3.ПРЕДСТАВЯНЕ И РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧИ

3.1.Задача и нейното представяне.

Примери:

Това е задача за събиране в десетична бройна система	Това е задача за сумиране в шестнадесетична бройна система
282 + **739** = **1021**	**282** + **739** = **9BB**

Да се схващат по един и същи начин, както използуваните символи, така и правилата за съставяне на смислени (правилни) изрази

- *и от съставителя,*
- *и от изпълнителя*.

В случая символите са цифрите на бройната система и знаците за аритметични действия, а правилата за построяване на правилни изрази са:

- правилата за записване на число в позиционна бройна система и
- правилата за извършване на аритметични действия(събиране) в тази система.

Що за задача е следният запис?

BEST
\+
MADE
MASER

Това е криптографска задача. (зашифровано аритметика) Всяка буква означава десетична цифра и то точно определена.

Да се намери съответствието буква – десетична цифра.

Всяка задача освен формулировката си предполага и цяла редица допълнителни сведения.

Задача ли е следния въпрос?

“Колко ангела могат да се поместят на върха на една игла?”

За нас това е пълна безсмислица, но за древните философи и теолози това е била особено важна задача, решавана в безброй спорове и дискусии.

Всекидневен въпрос:

“Днес да сложа ли вратовръзка?”

Всеки ден решаваме голям брой такива задачи. Едни решаваме автоматично (по навик), други изискват известни разсъждения.

Например:

- връзката стяга врата,
- с връзка изглеждам по-сериозен,
- повечето преподаватели ходят с връзки,
- началникът ми харесва вратовръзки и ще му направя добро впечатление
- днес очаквам да срещна лицето х и е добре да бъда с връзка,
- ако сложа връзка, то трябва да избера коя, а това е време и главоболие и т.н.
- и т.н.

Често ние не се съобразяваме с всичко изброено, а вземаме случайно решение, решение свързано с един решаващ фактор.

Този фактор може да бъде:

-случайно избран;

-избран чрез сравняване с няколко.

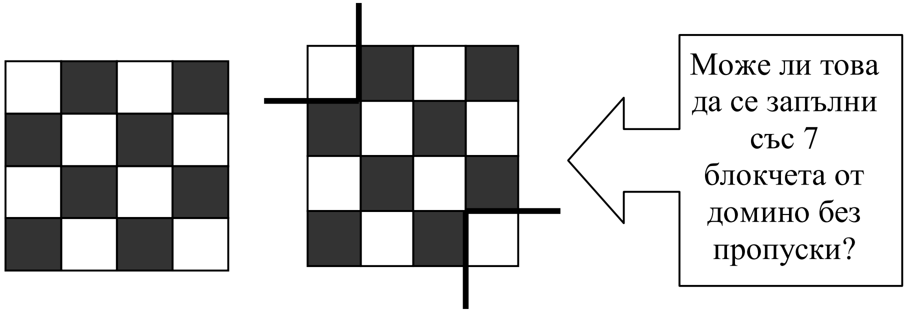
Когато задачата е проста от рода на горната, не е решаващо как ще я решим. Но ако това е задача от областта на икономиката и политиката, изборът на решение може да се окаже съдбовен за хиляди хора.

3.2. Роля на представянето на задачата за нейното решаване.

Нека илюстрираме с няколко примера колко важно е да се намери подходящо представяне на задачата.

Задача за изрязаната шахматна дъска:

Изрязваме от шахматната дъска две противоположни по диагонал ъглови полета. Може ли такава дъска да се покрие от 31 блокчета на домино без пропуски?



Пряк път за решаване – да редим доминото върху изрязаната дъска.

