ДИНАМИЧНО ПРОГРАМИРАНЕ

Динамичното програмиране (ДП) е общ метод за решаване на оптимизационни задачи чрез *декомпозиция,* т.е. чрез разчленяване (разбива-не) на началната задача на по-прости задачи. Декомпозицията се състои в определянето на етапи на решение и формулирането на оптимизационна задача за всеки етап, чиято сложност е по-малка от сложността на началната задача. На всеки етап съответствува една скаларна или векторна оптимизирана (управлявана) променлива, като резултатите от етапите са свързани чрез рекурентен алгоритъм. Решението на началната задача се получава чрез последователно решаване на задачите от отделните етапи, като решение на задачата от последния етап. По-ради това ДП се определя като *последователен, итерационен метод* за решаване на оптимизационни задачи.

ДП се основава на *принципа на оптималността,* формулиран от Р.Белман през 1957 г. по следния начин: "една политика е оптимал-на, ако за даден етап, независимо от това какви са били решенията на предишните етапи, решенията, конто ще се вземат, съставят оптимал-на политика, като се разглеждат резултатите от предишните етапи". Накратко този принцип може да се формулира така: "оптималната политика (стратегия) съдържа само оптимални подполитики (подстрате-гии)".

Практическото прилагане на този прост, очевиден принцип пред-полага както разбирането на смисъла на елементите на модела на ДП, така и определен опит. За постигането на едното и на другото може да помогнат анализът и решаването на конкретни практически задачи.

8.1. МО ДЕЛ НА ДИНАМИЧНОТО ПРОГРАМИРАНЕ

Елементите на модела на ДП ще бъдат въведени с използване-то на пример, в който се решава следната задача за разпределение на инвестиции.

Съществуват три вида дейности, в конто може да се инвестират определени средства - 5 млн.лева. Известии са годишните печалби от всяка дейност (в млн.лева) като функция на инвестициите - табл.8.1. Необходимо е така да се разпределят разполагаемите средства, че об-щата печалба от трите дейности да е максимална.

Таблица 8.1.

Инвестиции	0	1	2	3	4	5
Печалба P_1	0	0,33	0,50	0,70	0,83	0,95
Печалба P_2	0	0,30	0,46	0,60	0,70	0,80
Печалба P_3	0	0,20	0,30	0,45	0,55	0,67

Предполага се, че всички средства - 5 млн.лв. ще бъдат изразход-вани.

Една възможна политика на разпределение е например 2 в 1, 2 в 2 и 1 в 3, с печалба 0,50 + 0,46 + 0,20 = 1,16. В разглеждания пример броят на допустимите решения, при конто сумата на разпределените средства е равна на 5, е 21 и оптималното решение може да бъде определено чрез оценяването (сканирането) на всички допустими варианти. В общия случай решаването чрез пълно сканиране на комбинаторни задачи, подобии на тази, но с голяма размерност, е неефективно или невъзможно, защото броят на комбинациите е огромен. Допълнителни затруднения възникват и във връзка с необходимостта да се проверяват само допустими решения.

Описаните затруднения могат да се преодолеят чрез използване на метода на ДП.

Моделът на ДП се състои от следните елементи: *етап, състоя-ние, варианти, целева функция* и *рекурентно сьотношение (функционално уравнение).*

Етапът е част от задачата, която има собствени алтернативи, сред конто се търси най-добрата. В разгледания пример на всяка *дейност* се поставя в съответствие *етап,* като всеки етап има по шест алтернативи. Избраната алтернатива за всеки етап би трябвало да определи оптималните инвестиции в съответната дейност, като се отчитат *допу-стимостта* на решенията и *връзката* между етапите, която произтича от разпределянето на ограничен ресурс. За удовлетворяване на тези изисквания за всеки етап се дефинира *състояние,* което характеризира ресурса или друг фактор, чрез който са обвързани отделните етапи. За разглеждания пример състоянията x_1, x_2 и x_3 на етапите 1, 2 и 3 се определят по следния начин

x_1 - обем на инвестициите, разпределени за етапа 1 (т.е. за пър-вата дейност)

x_2 - обем на инвестициите, разпределени за етапите 1 и 2 (т.е. за първата *и* за втората дейности)

x_3 - обем на инвестициите, разпределени за етапите 1, 2 *и* 3 (т.е. за първата *и* за втората, *и* за третата дейности).

Ако броят на етапите е *N,* състоянието x_j за j-тия етап, $j = 1,N$ се дефинира като обем на инвестициите, разпределени за етапите 1, 2, ... до j включително.

Тъй като в задачата са зададени дискретни стойности на инвестициите, стойностите на променливите x_i ще бъдат *цели* числа $0 \leq x_i \leq 5$. i = 1, 2 и $x_3 = 5$. Последното условие означава, че се предвижда пълно изчерпване на разполагаемия ресурс.

Алтернативите на решение за i-тия етап се представят чрез *променливите на решение* u_i, $i = \overline{1, 3}$, които характеризират инвестициите влагани *само* в г'-тия етап. Стойностите на тези променливи са също цели числа, $0 \leq u_i \leq 5$, i = 1, 3.

Целта е максимизирането на печалбата от инвестирането в трите дейности. Нека броят на етапите е *N* (в случая, *N* = 3) и нека $f_i(x_i)$ означава *максималната* печалба от етапите *1 и 2, и ..., и j,* получена при *зададена стойност* x_i. С други думи, f_i (x_i) е най-добрата печалба, получена при разпределянето на зададена сума x_i между първата втората, ..., и j-та дейности включително. Тогава в съответствие с принципа на оптималността *рекурентното съотношение* на ДП, чрез което се определя f_j (x_j), е от вида

$$f_j(x_j) = \max_{\substack{\text{по допустимите} \\ \text{вложения } u_j}} \{P_j(u_j) + f_{j-1}(x_{j-1})\}, \ j = \overline{1, N},$$

където $f_o(x_0) = 0$. Смисълът на това съотношение става ясен, след като се запише изразът за u_j

$$x_j = x_{j-1} + u_j, \text{ т.е., } u_j = x_j - x_{j-1},$$

който следва от определението на състоянието x_i, $j = 1,N$. Съотноше-нието казва, че максималната печалба f_i (x_i) се получава при избора на оптималната допустима алтернатива u_i, която максимизира сумата от: печалбата P_i (u_i) от инвестирането на u_i в j-та дейност и *максималната* печалба от инвестирането на *останалата* сума $u_{i-1} = x_i - u_i$ в първата, втората, ..., (*j* - 1)-та дейности.

Условието за допустимост на вложението u_3 се получава от естественото условие $x_{i-1} \geq 0$ или $x_i - u_i \geq 0$, откъдето допустими са вложенията $u_i \leq x_i$

Лявата част на рекурентното съотношение е функция на промен-ливата x_i. Следователно и дясната му част би трябвало да се изрази чрез x_i. Като се използват разгледаните по-горе условия за определяне на u_{i-1} чрез x_3 и за допустимост на u_i, рекурентното съотношение на ДП се представя окончателно във вида

$$f_j(x_j) = \max_{u_j \leq x_j} \{P_j(u_j) + f_{j-1}(x_j - u_j)\}, \ j = \overline{1, N}$$

$$f_0(x_0) \equiv 0.$$

При това съотношение изчисленията се извършват от първия към последния етап, $f_1 \to f_2 \to \ldots \to f_N$. Поради това то е известно като *алгорнтъм с естествено следване на етапите или накратко - прав алгоритъм на ДП.*

Обикновено резултатите от рекурентните изчисления по метода на ДП се представят в табличен вид. За разглежданата задача в този раздел се получават следните резултати.

