АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ НА МРЕЖИ

Много технически, изследователски и управленчески задачи мо-гат да бъдат формулирани и решени като задачи за анализ и оптимизация на мрежи. Към тях се отнасят например проектирането на автомобилни магистрали, на нефто- и газопроводи по такъв начин, че разходите за строителството на обекта да са минимални, създаването на електрически съоръжения и инсталации с минимална дължина на кабелните връзки, или определянето на най-къс път между две селища дри зададена пътна мрежа. Намерили широко приложение най-напред в електротехниката и строителството, мрежовите методи и модели игра-ят важна роля при планирането на производствени, технологични и транспортни процеси и при управлението на изследователски проекти. Те са удобно средство за анализ и синтез на структури - технически, производствени, информационни, социални, езикови и други.

Разнообразните конкретни задачи, които могат да бъдат решени с използуване на мрежови модели, се описват най-често в рамките на пет типа задачи за оптимизация на мрежи:

1) минимизация на мрежа (определяне на минимално дърво);
2) определяне на най-къс (най-дълъг) път в мрежа;
3) определяне на максимален поток в мрежа;
4) минимизация на разходите за поток в мрежа с ограничени про-пускателни способности на дъгите;
5) определяне на критичен път в мрежа.

Тези оптимизационни задачи биха могли да бъдат решавани като задачи на ЛП. Това обаче не е рационално поради големия брой на ограниченията и променливите в тях. По-нататък ще бъдат разгле-Дани прости и ефективни специализирани методи за решение, които се основават на специфичната структура на задачите и на теорията на ЛП.

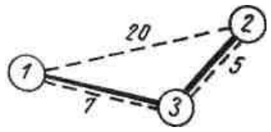
Представянето на метода за решаването на задачи от 4-тия тип, Известен като метод на елиминиране на дефекта, надхвърля целите на тази книга. Описание на този метод е дадено например в [4].

Мрежите се представят най-често във формата на граф или в ма-тричен (табличен) вид. При разглеждането на методите се използват две групи понятия - ребро, верига, цикъл и дъга, път, контур съответно в случаите, когато мрежата се описва с неориентиран или с ориентиран граф.

^

6.1, МИНИМИЗАЦИЯ НА МРЕЖИ

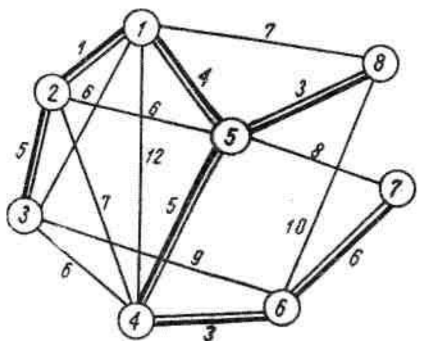
Зададени са възлите и дължините на възможните ребра на мре-жа. Дължината на ребро може да представя разстоянието между два съседни възела или, по-обобщено - разходи, цена или време. Задачата за минимизация на мрежа се сьстои в определянето на ребрата, които свързват всички възли на мрежата и имат минимална сумарна дължи-на. Решението на задачата определя *минимална мрежа.* Тя се нарича още *минимално дърво,* защото между всеки два възела съществува верига и в нея няма цикли. На фиг.6.1. са показни възлите и дължините на ребрата в мрежа. Вижда се, че минималното дърво се определя от ребрата (1,3) и (2,3), при което сумарната дължина 7+5 =12.



Фиг. 6.1.

Минималната мрежа може да бъде определена с използване на следната итерационна процедура. В началото всички възли на мрежата са несвързани. Сред тях се избира (произволно) начален възел, който се свързва с най-близкия възел. Сред нес-вързаните възли се определя възелът, кой-то е разположен най-близо до някой от вече свързаните възли и тези два възела се свързват. Процесът се повтаря до изчерпване на възлите. Ако на някоя итерация има няколко несвързани възли, които са на еднакво най-малко разстояния до някои от вече свързаните възли, оптималното решение може да не е единствено.

Пример 6.1. Планира се построяването на телефонна връзка между осем населени пункта, разположени според фиг.6.2. Числата вър-ху възможните ребра означават разстоянията в километри между пун-ктовете. Липсата на някои ребра показва, че съответните връзки са нецелесъобразни или практически неосъществими. Необходимо е да се определи кои пунктове би трябвало да се свържат с кабел, така че общата дължина на кабелните връзки да е минимална.



Фиг. 6.2

Задачата се решава чрез определяне на минимална мрежа. За да се облекчи проследяването на възлите, се въвеждат множествата *С* и *С на* свързаните и несвързаните възли. В началото *С* е празно множе-ство, С = θ, а *С* = {1,2,3,4,5,6,7,8}. Започва се произволно с възела

— Итерация 1

Възелът 1 се свързва с възела 2, който е най-близо до възела 1 сред възлите от *С.* Получава се *С* ={1,2},(7 = {3,4,5,6,7,8}.

.— Итерация 2

Избира се възел от множеството С, който е най-близо до възела 1 или до възела 2 в С Това е възелът 5, който е най-близо до възела [Тези два възела се свързват с ребро и коригираните множества са *С* ={1,2,5}, *С* = {3,4,6,7,8}.

— Итерация 3

Сред възлите от *С* най-близо до кой да е от възлите в *С* е възелът 8 който е най-близо до възела 5, т.е. *С* = {1,2,5,8},(7 = {3,4,6,7}.

— Итерация 4

Сред възлите от *С* два възела - 3 и 4 са на еднакво най-малко раз-стояние съответно до възлите 2 и 5 от С. Избира се например възелът 3 (лесно се проверява, че оптималното дърво няма да се промени, ако се избере възелът 4), при което

С = {1,2,3,5,8}, *С*= {4,6,7}.

По подобен начин последователно се получават

— Итерация 5

С = {1,2,3,4,5,8},С = {6,7}.

— Итерация 6

С = {1,2,3,4,5,6,8},С = {7}.

— Итерация 7

С = {1/2,3,4,5,6,7,8}, *С* = 0.

Всички населени пунктове са свързани. На фиг.6.2. ребрата на минималното дърво са показани с плътни линии. Минималната дъл жина на кабелната връзка е l = 27 km.

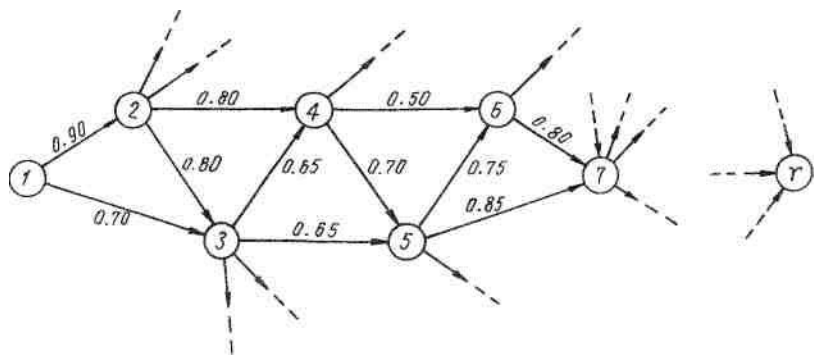
6.2. ОПРЕДЕЛЯНЕ НА НАЙ-КЪС ПЪТ В МРЕЖА

Задачата се състои в определянето на свързани помежду си пъ-тища в мрежа, които съставят път с минимална дължина между два възела на мрежата. Задачи с най-различно съдържание могат да бъ-дат интерпретирани и решени чрез определяне на най-къс път в мрежа. Такава е например, задачата за намиране на път с минимална дължина между две селища при зададена пътна мрежа или задачата за проекти-ране на пътна магистрала с минимални разходи при строителството и, която трябва да свърже два града и може да преминава през едни или други междинни населени пунктове. Като илюстрация се разглеждат два примера.

Пример 6.2. *Определяне на най-надежден маршрут.*

При създаването на автоматична система за предаване на цифрови данни между два пункта се предвижда използването на съществуваща-та телефонна мрежа. Пакетите с данни могат да преминават по разли-чни маршрути, конто се характеризират с различна надеждност. На фиг.6.3. са показани някои възможни маршрути между пунктовете 1 и 7. Дължините на дъгите са вероятностите, че съобщенията няма да бъ-дат непоправимо "изкривени" при преминаването им през съответните участъци, вследствие на случайни смущения и повреди на апаратурата Ако се предположи, че появяването на смущения или повреди в даден участък не зависи от настъпването им в други участъци, пълната веро-ятност съобщението да не бъде непоправимо изкривено при преминава-не по даден маршрут е равна на произведението на вероятностите, конто съответствуват на дъгите на маршрута. Например за маршрута 1 — > 2 -> 4->5->7 тази вероятност е P_{17} = 0,90 x 0,80 x 0,70 x 0,85 = 0,428. Необходимо е да се определи най-надеждният маршрут, т.е. маршрута, за който пълната вероятност, че съобщението няма да бъде непоправимо изкривено, е максимална. Тази задача се преобразува в задача за най-къс път по следния начин. Нека P_{1r} = P_{1i} x P_{ij} x ... x P_{mn} x P_{nr} е пълната вероятност, че съобщението няма да бъде непоправимо изкривено по пътя $l \to i \to j \to \ldots m \to n \to r$. Тъй като lg x е монотонна функция от ж, максимизацията на P_1 е еквивалентна алгебрически на максимизацията на lg P_{1r}, (максимумите на P_{1r} и на lg P_{1r} настъпват при едни и същи възли $\{l, i, j, \ldots, m, n, r\}$, конто изграждат оптимал-ния път). Но

$$\lg P_{l1r} = \lg li + \lg P_{ij} + \ldots + \lg Pmn + \lg Pnr$$



Фиг. 6.3

пътя. Тъй като 0 <= P_{st} <= 1 и lg P_{st} <= 0, st = $1i$, ij,... mn, nr, максими-зацията на горната сума е еквивалентна на минимизацията на сумата от (-lg P_{st})

И така, формулираната задача може да бъде решена като задача за най-къс път в преобразувана мрежа, в която дължините на дъгите l_{st} се определят от израза l_{st} = — lgP_{st}- Например дъгата между възлите 1 и 2 на новата мрежа ще има дължина 1_{12} = — lg 0,9 = 0,04576.

