

# ОСНОВНИ ПРИНЦИПИ НА ИЗСЛЕДВАНЕТО НА ОПЕРАЦИИ

## 1.1. ОБЩА ХАРАКТЕРИСТИКА НА ИЗСЛЕДВАНЕТО НА ОПЕРАЦИИ

Изследването на операции (ИО) се занимава с определянето на най-добри решения на проблеми в условията на ограничени ресурси независимо от природата и конкретната дейност на организациите (системи-те), в които тези проблеми възникват.

Централно място при ИО заемат математическите методи и модели. В резултат на изследването на дейността и на дадените проблеми се построява *математичен модел*, който описва достатъчно точно най-съществените страни на проблема. Този модел се използва за ана-лизиране на проблема и обосноваване на търсените решения, като се предполага, че получените заключения са валидни и за реалния проблем, описан достатъчно точно от модела.

Основен елемент при решаването на сложни задачи (проблеми) е човекът. Човешката дейност, човешкото поведение са фактори, които най-трудно се поддават на математическо описание. Ето защо модели, показали своята полезност в дадена човешка среда, при смяна на сре-дата може да се окажат неточни, дори неприложими. Причина за това могат да бъдат психологически фактори, свързани със стимули и мотивация за едни или други дейности и решения.

Създаването и нарастващото приложение на математични методи и модели на решаването на сложни задачи, от една страна, и значител-ната роля на творческите способности, личностните качества и умения-ето за общуване на специалистите по ИО за успешното разработване и използване на модели от друга, дават основание ИО да се разглежда и като *наука*, и като *изкуство*.

Основен методологичен принцип при ИО е *системният подход*. Конкретните задачи и конфликтите между компонентите на органи-зацията (системата) се разглеждат от гледна точка на интересите на цялата организация. Това означава, че целите, които се формулират при анализа и решаването на дадена задача, трябва да съответствуват на общите цели на организацията.

Обикновено задачите, които възникват, имат комплексен, многоаспектен характер и при анализа на множеството фактори, свързани с конкретна задача, се използват знания от различни науки. Пора-

ди това, за извършването на дадено изследване се съставя екип (група) по ИО. В зависимост от сложността на задачата в групата се включват специалисти, които като колектив имат висока квалификация и опит в необходимите направления на техниката, икономиката, математиката, статистиката, компютърните системи, психологията, социологията и методите на ИО.

## 1.2. РАЗВИТИЕ И ОБХВАТ НА ИЗСЛЕДВАНЕТО НА ОПЕРАЦИИ

Началото на ИО може да се отнесе към първите опити за използване на научен подход при управлението на сложни дейности и организации, предприети преди десетилетия. Възникването обаче на дейност, наричана *изследване на операции*, се свързва с началото на Втората све-товна война, когато към британските въоръжени сили са се създавали екипи от учени и специалистите за извършване на изследвания и форму-лиране на препоръки, свързани с разпределението на ограничени ресурси за различни военни операции.

Продължилото след войната концентриране и специализиране на производствената дейност, мащабното развитие на промишлеността, строителството, търговията, финансите и стремежът към ефективно използване на ограничените ресурси е стимулирало навлизането и ши-рокото приложение на ИО в тези области на стопанска дейност. Раз-ширява се кръгът на решаваните задачи, създават се нови методи на ИО.

Бързото разпространение на ИО се обуславя от създаването на подходящи методи и средства. Методите на линейното програмиране и динамичното програмиране, принципът на максимума, теорията на ма-совото обслужване и други методи са били развити в значителна степен към края на петдесетте години. Основополагащо значение имат трудо-вете на лауреатите на Нобелова награда Л.Канторович и Дж. Данциг за създаването и развитието на линейното програмиране, на Р.Белман и Л.Понтрягин, създали съответно динамичното програмиране и принципа на максимума. Съществен е приносът на Р.Акоф, Р.Черчмен, Т.Саати, А.Кофман, Г.Вагнер, Н.Моисеев и други учени за формиране-то на ИО като научно направление.