Етап 1. $f_1(x_1) = \max_{u_1 \leq x_1} \{P_1(u_1)\}$.

x_1	P_1 (u_1)						оптимални решения	
	$u_1 = 0$	$u_1 = 1$	$u_1 = 2$	$u_1 = 3$	$u_1 = 4$	$u_1 = 5$	$f^*_1(x_1)$	u^*_1
0	0,00	-				-	0,00	0
1	0,00	0,33	-			-	0,33	1
2	0,00	0,33	0,50				0,50	2
3	0,00	0,33	0,50	0,70	-	-	0,70	3
4	0,00	0,33	0,50	0,70	0,83	-	0,83	4
5	0,00	0,33	0,50	0,70	0,83	0,95	0,95	5

С - са означени недопустими стойности на P_1 (u_1), които съответ-стват на недопустими вложения. Например вариантите на вложение $u_1 = 3$, 4 или 5 са недопустими, ако $x_1 = 2$.

Етап 2. $f_2(x_2) = \max_{u_2 \leq x_2} \{P_2(u_2) + f_1(x_2 - u_2)\}$.

x	$P_2(u_2) + f_1(x_2 - u_2)$						Оптимални решения	
	$u_2 = 0$	$u_2 = 1$	$u_2 = 2$	$u_2 = 3$	$u_2 = 4$	$u_2 = 5$	$f_2^*(x_2$	u^*_2
0	0,00+0,00= =0,00	-	-	-	-	-	0,00	0
1	0,00+0,33= =0,33	0,30+0,00= =0,30	-	-	-	-	0,33	0
2	0,00+0,50= =0,50	0,30+0,33= =0,63	0,46+0,00= =0,46	-	-	-	0,63	1
3	0,00+0,70= =0,70	0,30+0,50= =0,80	0,46+0,33= =0,79	0,60+0,00= =0,60	-	-	0,80	1
4	0,00+0,83= =0,83	0,30+0,70= =1,00	0,46+0,50= =0,96	0,60+0,33= =0,93	0,70+0,00= =0,70	-	1,00	1
5	0,00+0,95= =0,95	0,30+0,83= = 1,13	0,46+0,70= = 1,16	0,60+0,50= =1,10	0,70+0,33= =1,03	0,80+0,00= =0,80	1,16	2

Етап 3. $f_3(x_3) = \max_{u_3 \leq x_3} \{P_3(u_3) + f_2(x_3 - u_3)\}$.

	$P_3(u_3) + f_2(x_3 - u_3)$						Оптимално решение	
x_3	$u_3 = 0$	$u_3 = 1$	$u_3 = 2$	$u_3 = 3$	$u_3 = 4$	$u_3=5$	$f^*_3(x_3)$	u^*_3
S	0,00+1,16= =1,16	0,20+1,00= =1,20	0,30+0,80= =1,10	0,45+0,63= =1,08	0,55+0,33= =0,88	0,67+0,00= =0,67	1,20	1

Оптималното решение се определи от таблиците, като се започва от последния етап. При $x_3 = 5$ оптималното решение $u^*_3 = 1$. Следователю) $x_2 = x_3 - u^*_3 = 5 - 1 = 4$. От таблицата за втория етап се вижда, че на $x_2 = 4$ съответствува оптимално вложение $u^*_2 = 1$. Оттук $x_1 = x_2 - u^*_2 = 4 - 1 = 3$ и от таблицата за първия етап се определи $u^*_1 = 3$. Оптималното разпределение на инвестициите е

$$(u^*_1, u^*_2, u^*_3) = (3,1,1).$$

8.2. ОБРАТЕН АЛГОРИТЪМ НА ДИНАМИЧНОТО ПРОГРАМИРАНЕ

В приложенията на ДП по-широко разпространение е получил алгоритъмът с *обратно следване на етапите,* или накратко - *обратният алгоритъм* на ДП, при който изчисленията започват с последния етап и завършват с първия, $f_N \longrightarrow f_{N-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow f_1$. Разликата между моде-лите на ДП, използуващи прав или обратен алгоритъм, е в начина на определяне на състоянието. Ако задачата за разпределение на инвестициите с N етапа се решава с обратния алгоритъм, състоянието y_j се въвежда по следния начин:

y_{j1} - обемът на инвестициите, разпределени на

: етапите 1,2,... ,N - 1 и N;

y_j - обемът на инвестициите, разпределени на

: етапите $j, j+1, \ldots, N-1$ и N;

Y_N - обемът на инвестициите, разпределени на последния, *N-я* етап. Нека $f_N(y_N)$ е максималната печалба на N-я етап при зададено y_N, $f_j(v_j)$ - максималната печалба на етапите $j, j+1, \ldots, N-1$ и N, при зададено y_j, $f_1(y_1)$ - максималната печалба на етапите $1,2,\ldots, N-1$ и N, при зададено y_1.

Обратният рекурентен алгоритъм е от вида

$$f_j(y_j) = \max_{u_j \le y_j}\{P_j(u_j) + f_{j+1}(y_j - u_j)\}, \ j = \overline{1, N}$$

$$f_{N+1}(y_{N+1}) \equiv 0,$$

където аргументът y_{j+1} на f_{J+1} е изразен, като е използувано опреде-дението на състоянието $y_j = y_{j+1} + u_j$, откъдето $y_{j+1} = y_j - u_j$.

За разгледаната задача (N = 3) се получават следните резултати:

Етап 3 $f_3(y_3) = \max_{u_3 \le y_3}\{P_3(u_3)\}$.

	$P_3(u_3)$						Оптимално решение	
y_3	$u_3=0$	$u_3 = 1$	$u_3 = 2$	$u_3 = 3$	$u_3= 4$	$u_3 = 5$	$f^*_3(y_3)$	u^*_3
0	0,00	-	-	-	-	-	0,00	0
1	0,00	0,20	-	-		-	0,20	1
2	0,00	0,20	0,30	-	-		0,30	2
3	0,00	0,20	0,30	0,45	-		0,45	3
4	0,00	0,20	0,30	0,45	0,55	-	0,55	4
5	0,00	0,20	0,30	0,45	0,55	0,67	0,67	5

Етап 2 $f_2(y_2) = \max_{u_2 \le y_2}\{P_2(u_2) + f_3(y_2 - u_2)\}$.

	PгM + /з(«2 - «г)						Оптимални решения	
y_2	$u_2=0$	$u_2=1$	$u_2 = 2$	$u_2 = 3$	$u_2=4$	$u_2 = 5$	$f^*_2(y$	u^*_2
0	0,00	-	-	-	-	-	0,00	0
1	0,00+0,20= =0,20	0,30+0,00= =0,30	-	-	-	-	0,30	1
2	0,00+0,30= =0,30	0,30+0,20= =0,50	0,46+0,00= =0,46	-	-	-	0,50	1
3	0,00+0,45= =0,45	0,30+0,30= =0,60	0,46+0,20= =0,66	0,60+0,00= =0,60	-	-	0,66	2
4	0,00+0,55= =0,55	0,30+0,45= =0,75	0,46+0,30= =0,76	0,60+0,20= =0,80	0,70+0,00= =0,70	-	0,80	3
5	0,00+0,67= =0,67	0,30+0,55= =0,85	0,46+0,45= =0,91	0,60+0,30= =0,90	0,70+0,20= =0,90	0,80+0,00= =0,80	0,91	2

Етап 1 $f_1(y_1) = \max_{u_1 \le y_1}\{P_1(u_1) + f_2(y_1 - u_1)\}$.