Размисъл преди да решаваме- всяка плочка от доминото покрива непременно едно бяло и едно черно поле. Полетата върху изрязаната дъска са с две бели по-малко. Следователно отговорът е НЕ. Всъщност ние доформулирахме задачата: Може ли шахматна дъска, от която са изрязани две бели полета, да се покрие без пропуски от 31 блокчета на домино, всяко от които покрива едно бяло и едно черно полета**.**

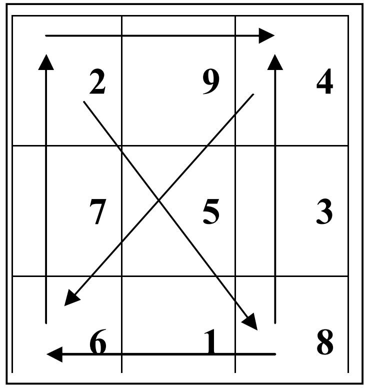
Добавихме съществени за решаването на задачата детайли, които в началното описание бяха на заден план

Друга възможност е **да се формулира еквивалентна задача, чието решение ни е вече известно (или може да се получи далеч по-лесно).**

Това отново е въпрос на подходящо представяне на задачата. Използуват се различни модели: физически , математически, геометрични. При съставянето на модела се прави идеализация, като се извежда същественото и се изоставят детайлите, от които решението не се влияе./

Игра:Има девет карти с надписи цифрите от 1 до 9. Всеки играч по реда си взема по 1 карта. Печели, който пръв събере точно 15 точки от три взети карти.

Играта ще ви се стори трудна, но погледнете следната схема и нещата изглеждат по съвсем друг начин. Необходимо е така да подбирате цифрите, че те да са от един ред, колона или диагонал.



Важността да се използува известна система от знаци и правила ще илюстрираме и със следния пример.

	x_1	x_2	x_1	x_2
A	E	B	0	0
B	A	D	0	1
C	F	D	0	0
D	C	B	0	1
E	C	A	0	0
F	A	C	0	0

?
≡

	x_1	x_2	x_1	x_2
A	E	B	0	0
B	A	B	0	1
E	A	A	0	0

Това са изразяващи входно-изходно поведение на черна кутия таблици. Черната кутия има два входа x_1 и x_2 и един изход, който може да бъде 1 или 0. Тя може да се намира в следните състояния: A, B, C, D, E и F. Въпросът е еквивалентни ли са двете таблици?

Да разделим състоянията по изходи

A, C, E и F $\rightarrow$ 00 1
B и D $\rightarrow$ 01 2

Нова таблица на преходите.

	x_1	x_2
1.A	1	2
C	1	2
E	1	1
F	1	1
2.B	1	2
D	1	2

	x_1	x_2	
1.A	3	2	
C	3	2	A≡C
2.B	1	2	
D	1	2	B≡D
3.E	1	1	
F	1	1	E≡F

Задача на немския алгебрист Фробениус: Нека **A** и **A'** са две квадратни матрици с един и същ размер **n x n** с произволни елементи. Подобни ли са тези матрици, т.е. могат ли чрез размяна на редове и колони едната да се приведе към другата.

n! суперпозиции при изчерпващ подход.

