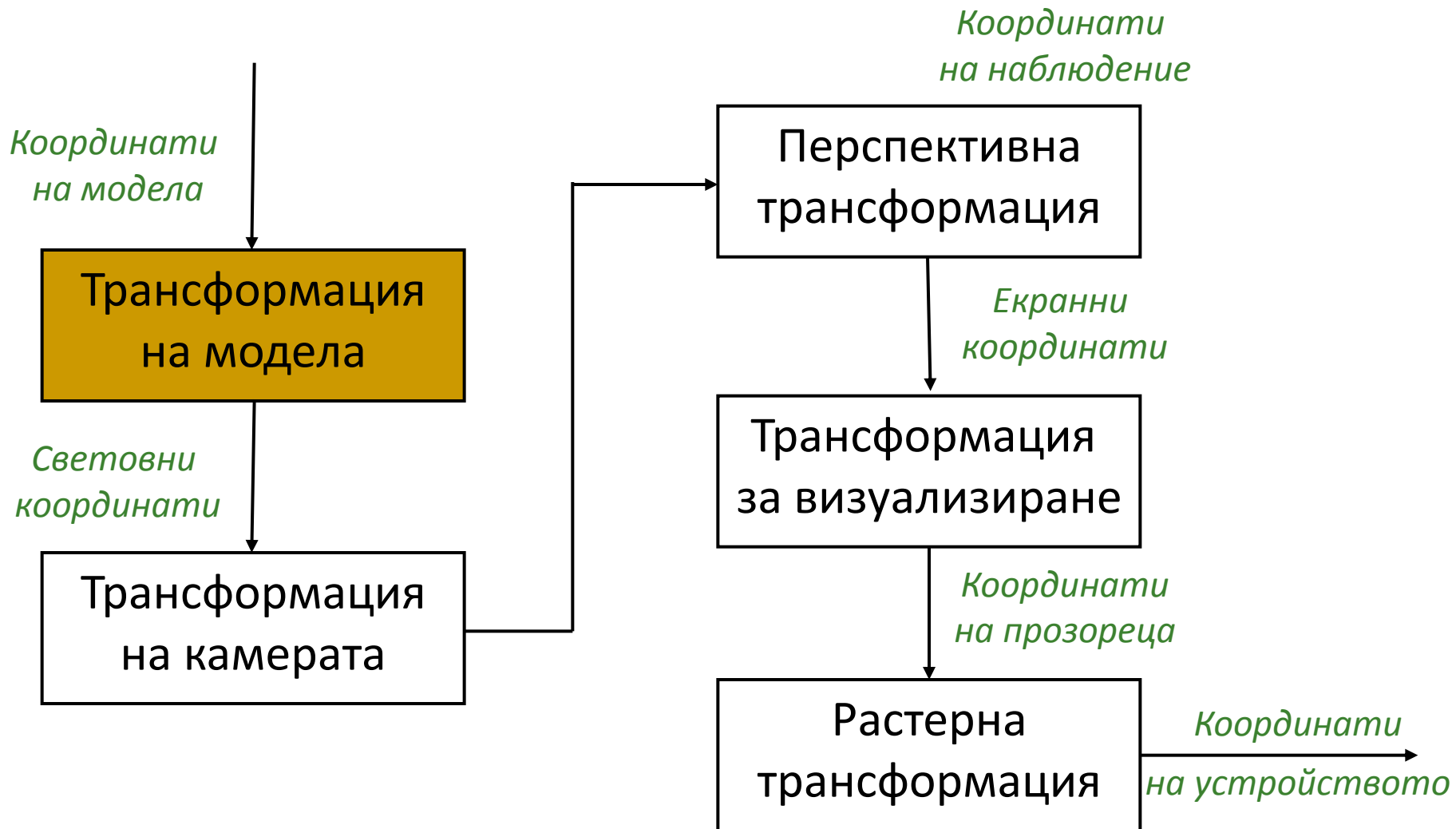


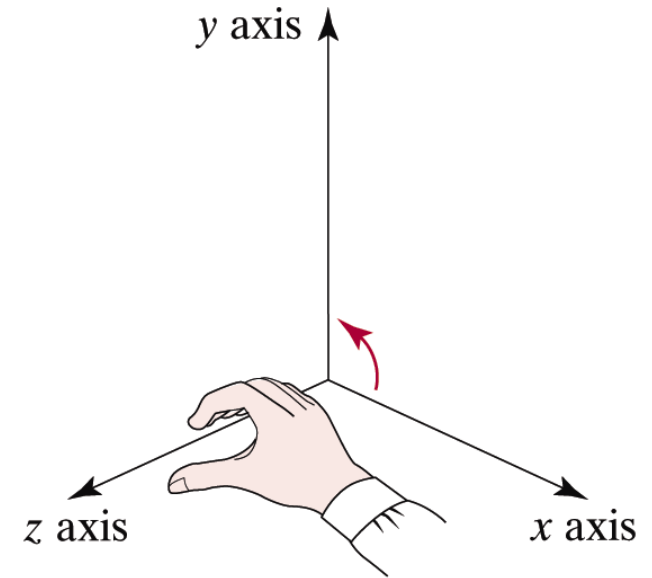
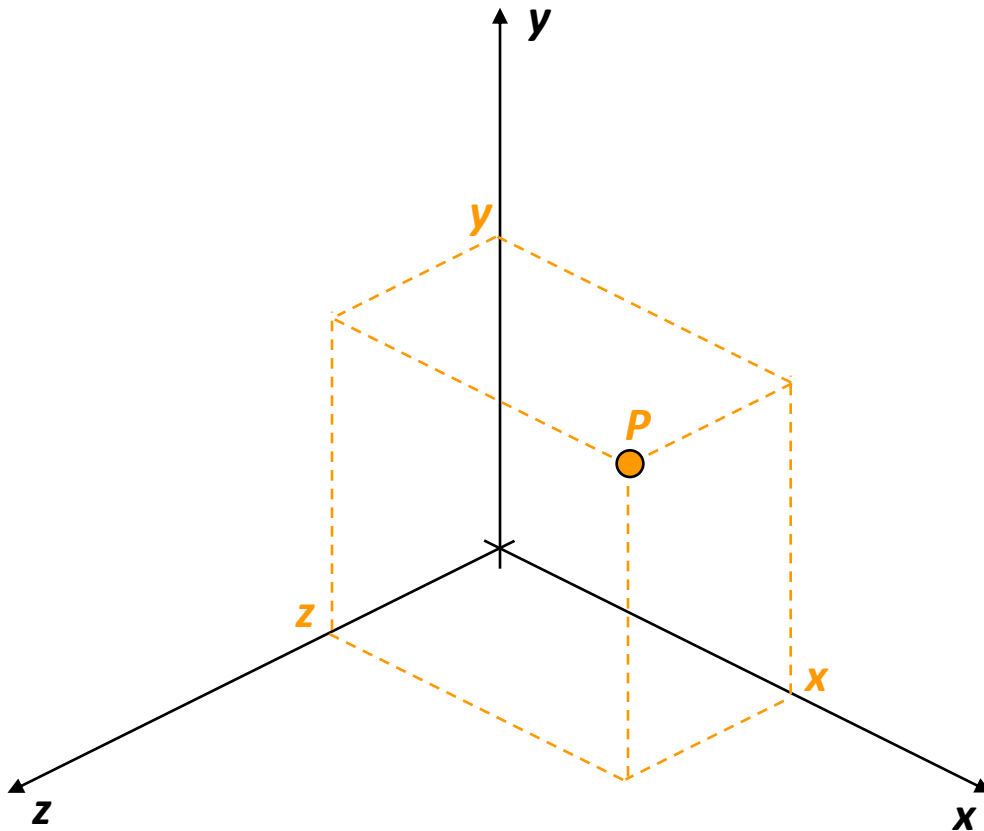
Компютърна графика