	$P_1(u_1) + f_2(y_1 - u_1)$						Оптимални решения	
y_1	$u_1=0$	$u_1=1$	$u_1 = 2$	$u_1 = 3$	$u_1=4$	$u_1 = 5$	$f^*_1(y$	u^*_1
5	0,00+0,91= =0,91	0,33+0,80= = 1,13	0,50+0,66= =1,16	0,70+0,50= =1,20	0,83+0,30= =1,13	0,95+0,00= =0,95	1,20	3

Оптималното решение се определя, като се започне от последната таблица за етапа 1. При $y_1 = 5$ оптималното решение е $u^*_1 = 3$. Следователно $y_2 = y_1 - u^*_1 = 5 - 3 = 2$. На $y_2 = 2$ в таблицата за етапа 2 съответствува $u^*_2 = 1$, откъдето $y_3 = y_2 — u^*_2 = 2 — 1 = 1$. От таблицата за етапа 3 при $y_3 = 1$ се определя uj = 1. Оптималното разпределение на инвестициите е

$$(u^*_1, u^*_2, u^*_3) = (3,1,1),$$

което е същото, както полученото в т.8.1.

Ефективността на двата алгоритъма - правия и обратния, зависи от структурните особености на задачата. Практическият опит е показал, че в повечето случаи обратният алгоритъм е по-ефективен. Той е и най-често използуван в приложенията.

8.3. МОДЕЛ НА ДИНАМИЧНОТО ПРОГРАМИРАНЕ II

В раздел 8.1 бяха въведени елементите на модела на ДП: целева функция, етап, вариант на решение, състояние, рекурентно сътноше-ние. По-нататък ще бъде изяснен по-задълбочено смисълът на тези еле-менти.

Целевата функция е обобщена характеристика на качеството на взетите решения и постигнатите резултати при решаването на дадена задача. Тя отразява начина, по който сложната задача се декомпозира на по-прости. При *адитивната декомпозиция* общият резултат е сума от резултатите на отделните етапи. Примери на адитивни целеви функции са общият доход или общите загуби, реализирани на всички етапи.

При *мултипликативната декомпозиция* общият резултат е произ-ведение от резултатите на отделните етапи. Пример на мултиплика-тивна целева функция е надеждността на система от последователно съединени елементи.

Етапът съответствува на подзадача. Неговият принос в общия резултат се описва с целева функция, която е адитивна или мултипли-кативна част на общата целева функция. Той може да представлява интервал от време или да не е свързан с времето - в разгледания пример етапът съответствуваше на дейност.

С всеки етап се свързват *варианти на решение,* конто определят една или друга стойност на целевата функция. Вариантите на решение могат да се разглеждат като стойности на една или повече управлявани променливи (променливи на решението). В разгледания пример вариантите на j-тия етап се представяха от стойностите на променливата u_i.

При решаването на задачи на ДП най-сложен проблем е изборът на променливите на състоянието x_j. Тези променливи осигуряват връзка между етапите, при която решението на задачата се получава в резул-тат на оптимизация, извършвана на всеки етап поотделно. При това, при определянето на оптималните решения на всеки етап се използу-ват само допустими варианти и не се проверява влиянието на текущия избор върху решенията, избрани на предишните етапи.

Разгледаният пример по-горе се отнася до клас задачи - *задачи за распределение,* при конто ограничен ресурс се разпределя най-добре за удовлетворяване на определен брой потребности. Връзката между етапите (потребностите) е именно чрез ограничения ресурс, тъй като всеки етап се конкурира с останалите за част от ресурса. Тази връз-ка и изискването за използуване само на допустими варианти на всеки етап могат да бъдат отразени, ако състоянието x_i на етапа j се определи като количество ресурс, разпределен (даден) на последователност от етапи: $j, j + 1, ..., N$ или $1, 2, ..., j$ за случайте, когато се използуват обратното или правото рекурентни сътношения.

Когато задачите не са разпределителни, състоянието се определя като информация, получена на предишните етапи, която е достатъчна за избиране на допустимо решение на дадения етап, без да се проверяват миналите решения. Например в задачите за замяна на съоръжения или за регулиране на работната сила състоянието x_i, т.е. информацията, която е достатъчна за вземане на допустимо решение на етапа j, може да бъде възрастта на съоръженията към началото на етапа j или броя на работниците в края на предишния етап $j — 1$.

8.4. ПРИМЕРИ НА ДЕТЕРМИНИРАНИ МОДЕЛИ НА ДИНАМИЧНОТО ПРОГРАМИРАНЕ

В този раздел се разглеждат *детерминирани* задачи на ДП, при кои-то състоянието на следващия етап се определи напълно от състоянието и взетите решения на сегашния етап. Показва се начин на избиране елементите на модела на ДП.

Пример 8.1. Задача за товара с максимална полезност. Зададени са предмети от N типа, от конто се съставя товар. Предметът от i-тия тип има тегло w_i и полезност u_i, $i = 1, N$. Необходимо е да се определи товар с максимална полезност, чието тегло не надхвърля зададена стойност W.

Задачата е известна още като задача за раницата. Полезността се Измерва най-често с цената на предмета или с друг показател.

Нека l_i е броят на предметите от г'-тия тип. Задачата е да се мак-симизира целевата функция J

$$J = \sum_{i=1}^{N} l_i u_i$$

при ограниченията

$$\sum_{i=1}^{N} l_i w_i \le W,$$

$$l_i \ge 0, \quad \text{цяло} \quad i = \overline{1,\ N}.$$

Задачата може да бъде решена и като задача на целочисленото програмиране.

Елементите на модела на ДП се определят по следния начин:

— *етап j* - съответствува на типа *j*, $j = 1, N$;

— *състояние* y_i *на етапа j* - изразява сумарното тегло на предме-тите, решения за натоварването на конто са взети на етапите $j, j+1, \dots N$. При това, $y_1 = W, y_3 = 0, 1, \dots, W$ при $j = 2, N$;

— *варианти на решението* l_i на етапа *j* - описват се с броя на предметите от типа j. Очевидно, целочислените стойности на l_i принадлежат на интервала $[0, [W/w_i]]$, където $[W/w_i]$ е цялата част на W/wj,

— *целева функция* на j-тия етап - представлява сумарната поле-зност на предметите, решения за натоварването на конто са взети на етапите $j, j + 1, \dots, N$. Стойностите на тази функция зависят от y_j и от l_j.

Нека $f_i\ (y_i)$ е максималната стойност на целевата функция при зададено y_i. Тя се определя с използуване на обратното рекурентно съотношение на ДП, което е от вида

$$f_N(y_N) = \max_{\substack{l_N = 0,1,\dots[y_N/w_N] \\ y_N = \overline{0,W}}} \{l_N u_N\}$$

$$f_j(y_j) = \max_{\substack{l_j = 0,1,\dots[y_j/w_j] \\ y_j = \overline{0,W}}} \{u_j l_j + f_{j+1}(y_j - l_j w_j)\},\ j = \overline{1,\ N-1}.$$

Вижда се, че при зададена стойност на y_i се разглеждат само *до-пустими* варианти, които съответствуват на стойностите $1_j = 0, 1, \dots, [y_j/w_j]$■

Начинът на въвеждане на състоянието y_i показва, че задачата се интерпретира като разпределителна - предметите от различните типо-ве се конкурират, за да получат част от ограничения ресурс "тегло".

Таблица 8.1

i	w_i	u_i
1	3	125
2	2	70
3	1	40

По-нататък се определи оптимален товар, като се предполага, че има три типа предмети ($N = 3$), данните за конто са показами в табл.8.1 и че допустимото максимално тегло е $W = 6$ единици.

За отделните етапи се получават следните резултати.