Друг важен ускоряващ фактор в областта на ИО е широкото разпространение на компютърната техника. Използването на математически модели при анализа и решаването на сложни задачи е свързано с голям обем изчисления, ръчното изпълнение на които е невъзможно.

През последните две десетилетия особено бързо нарастват броят и разнообразието на приложенията на ИО в промишлеността и сто-панската дейност. В тази сфера понякога се използва понятието "наука за управлението" ("management science") вместо ИО. В страните с

развита икономика ИО се използва широко в самолето- и автомобилостроенето, при производството и разпределението на електроенергия, електронната, хранителната, металургичната, нефтената, хартиената-са промишленост, в транспорта, рудодобива и други отрасли. Бързо нарастват приложенията във финансовите институции, болничните заведения и правителствените учреждения. Анализът на приложенията на методите на ИО и на решаваните задачи позволява да се направят следните изводи:

— най-често срещаните области на приложение са: планирането на капиталните вложения, управлението на запасите, планирането на производството, планирането и управлението на проекти, транспортта, прогнозирането, проектирането, счетоводната дейност, управление-то на качеството, поддържане и замяна на машини;

— най-често използвани са методите на статистическия анализ, линейното програмиране, мрежовото планиране и управление, симулирането, теорията на запасите, теорията на масовото обслужване, динамичното програмиране, нелинейното програмиране;

— методите на математическото програмиране - линейно, динамично, нелинейно, се използват най-често за решаване на задачи за разпределение на ресурси, смесване на продукти, съставяне на разписания, планиране на инвестиции, финансово планиране, проектиране.

Развитието на ИО създава много добри възможности за професионална реализация.

В България първите разработки и приложения в областта на ИО зшочват в средата на шестдесетте години.

### 1.3. ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ЗАДАЧАТА НА ЕДНО ИЗСЛЕДВАНЕ НА ОПЕРАЦИИ

Всяко конкретно изследване започва с начален етап, в резултат на който се дефинират: 1) *целта на изследването*; 2) *алтернативите на решенията* (или *управляващи въздействия*); 3) *ограниченията, при които ще се постига целта*.

Под *цел* се разбира крайният резултат, който се стремим да постигаме, избирайки една или друга алтернатива на решение. Сред всички възможни варианти на алтернативи (или управляващи въздействия) се търси този вариант, който съответствува най-пълно на постигането на целта. Такъв вариант се нарича *оптимален*.

Ограниченията определят реалните възможности, ресурси и изисквания, в рамките на които ще се постига целта. Чрез тях се отчитат техническите и икономическите възможности на организацията, условията на пазара, нормативни изисквания и др. Алтернативите, при които ограниченията се удовлетворяват, се наричат *допустими*.

Примери на цели и ограничения биха могли да бъдат:

— да се постигне най-голяма печалба от няколко вида дейности за определен период (цел) или да се извършат определени дейности с минимални разходи (цел), като обемите на *някои* от дейностите за периода не са по-малки от предварително зададени стойности (ограничения). двете цели и ограниченията са типични за стопански организации -производствени, транспортни, търговски и др.;

— да се осигури ефективно лечение на пациенти - за болнично заведение;

— да се проектира транспортно средство с минимално тегло (цел), като товароподемността и надеждността не са по-малки от предварително зададени стойности (ограничения).

Важен момент при анализа на проблема е разкриването на много-жеството алтернативи, които влияят върху степента на постигане на целта. Тези алтернативи се подразделят на две групи: а) алтернативи, които могат да бъдат избрани от лицето, което взема решение (от субекта на управление) в дадената организация; б) алтернативи, които не могат да бъдат избрани от това лице. Очевидно, изборът на оптимална или рационална алтернатива се извършва сред алтернативите от първата група, поради което те се наричат *алтернативи на решение (алтернативи на управление, управляващи алтернативи)*.