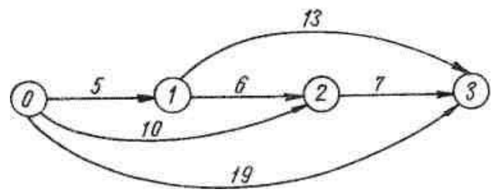
Пример 6.3. Замяна на съоръжения.

За пренасяне на произведената продукция в цех е закупен нов електрокар. След три години ще бъде въведена нова транспортна система и електрокарът повече няма да е необходим. Независимо от това, тъй като разходите за експлоатацията и поддържането му нарастват с времето (вследствие на износване), може да се окаже по-рационално той да бъде заменен с нов след една или две години. В табл.6.1. са дадени чистите разходи в хил.лева, свързани със закупуването на нов електрокар в края на i-та година и замяната му през j-та година. (Чистите разходи включват цената на нов електрокар, плюс разходите за експлоатация и поддържане, минус отстъпка от цената, тъй като старият електрокар се предава на продавача). На сегашния момент съответствува i=0. Задачата е да се определи кога (ако въобще е необходимо) електрокарът да се замени с нов, така че общите разходи за трите години да са минимални.

Таблица 6.1

		j: 1	2	3
	0	5	10	19
i	1		6	13
	2			7

За да се опише задачата чрез мрежа, на всяка година се поставя в съответствие възел (фиг.6.4). Дължината на дъгата (i, j) съответствува на разходите от табл.6.1. Необходимо е да се определи най-късият път между възлите 0 и 3. Като се приложи алгоритьмът от раздел 6.2.1.,



Фиг. 6.4

се намират оптималният път 0 —> 2 —> 3 и съответните минимални разходи - 17 хиляди лева. Това означава, че електрокарът би трябвало да бъде заменен след две години, а новият електрокар да бъде снет от отчет след още една година.

По-нататък се разглеждат алгоритми за определяне на най-къс път. Ще бъдат изложени два алгоритъма за мрежи без и със цикли.

6.2.1. АЛГОРИТЪМ ЗА МРЕЖИ БЕЗ ЦИКЛИ

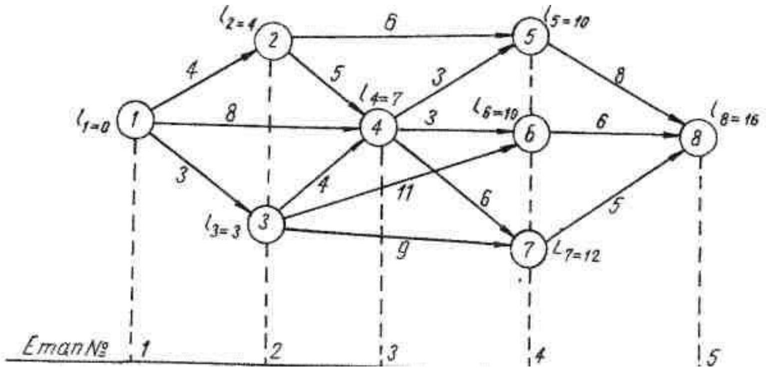
Алгоритъмът ще бъде разгледан с използване на мрежата от фиг.6.5. Възлите 1 и 8 са съответно начална и крайна точки. Мрежата не съдържа цикли, т.е. в нея няма верига, която да свързва възел със себе си.

Въвеждат се означенията d_{ij} - за разстоянието между съседни възли i и *j,* и l_i - за най-късото разстояние между възлите 1 и *j*. Очевидно *li* =0. Търси се най-късото разстояние между възлите 1 и 8

Изчисленията се извършват след групиране на възлите по етапи. Възелът *К* се разглежда на r-тия етап, ако до него може да се достигне по път, изграден от r-1 дъги. Например до възела 5 може да се стигне по пътя 1 —> 3 —> 4 —> 5, изграден от трите дъги (1,3), (3,4), (4,5) и този възел се разглежда на четвъртия етап.

Общата формула за определяне на l_i е твърде проста и има сле-дния вид:

$$lj — \min\{l_i + d_{ij}\},$$



Фиг. 6.5

където l_i е най-късото разстояние до предидущия съседен възел i, свър-зан с възела *j* чрез дъгата d_{ij}. Очевидно разстоянието l_i може да бъде определено ако са известии най-късите разстояния l_i до всички преди-дущи възли, за конто съществуват дъгите d_{ij} За разглежданата схема се получава:

етап 1: $l_1 = 0$

етап 2: $l_2 = l_1 + d_{12} — 0 + 4 = 4$, (през в.1), $l_3 =$

$l_1 + d_{13} = 0 + 3 = 3$, (през в.1),

$$l_4 = \min_{i=1,2,3}\{l_i + d_{i4}\} = \min\{0+8, 4+5, 3+4\} = 7, (\text{през в.3}),$$

етап 4: $$l_5 = \min_{i=2,4}\{l_i + d_{i5}\} = \min\{4+6, 7+3\} = 10, (\text{през в.2 или в.4}),$$

$$l_6 = \min_{i=3,4}\{l_i + d_{i6}\} = \min\{3+11, 7+3\} = 10, (\text{през в.4}),$$

$$l_7 = \min_{i=3,4}\{l_i + d_{i7}\} = \min\{3+9, 7+6\} = 12, (\text{през в.3}),$$

етап 5: $$l_8 = \min_{i=5,6,7}\{l_i + d_{i8}\} = \min\{10+8, 10+6, 12+5\} =$$

= 16, (през в.6) ,

т.е. минималното разстояние между възлите 1 и 8 е l_8 =16. Възстановяването на най-късия път, който съответствува на това разстояние, се извършва от крайната точка към началната: във възел 8 през 6, в 6 през 4, в 4 през 3 и в 3 през 1, т.е. оптималният път е l—>3—>4—>6—>8.

Разглежданата изчислителна схема е *рекурентна.* За определяне-то на най-късото разстояние до даден възел се използват получените на предишния етап най-къси разстояние до всички негови съседни възли. Тази информация е достатъчна за вземане на решение, без да са необ-ходими сведения за конкретните пътища до тези непосредствено пред-шестващи възли. Интересно е да се отбележи, че освен търсеното Разстояние l_8, в процеса на решение на задачата се определят най-къ-сите разстояния между възела 1 и всички възли на мрежата.

Такива рекурентни схеми са основа на метода на динамичното програмиране.

6.2.2. АЛГОРИТЪМ ЗА МРЕЖА С ЦИКЛИ

В мрежа, която съдържа *n* възли, е необходимо да се определи най-късият път между възлите 1 и j/,$j = \overline{2,n}$. Мрежата е представена в таблична форма (табл.6.2), като r-тият ред и j-тият стълб съответстват на възлите *i* и *j*, и за обобщените разстояния между съседните възли i *и j в* общия случай важи, че $d_{ij} \neq d_{ji}$.

Таблица 6.2

j / i	1	2	...	n-1	n	l_i
1	d_{11}	d_{12}	...	$d_{1,n-1}$	$d_{1,n}$	l_1
2	d_{21}	d_{22}	...	$d_{2,n-1}$	$d_{2,n}$	l_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
n	d_{n1}	d_{n2}	...	$d_{n,n-1}$	d_{nn}	l_n
k_j	k_1	k_2	...	k_{n-1}	k_n	

Нека k_i е сумата от дължините на дъгите, конто образуват най-късия към момента път, водещ от възела 1 във възел *j*, а l_t е помощна промен-лива, която представя най-късото към момента разстояние до възела *i*, което след това се използва за определянето на разстоянията до съсе-дните възли на този възел.

Алгоритъмът се състои от следните окрупнени стъпки.

Стъпка $k_j, l_i, i, j = \overline{1,n}$ *на начални стойкости на променливите*

Започва се с *i*= 1 и се полагат $k_1 = 1_1 = 0$. За всяка една стойност на j,*j* = 2, *n* се извършват:

а) определяне на величината *kj*

$$k_j = \min_i\{l_i + d_{ij}\},$$

като се използват стойностите на l_i за възлите i, за които съществуват дъгите *(i,j)* и конто в момента са достъпни (т.е. били са определени чрез началното полагане или полагането в т.б);

б) полагането $l_i = k_j$ за i = *j*.

Това полагане се извършва веднага след определянето на κ_i и пре-ди да е изчислена нова стойност на *kj*.

Стъпка 2. Проверка на оптималността и определяне на оптимално решение

По лага се i = 1.

а) Определят се κ_i - 1_i за всички *j*, за които съществуват дъгите d_{ij}.

б) Ако d_{ii} >= k_i — l_{ti} за всички *j*, между възлите 1 и *j* не съществува по-кратък път. Ако i = n, се преминава към т.г, в обратния случай се полага *i* = i + 1 и се преминава към т.а.

в) Ако $d_{ij} < k_j - l_i$, изчисляват се коригираните стойности κ'_j на

$$\mathbf{k'_j = l_i + d_{ij}}$$

Заменят се k_j и l_i за i = j с k'_j. Ако i = n, се преминава към т.г, в обратния случай се полага i = *i* + 1 и се преминава към т.а.

г) Ако стойността k_i се е изменила в т.в, стъпка 2 се повтаря, като се използва коригираната стойност. В обратния случай се преминава към стъпка 3.

Стъпка 3. Определят на участьците на оптималния път.

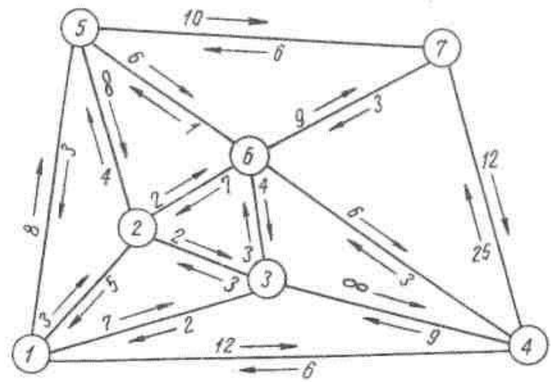
Получените $j, j = \overline{2,n}$ и k_j определят най-късите разстояния между възлите 1 и Следователно за възела i_1, от който започва по-следната дъга d_{i1j} на пътя (1,j), се изпълнява условието

$kj = 1_{i1} + d_{ij}$ или $l_{i1} = k_j - d_{ij}$ Подобно, възелът i_2, от който започва последната дъга d_{ij} на пътя $(1,i_1)$ трябва да удовлетворява условието

$$k_{i1} = 1_{i2} + d_{i2i1} \quad \text{или} \quad l_{i2} = k_{i1} - d_{i2i1}$$

и т.н., до достигането на възела 1.