Етап 3

$$f_3(y_3) = \max_{\substack{l_3 = 0,1,\dots[y_3/1] \\ y_3 = 0,1,\dots,6}} \{40 l_3\},$$

$$\max l_3 = [6/1] = 6$$

	$40l_3$							Оптимално решение	
y_3	$l_3 = 0$	$l_3 = 1$	$l_3 = 2$	$l_3 = 3$	$l_3 = 4$	$l_3 = 5$	$l_3 = 6$	$f^*_3(y_3)$	l_3
0	0	-	-	-	-	-	-	0	0
1	0	40	-	-	-	-	-	40	1
2	0	40	80	-				80	2
3	0	40	80	120	-			120	3
4	0	40	80	120	160	-		160	4
5	0	40	80	120	160	200	-	200	5
6	0	40	80	120	160	200	240	240	6

Етап 2

$$f_2(y_2) = \max_{\substack{l_2 = 0,1,\dots[y_2/2] \\ y_2 = 0,1,\dots,6}} \{70 l_2 + f_3(y_2 - 2l_2)\},$$

$$\max l_2 = [6/2] = 3$$

	70/$_2$+ /з (г/2 ~2Z$_2$)				Оптимални решения	
y	$l_2 = 0$	$l_2 = 1$	$l_2 = 2$	$l_2 = 3$	$f^*_2(y_2)$	l^*_2
0	0 + 0 = 0	-	-		0	0
1	0 + 40 = 40	-	-	-	40	0
2	0 + 80 = 80	70 + 0 = 70		-	80	0
3	0+120 = 120	70 + 40 = 110	-	-	120	0
4	0 + 160 = 160	70 + 80 = 150	140 + 0 = 140	-	160	0
5	0 + 200 = 200	70 + 120 = 190	140 + 40 = 180	-	200	0
6	0 + 240 = 240	70 + 160 = 230	140 + 80 = 220	210 + 0 = 210	240	0

Етап I

$$f_1(y_1) = \max_{\substack{l_1=0,1,\dots[y_1/3] \\ y_1=0,1,\dots,6}} \{125 l_1 + f_2(y_1 - 3l_1)\},$$

$$\max l_1 = [6/3] = 2$$

	$125l_1 + f_2(y_1-3l_1)$			Оптимални решения	
y_1	$l_1 = 0$	$l_1 = 1$	$l_1 = 2$	$f^*_1(y_1)$	l^*_1
0	0 + 0 = 0			0	0
1	0 + 40 = 40		-	40	0
2	0 + 80 = 80		-	80	0
3	0+120 = 120	125 + 0= 125	-	125	1
4	0+160= 160	125 + 40 = 165		165	1
5	0 + 200 = 200	125 + 80 = 205		205	1
6	0 + 240 = 240	125 + 120 = 245	250	250	2

От последната таблица се вижда, че при $y_1 = 6$ $l^*_1 = 2$. Следователе $y_2 = y_1 - l^*_1 w_1 = 6 - 2.3 = 0$. От таблицата за етапа 2 при $y_2 = 0$ се отчита $l^*_2 = 0$, откъдето $y_3 = y_2 - l^*_2 w_2 = 0$. Оптималното решение е $(l^*_1, l^*_2, l^*_3) = (2, 0, 0)$, при което максималната полезност е 250.

При зададено допустимо тегло $W = y_1 = 6$ на последния етап е достатъчно да се построи последният ред от таблицата за $y_1 = 6$. Определянето и на други редове за $y_1 < 6$ прави възможно намирането на оптималното решение, което съответствува на изменени условия, както и анализирането на чувствителността на началното решение. Нека допустимата стойност на W (товароподемността) е намалена от 6 на 4. Тогава на $y_1 = 4$ съответствува $l^*_1 = 1$, откъдето $y_2 = 4 - 1.3 = 1$. Тази стойност и съответното $l^*_2 = 0$ определят $y_3 = 1 — 0.2 = 1$ и $l^*_3 = 1$. Оптималното решение е $(l^*_1, l^*_2, l^*_3) = (1, 0, 1)$, а максималната полезност е 165.

Пример 8.2. Задача за надеждността. Една електронна система се състои от три компонента. Системата работи, когато работят и трите компонента. Надеждността и може да се повиши чрез резервиране, т.е. чрез свързване на един или два компонента от съответния тип паралелно с който и да е от трите компонента. Данни за надеждността на компонентите, измервана с вероятността $P_i(l_i)$ за нормална работа, и за тяхната цена $c_i(l_i)$, в зависимост от броя l_i, на паралелно съединените единици са дадени в табл.8.2. Разходите за системата не бива да надхвърлят 150 хил.лв. Необходимо е да се определи броят l_i на паралелно съединените компоненти от j-тия тип, $j = 1, 3$, при който надеждността е максимална, а цената и не надхвърля допустимата стойност.

Таблица 8.2.

l_j	Компонент 1		Компонент 2		Компонент 3	
	P_1	c_1	P_2	c_2	P_3	c_3
1	0,70	40	0,60	20	0,55	30
2	0,80	60	0,80	30	0,75	50
3	0,90	70	0,95	40	0,90	60

При система от N елементи, конто работят едновременно и всеки от които е паралелно съединение на l_i компонента, общата вероятност за нормална работа на системата с $P = \prod_{i=1}^{N} P_i(l_i)$. Задачата е да се максимизира P

$$\max_{l_i} P = \prod_{i=1}^{N} P_i(l_i)$$

при ограниченията

$$\sum_{i=1}^{N} c_i(l_i) \le C, \quad l_i \ge 0, \text{ цяло}, \ i = \overline{1, N},$$

където C е максимална допустима цена на системата.

Тук целевата функция е *мултипликативна* и рекурентното съотношение на ДП се получава на основата на *мултипликатина декомпозиция.*

Елементите на модела са следните:

— *етап j* - съответствува на j-тия компонент, $j = 1, N$;

— *състояние* y_i, на етапа j - изразява сумарната цена на компонен-тите $j, j + 1, \dots, N$;

— *варианти на решението lj* - определят се от броя на паралелно съединените еднотипни компоненти $j, j = 1, N$;

— *целева функция* на j-тия етап - представлява общата вероятност за нормална съвместна работа на компонентите $j, j + 1, \dots, N$. Стойностите на тази функция зависят от y_i и от l_i.

Нека $f_i(y_i)$ е максималната стойност на целевата функция при за-дадена цена y_i. Тя се определя от обратното рекурентно съотношение, което е от вида

$$f_N(y_N) = \max_{\substack{l_N \\ c_N(l_N) \le y_N}} \{P_N(l_N)\},$$

$$f_j(y_j) = \max_{\substack{l_j \\ c_j(l_j) \le y_j}} \{P_j(l_j).f_{j+1}(y_j - c_j(l_j))\}, \ y = \overline{1, N-1}.$$

Обемът на изчисленията на всеки етап j зависи от броя на стой-ностите на състоянието y_i. Поради това представлява интерес предва-рителното отстраняване на стойности на y_j, конто нямат смисъл. За обсъжданата задача $y_N > c_N(1)$, тъй като трябва да има поне един компонент N и $y_N \le C - \sum^{N-1} c_i(1)$, защото трябва да има поне по един от всички останали компонента. Подобно, $y_{N-1} \ge c_N(l) + c_{N-1}(1)$, защото трябва да има поне по един от компонентите N и $N - 1$, $y_{N-1} \le C - \sum_{k=1}^{N-2} c_k(1)$, за да има поне по един от компонентите j, $j = 1, N - 2$. В об-щия случай $y_{N-i} \ge \sum^{i} c_{N-k}(1)$ и $y_{N-i} \le C - \sum^{N-i-1} c_k(1),\ i = \overline{0,\ N-2}$ а стойностите на състоянието y_1 са от интервала Като се използват данните от табл.8.2, за разглеждания пример се определят:

$c_3(1) = \underline{30} \le y_3 \le C - (c_1(1) + c_2(1)) = 150 - (40 + 20) = 90$, $c_3(1) + c_2(1) = 30 + 20 = \underline{50} \le y_2 < C - c_1(1) = 150 - 40 = 110$, $c_3(1) + c_2(1) + c_l(l) = 30 + 20 + 40 = 90 \le y_1 \le 150$.