3D трансформации

Основен графичен конвейер



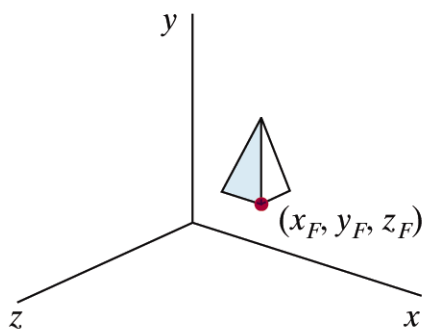
Координатна система – 3D



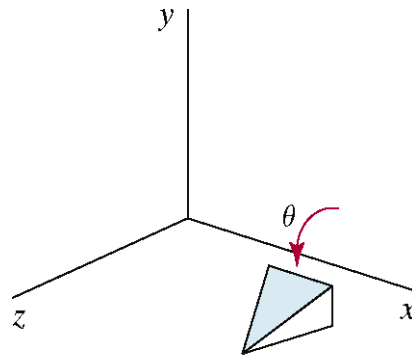
дясно ориентирана КС

3D трансформации

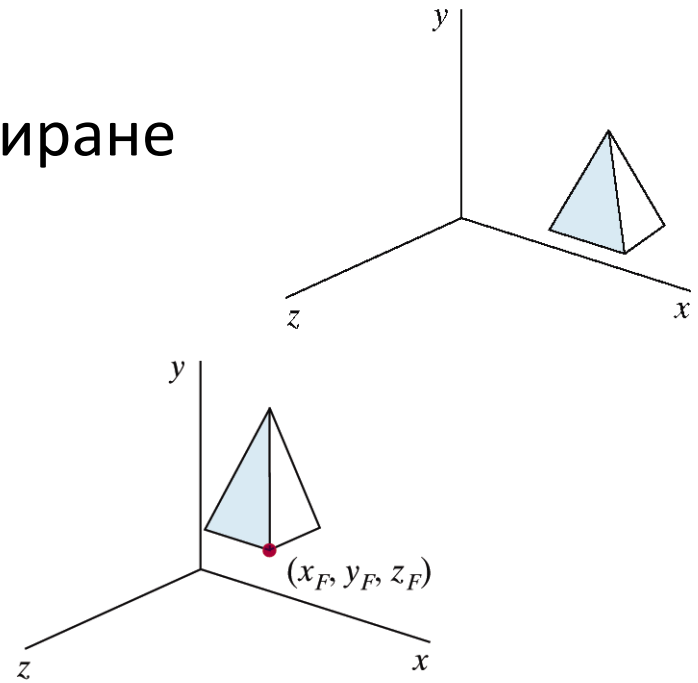
- Трансформациите в компютърната графика се използват за промяна на разположението и формата на обектите
 - преместване, ротация, мащабиране



транслация



ротация



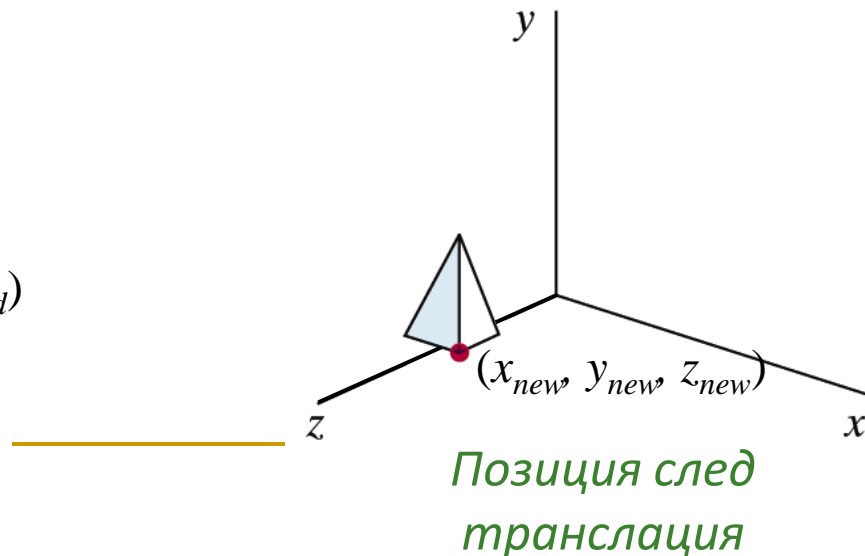
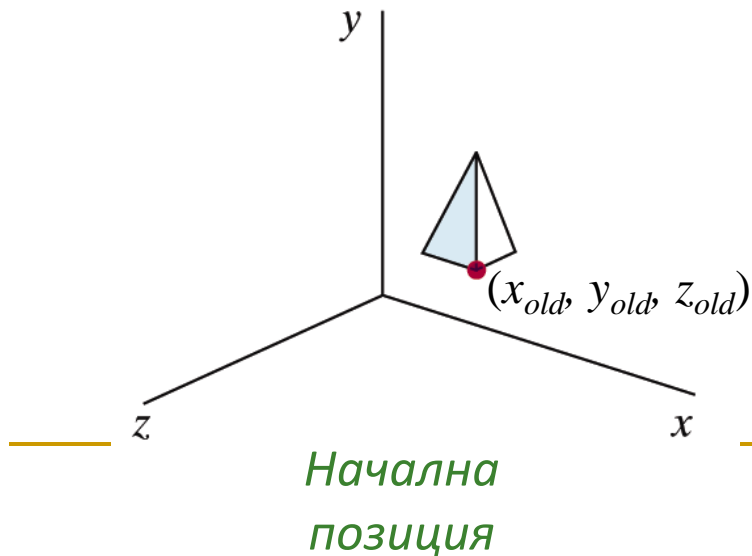
мащабиране

3D трансляция

- Преместване на обект от една позиция в друга

$$x_{new} = x_{old} + dx, y_{new} = y_{old} + dy, z_{new} = z_{old} + dz$$

където точка с координати $(x_{old}, y_{old}, z_{old})$ се премества в нова позиция с координати $(x_{new}, y_{new}, z_{new})$ с коефициенти на трансляция dx, dy, dz



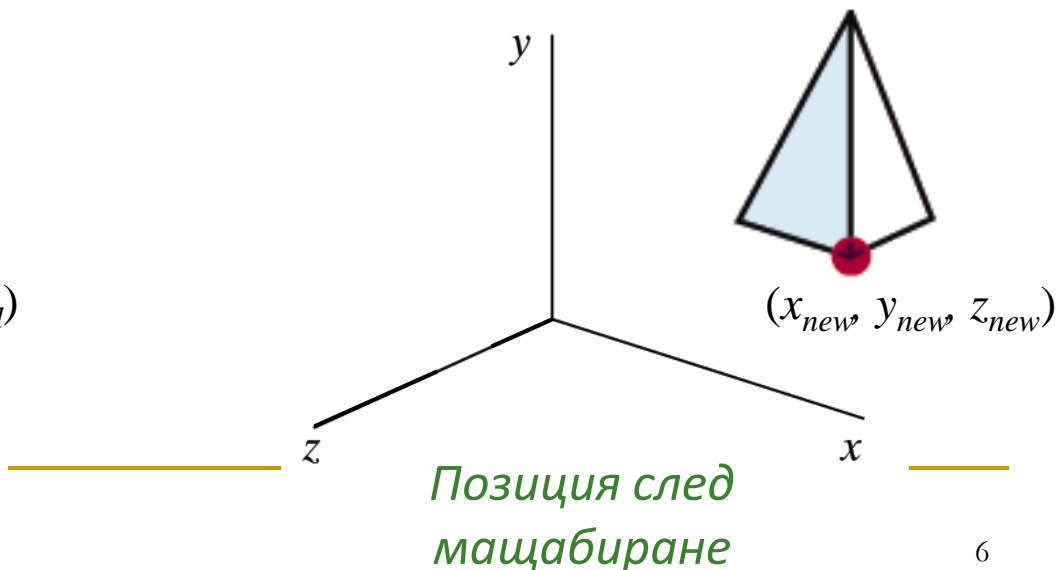
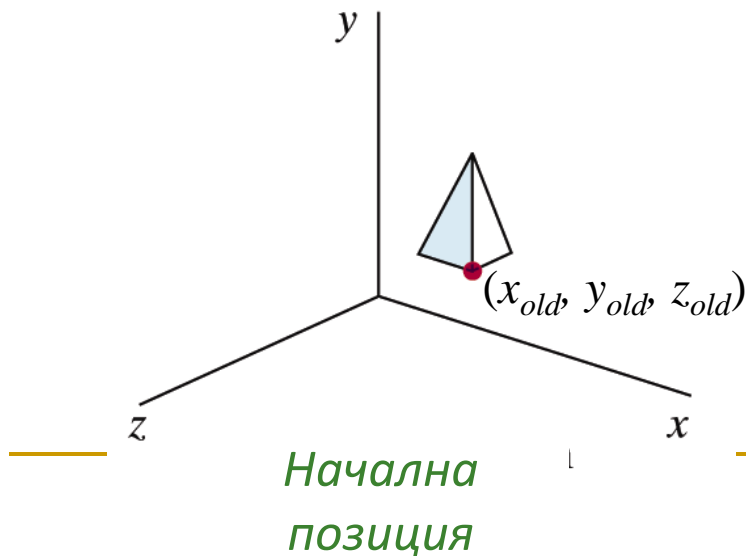
3D мащабиране

■ Промяна на размерите на обекта

- всички координати се умножават със скаларна стойност

$$x_{new} = S_x \cdot x_{old}, y_{new} = S_y \cdot y_{old}, z_{new} = S_z \cdot z_{old}$$

- коефициенти на мащабиране S_x, S_y, S_z
- **променя се не само размера, а и позицията на обекта**