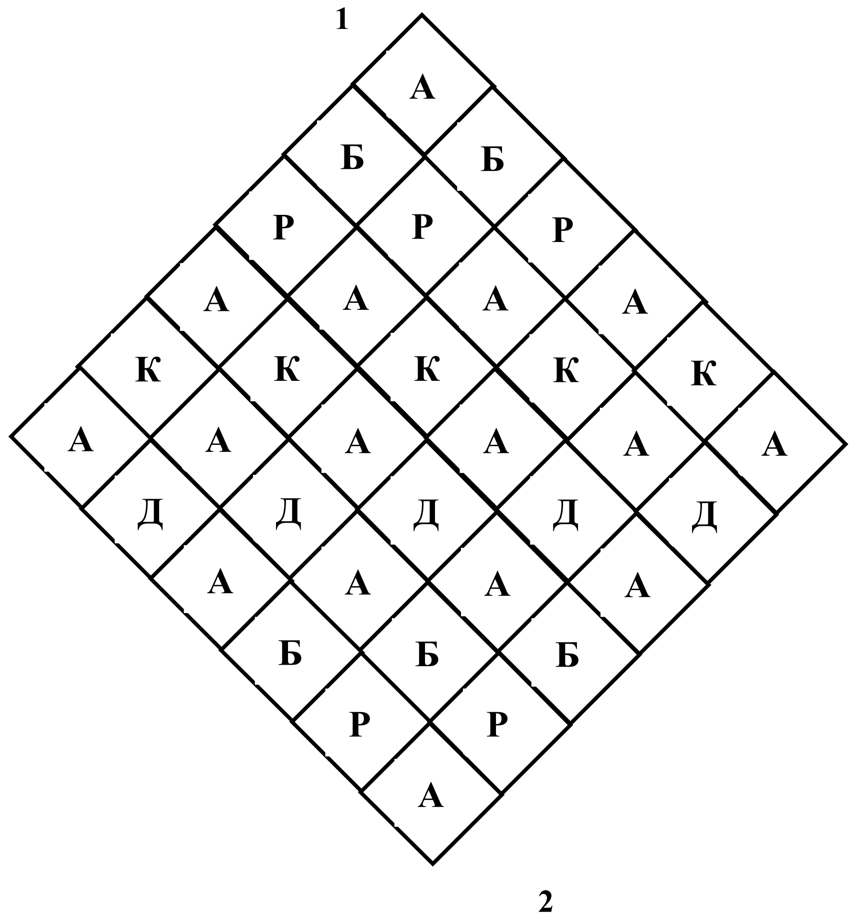
Тази задача може да се запише в термините на граф на Берж.

Към двата графа може да се приложи конструкцията на Визинг.

<u>Пример</u>:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$$

Така задачата се свежда до намиране на клика в граф.



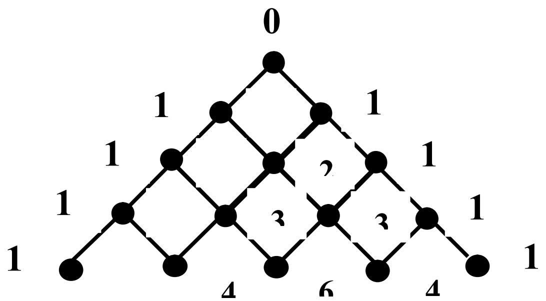
<u>3.3. Разбиване на задачата на подзадачи и роля на знанията.</u>

По колко различаващи се в поне една буква начина може да се прочете думата “абракадабра”, като се започва от най-горния връх и се завършва в най-долния връх?

<u>Нека преформулираме задачата.</u>

Колко са различните най-кратки маршрута между двете точки 1 и 2?

Свеждаме сложната задача до по-прости подзадачи .



Решението се получава чрез последователно събиране на по две числа. Това може да се окаже твърде дълго. Тогава нека посочим ролята на знанията и директно приложим формулите:

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)(n-2)....(n-r+1)}{1*2*3........r}$$

$$C_n^r = \frac{(n-r+1)}{r!}$$

Още един пример за съществената роля на знанията

Преобразувайте разположението на цифрите вляво в разположението им в дясно на фигурата. Цифрите могат да се движат само в равнината, като заемат само празната кутийка. Да се приведе едно разположение на пуловете (начално) към друго разположение (крайно, целево).

***	1	2	3
4	5	6	7

→

***	3	2	1
7	6	4	5

Задачата може да се реши по няколко начина:

Елементарен – пробва се да се постигне целта;

Може да се построи пространството на състоянията;

И в двата случая пътят към целта може да се окаже твърде дълъг. Но има и една съществена опасност – целта да е недостижима. Елементарният подход към решението ни прави безпомощни в този случай. Използването на пространството на състоянията може да ни убеди, че наистина целта е недостижима.

Нека сега включим допълнителни знания.

Разрешимост на задачата, т.е. може ли всяко разположение да бъде приведено към всяко друго?

Понятие за инверсия .13245 е с една инверсия.

Ако началната и крайната позиции имат брой инверсии с еднаква четност, задачата е разрешима.

3.4.Генериране на хипотеза и проверка на хипотезата.

Ще изучим една стереометрична задача, при което ще илюстрираме ролята на генерирана въз основа на аналогия хипотеза в процеса на решаването на сложна задача.