Резултатите за отделните етапи са следните: *Етап 3.*

$$f_3(y_3) = \max_{\substack{l_3=1,2,3 \\ y_{3\,\min} \le C_3(l_3) \le y_3}} \{P_3(l_3)\}.$$

	$P_3(l_3)$			Оптимални решения	
y_3	$l_3 = 1$	$l_3 = 2$	$l_3 = 3$	$f_3(y_3)$	l^*_3
30	0,55	-	-	0,55	1
40	0,55	-	-	0,55	1
50	0,55	0,75	-	0,75	2
60	0,55	0,75	0,90	0,90	3
70	0,55	0,75	0,90	0,90	3
80	0,55	0,75	0,90	0,90	3
90	0,55	0,75	0,90	0,90	3

Етап 2.

$$f_2(y_2) = \max_{\substack{l_2=1,2,3 \\ y_{2\,\min} \le C_2(l_2) \le y_2}} \{P_2(l_2) f_3(y_2 - c_2(l_2))\}.$$

	$P_2(l_2)\, f_3(y_2 - c_2(l_2))$			Оптимални решения	
y_2	$l_2 = 1$	$l_2 = 2$	$l_2 = 3$	$f_2(l_2)$	l^*_2
50	0,60 x 0,55 = 0,33	-	-	0,33	1
60	0,60 x 0,55 =0,33	0,80 x0,55 = 0,44	-	0,44	2
70	0,60 x 0,75 = 0,45	0,80 x 0,55 = 0,44	0,95 x 0,55 = 0,522	0,522	3
80	0,60 x 0,90 = 0,54	0,80 x 0,75 = 0,60	0,95 x 0,55 = 0,522	0,60	2
90	0,60 x 0,90 = 0,54	0,80 x 0,90 = 0, 72	0,95 x 0,75 = 0,712	0,72	2
100	0,60 x 0,90 = 0,54	0,80 x 0,90 = 0,72	0,95 x 0,90 = 0,855	0,855	3
110	0,60 x 0,90 = 0,54	0,80 x 0,90 = 0,72	0,95 x 0,90 = 0,855	0,855	3

Етап 1.

$$f_1(y_1) = \max_{\substack{l_1=1,2,3 \\ y_{1\,\min} \le C_1(l_1) \le y_1}} \{P_1(l_1) f_2(y_1 - c_1(l_1))\}.$$

	$P_1(l_1)\, f_2(y_1 - c_1(l_1))$			Оптимални решения	
y_1	$l_1 = 1$	$l_1 = 2$	$l_1 = 3$	$f_1(y_1)$	l^*_1
90	0,70 x 0,33 = 0,231	-	-	0,231	
100	0,70 x 0,44 = 0,308	-	-	0,308	
110	0,70 x 0,522 = 0,365	0,80 x 0,33 = 0,264	-	0,365	
120	0,70 x 0,60 = 0,42	0,80 x 0,44 =0,352	0,90 x 0,33 = 0,297	0,42	
130	0,70 x 0,72 = 0,504	0,80 x 0,522 = 0,418	0,90 x 0,44 = 0,396	0,504	
140	0,70 x 0,855 = 0,598	0,80 x 0,60 = 0,48	0,90 x 0,522 = 0,47	0,598	
150	0,70 x 0,855 = 0,598	0,80 x 0,72 = 0,576	0,90 x 0,60 = 0,54	0,598	

При зададено $C = 150$ хил.лв. оптималното решение е $(l^*_1, l^*_2, l^*_3) = (1, 3, 3)$, при което $P_{max} = f_1(150) = 0{,}598$, а цената е 140 хил.лв.

Пример 8.3. Задача за планиране на работната сила. Една фирма планира броя на работниците за следващите N периода (месец, седмица). За всеки период г са известии потребностите от работна сила l_i, $i = 1, N$. Числеността се регулира чрез наемане и уволняване на рабо-тници. И при наемането, и при освобождаването фирмата прави разходи. Други загуби са свързани с отклонението на броя на работниците от необходимия - фирмата заплаща престоя на работниците, конто са Наети, но не работят или е принудена да прави допълнителни разходи за извънреден труд или за външни изпълнители, когато работниците Не достигат.

Нека y_j е броят на наличните работници през j-тия период. Загу-бите, предизвикани от промяната в броя на работещите при преминава-Не от $(j - 1)$-тия към j-тия период, се описват с функцията $P_j(y_j - y_{j-1})$, като те са различии при назначаване и уволняване,

$(y_j - y_{j-1})$, за $y_j > y_{j-1}$ и $\varphi_j(y_j - y_{j-1}) = \varphi''_j(y_j - y_{j-1})$, за $y_j < y_{j-1}$

Очевидно, $\varphi_j(0) \equiv 0$. Подобно, $\psi_j(y_j - l_j)$ са загубите, предизвикани от отклонението на y_j от l_j, като $\psi_j(y_j - l_j) - \psi'_j(y_j - l_j)$, за $y_j > l_j$; и $\psi_j(y_j - l_j) = \psi''_j(y_j - l_j)$, при $y_j < l_j$, а $\psi_j(0) = 0$. Необходимо е да се определи оптимален план за числеността на работещите през след. ващите N периода, при който сумарните разходи са минимални, ако е известен началният брой y_0 на работещите към началото на първия период.

Тази задача се различава от разгледаните досега по това, че в нея не се разпределя ограничен ресурс между конкуриращи се потребители. Поради това състоянието на всеки етап *j* би трябвало да представля-ва достатъчната информация за определяне на допустими оптимални решения, без проверяване на решенията от предишните етапи. Елемен-тите на модела на ДП са следните:

— *етап j* - съответствува на j-тия период, $j = \overline{1, N}$;

— *състояние* y_{j-1} *на етапа j* - представлява броя y_{j-1} на работещите в края на етапа $j - 1$, $j = \overline{1, N}$. Именно това е достатъчната информация за избор на решение на етапа j;

— *варианти на решението* y_j - определят се от стойностите на променливата уу, т.е. от броя на работещите през етапа j;

— *целева функция на j-тия етап* - представлява сумарните разходи през етапите $j, j + 1, ..., N$. Нейните стойности зависят от състоянието y_{j-1} и вариантите y_j.

Нека $f_j(y_{j-1})$ е минималната стойност на целевата функция при зададено състояние y_{j-1}. Тази стойност се определя от обратното ре-курентно съотношение, което има вида

$$f_N(y_{N-1}) = \min_{y_N} \{\varphi_N(y_N - y_{N-1}) + \psi_N(y_N - l_N)\}$$

$$f_j(y_{j-1}) = \min_{y_j} \{\varphi_j(y_j - y_{j-1}) + \psi_j(y_j - l_j) + f_{j+1}(y_j)\}, \ j = \overline{1, N-1}.$$

При разглежданата по-обща постановка на задачата означената минимизация по y_j се извършва за целочислените стойности от интервала $0 \le y_j \le l^*$, където $l^* = \max\{l_i\}$. Твърде често функциите φ_j и w_j са изпъкнали функциите на y_j. (Понятието изпъкналост се разглежда в т.9.2.2). Следователно изразът {} е изпъкнала функция на y_j. Това позволява да се разглеждат не $l^* + 1$, а по-малък брой варианти $\kappa^* + 1$, задавани от стойностите $y_j = 0, 1, ..., \kappa^*, \kappa^* + 1$, където $y_j = \kappa^*$ е стойността, за която се минимизира функцията в {}.