3D ротация

- Завъртане на обекта

- в **2D**: ротацията е на определен ъгъл

спрямо началото на координатната система

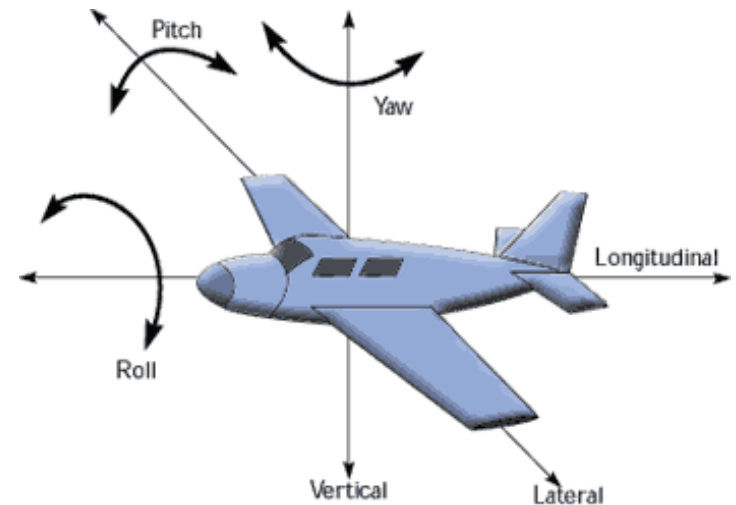
- около оста z

- в **3D**: има няколко варианта

- около оста x – *pitch*

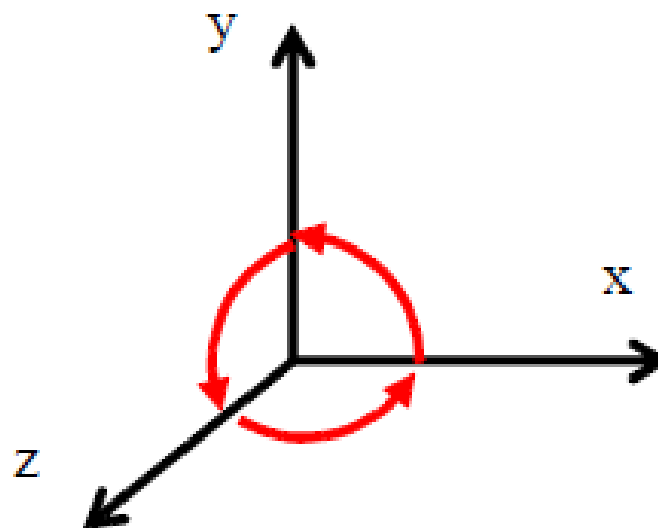
- около оста y – *yaw*

- около оста z – *roll*

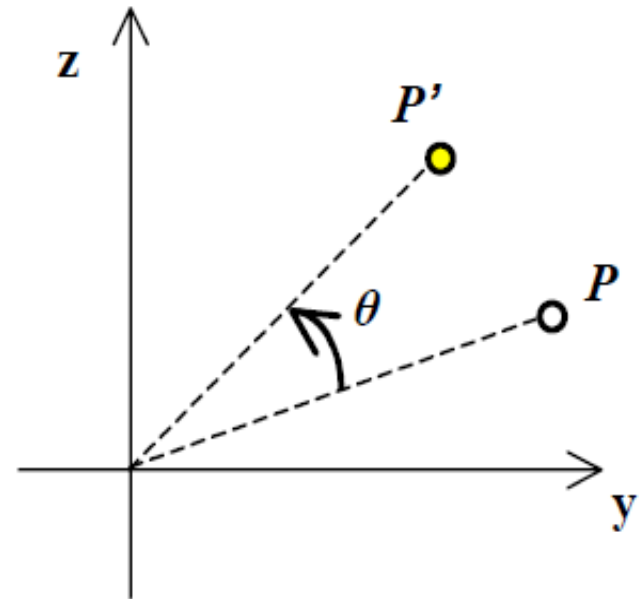
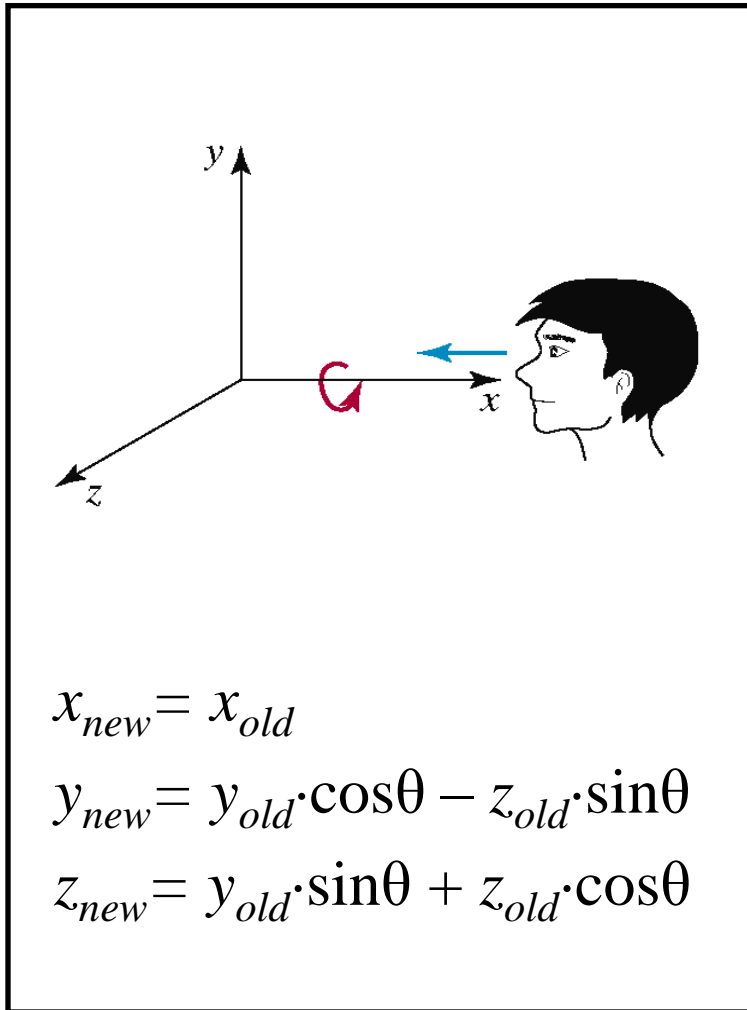


3D ротация

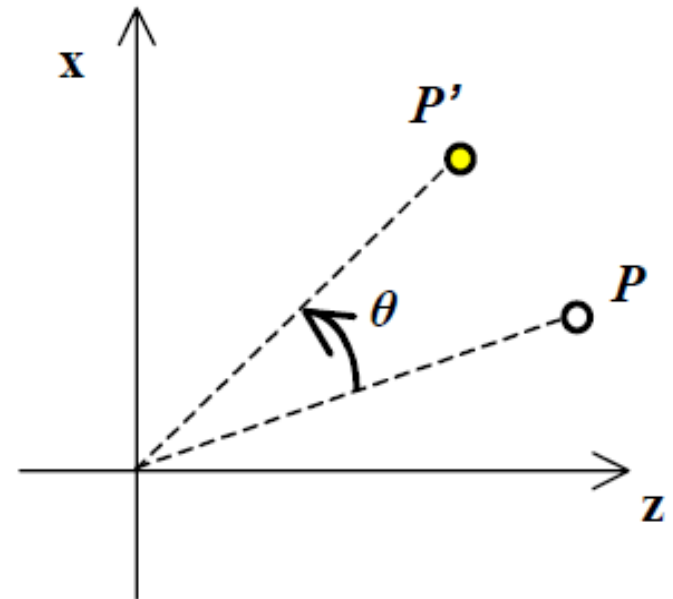
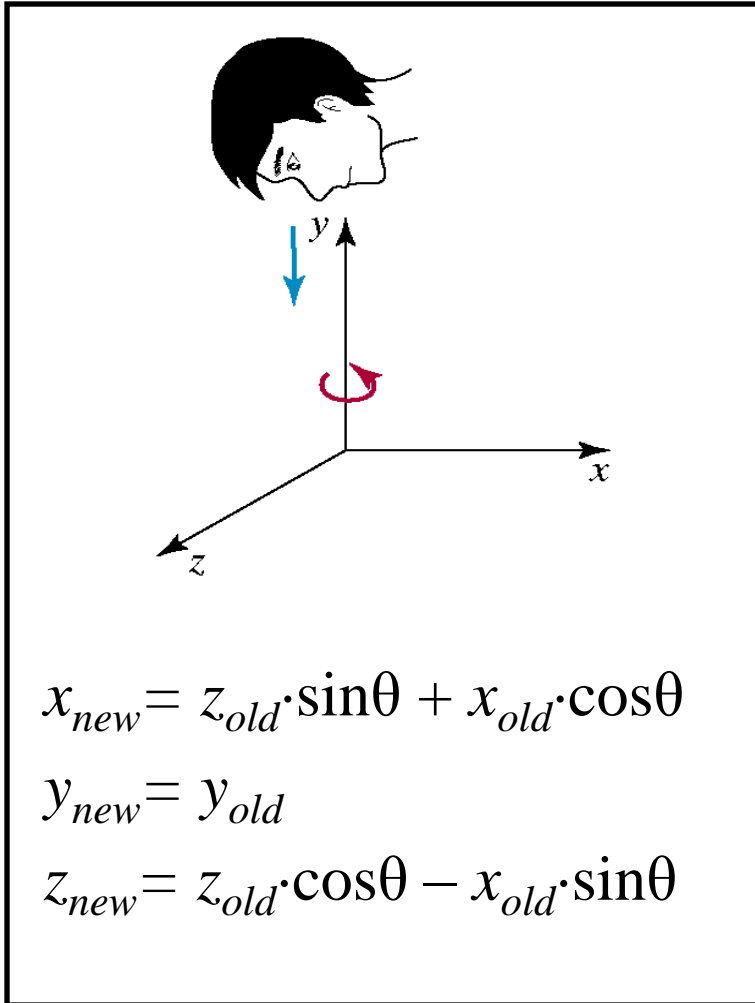
- Положителни посоки на въртене около координатните оси в тримерното пространство
 - **ОКОЛО ОС X**
 - ОТ Y КЪМ Z
 - **ОКОЛО ОС Y**
 - ОТ Z КЪМ X
 - **ОКОЛО ОС Z**
 - ОТ X КЪМ Y



