5.ЛОГИЧЕСКИ МОДЕЛИ ЗА ПРЕДСТАВЯНЕ НА ЗНАНИЯТА

5.1.Съждително смятане

5.1.1.Въведение.

Съждителното смятане е сравнително прост декларативен метод за представяне на знания.

Всяко твърдение, което има стойност истина или лъжа, се разглежда като ***съждение***.

Всяко съждение е ***атом*** и се разглежда като неделимо цяло.

Атомът или отрицанието на атома се нарича ***литерал***.

Например простото изречение "Днес е слънчев ден" е съждение. За всеки конкретен ден то или е истина(true), или не е истина(false). Нека отбележим това твърдение с ***G.*** Тогава за слънчев ден се записва ***G***= true, а за ден, в който не грее слънце - ***G***= false. За отрицанието на ***G*** записът е $\neg$***G.***

Нека веднага посочим ограничеността на съждителното смятане. За да представим ден, в който до обяд е гряло слънце, а след обяд е било облачно, трябва да излезем от ограничението на двоичните величини и Булевата алгебра, като използваме многозначна или размита алгебра**.**

Литералите могат да се свързват посредством отношенията:

$\vee$ *- или(дизюнкция),*

$\wedge$ *- и(конюнкция),*

$\neg$*- не(отрицание),*

$\rightarrow$ *- импликация,*

$\equiv$ *- равнозначност.*

Получените изрази се наричат формули. Формулата има истинност, която може да се определи по истинността на включените във формулата литерали. Пример е показан в следната таблица, която се нарича **таблица на истинност**.

P	***Q***	$\neg$***P***	***P∧Q***	***P∨Q***	***P→Q***	***P↔Q***
false	false	true	false	false	true	true
false	true	true	false	true	true	false
true	false	false	false	true	false	false
true	true	false	true	true	true	true

В по-сложни формули реда за изпълнение на операциите се определя със скоби, а където няма скоби се работи в следния ред:

$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \equiv$

5.1.2.Правилно построени формули и тяхното преобразуване.

От свързани със знаци за логически операции атоми в съждителното смятане се изграждат правилно построени формули **(ППФ)**.

ППФ се строят:

1. Атомите са ППФ.
2. Ако ***G*** е ППФ, то ***(***$\neg$***G)*** също е ППФ.
3. Ако ***G*** и ***H*** са ППФ, то ***(G∨H), (G∧ H), (G→H), (G≡H)*** също са ППФ.
4. Няма други ППФ, освен построените чрез използване на правилата от 1 до 3.

Какви са истинностните стойности на горните (нека ги наречем елементарни) ППФ.

а) ***(*** $\neg$***G)*** – логическо отрицание

б) ***(G ∨ H)*** – дизюнкция;

в) ***(G ∧ H)*** – конюнкция;

г) ***(G → H)*** – импликация от G към H;

д) ***(G ≡ H)*** – логическа еквивалентност;

бе показано в горната таблица.

Всяко присвояване на конкретни стойности на атомите във формула F се нарича нейна **интерпретация**. Интерпретацията бива true или false, ако съответно за тази интерпретация F е true или false.

<u>**Общозначима**</u> **формула (тавтология)** . $\blacksquare$

F е истина за всичките й интерпретации.

<u>**Противоречива**</u> **формула (противоречие).** $\square$

F е неистина за всичките си интерпретации.

<u>Правилата за тъждествено преобразуване на правилно построените формули (ППФ) се наричат закони на съждителното смятане</u>**.**

1. $A \vee B = B \vee A$ ***комутативни закони***

$A \wedge B = B \wedge A$

2. $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$ ***асоциативни закони***

$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$

3. $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ ***дистрибутивни закони***

$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

4. $A \rightarrow B = \neg A \vee B$

5. $A \equiv B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

$A \equiv B = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

$A \equiv B = (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B)$

6. $A \vee \square = A;$ $A \vee \blacksquare = \blacksquare;$

7. $A \wedge \square = \square$; $A \wedge \blacksquare = A;$

8. $A \wedge A = A;$ $A \vee A = A$

9. $A \vee \neg A = \blacksquare$

$A \wedge \neg A = \square$

10. $\neg(\neg A) = A$ ***закон за двойното отрицание***

11. $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$ ***закони за отрицанието (закони на де Морган)***

$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$

Нормални форми.

Нека m_i **е конюнкция от литерали.** Тогава формулата $m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee \ldots \vee m_k$ се нарича **Дизюнктивна нормална форма (ДНФ).**

Нека M_i е **дизюнкция от литерали**. Тогава формулата $M_1 \wedge M_2 \wedge M_3 \wedge \ldots \wedge M_p$ се нарича **Конюнктивна нормална форма (КНФ**)

Преобразуване на формули в нормална форма (НФ).

1. Премахват се $\equiv$ и $\rightarrow$ (закони 5 и 4).
2. Отстраняване на отрицанията на над повече от един атом, т.е. изнасяне на $\neg$ непосредствено пред атом. (закони 11).
3. Преобразуване чрез използване на останалите закони.