При изчисленията по-нататък се правят някои предположения, с което се намалява броят на вариантите. Предполага се, че l_j, $j = \overline{1, N}$ са *минималните* потребности от работна сила, т.е. допустими (в рекурен-тното съотношение) са вариантите $y_j \ge l_j$, както и че уволнението не е свързано с разходи, т.е. $\varphi''_j(y_j - y_{j-1}) \equiv 0$. Условието за допустимост прави излишка функцията $\psi''_j(y_j - l_j)$

Нека броят на етапите ё $N = 5$, а минималните потребности l_j са 6 8, 9, 5 и 7, съответно за г = 1, 2, 3, 4 и 5. Състоянието y_0 към нача-лото на първия етап е $y_0 = 6$. Разходите за j-тия период се описват от следните функции:

$$\psi_j(y_j - l_j) = 4(y_j - l_j), \ j = \overline{1, 5}, \ y_j \ge l_j,$$

$$\varphi_j(y_j - y_{j-1}) = \begin{cases} 5 + 3(y_j - y_{j-1}), & y_j > y_{j-1}, \\ 0, & y_j \le y_{j-1}. \end{cases}$$

Необходимо е да се определят границите на променливите y_i, $i = 1, 5$. Тъй като не е зададен желан брой на работниците след последния етап и уволнението не е свързано с разходи, избира се $y_5 = l_5 = 7$. Поради това, че $l_4 = 5$ е по-малко от $l_5 = 7$, стойностите $y_4 = 5$, 6 или 7 са вариантите за предпоследния етап, сред конто се търси оптималният вариант. По подобен начин се достига до следните стойности: $y_3 = 9$, $y_2 = 8$ или 9, $y_1 = 6$, 7, 8 или 9.

Резултатите за отделните етапи са следните: *Етап 5*

$$f_5(y_4) = \min_{y_5 = l_5 = 7} \{\varphi_5(y_5 - y_4) + \psi_5(y_5 - l_5)\}.$$

	$\varphi_5(y_5 - y_4) + \psi_5(y_5 - 7)$	Оптимални решения	
y_4	$y_5 = 7$	$f_5(y_4)$	y_5^*
5	$5 + 3 \times 2 + 4 \times 0 = 11$	11	7
6	$5 + 3 \times 1 + 4 \times 0 = 8$	8	7
7	$0 + 4 \times 0 = 0$	0	7

Етап 4

$$f_4(y_3) = \min_{y_4 \ge l_4 = 5} \{\varphi_4(y_4 - y_3) + \psi_4(y_4 - l_4) + f_5(y_4)\}.$$

	$\varphi_4(y_4 - y_3) + \psi_4(y_4 - 5) + f_5(y_4)$			Оптимални решения	
y_3	$y_4 = 5$	$y_4 = 6$	$y_4 = 7$	$f_4(y_3)$	y_4^*
9	$0 + 0 + 11 = 11$	$0 + 4 \times 1 + 8 = 12$	$0 + 4 \times 2 + 0 = 8$	8	7

$$f_3(y_2) = \min_{y_3 = l_3 = 9} \{\varphi_3(y_3 - y_2) + \psi_3(y_3 - l_3) + f_4(y_3)\}.$$

	$\varphi_3(y_3 - y_2) + \psi_3(y_3 - 9) + f_4(y_3)$	Оптимални решения	
y_2	$y_3 = 9$	$f_3\ (y_2)$	y_3^*
8	$5 + 3 \times 1 + 4 \times 0 + 8 = 16$	16	9
9	$0 + 0 + 8 = 8$	8	9

Етап 2

$$f_2(y_1) = \min_{y_2 \geq l_2 = 8} \{\varphi_2(y_2 - y_1) + \psi_2(y_2 - l_2) + f_3(y_2)\}.$$

	$\varphi_2(y_2 - y_1) + \psi_2(y_2 - 8) + f_3(y_2)$		Оптимални решения	
y_1	$y_2 = 8$	$y_2 = 9$	$f_2\ (y_1)$	y_2^*
6	$5 + 3 \times 2 + 4 \times 0 + 16 = 27$	$5 + 3 \times 3 + 4 \times 1 + 8 = 26$	26	9
7	$5 + 3 \times 1 + 4 \times 0 + 16 = 24$	$5 + 3 \times 2 + 4 \times 1 + 8 = 23$	23	9
8	$0 + 0 + 16 = 16$	$5 + 3 \times 1 + 4 \times 1 + 8 = 20$	16	8
9	$0 + 0 + 16 = 16$	$0 + 4 \times 1 + 8 = 12$	12	9

Етап 1

$$f_1(y_0) = \min_{y_1 \geq l_1 = 6} \{\varphi_1(y_1 - y_0) + \psi_1(y_1 - l_1) + f_2(y_1)\}.$$

	$\varphi_1(y_1 - y_0) + \psi_1(y_1 - l_1) + f_2(y_1)$				Оптимални решения	
y_0	$y_1 = 6$	$y_1 = 7$	$y_1 = 8$	$y_1 = 9$	$f_1\ (y_0)$	y_1^*
6	$0+0+26==26$	$5+3\times1+4\times1++23=35$	$5+3\times2+4\times2++16=35$	$5+3\times3+4\times3++12=38$	26	6

Оптималното решение е следното

$y_0 = 6$ --> $y^*_1 = 6$ --> $y_2^* = 9$ --> $y^*_3 = 9$ --> $y^*_4 = 7$ --> $y^*_5 = 7$.

Като се съпоставят тези стойности с минималните потребности l_i, $i = 1, 5$, се определя броят на работниците, конто трябва да бъдат назначени или освободени в началото на всеки период.

Пример 8.4. Задача за планиране на работна сила II. Разглежда се задачата от примера 8.3, като се предполага, че е възможно наемане на работници за непълен работен ден и че уволнението също е свързано с разходи. Поради това състоянието и броят на работниците на всеки етап j се описват с *непрекъснати* променливи y_{i-1}, y_i, а загубите от промяната в броя на работещите при преминаване от $(j - 1)$-тия към **j-тия етап се описват** с функцията $\varphi_j\ (y_i - y_{i-1}) = 3\ (y_i - y_{i-1})^2$. В този случай **допустимите варианти се задават от условията $l_i < y_i < l^*$,** *к*ъдето l^* са **максималните потребности, $l^* = 9$.**

Резултатите за отделните етапи са следните:

Етап **5**

$$f_5(y_4) = \min_{7 \leq y_5 \leq 9} \{3(y_5 - y_4)^2 + 4(y_5 - 7)\}.$$

Да означим минимизираната функция с $H_5\ (y_5, y_4)$- Условието за екстремум е

$$\frac{\partial H_5}{\partial y_5}(y_5, y_4) = 6(y_5 - y_4) + 4 = 6y_5 - 6y_4 + 4 = 0.$$

Оттук

$$y_5^* = \frac{3y_4 - 2}{3}.$$

Тъй като $\frac{\partial^2 H_5}{\partial y_5^2}$ $(y_5, y_4) = 6 > 0$, стойността y^*_5 минимизира $H_5\ (y_5, y_4)$, ако $y_4 \geq 23/3$. Ако $y_4 < 23/3$, y_5 е недопустимо (получава се $y_5 < 7$). В тези случаи

$$\frac{\partial H_5}{\partial y_5}(y_5, y_4) > 0, \quad \text{при} \quad 7 \leq y_5 \leq 9,$$

поради което стойността на y_5, която минимизира H_5, е $y^*_5 = 7$. Така определените две стойности y^*_5 се заместват последователно в H_5 и се определят минималните стойности $f_5\ (y_4)$, съответно за $y_4 < 23/3$ и $y_4 \geq 23/3$.