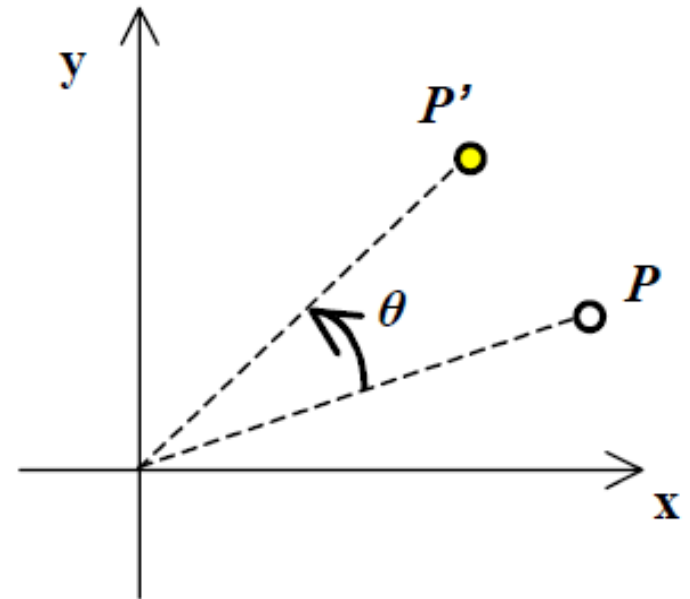
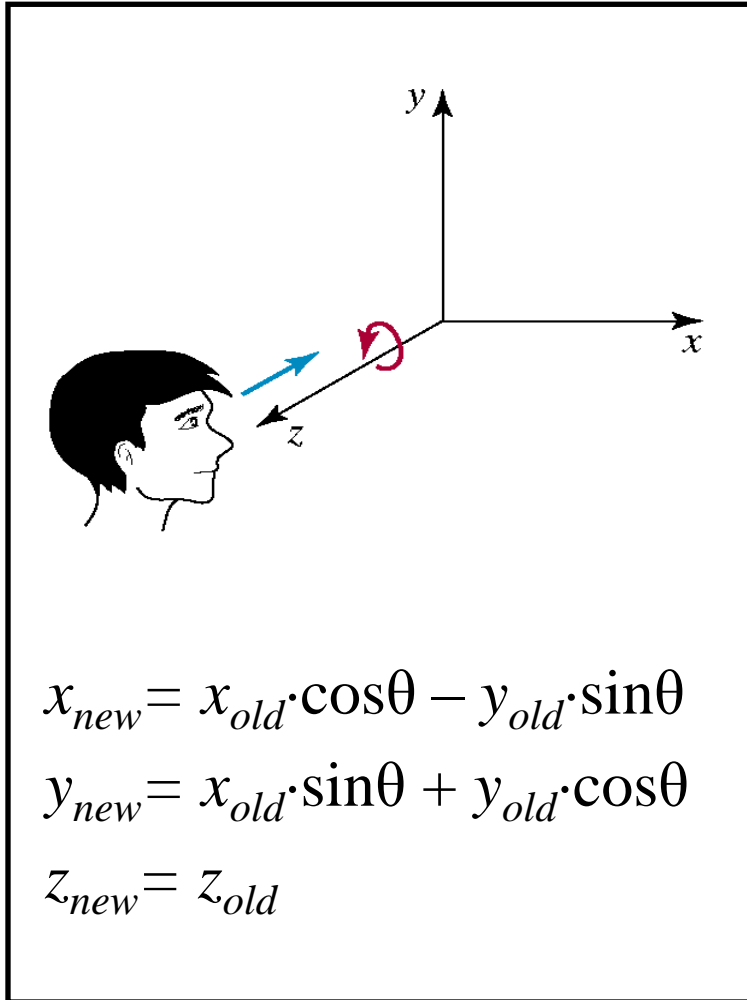
3D ротация около оста x