Ако формулата $(M_1 \wedge M_2 \wedge M_3 \wedge \ldots \wedge M_k) \rightarrow G$ е общозначима, то G е логическо следствие на $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_k$

G е логическо следствие на $\boldsymbol{M_1, M_2, M_3, \ldots, M_p}$, тогава и само тогава, когато

$\blacksquare$ е логическо следствие на $\boldsymbol{M_1, M_2, M_3, \ldots, M_p, G}$.

Ако формулата $(M_1 \wedge M_2 \wedge M_3 \wedge \ldots \wedge M_k \rightarrow \neg G)$ е противоречива, то G е логическо следствие на $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_k$.

G е логическо следствие на $\boldsymbol{M_1, M_2, M_3, \ldots, M_k}$ тогава и само тогава, когато

$\Box$ е логическо следствие на $\boldsymbol{M_1, M_2, M_3, \ldots, M_k, \neg G}$.

5.1.3.Логически извод.

Ако $\boldsymbol{M_1 \wedge M_2 \wedge M_3 \wedge \ldots \wedge M_k \wedge (\neg G)) \equiv \Box}$,

то от истинността на $\boldsymbol{M_1 \wedge M_2 \wedge M_3 \wedge \ldots \wedge M_k}$ следва истинността на ***G.***

Пример:

1. $\boldsymbol{A \vee \neg B = true}$
2. $\boldsymbol{B \vee C = true}$
3. $\boldsymbol{\neg C = true}$

$\boldsymbol{A? = true}$

$$\boldsymbol{(A \vee (\neg B))(B \vee C)(\neg C)(\neg A) =}$$

$$\boldsymbol{= (A \vee (\neg B))\, B\, (\neg C)(\neg A) =}$$

$$\boldsymbol{= (A.\neg A \vee (\neg B\ \neg A))\ B\, (\neg C) =}$$

$$\boldsymbol{= \neg B\ \neg A\ B\ \neg C = false}$$

Пример от химическия синт

$MgO + H_2 \rightarrow Mg + H_2O$

$C + O_2 \rightarrow CO_2$

$CO_2 + H_2O \rightarrow H_2CO_3$

MgO, H_2, O_2, и C са атоми

A_1: MgO

A_2: H_2

A_3: O_2

A_4: C

A_5: $(MgO \wedge H_2) \rightarrow (Mg \wedge H_2O)$

A_6: $(C \wedge O_2) \rightarrow CO_2$

A_7: $(CO_2 \wedge H_2O) \rightarrow H_2CO_3$

Трябва да се докаже, че:

$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4\ A_5\ A_6 \wedge A_7 \wedge \neg(H_2CO_3)$ *е противоречива.*

Нека преобразуваме в ДНФ.

$$\boldsymbol{(MgO) \wedge (H_2) \wedge (C) \wedge (O_2) \wedge ((MgO \wedge H_2) \rightarrow (Mg \wedge H_2O)) \wedge ((C \wedge O_2) \rightarrow CO_2) \wedge ((CO_2 \wedge H_2O) \rightarrow H_2CO_3) \wedge \neg(H_2CO_3) =}$$

$$\boldsymbol{(MgO) \wedge (H_2) \wedge (C) \wedge (O_2) \wedge (\neg(MgO \wedge H_2) \vee (Mg \wedge H_2O)) \wedge (\neg(C \wedge O_2) \vee CO_2) \wedge (\neg(CO_2 \wedge H_2O) \vee H_2CO_3) \wedge \neg(H_2CO_3) =}$$

$$\boldsymbol{(MgO) \wedge (H_2) \wedge (C) \wedge (O_2) \wedge [(\neg MgO \vee \neg H_2) \vee (Mg \wedge H_2O))] \wedge [(\neg C \vee \neg O_2) \vee CO_2)] \wedge [(\neg CO_2 \vee \neg H_2O) \vee H_2CO_3) \wedge \neg(H_2CO_3) =}$$

1 2 3 4 5 6

$$\boldsymbol{(MgO) \wedge (H_2) \wedge (C) \wedge (O_2) \wedge (\neg MgO \vee \neg H_2 \vee Mg) \wedge (\neg MgO \vee \neg H_2 \vee H_2O) \wedge}$$

7 8 9

$$\boldsymbol{(\neg C \vee \neg O_2 \vee CO_2) \wedge (\neg CO_2 \vee \neg H_2O \vee H_2CO_3) \wedge \neg(H_2CO_3) =}$$

Решението се намира в следната последователност:

10. От 8 и 9 се получава $\boldsymbol{(\neg CO_2 \vee \neg H_2O)}$.
11. От 10 и 7 се получава $\boldsymbol{(\neg C \vee \neg O_2 \vee \neg H_2O)}$.
12. От 11 и 6 се получава $\boldsymbol{(\neg(MgO) \wedge \neg H_2 \vee \neg C \vee \neg O_2)}$.
13. От 12 и 1 се получава $\boldsymbol{(\neg H_2 \vee \neg C \vee \neg O_2)}$.
14. От 13 и 2 се получава $\boldsymbol{(\neg C \vee \neg O_2)}$.
15. От 14 и 3 се получава $\boldsymbol{(\neg O_2)}$.
16. От 15 и 4 се получава $\Box$.