Получават се следните резултати:

y_4	Оптимални решения	
	$f_5\ (y_4)$	y^*_5
$5 \leq y_4 \leq 23/3$	$3(7 - y_4)^2$	7
$23/3 \leq y_4 \leq 9$	$4(3y_4 - 22)/3$	$(3y_4 - 2)/3$

Етап 4

$$f_4(y_3) = \min_{5 \leq y_4 \leq 9} \{3(y_4 - y_3)^2 + 4(y_4 - 5) + f_5(y_4)\}.$$

Известно е, че $y_3 = 9$, откъдето минимизираната функция е

$$H_4(y_4, y_3) = \begin{cases} 3(y_4 - 9)^2 + 4(y_4 - 5) + 3(7 - y_4)^2, & 5 \leq y_4 \leq 23/3, \\ 3(y_4 - 9)^2 + 4(y_4 - 5) + 4(3y_4 - 22)/3, & 23/3 \leq y_4 \leq 9. \end{cases}$$

За случая, когато $5 \leq y_4 < 23/3$

$$\frac{\partial H_4}{\partial y_4} = 6(y_4 - 9) + 4 - 6(7 - y_4) = 12y_4 - 92 = 0,$$

откъдето $y^*_4 = 23/3$. Тъй като $\partial^2 H_4/\partial y_4^2 > 0$, y^*_4 минимизира H_4 и след заместване минималната стойност е H^*_4 — 52/3. Когато $23/3 \leq y_4 \leq 9$

$$\frac{\partial H_4}{\partial y_4} = 6(y_4 - 9) + 4 + 4 = 6y_4 - 46 = 0.$$

Оттук $y_4 = 23/3$. След заместване минималната стойност е H_4 — 52/3. Вижда се, че стойността $y_4 = 23/3$ минимизира функцията H_4 (y_4, y_3) върху целия обхват на $y_4, 5 \leq y_4 \leq 9$, което е представено в следната таблица

y_3	Оптимални решения	
	f_4 (y_3)	y^*_4
9	52/3	23/3

Етап 3

$$f_3(y_2) = \min_{y_3=9} \{3(y_3 - y_2)^2 + 4(y_3 - 9) + f_4(y_3)\}$$

$$H_3(y_3, y_2) = 3(9 - y_2)^2 + 52/3.$$

Оптималните решения са следните

y_2	**Оптимални решения**	
	f_3 (y_2)	y^*_3
$8 \leq y_2 \leq 9$	**$3(9-y_2)^2$** $+52/3$	**9**

Етап 2

$$f_2(y_1) = \min_{8 \leq y_2 \leq 9} \{3(y_2 - y_1)^2 + 4(y_2 - 8) + f_3(y_2)\}$$

$$H_2(y_2, y_1) = 3(y_2 - y_1)^2 + 4(y_2 - 8) + 3(9 - y_2)^2 + 52/3$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial y_2} = 6(y_2 - y_1) + 4 - 6(9 - y_2) = 12y_2 - 6y_1 - 50 = 0,$$

откъдето $y^*_2 = (3y_1 + 25)/6$. Тъй като $\partial^2 H_2/\partial y^2_2 > 0$, стойността y^*_2 минимизира H_2 (y_2, y_1), ако $y_1 \geq 23/3$. Ако $y_1 < 23/3$, производната $\partial H_2/\partial y_2 > 0$ при $8 \leq y_2 \leq 9$, и стойността на y_2, която минимизира H_2 (y_2, y_1), е $y^*_2 = 8$. Двете стойкости y^*_2 се заместват последователно в H_2 (y_2, y_1) и се определят минималните стойности f_2 (y_1), съответно за $y_1 < 23/3$ и $y_1 \geq 23/3$.

Оптималните решения са следните:

y_1	**Оптимални решения**	
	f_2 (y_1)	y^*_2
$6 \leq y_1 \leq 23/3$ 23/3 $\leq y_1 \leq 9$	$3(8 - y_1)^2$ **+ 61/3** $(9y^2_1 - 150y_1 + 641)/16$	**8 $(3y_1+25)/6$**

Етап 1

$$f_1(y_0) = \min_{6 \leq y_1 \leq 8} \{3(y_1 - y_0)^2 + 4(y_1 - 6) + f_2(y_1)\}, \ y_0 = 6$$

Ако се изпълнява условието $6 \leq y_1 < 23/3$

$$H_1(y_1, y_0) = 3(y_1 - 6)^2 + 4(y_1 - 6) + 3(8 - y_1)^2 + 61/3$$

$$\frac{\partial H_1(y_1, y_0)}{\partial y_1} = 6(y_1 - 6) + 4 - 6(8 - y_1) = 12y_1 - 80 = 0.$$

Оттук, $y^*_1 = 20/3$ и f_1 $(y_0) = H^*_1 = 89/3$. **Ако** $y_1 \geq 23/3$

$$H_1(y_1, y_0) = 3(y_1 - 6)^2 + 4(y_1 - 6) + (9y_1^2 - \mathbf{150}y_1 + \mathbf{641)/6}$$

$$\frac{\partial H_1(y_1, y_0)}{\partial y_1} = 6(y_1 - 6) + 4 + 3y_1 - 25 = 9y_1 - 57.$$

Оттук $y^*_1 = 19/3$ и f_1 $(y_0) = H^*_1 = 31/3$.

Оптималните резултати са

	H_1 (y_1, y_0)		**Оптимални решения**	
y_0	**$6 \leq y_1 < 23/3$**	**$23/3 \leq y_1 \leq 9$**	f_1 **(y_0)**	y^*_1
6	**89/3**	**31/3**	**31/3**	**19/3**

Оптималното решение на задачата е следното:

$$y_0 = 6 \dashrightarrow y^*_1 = 6^{1/3} \dashrightarrow y^*_2 = 8 \dashrightarrow y^*_3 = 9 \dashrightarrow y^*_4 = 7^2/^3 \dashrightarrow y^*_5 = 7,$$

с минимални разходи за всички етапи $10^{1/3}$.

От разгледания пример се вижда, че в общата изчислителна схема на ДП може да се използват различии начини за решаване на оптимизационните задачи на всеки етап. В случая беше използвано познатото Необходимо условие за наличие на екстремум на функцията *f(x)* от вида *df(x)/dx* = 0, когато стационарната точка принадлежи на допустимата област.   Главното при ДП е декомпозирането на началната задача на по-малки подзадачи, при което изчисленията се опростяват.

8.5. ПРОБЛЕМЪТ ЗА РАЗМЕРНОСТТА

Досега състоянието на системата се описваше с една променлива В по-сложни задачи състоянието се определи от няколко променливи конто образуват *вектор на състоянието.* Това води до увеличаване на броя на вариантите, свързан с всеки етап, което може да доведе до зна-чително нарастване на времето за решение и обема на необходимата па-мет на ЕИМ. Възниква *проблемът за размерността,* наречен от Белман "проклятието на размерността".

Пример 8.5. Два вида ресурси - парични и трудови, в обеми съ-ответно M лева и L човекомесеца, се влагат за развитието на N вида дейности. Очакваната годишна печалба от j-та дейност е P_i (m_i, l_i). където m_i и l_i са финансовите и трудовите ресурси, вложени в тази дейност. За всяка дейност е необходимо да се определят стойностите на l_i и m_i, така че сумарната печалба да е максимална и да се удовлетво-ряват общите ресурсни ограничения.

В случая етапът j съответствува на j-та дейност. Състоянието на етапът j е двумерен вектор (Му, *Lj),* където M_i и L_i са ресурсите, раз-пределени (дадени за използуване) на етапите j, $j + 1$, ... TV. Целевата функция на j-тия етап е сумарната печалба от етапите j, $j + 1$, ..., N. Максималната стойност f_i (M_i, L_i) на тази целева функция при зада-дени M_i и L_i се определя от обратното рекурентно съотношение на ДП, което е от вида

$$f_N(M_N, L_N) = \max_{\substack{0 \le m_N \le M_N \\ 0 \le l_N \le L_N}} \{P_N(m_N, l_N)\},$$

$$f_j(M_j, L_j) = \max_{\substack{0 \le m_j \le M_j \\ 0 \le l_j \le L_j}} \{P_j(m_j, l_j) + f_{j+1}(M_j - m_j,\ L_j - l_j)\},$$

$$j = \overline{1,\ N-1},$$

където вариантите на решение се определят от допустимите двойки стойности (m_i, l_i).