Пример 6.4. В мрежата на фиг.6.6 възникват цикли поради въз-можността за двупосочно движение.



Фиг. 6.6

При еднопосочно движение от възел i към възел *j* разстоянието в недопустимата обратна посока d_{j1} се полага равно на оо. Разстоянието d_{ii} и началните стойности на величините k_i, и l_i, определени на стъпка l, са показани в табл.6.3.

Началните стойности *kj*, l_i се определят по следния начин. Полагат се l_1 = *k1* = 0. С използването на рекурентното съотношение от стъпка 1-а последователно се пресмятат:

$$k_2 = k_1 + d_{12} = 0 + 3 = 3, \qquad l_2 = 3,$$
$$k_3 = \min_{i=1,2}\{l_i + d_{i3}\} = \min\{l_1 + d_{13}, l_2 + d_{23}\} =$$

Таблица 6.3

j i	1	2	3	4	5	6	7	l_i
1		3	7	12	8			0
2	5		2		4	2		3
3	2	3		∞		3		5
4	6		9			3	25	12(11)
5	3	∞				6	10	7(6)
6	1	7	4	6	1		9	5
7				12	6	3		14
k_j	0	3	5	12 (11)	7 (6)	5	14	

= min{0 + 7,3 + 2} = 5, l_3 = 5,

$$k_4 = \min_{i=1,3}\{l_i + d_{i4}\} = \min\{l_1 + d_{14}, l_3 + d_{34}\} =$$

= min{0+12,5 + oo} = 12, l_4= 12,

$$k_5 = \min_{i=1,2}\{l_i + d_{i5}\} = \min\{0 + 8, 3 + 4\} = 7, \qquad l_5 = 7,$$

$$k_6 = \min_{i=2,3,4,5}\{l_i + d_{i6}\} = \min\{3 + 2, 5 + 3, 12 + 3, 7 + 6\} = 5, \qquad l_6 = 5,$$

$$k_7 = \min_{i=4,5,6}\{l_i + d_{i7}\} = \min\{12 + 25, 7 + 10, 5 + 9\} = 14, \qquad l_7 = 14.$$

На стъпка 2 се проверява оптималността на получените решения $k_j, j = \overline{2,n}$, след като вече са достъпни стойностите l_i за всички възли $i = \overline{1,n}$. Ако за някои i се получава $k_j > l_i + d_{ij}$, т.е. $k_j - l_i > d_{ij}$, това означава, че би могло да бъде получено по-късо разстояние $k'_j = l_i + d_{ij}$, $k'_j < k_j$ и че началната стойност k_j трябва да се коригира.

Резултатите от стъпка 2 са дадени в табл.6.4. В последния стълб с + или - е показано изпълнението на условието $k_j - l_i \le d_{ij}$. Това условие не се проверява, когато разстоянията d_{ij} не са дефинирани. Тези случаи са означени с *.

Вижда се, че за $i = \overline{1,5}$ условието $k_j - l_i \le d_{ij}$ се изпълнява за всяко j и не е необходимо да се коригират стойностите на k_j. При i =6 това условие е нарушено за j =4 и j =5 и са необходими корекции на κ_4 и κ_5. Досегашната стойност κ_4 е определена по l_1 и l_3. Сега вече е достъпно и 1_6, което дава по-добър резултат. Коригираните стойности са:

$$k'_4 = l_6 + d_{64} = 5 + 6 = 11, \; k'_5$$

$$= l_6 + d_{65} = 5 + 1 = 6.$$

Полагат се $\kappa_4 = \kappa'_4$, $1_4 — \kappa'_4$, $\kappa_5 = k'_5, l_5 = k'_5$ и новите стойности се запис-ват в табл.6.3 - стойностите в скоби. Пресмятанията при i =7 в табл.6.4.

Таблица 6.4
$/k_j — l_1 <= d_{1j}$

		j = 1	j=2	j = 3	j = 4	j = 5	j =6	j = 7	
i= 1	$k_j — l_1$ d_{1j}	* *	3 3	5 7	12 12	7 8	* *	* *	+
i= 2	$k_j —$ l_2 d_{2j}	-3 5	* *	2 2	* *	4 4	2 2	* *	+
i= 3	$k_j —$ l_3 d_{3j}	-5 2	-2 3	* *	7 oo	* *	0 3	* *	+
i= 4	$k_j — l_4$ d_{4j}	-12 6	* *	-7 9	* *	* *	-7 3	2 25	+
i= 5	$k_j — l_5$ d_{5j}	-7 3	-4 oo	* *	* *	* *	-2 6	7 10	+
i= 6	$k_j — l_6$ d_{6j}	* *	-2 7	0 4	7 6	2 1	* *	9 9	-
i= 7	$k_j —$ l_7 d_{7j}	* *	* *	*	-3 12	-8 6	-9 3	* *	+

се извършват, като се използват коригираните стойности. Тъй като е шало корекции на k_j, стъпка 2 на алгоритъма се повтаря с използване на новите стойности на k_j, l_i, при което се получава табл.6.5.

Таблица 6.5

		j=i	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6	j=7	$k_j — l_1 <= d_{1j}$
i=l	$k_j — l_1$	*	3	5	11	6	*	*	+
i=2	$k_j — l_2$	-3	*	2	*	3	2	*	+
i=3	$k_j — l_3$	-5	-2	*	6	*	0	*	+
i=4	$k_j — l_4$	-11	*	-6	*	*	-6	3	+
i=5	$k_j — l_5$	-6	-3	*	*	*	-1	6	+
i=6	$k_j — l_6$	*	-2	0	6	1	*	9	+
i=7	$k_j — l_7$	*	*	*	-3	-8	-9	*	+

Вижда се, че условието $k_j — l_i <= d_{ij}$ се изпълнява за всяко i и j. Нови корекции не са необходими и последните получени стойности на k_i определят най-късия път между възлите 1 и j,j = 2,7.

На последната стъпка се определят веригите от най-късия път ме-жду възлите 1 и у. Нека например j =7. От 7-я стълб на табл.6.3. се вижда, че k_7 =14 и че условието $\kappa_7 = l_i + d_{i7}$ се изпълнява при i =6 (5+9=14), т.е. възелът 6 е свързан с възела 7. От 6-тия стълб (за възела 6) на същата таблица се вижда, че κ_6 =5 и че условието $k_6 = l_i + d_{i6}$ се изпълнява при i = 2 (3+2=5), т.е. възелът 2 е свързан с възела 6. От втория стълб се вижда, че k_2=3 и че възелът 2 е свързан с възел 1. Следователно оптималният път е 1->2-> 6 —>7, с дължина k_7 =14.

6.3. ОПРЕДЕЛЯНЕ НА МАКСИМАЛЕН ПОТОК

Разглежда се задачата за определяне на максималния поток ме-жду два възела - източник *о* и приемник s в свързана мрежа. Ребра-та имат пропускателни способности в двете посоки, конто определят максималния поток по съответната дъга. При еднопосочна връзка про-. пускателната способност в забранената посока е нулева. Мрежата се представя в таблична форма.

Основната идея на алгоритъма за решение е следната. Построя-ват се последователно вериги, конто свързват източника *о* и приемника s, и през конто се пропускат максимално възможните потоци. Макси-малният възможен поток *v* през дадена верига се определя от нейната максимална пропускателна способност v — $\min\{c_{ii}\} > 0$, където c_{ii} са пропускателните способности на дъгите от веригата в посока о —> s. За всяка верига се определят и остатъчните пропускателни способности на дъгите и c_{ii} — v, за да бъдат използувани в някои от следващите вериги.

Построяването на вериги се прекратява, когато не е възможно да се намери нова верига, която свързва *о* с s и през която преминава поло-жителен поток. Този основен елемент на алгоритъма се модифицира, чрез което се разкриват допълнителни възможности за увеличаване на потока. Тъй като включването на дъги в дадена верига прави невъзмо-жно по-ефективното им използване в други вериги, би било рационал-но да се възстановяват пропускателните им способности. За целта се предполага фиктивен поток в обратна посока - от *s* към *о,* който преминава през същата верига и е предназначен да компенсира частично или напълно основния поток в посока *о* -> *s,* довел до намаляване на пропускателните способности *{*c_{ii} — *V).* За да се пропусне този фиктивен поток, пропускателните способности c_{ii}^{+} на ребрата от тази верига в посока s ->о увеличават със стойността v.

При определянето на веригите съществува значителна свобода. Стремежът е за всяка верига да се получи възможно по-голяма стойност на *v*. Това е възможно при неголеми мрежи, когато мислено могат да се проследят вариантите в таблицата на мрежата. При големи мрежи търсенето на максимални стойности на *v* губи смисъл. В такива случаи в първия ред на таблицата, който съответствува на възела *о,* се избира някои от възлите, свързан с *о* чрез положителна дъга. Разглежда се ре-дът, който съответствува на избрания възел и се избира следващ възел, свързан с предишния чрез положителна дъга, и т.н. до достигането на възела s.

Алгоритъмът се състои от следните стъпки.

Стъпка 1. Определя се верига, която свързва *о* с *s,* по която пото-кът има положителна стойност в посока *о* —> s. Ако няма такава верига, да се премине към стъпка 3, иначе да се премине към стъпка 2.

Стъпка 2. За веригата (о, s) се определят:

а) максималната пропускателна способност в посока о -+ s, $v = \min\{c_{ij}\} > 0$;

б) остатъчните пропускателни способности на дъгите по посока о -> s, $c_{ij} = c_{ij}$ - v'

в) увеличените пропускателни способности на ребрата в посока s->о, $c_{ij}^{+} = c_{ij}^{+} + v$. Елементите c_{ij} на текущата матрица С се заменят с новите елементи c_{ii} и се преминава към стъпка 1.