Алтернативите от втората група представляват влиянието на околната среда върху системата. Те внасят отклонения в степента на постигане на целта и се наричат *неуправляеми* или *смущаващи* алтернативи. Ако алтернативите от тази група могат да бъдат идентифицирани, последствията им върху постигането на целта са предвидими и може да се търси намаляване на нежеланите последствия чрез избиране на нова алтернатива на решение (от първата група). В обратния случай неуправляемите алтернативи внасят случайни изменения в степента на постигане на целта.

Алтернативи на решения в производствени предприятия са например видовете произвеждана продукция и *количествата* продукция от всеки вид. Неуправляеми алтернативи биха могли да бъдат качествени характеристики на една и съща суровина, доставяна от различни производители.

Разгледаните три компонента на изследвания проблем се определят въз основа на задълбочено изучаване на свързаните с него функции и дейности.

### 1.4. ПОСТРОЯВАНЕ И ИЗПОЛЗУВАНЕ НА МАТЕМАТИЧЕН МОДЕЛ ЗА ИЗБОР НА РЕШЕНИЕ

Математичният модел е идеализирано, приблизително описание на съществени страни на изучаваната система, представено чрез математични символи и изрази.

#### 1.4.1 ОСНОВНИ ЕЛЕМЕНТИ НА МАТЕМАТИЧНИЯ МОДЕЛ

В ИО математичният модел е съвкупност от формалните (математични) описания на целта, алтернативите и ограниченията.

Решенията, както се вземат, и алтернативите се представят чрез *променливи ни решенията*  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Всеки конкретен набор от стойности на  $n$ -те променливи представлява една алтернатива или едно решение. По подобен начин, чрез *неуправляеми променливи*  $u_1, u_2, \dots, u_r$  могат да се опишат неуправляемите алтернативи.

Целта най-често се представя като функция  $J$  от променливите на решенията и неуправляемите променливи  $J = J(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, c_1, c_2, \dots, c_t)$ , която се нарича *целева функция (показател на качество/но)*. Стойностите на тази функция характеризират степента на достигане на целта или качеството на функциониране на системата. Те зависят също и от коефициентите  $c_i, i = \overline{1, t}$ , наречани *параметри* на модела. В много случаи, особено при използване на линейни модели, се построява целева функция само от променливите на решенията  $x_i, i = \overline{1, n}$ . Означението  $i = \overline{1, n}$  е съкратен запис на  $i = 1, 2, \dots, n$ .

По подобен начин се представят и ограниченията, които биват два вида: ограничения във вида на равенства (уравнения)

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, d_{i1}, d_{i2}, \dots) = a_i, i = \overline{1, m},$$

които описват най-често природни закономерности (физически и др.), и ограничения във вид на неравенства

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, d_{i1}, d_{i2}, \dots) \leq b_i, i = \overline{m+1, p},$$

които представят *ресурсна* ограничения. Тук  $d_{ik}, k = 1, 2, \dots$  са също параметри на модела.

Математичното описание на целта представя една причинно-следствена връзка. Причина са стойностите на променливите на решенията и на неуправляемите променливи, а следствие - стойността на целевата функция  $J$ . Променливите, които представят причините и следствията, се наричат съответно *входни* и *изходни* променливи.

Когато целевата функция  $J$  и ограниченията  $d_i$  са известни, задачата за избор на оптимални (най-добри) решения се състои в определянето на такива стойности  $x^*_1, x^*_2, \dots, x^*_n$  на променливите на решенията, за които функцията  $J$  има максимална (или минимална) стойност и които удовлетворяват всички ограничения  $g_i$ .

Точността на модела се характеризира чрез близостта между пре-сметнатата стойност на целевата функция  $J$  и стойността на  $J$ , получена

при реалното функциониране на системата с използване на същите стойности на променливите на решенията  $x$ , които са били зададени при пресмятанятия с модела. Точността може да бъде повишена чрез усложняване на МОдела - Чрез включване на нови променливи, които влияят на стойностите на  $J$ , използване на по-сложни нелинейни зависимости, описание на измененията на параметрите на модела във времето, и др. Получаването на по-сложен и по-точен модел е свързано с допълнителни разходи за изследвания и разработка, нарастват и изискванията към изчислителната техника и разходите за неговото използване в практиката.