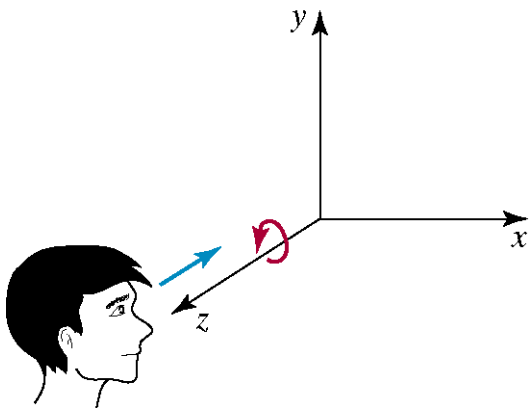
3D ротация около оста y



3D ротация около оста z



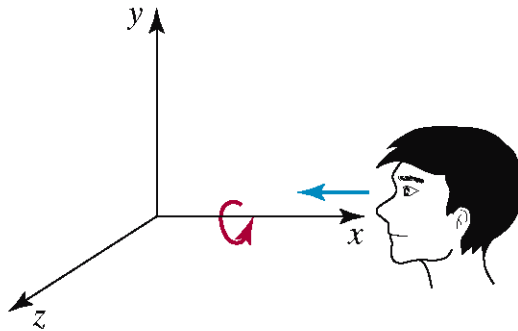
3D ротация



$$x_{new} = x_{old} \cdot \cos\theta - y_{old} \cdot \sin\theta$$

$$y_{new} = x_{old} \cdot \sin\theta + y_{old} \cdot \cos\theta$$

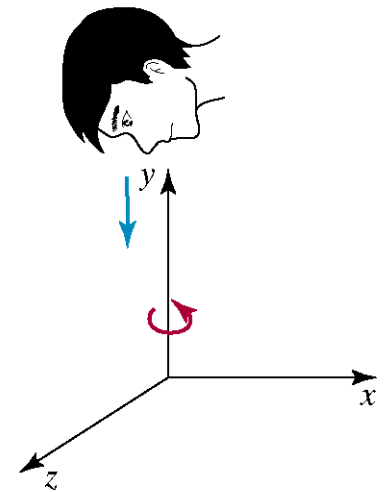
$$z_{new} = z_{old}$$



$$x_{new} = x_{old}$$

$$y_{new} = y_{old} \cdot \cos\theta - z_{old} \cdot \sin\theta$$

$$z_{new} = y_{old} \cdot \sin\theta + z_{old} \cdot \cos\theta$$



$$x_{new} = z_{old} \cdot \sin\theta + x_{old} \cdot \cos\theta$$

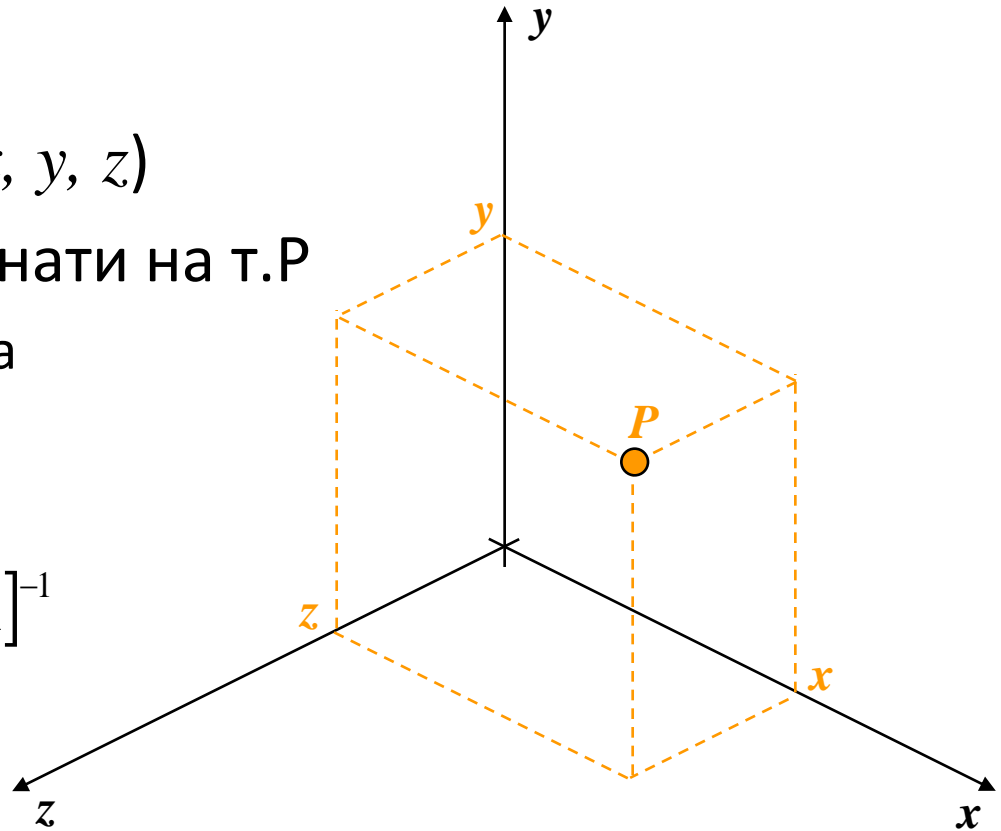
$$y_{new} = y_{old}$$

$$z_{new} = z_{old} \cdot \cos\theta - x_{old} \cdot \sin\theta$$

Хомогенни координати

- Хомогенни координати на точка в тримерното пространство
 - т.Р с координати (x, y, z)
 - хомогенни координати на т.Р
 - вектор с 4 елемента

$$\mathbf{P}(x, y, z) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = [x \ y \ z \ 1]^{-1}$$



Хомогенни координати

- Използване на хомогенни координати в компютърна графика
 - геометричните трансформации се представят с матрици
 - необходимите изчисления се извършват с матрични умножения

3D трансляция

- 3D трансляция

$$\begin{bmatrix} x_{new} \\ y_{new} \\ z_{new} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- *Матрица за 3D трансляция*

$$\mathbf{P}_{new} = \mathbf{T}(dx, dy, dz) \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3D мащабиране

- 3D мащабиране

$$\begin{bmatrix} x_{new} \\ y_{new} \\ z_{new} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- *Матрица за 3D мащабиране*

$$\mathbf{P}_{new} = \mathbf{S}(Sx, Sy, Sz) \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3D ротация

■ 3D ротация около оста x

$$\begin{bmatrix} x_{new} \\ y_{new} \\ z_{new} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

■ *Матрица за 3D ротация около оста x*

$$P_{new} = R_x(\theta) \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3D ротация

■ 3D ротация около оста y

$$\begin{bmatrix} x_{new} \\ y_{new} \\ z_{new} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

■ *Матрица за 3D ротация около оста y*

$$P_{new} = R_y(\theta) \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3D ротация

■ 3D ротация около оста z

$$\begin{bmatrix} x_{new} \\ y_{new} \\ z_{new} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

■ *Матрица за 3D ротация около оста z*

$$P_{new} = R_z(\theta) \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Обратни трансформации

- Транслация $\mathbf{T}(dx, dy, dz)$
 - обратна с $\mathbf{T}^{-1}(-dx, -dy, -dz)$

- Мащабиране $\mathbf{S}(S_x, S_y, S_z)$
 - обратна с $\mathbf{S}^{-1}(1/S_x, 1/S_y, 1/S_z)$

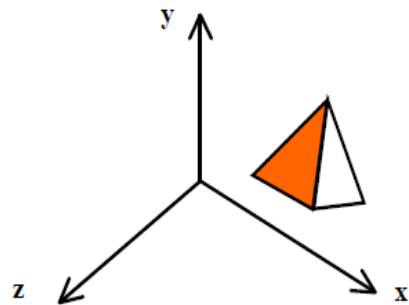
- Ротация $\mathbf{R}(\theta)$
 - обратна с $\mathbf{R}^{-1}(-\theta)$

Ротация около произволна ос

- ***Ротация около ос, успоредна на една от основните координатни оси***
 - трансляция на оста на ротация до съответната координатна ос
 - ротация на зададения ъгъл θ
 - обратна трансляция на оста на ротация до първоначалното ѝ положение

Ротация около произволна ос

- Пример: ротация около ос, успоредна на оста x



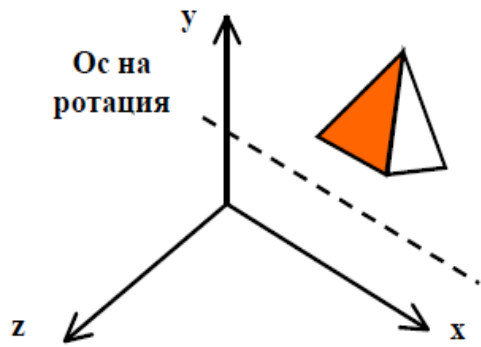
Начално положение

Всяка точка от обекта ще се преобразува с трансформацията

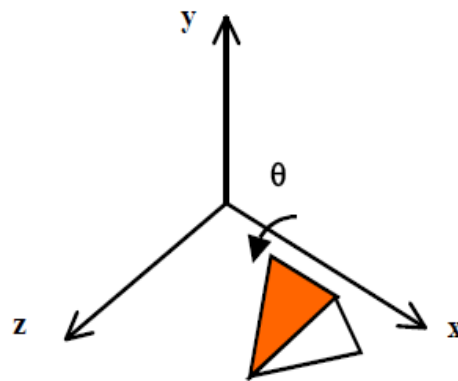
$$P_{\text{new}} = T^{-1} \cdot R_x(\theta) \cdot T \cdot P$$

Обща преобразуваща матрица

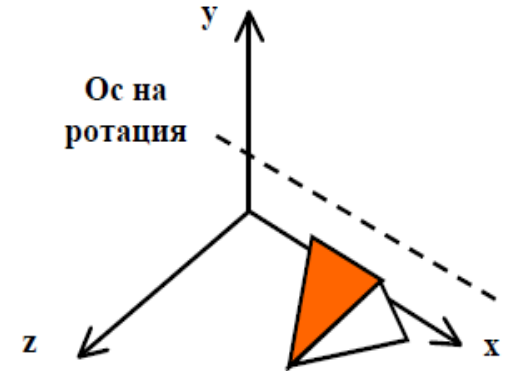
$$M = T^{-1} \cdot R_x(\theta) \cdot T$$



транслация на оста на ротация до оста x



ротация на ъгъл θ



обратна транслация на оста на ротация до начално положение

Ротация около произволна ос

■ Ротация около произволна права

- ъгъл на ротация θ
- ос на ротация: зададен с

- точка $P = (x, y, z)$

и направляващ вектор $d = (dx, dy, dz)$

или

- две точки $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$,
тогава $d = P_2 - P_1$

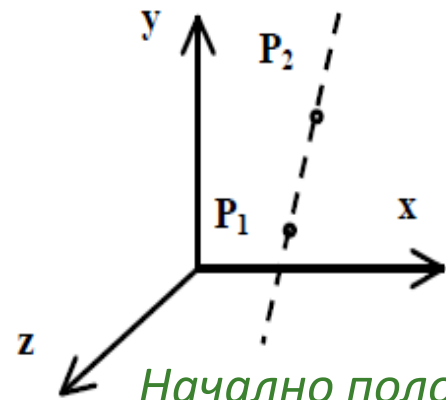
Ротация около произволна ос

■ *Ротация около произволна права*

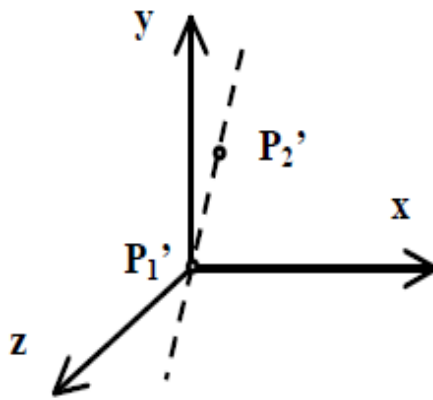
- Изравнява се оста на ротация с една от основните оси, например z
 1. Транслация на обекта, така че оста да мине през началото на координатната система
 2. Ротации, така че оста на ротация да съвпадне с оста z
 3. Ротация около z на ъгъл θ
 4. Обратни ротации
 5. Обратна транслация