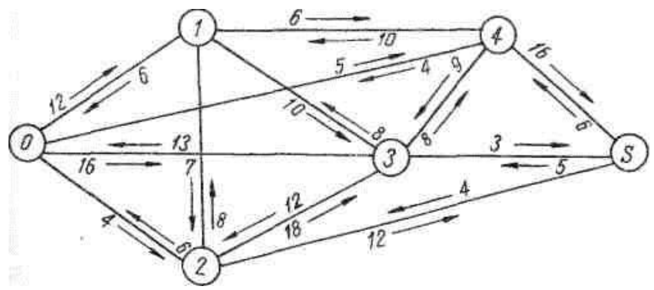
Стъпка 3. Определят се оптималните потоци X = [x_{ii}] в дъгите на мрежата и максималния поток *F от о в s*

$$x_{ij} = \begin{cases} c_{ij}^{0} - c_{ij}^{*} & , c_{ij} > c_{ij}^{*}, \\ 0 & , c_{ij}^{0} \le c_{ij}^{*}, \end{cases}$$

$$F = \sum_i x_{0i} = \sum_j x_{js} = \sum_k \nu_k ,$$

където c_{ii}^{0} и c_{ii}* са съответно пропускателните способности от началната матрица C^0 и матрицата С*, получена като последна при изпълнението на стъпки 1 и 2, а v_k са стойностите на *v*, определени на стъпка 2.

Пример 6.5. Разглежда се мрежата на фиг.6.7. Началната матрица C^0 е представена в табл.6.6.



Фиг. 6.7

Като първа е избрана веригата *о* -> 3 —> 2 —> s. Стойностите c_{ii} на Ребрата от веригата в посока о-> s са отбелязани със знак — (това са клетките (о,3), (3,2)(2, s)), а в посока *s* —> о със знак + (това са клетките ((s,2), (2,3), (3,о)).

Очевидно, максималният поток през веригата е

$$v = \min\{c_{03}, c_{32}, c_{2s}\} = \min\{16,12,12\} = 12.$$

В съответствие със стъпка 2 на алгоритъма матрицата C^0 се коригира чрез изваждане на v=12 от c_{ij} и добавяне на v=12 към $c+_{ij}$. Получава се табл.6.7.

Таблица 6.6

	0	1	2	3	4	*s*
0		12	4	16^{-}	5	
1	6		7	10	6	
2	6	8		18+		12^{-}
3	13^{+}	8	12^{-}		8	3
4	4	10		9		16
s			4^{+}	5	6	

{o -> 3 -> 2 -> *s}* v =
min{16,12,12} = 12

Таблица 6.7

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**s**
o		**12-**	**4**	**4**	**5**	
1	**6^{+}**		**7**	**10^{-}**	**6**	
2	**6**	**8**		**30**		**0**
3	**25**	**8^{+}**	**0**		**8**	**3^{-}**
4	**4**	**10**		**9**		**16**
s			**16**	**5^{+}**	**6**	

{o -> 1 -> *3* -> s} v =
min{12,10,3} = 3

Следващата избрана верига е {o —> 1 —>3->s). В резултат на следващите итерации последователно се получават таблиците 6.8 до 6.11. До всяка таблица са показани избраните вериги и максималните потоци в тях.

Таблица 6.8

o	1	2	3	4	*s*
	9^{-}	4	4	5	
9+		7	7-	6	
6	8		30		0
25	11+	0		8~	0
4	10		9+		16"
		16	8	6+	

{o-> 1 -> 3 -> 4 -> s} v =
min{9,7,8,16} = 7

Таблица 6.9

	0	1	2	3	4	*s*
o		2	4	4	5^{-}	
1	16		7	0	6	
2	6	8		30		0
3	25	18	0		1	0
4	4^{+}	10		16		9^{-}
s			16	8	13^{+}	

{o -> 4 -> s} v =
min{5,9} = 5

Таблица 6.10

	0	1	2	3	4	s
0		2	4^{-}	4	0	
1	16		7+	0	6^{-}	
2	6^{+}	8-		30		0
3	25	18	0		1	0
4	9	10^{+}		16		4^{-}
s			16	8	18^{+}	

{o -> 2 -> 1 -> 4 -> s} v =
min{4,8,6,4} = 4

Таблица 6.11

	0	1	2	3	4	s
0		**2**	**0**	**4**	**0**	
1	**16**		**11**	**0**	**2**	
2	**10**	**4**		**30**		**0**
3	**25**	**18**	**0**		**1**	**0**
4	**9**	**14**		**16**		**0**
s			**16**	**8**	**22**	

От табл.6.11 се вижда, че между *o* и *s* не може да бъде построена верига с положителен поток, тъй като всички елементи в стълба s са равни на нула. Следователно тази таблица съдържа матрицата C*.

От таблиците 6.6 и 6.11 се определят оптималните потоци x_{ij} в дъгите на мрежата, където в съответствие със съотношенията от стъп-ка 3, $X = C^0 - C^*$ и ако се получава $x_{ij} < 0$, се полага $x_{ij} = 0$. Матрицата X е в табл.6.12.

Таблица 6.12

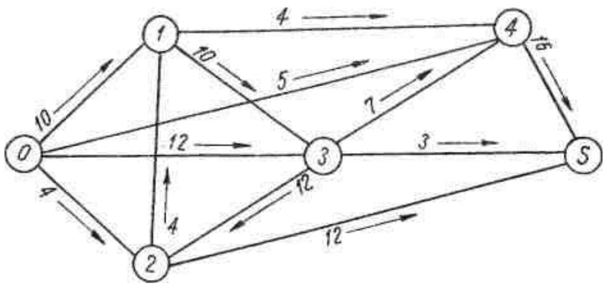
	0	1	2	3	4	s
o		**10**	**4**	**12**	**5**	
1				**10**	**4**	
2		**4**				
3			**12**		**7**	**3**
4						**16**
s						

i *j*

което е равно на сумата от максималните потоци през избраните вериги. Полученото оптимално решение е показано на фиг.6.8.

От последната таблица за максималния поток се получава $F = Y2^{Xoi}$

$= 10 + 4 + 12 + 5 = \hat{}3\hat{} = 12 + 3 + 16 = 31$,



Фиг. 6.8

За прекратяването на търсене на вериги в голяма мрежа може да се окаже полезно понятието *пропускателна способност на сечение.* Сечение в свързана мрежа е множество от дъги, което определя нулев поток от *o* в s, ако пропускателните им способности се положат равни на нула. Пропускателната способност на сечението (накратко - стой-ността на сечението) е равна на сумата от пропускателните способности на дъгите му. Сечението с минимална пропускателна способност се на-рича *минимално.* Някои от сеченията на фиг.6.7 и пропускателните им способности са следните:

(1,4), (o, 4), (3,4), (3, s), (2, s) -> 6 + 5 + 8 + 3 + 12 = 34, (1,3),(o,3),

(2,3), (4,3), (2,s), (4, s) -> 10 + 16 + 18 + 9 + 12 + 16 = 81, (4, s),(3, s), (2, в),->

16 + 3 + 12 = 31,

Съгласно теоремата за *максимален поток - минимално сечение* макси-малният поток в мрежа е равен на стойността на минималното сечение. Следователно, ако в началната мрежа може да се намери сечение, чия-то стойност е равна на получената стойност на потока след текущото решение, таблицата на това решение след измененията на елементите $(c_{ij} \pm \nu)$, свързани с последната намерена верига, определя максимал-ния поток.

6.4. ПЛАНИРАНЕ И УПРАВЛЕНИЕ НА ПРОЕКТИ С МРЕЖОВИ МЕТОДИ

Успешното изпълнение на сложни проекти или програми пред-полага обмислено планиране на срокове и ресурси, координиране на различии дейности, контрол и коригиране на плана в хода на изпълне-нието. За подпомагане решаването на такива задачи в края на петдесет-те години са били предложени два метода, конто използуват мрежови методи и модели - метода за оценяване и преразглеждане на програми - ПЕРТ (PERT - Project Evaluation and Review Technique) и метода на критичния път - МКП (CPM - Critical Path Method). Методът ПЕРТ е бил разработен за подпомагане планирането на сложни научноизследо-вателски и конструкторски разработки във военната област, а МКП -за подпомагане изпълнението на строителни програми. Под *проект* или *програма* се разбира съвкупност от взаимносвързани *операции,* конто се изпълняват в определен ред за постигане на зададена цел. *Операциите* са работи, за изпълнението на конто са необходими ресурси. Въпре-ки голямото им сходство, между ПЕРТ и МКП има две същественн различия: първо, в МКП се предполага детерминирана, а в ПЕРТ -случайна продължителност на операциите, и второ, в МКП се отделя еднакво внимание на времето и разходите за изпълнение на проекта, до-като в ПЕРТ се акцентира върху продължителността. В съвременните Приложения двата метода са обединени в единен метод за планиране и

Управление.

Мрежови модели и методи се използуват в трите основни етапа на

Планирането и управлението:

а) в структурното планиране, когато проектът (програмата) се декомпозират на точно дефинирани операции и се определят връзките между операциите;

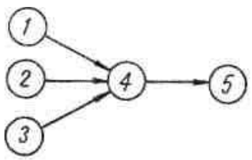
б) в календарното планиране, когато се съставя график (разписание, календарен план), който определя моментите на започване (началото) и завършване (края) на всяка операция;

в) при оперативното управление - за анализи, отчитане и коригиране на графика в хода на реалното изпълнение на проекта.

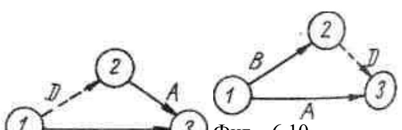
6.4.1. МРЕЖОВ МОДЕЛ

Мрежовият модел изобразява графически резултатите от структурното планиране на разработването или изпълнението на проект: определените операции, техните продължителности, взаимни връзки и ред на следване. Операцията се представя с дъга (стрелка), чиято по-сока и означена дължина съответствуват на изпълнението във времето и на продължителността на операцията. Редът на изпълнение (отноше-нието на подреждане) на операциите се задава чрез *събития.* Събитието е момент от времето, когато завършват едни и започват други операции. То се представя с възел. Всяка операция се задава с двойка събития -начално и крайно, които представляват началната и крайната й точка. Операциите, които "излизат" от някакво събитие, не могат да започнат преди да завършат всички операции, които "влизат" в това събитие. Например, за да е възможно започването на операцията (4,5) на фиг.6.9, е необходимо да са завършили операциите (1,4), (2,4) и (3,4).