В реалните сложни системи броят на променливите на решение е много голям. Това може да направи твърде разточително или невъзможно практическото използване на сложния модел дори със съвременна компютърна техника. Ето защо стремежът е в моделите да се включват най-съществените и значими фактори за поведението на системата. Намалването на сложността на моделите се постига чрез обединяване (агрегиране) на няколко първични променливи в една, използване на линейни функции вместо нелинейни и пренебрегване на измененията на функциите във времето, както и чрез декомпозиране (разчленяване) на сложната задача на няколко по-прости задачи, които се решават почти независимо. Построяването на работоспособен модел е компромис между изискванията за точност и за простота на модела. Тъй като не съществуват строги правила за създаването на модели на сложни системи, определянето на рационалния компромис между точност и простота се разглежда като съчетание на наука и изкуство.

#### 1.4.2. МАТЕМАТИЧНИ И СИМУЛАЦИОННИ МОДЕЛИ

В повечето приложения на ИО целевата функция и ограниченията се представят като явни функции на променливите на решенията. В такива случаи се говори за използване на *математичен модел*. Различните структурни особености на моделите са предизвикали създаването на различни методи за оптимизация - линейно, нелинейно, целочислено, динамично програмиране и др. Чрез тях се определя оптималното решение на задачи, описвани чрез съответните класове модели.

Има случаи, когато използването на математичен модел в разгледания смисъл, като явно агрегирано (окрупнено) описание на причинно-следствени връзки, не е възможно. Например, поради сложност и неяснота на проблема не е създаден достатъчно точен модел или моделът е много сложен и не може да бъде решен със съществуващите методи и средства. Тогава може да бъде използван друг начин на моделиране, наречен *симулация*.

Симулационните модели не използват явно описание на зависимостите между входовете и изходите. Това са математични модели в широк смисъл, изградени от описанията (моделите) на елементите на

изучаваната система, между които се установи ват основните взаимодействия, съществуващи между елементите на реалната система. Това позволява да се *имитира* функционирането на реална система, като се отчита и действието на случайни фактори върху нейните елементи. Показателите на качеството, които представляват интерес, са изходни величини (или прости преобразувания на такива величини) на някои от елементите.

Симулационните модели са по-гъвкаво и детайлизирано описание на системата (проблема) от математичния модел, тъй като предоставят полезна информация не само за входните и изходни величини, но и за междинни взаимодействия между елементите на системата. Тяхно-то създаване обаче е по-скъпо и продължително, а използването им е свързано със значителни разходи на машинно време и често предполага наличието на специални програмни системи и езици за симулиране.

#### 1.4.3. ИЗБОР НА РЕШЕНИЕ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНОСТ, РИСК И НЕОПРЕДЕЛЕНОСТ

Голяма част от приложенията в областта на ИО се основават на предположението, че в резултат на направените проучвания и изследвания, функционалните зависимости и параметрите на модела, както и стойностите на входните променливи са известни *достатъчно точно*. Такива модели се наричат *детерминирани*, чрез тяхното използване се избират решения, т.е. стойности на променливите на решенията *в условия на определеност*.

В редица случаи параметрите на модела и стойностите на входните променливи *не са точно известни*, те се изменят по случаен начин и могат да бъдат описани чрез *известни* вероятностни разпределения. Това може да доведе до изменения в структурата на модела за отчитане вероятностната природа на непълно и неточно известните фактори. Такива модели се наричат *вероятностни* или *стохастични*, а чрез тяхното използване се осъществява *избор на решения в условия на риск*.

Често вероятностните разпределения не са известни. Причини за това могат да бъдат както липсата на системни наблюдения за на-групване на статистически данни, така и невъзможността да се получат надеждни статистически оценки поради чести динамични изменения на условията, при които се вземат решения. Тогава построяването на стохастични модели е невъзможно, дори интерпретацията на непълно определените фактори като случайни да има смисъл. В такива случаи в структурата на модела се включват *описания на неопределеността* и се говори за *вземане на решения в условия на неопределеност*.