Ротация около произволна ос

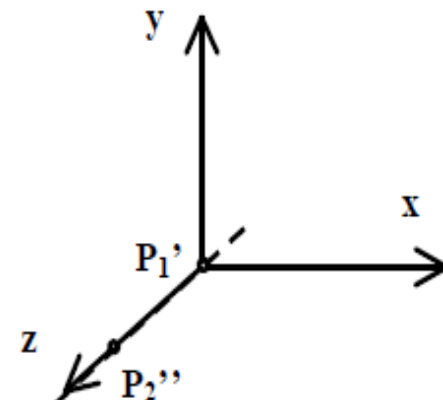
■ Ротация около произволна права



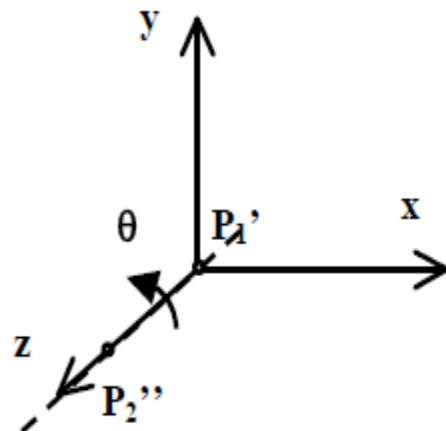
Начално положение



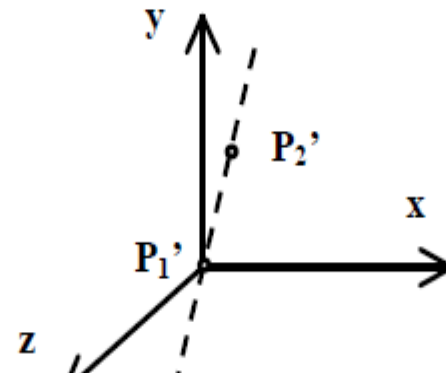
Транслация на $m.P_1$ до $m.O$



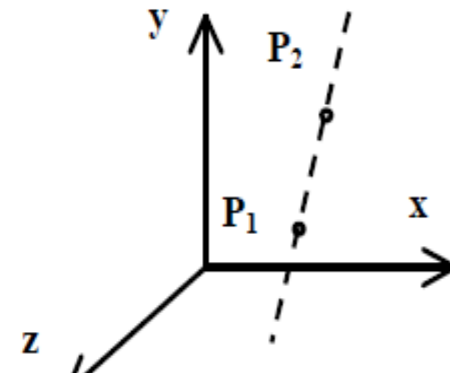
Ротация на оста до ос z



Ротация на обекта
около z



Обратни ротации
на оста



Транслация до
начално положение

Ротация около произволна ос

■ Ротация около произволна права

1. Транслация на т.Р₁ до началото на координатната система

- Използва се матрица на транслация

$$T(-x_1, -y_1, -z_1)$$

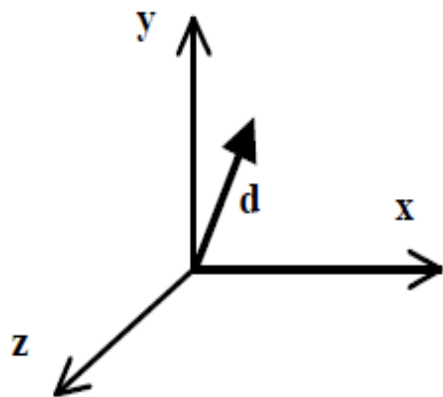
- Матрицата за обратната транслация

$$T^{-1}(x_1, y_1, z_1)$$

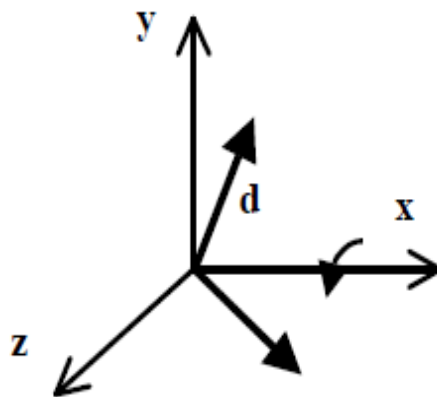
Ротация около произволна ос

■ Ротация около произволна права

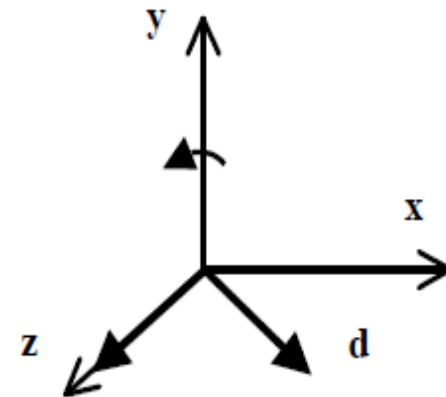
2. Ротации на оста до положителната посока на оста z



След трансляцията



Ротация около x
за да легне в равнината xz



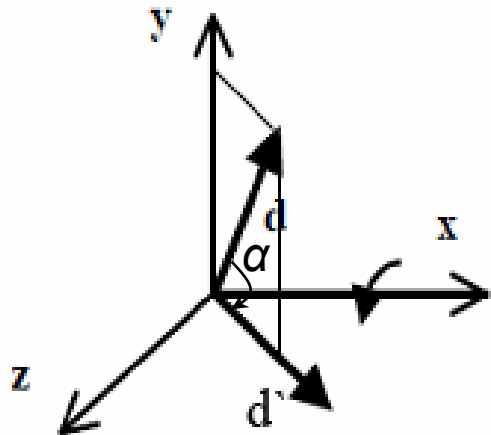
Ротация около y
за да се изравни с оста z

Ротация около произволна ос

■ Ротация около произволна права

2. Ротации на оста до положителната посока на оста z

2.1. Ротация около x за да легне оста на ротация в равнината xz



$$\sin \alpha = \frac{dy}{|d'|}, \quad \cos \alpha = \frac{dz}{|d'|}, \quad |d'| = v = \sqrt{dy^2 + dz^2}$$

$$\mathbf{R}_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dz}{v} & -\frac{dy}{v} & 0 \\ 0 & \frac{dy}{v} & \frac{dz}{v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_x^{-1} = \mathbf{R}_x(-\alpha)$$

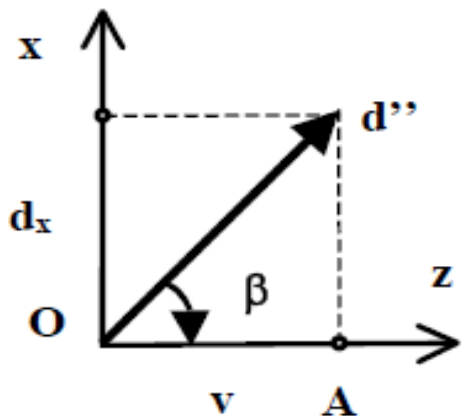
Ъгълът на ротация е равен на ъгъла между d' (проекцията на вектора d в равнината xz) и оста z : $d' = (0, dy, dz)$

Ротация около произволна ос

■ Ротация около произволна права

2. Ротации на оста до положителната посока на оста z

2.2. Ротация около y за да съвпадне оста на ротация с оста z



$$\sin \beta = \frac{dx}{|d''|}, \quad \cos \beta = \frac{v}{|d''|}$$

$$\mathbf{R}_y(-\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_y^{-1} = \mathbf{R}_y(\beta)$$

Ъгълът на ротация около ос y е $-\beta$. След ротацията оста лежи в равнината xz, векторът d се е преобразувал до вектора d'' : $d'' = (dx, 0, v)$

Ротация около произволна ос

■ Ротация около произволна права

3. Ротация на обекта около ос z на ъгъл θ

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Обща преобразуваща матрица

$$\mathbf{R}(\theta) = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{R}_x^{-1} \cdot \mathbf{R}_y^{-1} \cdot \mathbf{R}_z \cdot \mathbf{R}_y \cdot \mathbf{R}_x \cdot \mathbf{T}$$

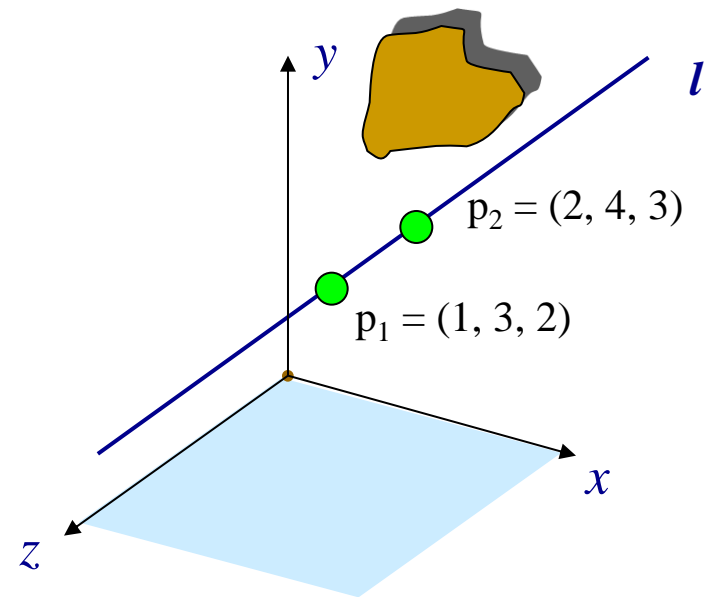
Ротация около произволна ос

- Пример: Ротация на обект около линията, минаващ през точките $(1, 3, 2)$ и $(2, 4, 3)$ на ъгъл θ