Всяка операция се представя само с една дъга. Съставна операция се описва с толкова дъги, колкото са представените и части. Повторно срещана операция в някакъв процес се разглежда и описва като нова. Две или повече операции не бива да се определят чрез една и съща двойка възли (т.е. чрез еднакви начално и крайно събитие). Когато е възможно едновременно изпълнение на няколко операции, за да се изключи нееднозначното им определяне, се използуват *фиктивни* операции, за изпълнението на които не са необходими ресурси. Тези операции се включват преди началото или след края на "паралелна" операция. Ня-кои от възможните включвания при две операции А и В са показани на фиг.6.10. Фиктивните операции D се описват обикновено с щрихована дъга.



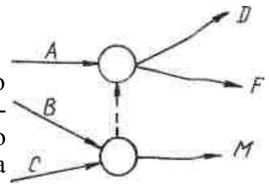
Фиг. 6.9



Фиг. 6.10

Фиктивните операции се наричат още операции за предшеству-ване, тъй като чрез тях се описват отношенията на подреждане между операциите. Нека например операциите А, В и С трябва да предшествуват операциите D и F, а операциите В и С предшествуват операцията М. Правилното описание на тези отношения е показано на фиг-6.11.

Изпълнението на операциите във вре-мето се задава от номерата на събитията, като началното събитие има по-малък номер от крайното. За да се номерират удобно всички възли (т.е. номерата да показват изпълнението на проекта във времето), е необходимо точно да се определят операциите, които трябва да завършат (започнат) непо-средствено преди започването (след завър-шването) на дадена операция, както и операциите, които могат да се изпълняват едновременно с дадена операция.



Фиг. 6.11

Пример 6.6. Да се построи мрежов модел, който включва операциите А, В, С, ..., Q при следното тяхно подреждане:

1). А, В и С са начални операции, които могат да започнат едновременно.

2) А предшествува D, Е, F и G.

3) J и Н започват след завършването на В и D.

4) С и Н предшествуват I.

5) L и М следват след J.

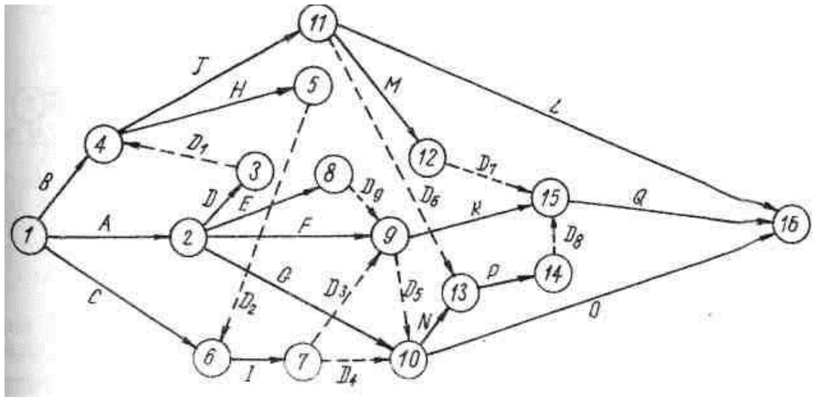
6) К следва след Е, F и I.

7) N и О следват след G, но се предшествуват от F и I.

8) Р следва след N и J.

9) Q следва след К, М и Р.

10) L, Q и О са завършващи операции.



Фиг. 6.12

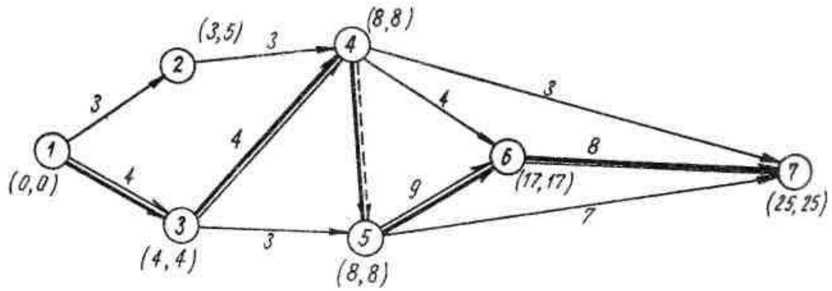
Мрежата е показана на фиг.6.12. Фиктивните операции D_1 *до* D_8 са въведени за да се представят отношенията на следване. Чрез опера-цията D_9 еднозначно се определят операциите E и F. Нарастването на номерата на събитията отразява хода на изпълнението на програмата.

6.4.2. ОПРЕДЕЛЯНЕ НА КРИТИЧНИТЕ ОПЕРАЦИИ, КРИТИЧНИЯТ ПЪТ И РЕЗЕРВИТЕ ОТ ВРЕМЕ.

Полученият мрежов модел се използва при календарното плани-ране, т.е. при определянето на сроковете за началото и края на всяка операция. Определя се и *резервът от време* за всяка операция, който възниква, когато интервалът от време, зададен от *ранното начало и къ-сното завършване* на операцията, е по-голям от фактическата и продъл-жителност. Операция, която няма резерв от време, се нарича *критична.* Забавянето на началото на критичната операция увеличава срока на изпълнение на целия проект.

Критичният път е съставен от критичните операции в дадена мрежа и свързва началното и крайното и сьбитие. Начинът на определянето му е показан с пример.

Пример 6.7. Дадена е мрежата на фиг.6.13. Критичният път се определя на два етапа. През първия етап мрежата се преминава в права посока - от началното към завършващото събитие и се изчисляват ранните срокове за настъпване на събитията. През втория етап мрежата се преминава в обратна посока - от завършващото към началното събитие и се определят късните срокове за настъпване на събитията. На фиг.6.13. ранният и късният срок са представени чрез първото и второто число в скобите до всяко събитие.



Фиг. 6.13

Нека ES_j е ранният срок на началото на всички операции, конто излизат от събитието j, т.е. ранният срок на настъпването на събити-ето *j,* а D_{ij} - продължителността на операцията (i,j). Стойностите на ES_j при правото преминаване на мрежата се определят с използуването на рекурентното съотношение

$$ES_j = \max_i \{ES_i + D_{ij}\},$$

като се разглеждат всички предшествуващи събития i, свързани чрез дъ*га,* със събитието j. Полага се $ES_1 = 0$. Вижда се, че ES_j представля-на най-дългият път от възела 1 до възела *j*. За разглеждания пример се получават:

$ES_1 = 0$,

$ES_2 = ES_1 + D_{12} = 0 + 3 = 3$,

$ES_3 = ES_1 + D_{13} = 0 + 4 = 4$,

$$ES_4 = \max_{i=2,3}\{ES_i + D_{i4}\} = \max\{3+3, 4+4\} = 8,$$

$$ES_5 = \max_{i=3,4}\{ES_i + D_{i5}\} = \max\{4+3, 8+0\} = 8,$$

$$ES_6 = \max_{i=4,5}\{ES_i + D_{i6}\} = \max\{8+4, 8+9\} = 17,$$

$$ES_7 = \max_{i=4,5,6}\{ES_i + D_{i7}\} = \max\{8+3, 8+7, 17+8\} = 25$$

Тези резултати са записани като първи числа в скобите до съответните възли на фиг.6.13.

Нека LC_i е късният срок за настъпване на събитието i, т.е. за завършването на всички операции, които влизат в събитието i. Ако *n* е номерът на завършващото събитие, полага се $LC_n = ES_n$ и стой-ностите на LC_i при обратното преминаване на мрежата се определят с използването на рекурентното съотношение

като … дъга със

събит…

$$LC_5 = \min_{j=6,7}\{LC_j - D_{5j}\} = \min\{17-9, 25-7\} = 8,$$

$$LC_4 = \min_{j=5,6,7}\{LC_j - D_{4j}\} = \min\{8-0, 17-4, 25-3\} = 8,$$

$$LC_3 = \min_{j=4,5}\{LC_j - D_{3j}\} = \min\{8-4, 8-3\} = 4,$$

$$LC_2 = LC_4 - D_{24} = 8 - 3 = 5,$$

$$LC_1 = \min_{j=2,3}\{LC_j - D_{1j}\} = \min\{5-3, 4-4\} = 0.$$

Тези стойности са записани като втори в скобите до съответните възли на фиг.6.13.

Една операция *(i,j)* е *критична,* т.е. принадлежи на критичния път, ако се изпълняват следните условия:

$$ES_i = LC_i,$$

$$ES_j = LC_j,$$

$$ES_j — ES_i = LC_j — LC_i = D_{ij}$$

Тези условия показват, че няма резерв от време между ранното и къ-сното начало и между ранното и късното завършване на операцията.

Критичният път на фиг.6.13. е изграден от операциите (1,3), (3,4), (4,5), (5,6) и (6,7). Той определя най-кратката възможна продължителност на проекта. Операциите (3,5), (4,6), (4,7) и (5,7) не са критични, тъй като не удовлетворяват третото условие по-горе.

Зя всяка операция *(i, j)* могат да бъдат дефинирани още два срока - срок на *късното започване* LS_{ij} и срок на *ранното завършване* EC_{ij}

$$LS_{ij} = LC_j — D_{ij}, EC_{ij} = ES_i + D_{ij}.$$

С използването на тези понятия се определят *пълният резерв* (TF_{ij}) и *свободният резерв* (FF_{ij}) от време за операцията *(i,j)*

$$TF_{ij} = LC_j — ES_i — D_{ij} = LC_j — EC_{ij} = LS_{ij} — ES_i, FF_{ij} = ES_j — ES_i$$

$$— D_{ij}.$$

Вижда се, че пълният резерв TF_{ii} е разликата между максималния интервал от време $[LC_i — ESi)$, през който операцията *(i,j)* може да бъде изпълнена и нейната продължителност D_{ii}. Свободният резерв FF_{ii} е разликата между интервала от време *(ESj - ESi)*, определен предпола-гайки, че всички операции започват в ранните си срокове, и продъл-жителността D_{ii} на операцията.