а*)* *Аналогията поставя въпроса*. Аналогия между многостени в пространството и многоъгълници в равнината.

Всяко свойство на многоъгълниците в равнината би трябвало да има аналогично свойство за многостените в пространството.

Свойство: сумата на ъглите на n-ъгълника е $(n-2)\pi$.

Търсим аналогично свойство в пространството за многостените.

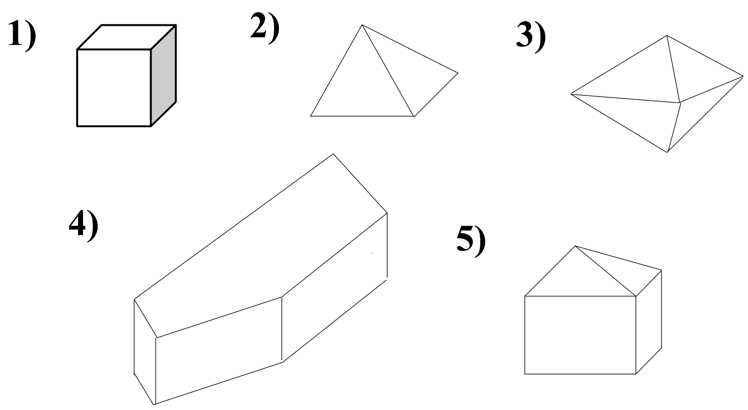
б) Да проверим всички възможности.

Уточняваме задачата.

Кои ъгли на многостена? - Ъгли между две стени, които имат общо ребро. Телесен ъгъл – ъгълът между стените, които се събират в един връх. Всяка n-ъгълна стена има n вътрешни плоски ъгли. Нека вземем тях.

в) <u>Експериментираме.</u>

	Брой стени	$\sum\alpha$
1. куб	6	12π
2. тетраедър	4	4π
3. октаедър	8	8π
4. петоъгълна призма	7	16π
5. кула	9	14π



г) <u>Генерираме определена хипотеза(идея).</u>

Да определим сумата от всички плоски ъгли, които се събират в един връх на многоъгълника.

Твърдо ясно е само,че $\sum\alpha \le 2\pi$ (доказал го е Евклид).

Тогава сумата от всички плоски на многостена е:

$\sum\alpha \le 2\pi * B$, където ***B*** е брой върхове на многостена.

Нова таблица	(С) брой стени	$\sum\alpha$	**В** (брой върхове)	**2π * В**	Р брой ръбове
Куб	6	12π	8	16π	12
Тетраедър	4	4π	4	8π	6
Октаедър	8	8π	6	12π	12
Петоъгълна призма	7	16π	10	20π	15
Кула	9	14π	9	18π	16

Внимателното разглеждане показва, че разликата между втората и третата колона е постоянна и равна на **π т. е.**

$$2\pi B - \sum\alpha = 4\pi$$

Генерираме хипотеза $\sum\alpha = 2\pi B - 4\pi$

д) <u>Проверка на хипотезата на нови примери.</u>

Установяваме, че хипотезата е в сила за всички изпъкнали многостени.

Но това все още не е доказателство.

е) <u>Път към доказателството</u>**.**

Нека със $s_1, s_2, \ldots, s_c$ означим броя на страните, които имат съответно първата, втората и последната стена.

Тогава:

$$\sum\alpha = \pi(s_1-2) + \pi(s_2-2) + \ldots + \pi(s_c-2) = \pi(s_1 + s_2 + \ldots + s_c - 2c)$$

Но: $s_1 + s_2 + \ldots + s_c = 2P$ (ръбове) на многостена

Тогава: $\sum\alpha = \pi(2P - 2c) = 2\pi(P - c)$

Но:

$$\sum\alpha = 2\pi B - 4\pi$$
$$2\pi B - 4\pi = 2\pi(P - c)$$
$$B - 2 = P - c$$
$$B + c = P + 2$$

Върхове + Стени = Ръбове + 2

Тази зависимост е открита ои Ойлер, а преди него от Декарт, но не са я доказали.