Понякога в модела е предвидено използването на някои данни, по-лучаването на които в следствие е трудно или невъзможно. Типичен пример е цената на чакането за единица време, когато заявки, подредени на опашка, изчакват обслужване от някаква система. Тази оценка се

предполага да бъде използвана за определяне на оптималния брой об-служващи устройства и оптималната интензивност на обслужване, при които се минимизират сумарните разходи за дейността. Често обаче, когато се обслужват хора, определянето на такава цена е много трудно. В такива случаи моделът би трябвало да бъде изменен. В разглеждания пример целта "минимални сумарни разходи за дейността" би могла да бъде заменена с друга цел - "средно време за чакане на обслужване не по-голямо от зададена стойност".

Събирането на необходимите данни за построяването и проверка-та на модела често е най-трудната част в ИО. Затова едновременно с разработването на модела се създават и процедури за събиране и до-кументиране на данни, които ще бъдат полезни при използването и усъвършенстването на този модел.

#### 1.4.4. ОПТИМАЛНИ, ДОСТАТЪЧНО ДОБРИ И ЕВРИСТИЧНИ РЕШЕНИЯ

Стремежът при ИО е да се определи *оптимално* решение на дадена задача. Използуваните за тази цел математични модели се подразделят на два класа: *аналитични* и *алгоритмични*. При аналитичните модели решението се получава в т.нар. *затворена форма*, във вид на формула или *явна зависимост*. Такива модели обикновено са резултат на голяма идеализация, в резултата на която вместо началната задача се решава друга, доста по-различна от нея. Ето защо те намират по-ограничено приложение.

Типичните модели в ИО са *алгоритмични*, *итерационни*. При тях оптималното решение се определя на стъпки или *итерации*, като на всяка нова итерация получаваното решение се *приближава* все повече до оптималното. Казва се, че процесът на решение е *сходящ* и че решението *се сходяща (клони)* към оптималното.

Именно във връзка със сходимостта могат да възникнат сериозни затруднения. Сложността на модела може да направи невъзможно използването или създаването на сходящ алгоритъм на решение, т.е., моделът е нерешим. В други случаи е възможно да бъде теоретично доказана сходимостта на алгоритъма към оптималното решение, но такова доказателство не определя нито броя на итерациите, нито времето, необходими за получаване на решение. При сложен модел този брой може да бъде толкова голям, че определянето на оптималното решение да стане практически невъзможно.

Поради тези причини, както и поради действието на фактори, които не се отчитат в модела, в практическите приложения често се търси не оптималното, а *достатъчно добро* или *рационално* решение, което удовлетворява реалните ограничения и при което целта се пости-га в задоволителна степен. Такова решение може да бъде получено чрез прекратяване на изчислителния процес на някоя итерация или като предложение на експерти. Във втория случай то се проверява с модела,

за да се оценят допустимостта му (удовлетворяването на ограничения-та на модела) и степента на постигане на целта (стойността на целевата функция).

За определянето на достатъчно добро решение, както и за повишаване на ефективността на изчислителния процес се използват *еври-стични* методи. Това са итерационни методи, които се основават на ем-пирични правила и интуиция, и които в много случаи водят до добри резултати, без да гарантират оптималността им. Евристични процедури могат да бъдат използвани като елементи на строг оптимизационен метод, за ускоряване на решението чрез намаляване броя на итерациите. Например условието за оптималност в симплекс-метода за решаване на линейни задачи е такова евристично правило. В други случаи целият метод е евристичен и тогава се определя "добро" решение без оценка на степента на близост на това решение до оптималното. В много евристични методи се реализира следното интуитивно правило: във всеки момент на избор се избира такова решение, непосредствено видимите последствия от което съвпадат в максимална степен със смисъла на целта.