Като се използват тези формули и резултатите за сроковете ES_i и LC_i, определени за примера 6.7 и показани на фиг.6.13, се получа-ват оценките за сроковете LS_{ij},EC_{ij} и резервите от време TF_{ij},FF_{ij}, представени в табл.6.13.

Таблица 6.13

	(1,2)	(1.3)	(2,4)	(3,4)	(3,5)	(4,5)	(4,6)	(4,7)	(5,6)	(5,7)	(6,7)
LS_{ij}	2	0	5	4	5	8	13	22	8	18	17
EC_{ij}	3	4	6	8	7	8	12	11	17	15	25
TF_{ij}	2	0*	2	0*	1	0*	5	14	0*	10	0*
FF_{ij}	0	0	2	0	1	0	5	14	0	10	0
LF_{ij}	1	6	0	9	4	0	3	2	3	7	5

В последния ред са записани потребностите от работна сила LF_{ii} за изпълнението на всяка операция, конто се използват по-нататък. Със символа * се означават критичните операции. Ако пълният резерв TF_{ii} *е ра*вен на нула, операцията *(i,j)* е критична. Тогава и нейният свобо-ден резерв FF_{ii} е нулев. Възможно е обаче свободният резерв FF_{ii} Да е равен на нула и за некритична операция - в примера, за операцията
(1,2)-

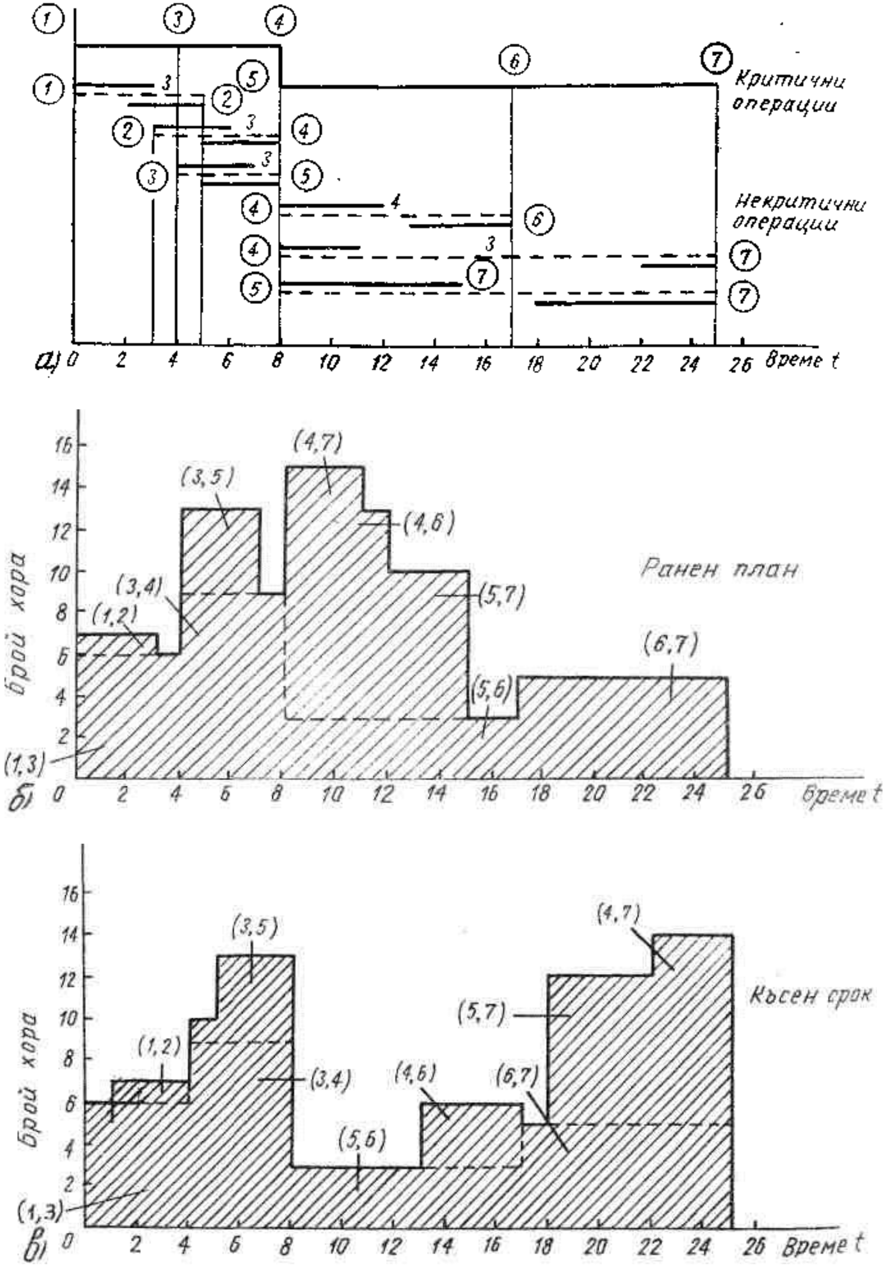
6.4.3. ПЛАНИРАНЕ НА ОПЕРАЦИИТЕ И РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ НА РЕСУРСИТЕ

Планирането на операциите във времето се съобразява с необхо-димите ресурси за изпълнението им. Реалните ограничения върху ре-сурсите могат да възпрепятстват изпълнението на някои едновремен-ни операции. Наличните възможности се анализират с използването на пълните резерви от време. *Некритичните* операции могат да бъдат премествани в една или друга посока, в рамките на техните *пълни* резерви от време, при което могат да бъдат намалени както максималните потребности от ресурси, така и големината и броя на резките отклоне-ния във времето на потребностите от ресурси. При разместването на некритичните операции в тези интервали е необходимо да се спазва ре-да на следването им. Ако за операцията *(i,j)* се изпълнява условието $TF_{ii} = FF_{ii}$, нейното начало или край могат да бъдат избрани произ-волно в рамките на съответния интервал. Ако $TF_{ii} > FF_{ii}$, отмества-нето на началото на некритичната операция спрямо нейния ранен срок на започване може да бъде не по-голямо от FF_{ii}, за да не се влияе на сроковете на следващите непосредствено след нея операции.

При планирането на потребностите от ресурси във времето се съ-ставят *ранен (ляв)* и *късен (десен) план* на некритичните операции. При ранния (късния) план всички некритични операции започват (завър-шват) в ранните (късните) си срокове *ES,(LCj).*

Пример 6.8. Най-напред се съставя разписанието (графикът) за изпълнението във времето на операциите от проекта, представен на фиг.6.13. и табл.6.13. Разписанието е показано на фиг.6.14.-а. Операциите са означени с номерата на събитията, конто ги определят. Критичните операции са представени с плътни линии. С щриховани линии са показани интервалите от време, зададени със сроковете за ранно начало *ES* и късно завършване *LC,* в рамките на конто могат да се изпълня-ват некритичните операции. Показани са продължителностите, както и двата плана - ляв и десен, на тези операции.

За всички некритични операции, с изключение на операцията (1,2), се изпълнява условието $TF_{ii} = FF_{ii}$ и тяхното начало и край могат да бъдат избирани свободно в рамките на съответните интервали. За операцията (1,2) $FF_{ii} < TF_{ii}$. Тъй като FF_{12} =0, само ако началният и срок е равен на ранния и срок (т.е. съвпада с момента t=0), сроковете На операцията (2,4) могат да бъдат избирани свободно в интервала [3,8].



Фиг. 6.14 – а,б,в

Ако началото на операцията (1,2) се отмести например с 2 единици, с толкова трябва да се отмести и ранното начало на операцията (2,4), при което изпълнението на последната заема изцяло оставащия интервал
[5,8].

На фиг.6.14-6 и в са показани потребностите от работна сила във времето, получени съответно при ранен и късен план на некритичните операции, като се използват ресурсите LF_{ij} за изпълнение на операци-ите, представени в табл.6.13. Сумарната потребност за даден момент от време е сумата от ресурсите за операциите, конто се изпълняват в този момент. С щрихована линия са представени потребностите на крити-чните операции, които трябва да бъдат удовлетворени, за да се изпълни проектът във възможно най-краткия срок. Операцията (2,4) не изисква ресурси и преместването на нейното начало не променя профила на потребностите.

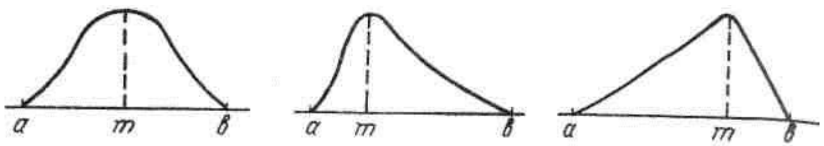
Вижда се, че при ранния план на некритичните операции максималната потребност от работна сила е 15 души, а при късния - 14 души. Големината и броят на измененията на потребностите във времето могат да бъдат намалени и да се осигури по-равномерно използване на ресурсите, ако в ранния план началните срокове на некритичните операции (1,2) и (3,5) се изместят с единица надясно и ако операцията (4,7) се изпълни непосредствено след операцията (4,6). Максималната потребност не може да бъде по-малка от 13 души, поради съвпадането на интервалите от време за изпълнение на операциите (3,4) - критична и (3,5) - некритична.

Същият коригиран график може да бъде получен от късния план на некритичните операции, ако операциите (5,7) и (4,6) започнат непосредствено след операцията (3,5), а операцията (4,7) - веднага след (4.6). Ако разполагаемите ресурси не достигат за удовлетворяване на максималните потребности, последните могат да бъдат намалени, като се увеличат продължителностите на някои критични операции.

Разгледаният алгоритъм и другите известии алгоритми за по-строяване на по-равномерен график за използуване на ресурсите са еври-стични.