5.4.Принцип на резолюцията.

Нека са дадени две дизюнктивни нормални формули:

$M_1 = (a \vee b)$

$M_2 = (\neg a \vee c)$, *където* b и c са дизюнкции от литерали.

Тогава

$M_1 \wedge M_2 = M_1 \wedge M_2 \wedge (b \vee c)$

$(b \vee c)$ се нарича <u>резолвента</u> на M_1 и M_2

Верността на горното твърдение може да се докаже чрез следните преобразувания:

$M_1 \wedge M_2 = (a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) = (a \wedge \neg a) \vee (b \wedge \neg a) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) =$
$= (b \wedge \neg a) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$

$[(b \wedge \neg a) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)] \wedge (b \vee c) =$
$[(b \wedge \neg a) \vee (a \wedge c \wedge b) \vee (b \wedge c)] \vee [b \wedge \neg a \wedge c) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)] =$
$= (\neg a \vee b) \vee (b \wedge c) \vee (a \wedge c)$

Дизюнкцията от литерали се нарича клауза (дизюнкт).
Резолвентата на две клаузи е следствие от тези клаузи.

<u>Изводът с използването на резолвенти се изпълнява в следната последователност</u>**:**

1.Избират се две клаузи, които съдържат един и същ литерал в различна форма.
2.Получената резолвента се добавя към множеството клаузи.
3.Действува се докато се получи празна резолвента т.е. $\square$

<u>Примери:</u>

За разгледания вече пример преобразуването е в три стъпки
1. $A \vee \neg B$ = true
2. $B \vee C$ = true
3. $\neg C$ = true
4. ***$\neg A$ = true***
Първа стъпка от 1 и 4 се получава резолвентата ***$\neg B$.***
Втора стъпка от 2 и 3 се получава резолвентата ***B.***
Трета стъпка от тези две резолвенти следва $\square$.

Сега да проследим по-обстойно следния пример

Ако Иван се е подготвил за изпита, то той отива на кино с Жени, освен ако отдавна не е ходил на кино и Жени много настоява или филмът е много хубав.
Ще отиде ли Иван на кино, ако скоро е бил на кино, но Жени много настоява?

A_1: Иван се е подготвил за изпита.
A_2: Иван отива на кино.
A_3: Иван отдавна не е ходил на кино.
A_4: Жени много настоява.
A_5: Филмът е много хубав.

При преобразуването на първия обзац са възможни два варианта:
а) $A_1 \vee (A_3 \wedge A_4) \vee A_5 \equiv A_2$; б) $A_1 \vee A_3 \wedge (A_4 \vee A_5) \equiv A_2$;

Да продължим с преобразуването на първия вариант (а).
$(\neg(A_1 \vee A_5 \vee (A_3 \wedge A_4)) \vee A_2) \wedge (A_1 \vee A_5 \vee (A_3 \wedge A_4) \vee \neg A_2)$

$(\neg A_1 \wedge \neg A_5 \wedge \neg(A_3 \wedge A_4) \vee A_2) \wedge (A_1 \vee A_5 \vee (A_3 \wedge A_4) \vee \neg A_2) =$
$(\neg A_1 \wedge \neg A_5 \wedge (\neg A_3 \vee \neg A_4) \vee A_2) \wedge (A_1 \vee A_5 \vee (A_3 \wedge A_4) \vee \neg A_2) =$
Получават се следните пет дизюнкта:
1 2 3 4 5
$(\neg A_1 \vee A_2) \wedge (\neg A_5 \vee A_2) \wedge (\neg A_3 \vee \neg A_4 \vee A_2) \wedge (A_1 \vee A_5 \vee \neg A_2 \vee A_3) \wedge (A_1 \vee A_5 \vee \neg A_2 \vee A_4)$

Преобразуваме втория абзац
$\neg(A_3 \wedge A_4) \to A_2$
След инвертиране той добива вида:
$\neg((\neg A_3 \wedge A_4) \to A_2)$
Следва преобразуване:
$\neg(\neg(\neg A_3 \wedge A_4) \vee A_2) =$
$(\neg A_3 \wedge A_4) \wedge \neg A_2$
Получават се следните три дизюнкта:
6 7 8
$\neg A_3 \wedge A_4 \wedge \neg A_2$

Следва логически извод:

9. От 3 и 8 резолвентата е ($\neg A_3 \vee \neg A_4$).

10. От 9 и 7 резолвентата е ($\neg A_3$).

11. От 4 и 1 резолвентата е ($A_2 \vee A_5 \vee \neg A_2 \vee A_3$)=

Тъй като няма възможност да се стигне до противоречие, то изводът на A_2 не е следствие от твърденията в първия и втория абзаци.