#### 1.4.5. ВЕКТОРНА (МНОТОКРИТЕРИАЛНА) ОПТИМИЗАЦИЯ

В практическите случаи организацията има повече от една цели, които често са противоречиви. Определянето на оптимално решение в съответствие с една от тях е повече или по-малко частен подход, който не съответства винаги на глобалната цел. Тогава е необходимо определянето на *комплексен показател на качеството* (или *комплексна целева функция*), който да отразява глобалната цел. За-дачите, които се решават от гледна точка на няколко цели, се наричат задачи на *векторната* или *многоцелева* оптимизация (*многокри-териални* задачи). Тяхното решаване се основава на преобразуването им в *задачи* за *скаларна* оптимизация. За целта частните показатели  $J_i(x), i = 1, n$  се обединяват по един или друг начин в съставен показател  $J(x) = J\{J_1(x), J_2(x), \dots, J_n(x)\}$ , който след това се максимизира или минимизира.

Скаларизацията се извършва най-често, като се използва *частна цел*. За целева функция  $J(x)$  се избира най-важният показател, а оста-налите цели се отчитат чрез формулиране на ограничения за желаните стойности на съответните целеви функции  $J_i(x)$ . Нека например имаме три цели, представяни с целеви функции  $J_1(x), J_2(x)$  и  $J_3(x)$ , които зависят само от една променлива на решението  $x$ . Да предположим, че постигането в максимална степен на всяка една от тях съответства на максималните стойности  $J_1^* = J_1(x_1)$ ,  $J_2^* = J_2(x_2)$  и  $J_3^* = J_3(x_3)$  на целевите функции, където  $x_1, x_2$  и  $x_3$  са трите различни стойности на  $x$ , при които съответните функции имат максимум. За да определим

едно "най-добро" компромисно решение  $x = x^*$ , избираме най-важна целева функция, например  $J_3(x)$ , и задаваме стойностите  $d_1$  и  $d_2$  на  $J_1(x)$  и  $J_2(x)$  при които се счита, че първата и втората цел са постигнати в достатъчна степен. Тогава решението  $x^*$  се определя, като се състави и реши следният модел

Да се максимизира  $J = J_3(x)$  при ограниченията

$$J_1(x) \geq d_1$$

$$J_2(x) \geq d_2$$

В общия случай това е задача на нелинейното програмиране, която може да бъде решавана неколкократно при различни стойности на  $d_1$  и  $d_2$ .

Друг често използван начин на скаларизация се основава на съставянето на *адитивна* целева функция  $J(x)$  от вида

$$J(x) = \sum_{i=1}^n J_i^w(x),$$

където  $J_i^w(x)$  са *нормирани* целеви функции, за всичките от които *едновременно* се търсят възможно най-големи или най-малки стойности. Нормирането е необходимо, защото началните функции  $J_i(x)$  определят величини с различни мащаби и размерности. То се извършва чрез разделяне на началната функция  $J_i(x)$  на някаква нормираща величина със същата размерност, например  $J_i^w(x) = J_i(x) / J_i^*$ , където  $J_i^*$  е максималната, минималната или друга желана стойност на  $J_i(x), i = 1, n$ .

Скаларизацията позволява задачите на многоцелевата оптимизация да се решават с използване на методи за едноцелева оптимизация.

### 1.5. ОСНОВНИ ЕТАПИ ПРИ ИЗСЛЕДВАНЕТО НА ОПЕРАЦИИ

Задачите, които най-често се решават в областта на ИО, са сложни, многоаспектни. Поради това е особено полезно и важно включването в екипа по ИО на специалисти от организацията, които отговарят за функциите, във връзка с които са проучваните задачи и за внедряването на предлаганите решения.

Едно конкретно изследване обикновено преминава през следните етапи: 1) определяне на задачата; 2) построяване на математичен модел; 3) определяне на решение от модела; 4) оценяване на адекватността (валидността) на модела и решението; 5) използване на решението в практиката, внедряване.