6.4.4. ОТЧИТАНЕ НА НЕОПРЕДЕЛЕНОСТТА ЗА ПРОДЪЛЖИТЕЛНОСТТА НА ОПЕРАЦИИТЕ

В метода ПЕРТ времената за изпълнение на операциите се разгле-ждат като случайни величини. За продължителността на всяка операция се въвеждат три оценки - *оптимистична* (означавана с о), *песими-апична* (означавана с b*)* и *най-вероятна* (означавана с *m).* Оптимисти-чната и песимистичната оценка съответствуват на малко вероятните, но възможни минимална и максимална продължителност на операцията, които биха се реализирали при най-благоприятните и най-небла-гоприятните условия за нейното изпълнение. Най-вероятната оценка е най-реалистичната оценка за продължителността, която се определя от нормалните условия за изпълнение на операцията. Тя съответствува на модата (най-голямата стойност) на разпределението на случайната величина. Предполага се, че случайната продължителност се описква с бета-разпределение, симетрично или асиметрично, чиито възможни форми са показани на фиг.6.15. За оценка на дисперсията му се приема стойността $\sigma^2 = [(b - a)/6]^2$, тъй като краищата на много вероятностни разпределения лежат на около три стандартни (средно квадратична) отклонения от средната стойност и приблизителната големина на раз-маха (b — a) е $(b - a) \approx 6\sigma$.



Фиг. 6.15

За оценяване на средната стойност *D* се предполага, че разпределението се състои от четири точки, зададени за стойностите *a,b,m* и за средната стойност (a + b)/2, като съответните вероятности са *p(a) = p(b)* = Ои *p(m) = 2p[(a + b)/2]*. От условието за нормирането на веро-ятностите *p(a) + p(b) + p(m) + p[(a* + b)/2] = 1 следва, че *p(m)* = 2/3 и p[(a + b)/2] = 1/3. Следователно

$$\bar{D} = m.\frac{2}{3} + \frac{a+b}{2}.\frac{1}{3} = \frac{a+b+4m}{6}.$$

След оценяване на средните продължителности D_{ij} за всички операции тези оценки могат да бъдат използвани вместо детерминираните стойности D_{ij} в съотношенията. от разделите 6.4.2, 6.4.3 и да се получат осреднени характеристики на мрежата. Възможно е да се оцени и вероятността на настъпването на всяко събитие и на изпълнението на проекта в съответните срокове. За целта се предполага, че времената за изпълнение на операциите са статистически независими. Прави се и второ важно предположение, че математическото очакване и дисперсията на най-дългия път, влизащ във възела i, могат да бъдат заменени без съществена загуба на точност с математическото очакване и дисперсията на пътя до възела i, за който сумата на средните продължителности на изграждащите го операции е максимална.

Нека x_i е случайният ранен срок на събитието i. Направените предположения позволяват да се запишат следните съотношения за математическото очакване $E\{x_i\}$ и дисперсията $var\{x_i\}$ на ранния срок:

$$E\{x_i\} = ES_i, \quad var\{x_i\} = \sum_k \sigma_k^2,$$

където *к* означават операциите, изграждащи най-дългия път до съби-тието i, а

$$ES_i = \max_j\{\bar{E}S_j + \bar{D}_{ji}\}.$$

Очевидно средната стойност и дисперсията на времето за изпълнение на проекта са съответно сумите от средните стойности и дисперсиите на продължителностите на опера-циите от критичния път.

Тъй като величаната x, е сума от случайни величини, нейното разпределение е близко до нормалното, в съответствие с централната гранична теорема. Нека Т е желаният срок за настъпване на събитие-то *i* (или някакъв друг срок, например късен LC_i или планов). Тогава вероятността

$$P\{x_i \le T\},$$

че събитието i ще настъпи не по-късно от срока Т, е

$$P\{x_i \le T\} = P\left\{\frac{x_i - E\{x_i\}}{\sqrt{var\{x_i\}}} \le \frac{T - E\{x_i\}}{\sqrt{var\{x_i\}}}\right\} = P\{z_i \le K\},$$

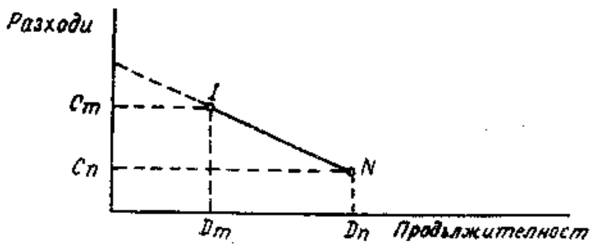
където z_i е нормирана нормално разпределена случайна величина с нулева средна стойност и единична дисперсия, а $K = (T - E\{x_i\})/\sqrt{var\{x_i\}}$. При зададено *К* стойността на *Р* се определя от та-блицата на площите под кривата на нормалното разпределение.

Пример 6.9. Нека за критичния път са получени средна стойност 50 дни и дисперсия - 40 дни. Вероятността, че проектът ще бъде изпълнение в рамките на 60 дни, е $P\{z_i \le K\}$, където $K = (60 - 50)/\sqrt{40} =$ 1,581. За тази стойност от таблицата за площите под кривата на нормалното разпределение се определя вероятността *Р =1 — 0*,057 $\approx$ 0,943, че проектът ще бъде изпълнен в желания срок.

6.4.5. МИНИМИЗАЦИЯ НА РАЗХОДИТЕ ЗА ИЗПЪЛНЕНИЕ НА ПРОЕКТА

Интерес представляват мрежови модели и календарни планове, об-щите разходи за изпълнение на конто са минимални. При това, под *общи* разходи се подразбират сумата от *преките* разходи - за материали, съоръжения и пряк труд, необходим за извършване на дейността, и *непреките* разходи - за управление и административно обслужване.

За получаването на стойностни оценки за всяка операция се определи зависимостта "*преки разходи - продължителност"*. На фиг.6.16 е Показана типична линейна зависимост. С D_n и C_n са означени нор-малната продължителност на съответните нормални преки разходи за операцията, конто определят нормалния режим-точка *N,* а с D_m и C_m -минималната продължителност и съответните максимални преки раз-ходи на операцията, конто характеризират нейния най-интензивен ре-жим-точка I. Намаляването на продължителността е възможно чрез Увеличаване на количеството ресурси, влагани за единица време при изпълнението на операцията, което я оскъпява.



Фиг. 6.16

Тук ще бъде разгледан подход за минимизиране на разходите, който се основана на свободните резерви от време и на зависимостите "преки разходи - време" за отделните операции. Най-напред се построя-ва мрежата и се определят критичният път и свободните резерви от време, като се предполага нормална продължителност D_n на всички операции. Определят се и нормалните преки разходи за целия проект чрез сумиране на разходите за всички операции. По-нататък се извършва съкращаване на получената продължителност на проекта чрез "свива-не" само на критични операции, тъй като само те определят тази продължителност. При това, за да се минимизират разходите, необходимо е *в максимално допустимата* степен да се свие най-напред тази критична операция, която има най-малък наклон *sl*, $sl = (C_m — C_n)/(D_n\text{-}D_m)$. Очевидно, *максималното свиване* на някоя критична операция е $\Delta =$ D_n - D_m. Възможно е тази стойност Δ да не бъде напълно използу-вана за намаляване продължителността на проекта, поради следните причини.

При съкращаването на критичната операция се изменят свободните резерви от време FF_{ij} на някои некритични операции, като някои резерви могат да станат равни на нула. При това, ако съответните некритични операции не се превръщат в критични, съкращаваната критична операция може да бъде свита напълно със стойността на Δ. В резул-тат на съкращаването възниква нов мрежов модел (календарен план) с по-големи разходи за изпълнение на проекта, в сравнение с предишния план. По-нататък се съкращава продължителността на този нов план, като се свива следващата критична операция с минимален наклон.

Ако обаче некритичната операция в момента на нулиране на свобо-дния и резерв от време се превръща в критична, възниква нов критичен път. В този момент и двата критични пътя - новият и началният, имат еднаква дължина и по-нататък трябва да продължи едновременното им съкращаване с еднакви стойности.

От изложеното следва, че свиването на дадена критична операция трябва да се прекрати в момента на нулиране на свободния резерв от време на някоя некритична операция, за да се провери не е ли възни-кнал нов критичен път. Очевидно, първи се нулира свободният резерв, чиято стойност преди съкращението е минимална. Тази стойност опре-деля т.нар. *граница на свободния резерв от време LFF*. Следователно избраната критична операция може да бъде свита със стойност Δ, ако < *LFF*, или със стойност *LFF*, ако Δ > *LFF*.

Δ За определяне на границата на свободния резерв от време *LFF и*збраната критична операция се свива с една единица време и се определят некритичните операции, чиито свободни резерви от време FF_{ij} също са се намалили с една единица. Минималната стойност на тези свободни резерви (преди съкращението им) определя границата *LFF*.

Изложената процедура се повтаря, докато всички критични операции от началния критичен път добият минималната си възможна продължителност или докато е възможно едновременното съкращава-не с еднаква стойност на дължината на всички критични пътища в мрежата.

Да отбележим, че за постигането на такова едновременно съкра-щаване понякога е необходимо да се увеличи вече намалената продъл-жителност на критична операция, участвуваща в някои от критичните пътища.

При няколко критични пътища с еднаква минимална дължина се избира вариантът с минимални (преки) разходи.

Разгледаният подход за определяне на преките разходи може да бъде представен по-пълно с използването на следното окрупнено алго-ритмично описание.

Стъпка. 1. Определят се критичният път, резервите от време и разходите $C_{пр.п}$ за изпълнение на проекта, конто съответствуват на нормалната продължителност на операциите D_n. Полагат се $C_{пр}$ =

Стъпка 2. Сред критичните операции от дадения критичен път, конто не са на границата на интензивността, се избира операцията с най-малък наклон *sl*.

Стъпка 3. Построява се нов мрежов модел чрез съкращаване про-дължителността на операцията, избрана на стъпка 2. За целта:

а) Определя се максималното свиване $\Delta, \Delta = D_k - D_{k,m}$, където индексът *к* означава критична операция.

б) Съкращава се с една единица време избраната критична опера ция. Изчисляват се новите свободни резерви от време FF_{ij} за всички некритични операции и се определя множеството А от некритични опе рации, за конто резервите FF_{ij} са се намалили с една единица. Определя се границата на свободния резерв от време *LFF*, $LFF = \min_{(i,j)\in A}\{FF_{ij}\}$.

Ако критичният път е единствен се преминава към т.в, иначе се пре-минава към стъпка 4-г.

в) Определя се границата на свиване $t_{кр}$ и новата продължител ност D_k на критичната операция

$$t_{кр} = \min\{\Delta, LFF\}, D_k = D_k - t_{кр}.$$

г) Построява се новият мрежов модел с използване на новата продължителност D_k на критичната операция и се определят новите разходи за проекта $C_{пр} = C_{пр} + t_{кр}sl$.