В аналогичната задача с една променлива на състоянието, която има r целочислени стойности, броят на вариантите е също r и броят на клетките в таблиците на решенията е r^2. В разглежданата двумерна задача, ако всяка от двете променливи на състоянието заема r целочислени стойности, броят на състоянията и на вариантите е r^2, вследствие на което са необходими r^4 клетки в таблиците на решението. В общия случай, ако векторът на състоянието е n-мерен, необходимите места в таблиците са r^{2n}.

Изход от затрудненията, свързани с размерноетта, се търси в из-ползуването на специални процедури и приблизителни методи. Необходимо е да се отбележи, че паралелните компютърни архитектури създават възможности за удобно "разпаралелване" на алгоритъма на ДП, в резултат на което общото време за решение на задачи с голяма размерност и необходимата памет в един компютър многократно се на-маляват.

8.6. РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧИ НА ЛИНЕЙНОТО ПРОГРАМИРАНЕ

Линейната задача
Да се максимизира $J = C^T X$
при ограниченията

$$AX \le b, \quad X \ge 0,$$

където X и b са съответно n и то-мерен вектор и $a_{ij} \ge 0$, i = 1, m, j = 1, n, може да бъде решена по метода на ДП. Тази задача може да се интепретира като задача за разпределение на m ограничени ресурса между n дейности. На всяка дейност j се поставя в съответствие етап j. Стойностите на променливата $x_i \ge 0$ са вариантите на решението на етапа j. Вариантите са безкрайно много, понеже x_i е непрекъсната променлива. Тъй като има m вида на ресурси, състоянието на етапа j е то-мерен вектор $[B_{1i}, B_{2i}, \ldots B_{mi}]$, чиито компоненти описват ко-личествата на съответните ресурси, предназначени за използуване на етапите j, $j + 1$, ..., n. Целевата функция за j-тия етап е сумарна-та печалба от етапите j, $j + 1$, ..., n. Нейните стойности зависят от състоянието и от вариантите на решение.

Нека f_i $(B_{1i}, B_{2i}, \ldots, B_{mi})$ е максималната стойност на целевата функция при зададен вектор на състоянието $[B_{1i}, B_{2i}, \ldots, B_{mi}]$. Тя Може да бъде определена от обратното рекурентно съотношение на ДП, което е от вида

$$f_n(B_{1n}, B_{2n}, \ldots, B_{mn}) = \max_{\substack{0 \le a_{in} x_n \le B_{in} \\ i = \overline{1,\ m}}} \{c_n x_n\},$$

$$f_j(B_{1j}, B_{2j}, \ldots, B_{mj}) = \max_{\substack{0 \le a_{ij} x_j \le B_{ij} \\ i = \overline{1,\ m}}} \{c_j x_j +$$

$$+ f_{j+1}(B_{1j} - a_{1j} x_j, \ldots, B_{mj} - a_{mj} x_j)\},\ j = \overline{1,\ n-1},$$

където $0 \le B_{ij} \le b_i$, $i = 1, m, j = 1, n$.

Пример 8.6. Разглежда се линейната задача

Да се максимизира $J = 3x_1 + 8x_2$ при ограниченията

$$3x_1 + x_2 \le 540, \quad 3x_2 \le 570, \quad x_1\, x_2 \ge 0.$$

В задачата има две дейности и два ограничени ресурса. На тях в модела на ДП ще съответствуват два етапа и двумерен вектор на състоянието $[B_{1j}, B_{2j}]$, $j = 1, 2$.

За отделните етапи се получават следните резултати:

Етап 2.

$$f_2(B_{12},\ B_{22}) = \max_{\substack{0 \le x_2 \le B_{12} \\ 0 \le 3x_2 \le B_{22}}} \{8x_2\}.$$

Очевидно, x_2 трябва да удовлетворява условието $x_2 \le \min\{B_{12}, B_{22}/3\}$. Тъй като целевата функция f_2 е линейна от вида $f_2\ (x_2|B_{12},\ B_{22}) = 8x_2$, за максималната и стойност при зададени B_{12}, B_{22} се получава

$$f_2(B_{12}, B_{22}) = \max_{x_2} \{f(x_2|B_{12}, B_{22})\} = 8 \min\{B_{12}, B_{22}/3\},$$

а $x^*_2 = \min\{B_{12}, B_{22}/3\}$

Етап 1.

$$f_1(B_{11},\ B_{21}) = \max_{0 \le 3x_1 \le B_{11}} \{3x_1 + f_2(B_{11} - 3x_1, B_{21} - 0)\} =$$
$$= \max_{0 \le 3x_1 \le B_{11}} \{3x_1 + 8 \min\{B_{11} - 3x_1,\ B_{21}/3\}\}.$$

Тъй като $B_{11} = 540$ и $B_{21} = 570$ (вж. начина на определяне на състоянието), допустимите варианти x_1 удовлетворяват условието $x_1 \le B_{11}/3 = 180$. Целевата функция за етапа е

$$f_1(x_1|B_{11}, B_{21}) = f_1(x_1|540, 570) = 3x_1 + 8 \min\{540 - 3x_1, 570/3\} =$$
$$= 3x_1 + \begin{cases} 8 \times 190, & 0 \le x_1 \le 116^{2/3}, \\ 8(540 - 3x_1), & 116^{2/3} \le x_1 \le 180. \end{cases}$$

Вижда се, че върху допустимата област на x_1 целевата функция f_1 е описана с уравненията на две прави линии, чиито наклони са с различни знаци. Максималната ѝ стойност $f_1\ (B_{11}\ B_{21})$ очевидно принадлежи и на двете прави, и може да бъде определена от съотношението

$$f_1(B_{11}, B_{21}) = f_1(540, 570) = \max_{x_1} \{3x_1 + 1520, -21x_1 + 4320\} =$$
$$= 3x_1^* + 1520 = -21.x_1^* + 4320.$$

Оттук, $x^*_1 = 116^{2/3}$ и $f_1\ (B_{11}, B_{31}) = 1870$.

За да се намери оптималната стойност x^*_2, се определят

$$B_{12} = B_{11} - 3x^*_1 = 540 - 350 = 190,\ B_{22} = B_{21} - 0 = 570,$$

откъдето

$$x^*_2 = \min\{B_{12}, B_{22}/3\} = \min\{190, 190\} = 190.$$

И така, полученото оптимално решение е $x^*_1 = 116^{2/3}$, $x^*_2 = 190$, $J^* = 1870$.

По-горе беше предположено, че всички елементи a_{ij} на матрицата A са неотрицателни. Ако това условие не се изпълнява за някое a_{ij}, *дя*-сната част на съответното неравенство $\le$ няма да определя максималната стойност на променливата на състоянието и разгледаната схема ра решение не може да се приложи. ДП е общ метод за оптимизация и като всеки общ метод, то няма предимства пред специализираиите методи, предназначени за определени, по-тесни класове задачи, каквито са модификациите на симплекс-метода за решаване на линейни задачи.

8.7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

ДП е итерационен метод за решаване на нелинейни оптимизаци-онни задачи. Чрез правилен избор на елементите на модела сложната задача се декомпозира на по-прости, конто се решават почти независимо. Решенията, конто се определят на всеки етап, са оптимални и допустими. За тяхното получаване може да се използуват различии методи на оптимизация.

Когато етапите се характеризират с няколко променливи на състоянието, възниква проблемът за размерността. Създадените методи за намаляване на размерността и паралелни алгоритми увеличават възможностите за приложение на ДП при решаване на сложни задачи.