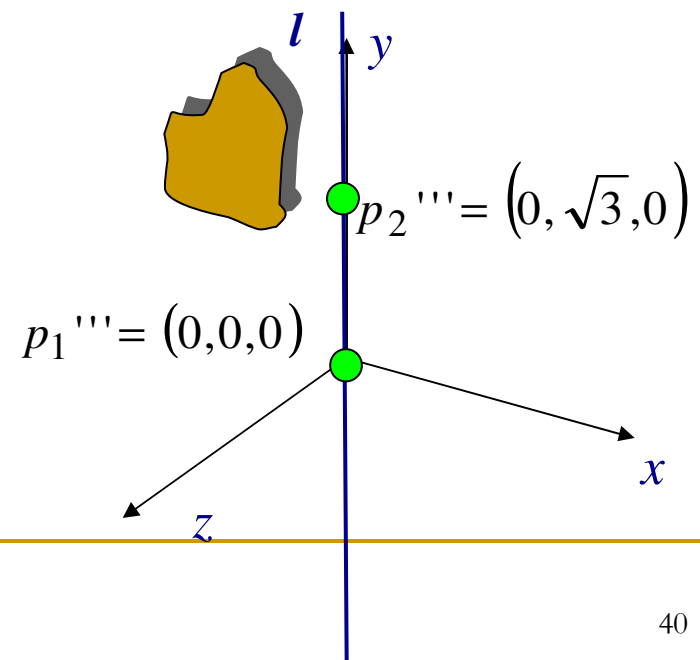
- **какви са координатите на  $p_2'''$ ?**
  - изчисляват се с прилагане на ротационната матрица за  $p_2''$

$$R_z(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Ротация около произволна ос

- *какви са координатите на  $p_2'''$ ?*

$$p_2''' = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





# Ротация около произволна ос

## 3. Ротация на обекта около оста $y$ на ъгъл $\theta$

- това е ротацията на ъгъл съгласно първоначалното задание

## 4. Обратни ротации

- ротация спрямо оста  $z$  на ъгъл  $-\beta$
- ротация спрямо оста  $y$  на ъгъл  $-\alpha$

## 5. Обратна трансляция

### ■ *Обща преобразуваща матрица*

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(1,3,2) \cdot \mathbf{R}_y\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \mathbf{R}_z\left(-54^\circ\right) \cdot \mathbf{R}_y(\theta) \cdot \mathbf{R}_z\left(54^\circ\right) \cdot \mathbf{R}_y\left(\frac{-\pi}{4}\right) \cdot \mathbf{T}(-1,-3,-2)$$

# Други трансформации

## ■ *Огледален образ (Reflection)*

### □ **Спрямо някоя от координатните оси**

- чрез ротация на  $180^\circ$  спрямо оста

### □ **Спрямо равнина**

- чрез ротация на  $180^\circ$  в хомогенни координати (4D)

- например спрямо равнината  $xu$  с матрица  $\mathbf{RF}_z$ 
  - еквивалентно на преобразуване от дясна в лява координатна система

$$\mathbf{RF}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Други трансформации

## ■ *Еластични деформации (Shear)*

□  $\mathbf{SH}_x$

■ по оста  $x$  с коефициенти на деформация  $a$  по  $y$  и  $b$  по  $z$

□  $\mathbf{SH}_y$

■ по оста  $y$  с коефициенти на деформация  $a$  по  $x$  и  $b$  по  $z$

□  $\mathbf{SH}_z$

■ по оста  $z$  с коефициенти на деформация  $a$  по  $x$  и  $b$  по  $y$

$$\mathbf{SH}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{SH}_y = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{SH}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Видове трансформации

## ■ *Евклидови (Euclidean)*

- наричат се още “rigid body” трансформации
- не деформират обектите
- транслация и ротация

## ■ *Метрични (Metric)*

- създават подобни обекти
- транслация, ротация, мащабиране

## ■ *Линейни (Affine)*

- линейна трансформация (ротация, мащабиране, еластични деформации) последвана от транслация

## ■ *Проекционни (Projective)*

- коя да е линейна трансформация с каква да е матрица

# Видове трансформации

## ■ Евклидова

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## ■ Метрична

$$\begin{bmatrix} sr_{11} & sr_{12} & sr_{13} & t_x \\ sr_{21} & sr_{22} & sr_{23} & t_y \\ sr_{31} & sr_{32} & sr_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## ■ Линейна

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## ■ Проекционна

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix}$$

Euclidean  $\subset$  Metric  $\subset$  Affine  $\subset$  Projective

---

# КРАЙ

---

Следваща тема:

Проекции