Стъпка 4. Определят се критичните операции, конто се съкраща-ват по-нататък, новите модели и разходи за проекта.

а) Ако се изпълнява условието $\Delta < LFF$, критичната операция е свита максимално и се преминава към стъпка 2.

б) Ако се изпълнява условието $\Delta \geq LFF$ и не се е появил нов критичен път, полага се $\Delta = D_k - D_{к,т}$ и се преминава към стъпка 3-б, с което се продължава съкращаването на същата критична операция. Ако се е появил нов критичен път, се полага $\Delta = D_k - D_{k,m}$ и се преминава към т.в.

в) Избира се операцията с минимален наклон, която ще бъде съкращавана в новия критичен път s Δ_s; се определят стойностите LFF_s и $t_{кр,s}$ по начина, описан в стъпка 3-а,б,в.

г) Определя се стойноетта $t_{кр}$ на границата на свиване, с коя то едновременно ще бъдат намалени продължителностите на всички критични пътища - началния и допълнително възникналите, $t_{кр} = \min\{\Delta, LFF\}$, където а

$\Delta = \min_i\{\Delta_i\}$ Δ_i и $LFF = \min\{LFFi\}$, а и LFF, са

текущите стойности на съответните величини за критичните пътища.

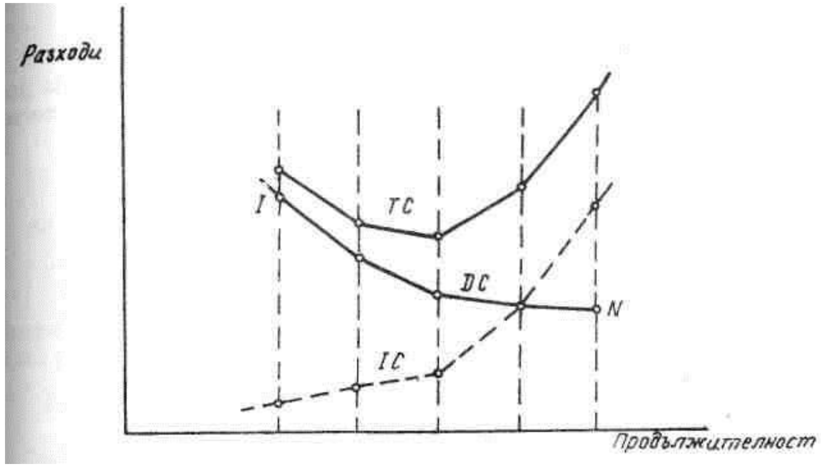
д) Построява се новият мрежов модел с използване на намалените продължителности на критичните операции $D_k = D_k - t_{Kр}$ и се определят новите разходи $C_{пр}$, където sli са наклоните на съкращаваните критични операции.

Преминава се към стъпка 4, която се изпълнява за този критичен път, Δ който е постигнато $\Delta = 0$ (при $< LFF$) или $LFF = 0$ (пои $\Delta \geq LFF$).

Разгледаният подход позволява да се определи зависимостта "пре-ки разходи - продължителност" за даден проект - кривата DC на фиг.6.17. Точките от тази крива съответствуват на календарни пла-нове с различна продължителност - от нормална - *T.N* до минимална-т. I. С нарастването на продължителността на изпълнение на проекта непреките разходи също нарастват - кривата I*C* на фиг.6.17. Сумата от двата вида разходи представлява общите разходи - кривата ТС. Вижда се, че планът с продължителност 0 е оптимален, тъй като този план определя минимални общи разходи.

6.4.6. ИЗПОЛЗВАНЕ НА МРЕЖОВИЯ МОДЕЛ ПРИ ИЗПЪЛНЕНИЕТО НА ПРОЕКТА

Мрежовият модел е удобно средство за контрол и отчитане на изпълнението на проекта за анализиране влиянието на закъсненията при извършването на операциите. Като правило, при изпълнението на сло-жни проекти и програми възникват отклонения от плана, конто по-някога са толкова съществени, че е необходимо разработването на нов



Фиг. 6.17

график за оставащата част от проекта. В такива случаи, за да може да се използва наличният модел, той се актуализира. Задават се нуле-ви стойности на продължителностите на изпълнените операции, а за частично изпълнените се оценяват времена за изпълнение на незавър-шената част. Изключват се излишни операции и се добавят нови, ако е необходимо. Извършват се изчисленията за мрежата и се съставя нов план-график.

Съществуват програмни продукти за създаване, анализ и корек-ция на мрежови модели.

6.4.7 МРЕЖОВИ ЗАДАЧИ И ЛИНЕЙНО ПРОГРАМИРАНЕ

Разгледаните мрежови задачи могат да бъдат формулирани като задачи на ЛП. При това, задачите за най-къс път и максимален поток се решават по-ефективно с разгледаните специални мрежови методи. Смисълът на формулирането им като задачи на ЛП е да се разкрият специфичните структури на линейни задачи, решаването на конто с мрежови алгоритми е по-икономично отколкото със симплекс-метода.

Формулирането на задачите за календарно планиране с минимални разходи като задача на ЛП предлага допълнително удобство за изу-чаване на зависимостта между продължителността на операциите и Разходите за проекта при зададени различии срокове за неговото изпълнение.

6.4.7.1. ЗАДАЧА ЗА НАЙ-КЪС ПЪТ В МРЕЖА

На всяка дъга се поставя в съответствие променлива, а на всеки възел-ограничение в линейния модел. Нека мрежата има n възли и x_{ij} е потокът в дъгата (i,j), чиято дължина е dij. Задачата е

Да се минимизира $\quad i \quad j$

при ограниченията

$$\sum_j x_{1j} = 1$$
$$\sum_i x_{ik} = \sum_j x_{kj}, \forall k \neq 1, k \neq n,$$
$$\sum_j x_{jn} = 1,$$
$$x_{ij} \geq 0, \forall i, j.$$

Това е интерпретация като транспортна задача, при която единица поток се доставя от възела 1 до възела n. Според целевата функция об-щото разстояние, изминато от единица поток, трябва да е минимално. Средното ограничение е от балансов тип: във всеки междинен възел сумарният входящ поток е равен на сумарния изходящ поток. Първото и последното ограничения показват, че сумарният поток, който напуска възел 1 и постъпва във възел n, е равен на единица.

Формулираната задача има смисъл, ако решението x_{ij} приема две стойности 0 или 1. Дъгата (i,j) принадлежи на най-късия път, ако x_{ij}—*1*, и не принадлежи на него, ако $x_{ij}=0$. Ограниченията x_{ij} =0 или 1 не са записани в явен вид в модела, но специалната му структура води до оптимално решение, което удовлетворява тези изисквания.

6.4.7.2. ЗАДАЧА ЗА МАКСИМАЛЕН ПОТОК

Нека Z е потокът от източника 1 в приемника N, а x_{ij} - потоке през дъгата (i, j). Задачата се формулира по следния начин:

Да се максимизира $J = Z$ при

ограниченията

$$\sum_j x_{1j} = Z$$
$$\sum_i x_{ik} = \sum_j x_{kj} \quad \forall k \neq 1, k \neq n,$$
$$\sum_i x_{in} = Z$$
$$0 \leq x_{ij} \leq c_{ij}, \ \forall i, j,$$

където c_{ij} е пропускателната способност на дъгата (i,j). Смисълът на ограниченията е подобен на този в предишната задача.

6.4.7.3. ЗАДАЧА ЗА КАЛЕНДАРНО ПЛАНИРАНЕ И МИНИМИЗИРАНЕ НА РАЗХОДИТЕ

Нека $D_{n.ij}$ и $D_{n.ij}$ са нормалната и минималната продължител-ност, а $C_{n.ij}$ и $C_{m,ij}$ нормалните и максималните преки разходи за опе-рацията (i,j). Нека x_{ij} и sl_{ij} са времето за изпълнение и наклона на операцията (i,j), където $sl_{ij} = (C_{m,ij} - C_{n,ij})/(D_{n,ij} - D_{m,ij})$ предста-влява нарастването на преките разходи при намаляването на x_{ij} с единица. Като се използва стойността K_{ij}, показана на фиг.6.16, преките разходи за операцията (i,j) $C_{d,ij}$ и за целия проект DC могат да се запищат съответно във вида

$$C_{d,ij} = K_{ij} - sl_{ij}x_{ij}, \quad DC = \sum_{(i,j)} (K_{ij} - sl_{ij}x_{ij}).$$

Задачата е да се изберат x_{ij} така, че да се минимизират преките разходи DC при зададена продължителност T на изпълнението на проекта.

Нека ES_i са ранните срокове на събитията $i, i = \overline{1, K}$, които зави-

$$DC \sum_{(i,j)} K_{ij}$$

сят от x_{ij} и са неизвестни. Приема се, че ES_i =0. В израза за е константа, която не зависи от x_{ij} а минимизирането на —f(x) еквивалентно на максимизирането на $f(x)$. Поради това задачата се представя окончателно във формата Да се максимизира $J = \sum sl_{ij}x_{ij}$

при ограниченията

$$\left.\begin{array}{l} x_{ij} \geq D_{m,ij}, \\ x_{ij} \leq D_{n,ij}, \\ ES_i + x_{ij} \leq ES_j, \end{array}\right\} \text{за всички операции } (i,j)$$
$$ES_k \leq T,$$
$$ES_i \geq 0, \ \forall i.$$

По-горе се предполагаше, че срокът T за изпълнение на проекта е из-вестен. Като се използва параметричното ЛП, оптималното решение **може** да бъде определено като функция на T, което пък позволява да се получи зависимостта на минималните преки разходи *DC* от срока T.

6.5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В тази глава бяха представени мрежови модели и методи за реша-ване на четири основни типа задачи - минимизация на мрежи, опре-деляне на най-къс път и на максимален поток, планиране и управление на проекти. Най-разнообразни задачи, конто възникват при проек-тирането на технически, технико-икономически и други системи при планирането и управлението на различии дейности, могат да бъдат ре-шени, като се използват мрежови модели. Тези задачи могат да бъдат описани чрез модели на ЛП, но специфичната им структура прави по-рационално използването на специални мрежови методи и алгоритми за решаването им.