Съдържанието на работите през етапите в значителна степен зависи от сложността и спецификата на проучваните задачи. То се определя по-скоро от опита на членовете на екипа, отколкото от строги, регламентиращи правила. Независимо от голямото разнообразие на задачите, практиката е потвърдила полезността на общи методически указания или препоръки, които определят основните въпроси, на които едно конкретно изследване би трябвало да даде отговори.

Особено важен от гледна точка на крайния резултат е първият етап - *определяне на задача та*. Въз основа на проучвания и изследвания през този етап се дефинира *целта*, която ще бъде постигната в резултат на изследването, *алтернативите на решение и ограниченията*, при които ще се постига целта.

При сложни задачи определенията на тези три елемента на задачата, получени през първия етап, не са окончателни и могат по-късно да бъдат коригирани.

Вторият етап на изследването е построяването на *математичния модел*. Въз основа на литературни проучвания, изследвания и експерименти се определят променливите на решението и неуправляемите променливи, както и вида и параметрите на целевата функция и на функциите на ограниченията. В зависимост от сложността на задачата се избира видът на модела - математичен, симулационен или евристичен, или комбинация от тези видове. Избраният вид трябва да е съобразен с възможностите за получаване на решението - с характеристиките на достъпните технически средства и програмно осигуряване.

Третият етап е *определяне на решения с използване на модела*. Ако моделът е математичен, получаваното решение е оптимално. То се определя по някои от известните методи за оптимизация, с използването на компютър и готов програмен продукт. Когато моделът е симулационен или евристичен, решението в общия случай не е оптимално. Ако то не е и достатъчно добро, необходимо е да се осигури допълнително машинно време за търсене на ново, по-добро решение.

Важен елемент на този етап е *след оптимизационния анализ* на оптималното решение, наричан *анализ на чувствителността*. Той позволява да се определят измененията на полученото решение в резултат на изменения на параметрите на модела. Такава информация е полезна, когато параметрите на модела са определени неточно. Възможно става оценяването на валидността на полученото решение в променящи се условия, както и генериране на перспективни решения, които ще бъдат актуални при очаквани промени на параметрите на модела.

През четвъртия етап се оценява *адекватността (валидността)* на модела. Един модел е адекватен, ако определя близки до реално наблюдаваните стойности на показателя на качеството при едни и същи стойности на входните променливи за модела и реалната система. Адекватността се оценява най-често, като се използват данни за минало реално функциониране на системата - минали стойности на променливи на решението и неуправляеми променливи, и съответните стойности на

изходните променливи. Този подход може да доведе до погрешни изводи ако има неотчетени в модела фактори, които действуват различно в миналото и в сегашния момент. Той е неприложим, ако системата е нова и няма данни за нейното минало. Ето защо се търси възможност данните от модела да се сравняват с реални данни, получени при пробни изпитания на системата.

Ако адекватността на модела е недостатъчна, той се коригира, след което отново се организират изпитания за неговото оценяване

Последният етап включва *подготовката и началото на използването (внедряването)* на решението в практиката. Това е най-важният етап, тъй като през него се реализира ползата от предприетото изследване. За осъществяването му се разработва специален план, в който детайлно се уточнява взаимодействието на екипа по ИО със специалистите от организацията, които ще използват получените решения. Това взаимодействие през етапа е от най-голяма важност. Получените резултати от предишните етапи се преобразуват в подробни, документиранни и разбираеми инструкции за персонала от организацията. Създават се процедури за текущото събиране на данни, необходими както за нормалното функциониране на модела, така и за контрол на неговата адекватност. Извършва се обучение на персонала.

Съвместната работа на екипа по ИО и специалистите на организацията позволява да се оцени реализуемостта на решенията, да се внесат корекции в тях. Натрупаните данни от началото на експлоатацията се използват за разкриване на насоките на усъвършенстване и развитие на системата.

Резултатите от дейността по ИО в производството създават предпоставки за изграждане на компютризиранни (автоматизирани) производствени системи. Тя може да се извършва самостоятелно в съществуващи организации или като част от дейност, насочена към създаване на *компютърно-интегрирани системи*, за които разработва необходимите модели и алгоритми на решение.