- дължина на вектора P_1P_2

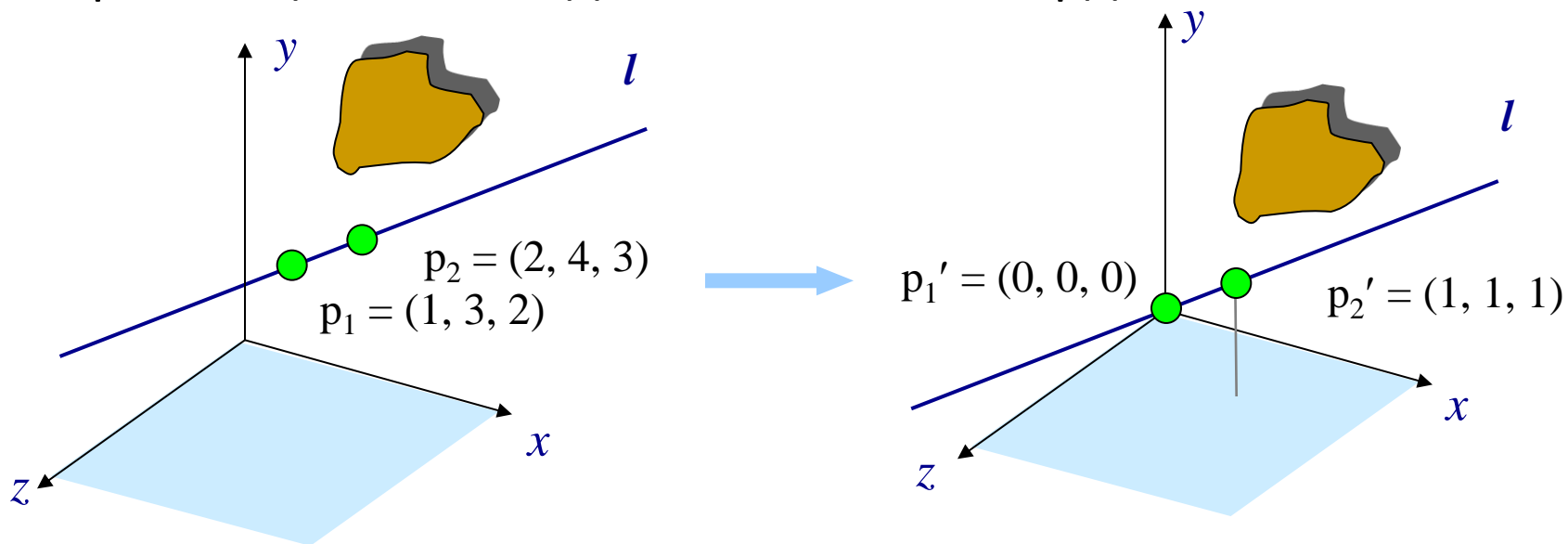
$$\|p_1p_2\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

- *дължината не се променя при трансляция и ротация*



Ротация около произволна ос

1. Транслация на оста до началото на координатната система

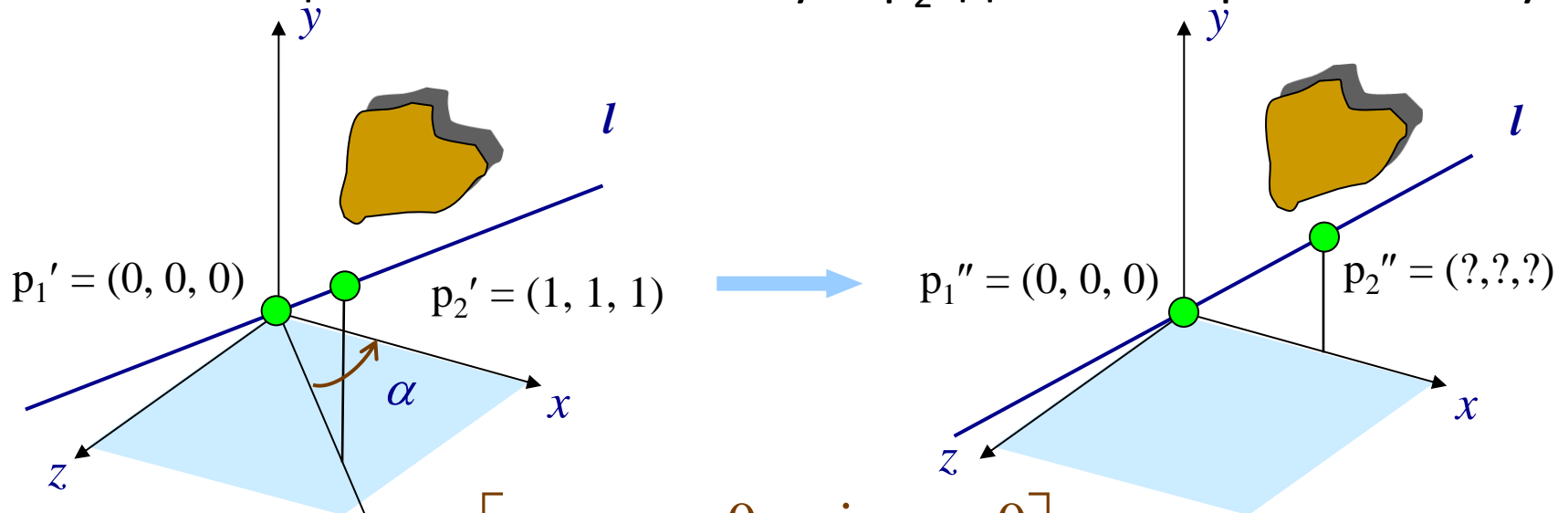


$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ротация около произволна ос

2. Ротация на оста до координатна ос

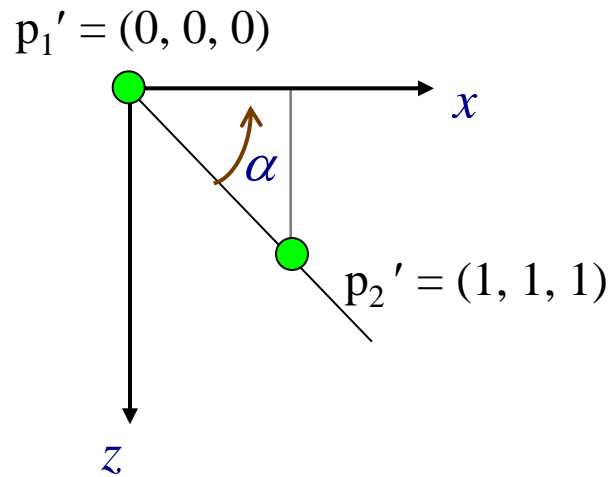
2.1. Ротация на ъгъл α около y : т. p_2' да лежи в равнината xu



$$R_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ротация около произволна ос

□ *колко е ъгъл α ?*



$$\alpha = \pi / 4$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ротация около произволна ос

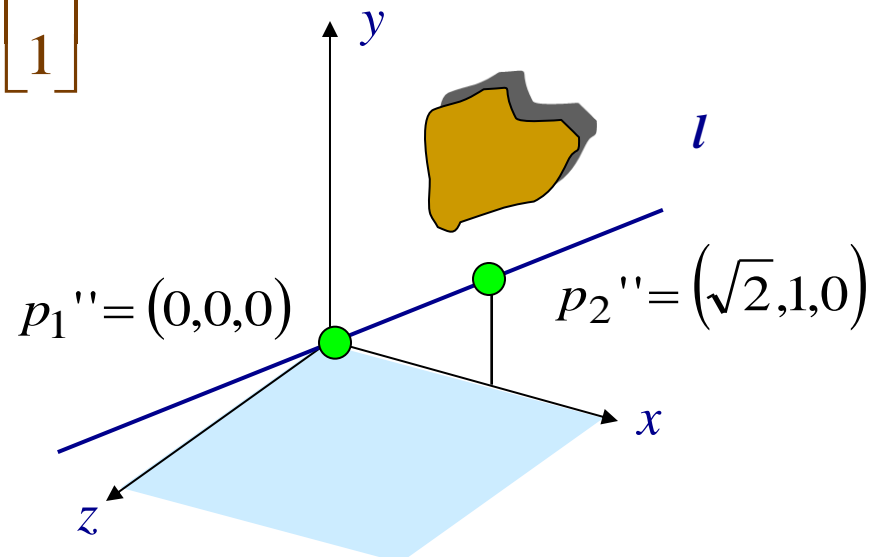
- **какви са координатите на p_2'** ?
 - изчисляват се с прилагане на ротационната матрица за p_2'

$$R_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & 0 & \sin \frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \frac{\pi}{4} & 0 & \cos \frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ротация около произволна ос

- *какви са координатите на p_2'' ?*

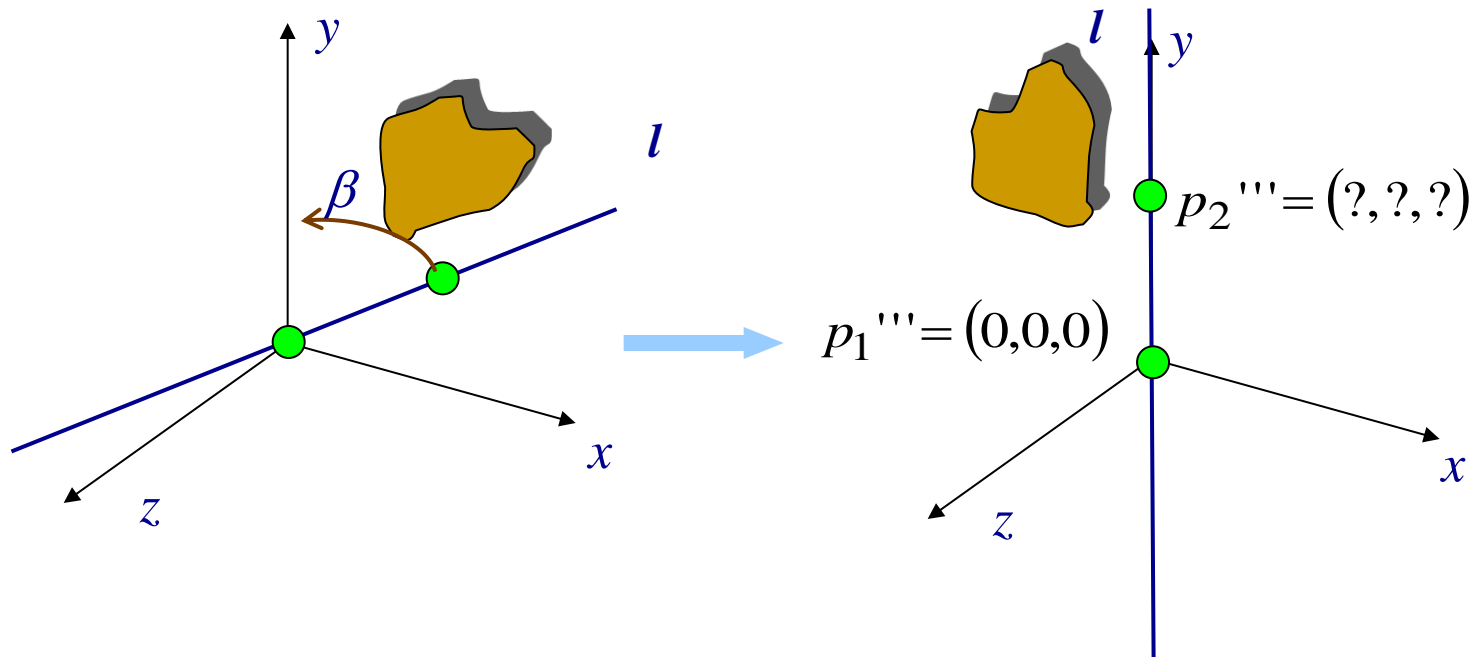
$$p_2'' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [\sqrt{2} \quad 1 \quad 0 \quad 1]$$



Ротация около произволна ос

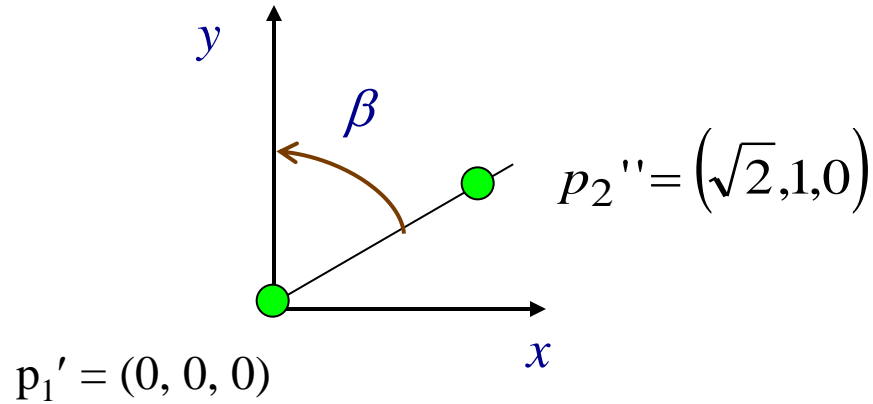
2. Ротация на оста до координатна ос

2.2. Ротация на ъгъл β около z : т.р₂ да лежи върху оста y



Ротация около произволна ос

□ колко е ъгъл β ?



$$\beta = 54^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Ротация около произволна ос

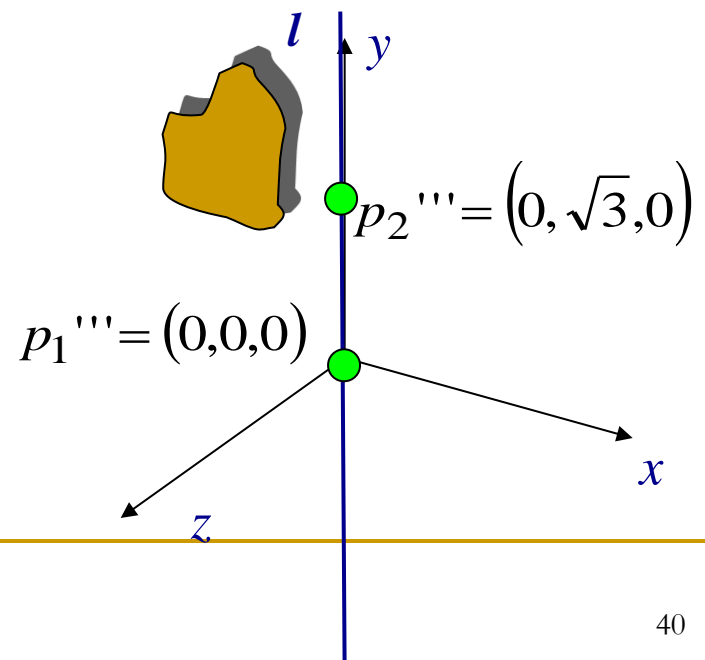
- **какви са координатите на p_2''' ?**
 - изчисляват се с прилагане на ротационната матрица за p_2''

$$R_z(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ротация около произволна ос

- *какви са координатите на p_2''' ?*

$$p_2''' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Ротация около произволна ос

3. Ротация на обекта около оста y на ъгъл θ

- това е ротацията на ъгъл съгласно първоначалното задание

4. Обратни ротации

- ротация спрямо оста z на ъгъл $-\beta$
- ротация спрямо оста y на ъгъл $-\alpha$

5. Обратна трансляция

■ *Обща преобразуваща матрица*

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(1,3,2) \cdot \mathbf{R}_y\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \mathbf{R}_z\left(-54^\circ\right) \cdot \mathbf{R}_y(\theta) \cdot \mathbf{R}_z\left(54^\circ\right) \cdot \mathbf{R}_y\left(\frac{-\pi}{4}\right) \cdot \mathbf{T}(-1,-3,-2)$$

Други трансформации

■ *Огледален образ (Reflection)*

□ **Спрямо някоя от координатните оси**

- чрез ротация на 180° спрямо оста

□ **Спрямо равнина**

- чрез ротация на 180° в хомогенни координати (4D)
 - например спрямо равнината xy с матрица \mathbf{RF}_z
 - еквивалентно на преобразуване от дясна в лява координатна система

$$\mathbf{RF}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Други трансформации

■ *Еластични деформации (Shear)*

□ \mathbf{SH}_x

■ по оста x с коефициенти на деформация a по y и b по z

□ \mathbf{SH}_y

■ по оста y с коефициенти на деформация a по x и b по z

□ \mathbf{SH}_z

■ по оста z с коефициенти на деформация a по x и b по y

$$\mathbf{SH}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{SH}_y = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{SH}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Видове трансформации

■ *Евклидови (Euclidean)*

- наричат се още “rigid body” трансформации
- не деформират обектите
- транслация и ротация

■ *Метрични (Metric)*

- създават подобни обекти
- транслация, ротация, мащабиране

■ *Линейни (Affine)*

- линейна трансформация (ротация, мащабиране, еластични деформации) последвана от транслация

■ *Проекционни (Projective)*

- коя да е линейна трансформация с каква да е матрица

Видове трансформации

■ Евклидова

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■ Метрична

$$\begin{bmatrix} sr_{11} & sr_{12} & sr_{13} & t_x \\ sr_{21} & sr_{22} & sr_{23} & t_y \\ sr_{31} & sr_{32} & sr_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■ Линейна

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■ Проекционна

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix}$$

Euclidean \subset Metric \subset Affine \subset Projective

КРАЙ

Следваща тема:

Проекции