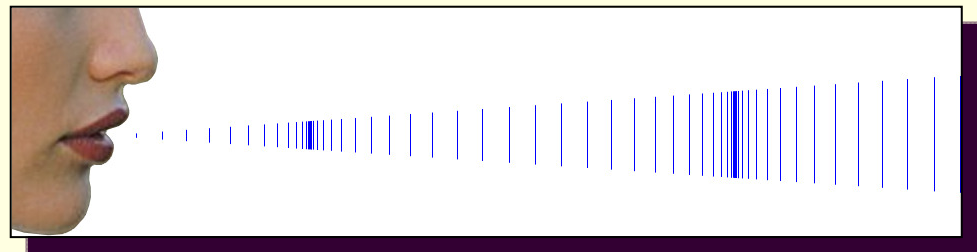


# Цифрова обработка на изображения

Дискретни трансформации в  
честотната област

# Сигнал

- Измеримо явление, което се променя във времето и/или в пространството
  - звук
  - изображение
  - код



01101000101101110110010110001

# Сигнал

---

- Сигналят се изменя
  - има “вълнов” характер
  - в противен случай не би съдържал информация
  
- Представяне на сигналите
  - **пространство – време**
    - измервания за даден момент във времето и/или позиция в пространството
  - **честотна област**
    - точно описание на сигнал по отношение на неговите изменения чрез вълново представяне

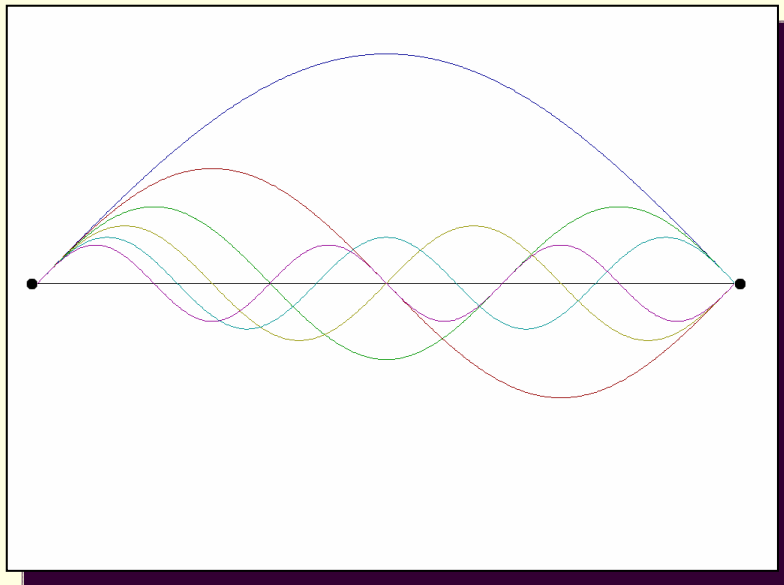
# Звук

---

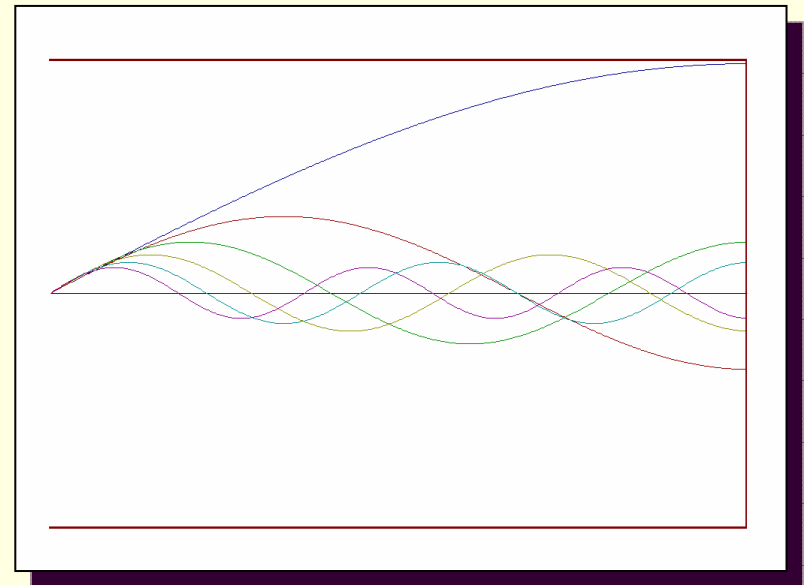
- Механични вибрации на обект в атмосферата
  - вибрациите са вътрешни еластични движения на материята
  - повърхността на обекта трепти и именно измененията причинени от това трептене се разпространяват чрез въздуха далеч от повърхността на обекта
- Всеки обект вибрира с различни “вълни”
  - всяка “вълна” е модел на трептене с конкретна форма



# Вълни на трептене



вълна "string"



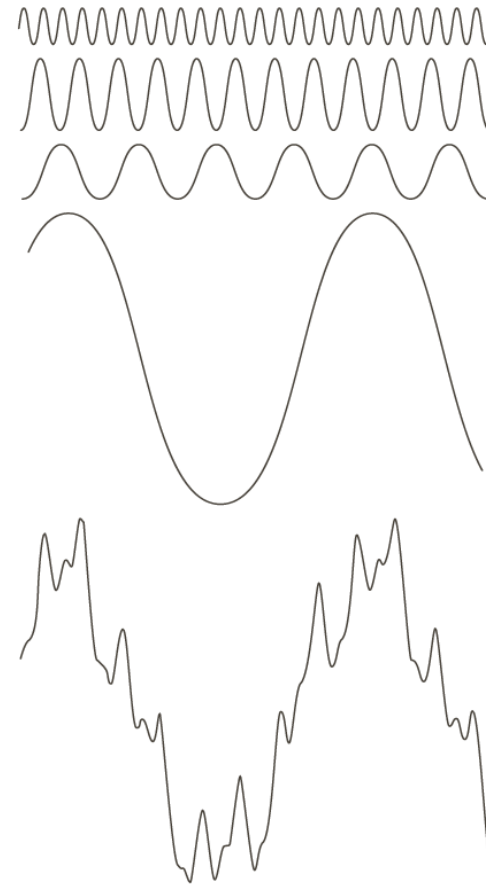
вълна "pipe"

# Вълни на трептене

Всяка сложна функция  
може да се представи като  
сума на прости синусоидни  
и косинусоидни сигнали  
(хармоници)

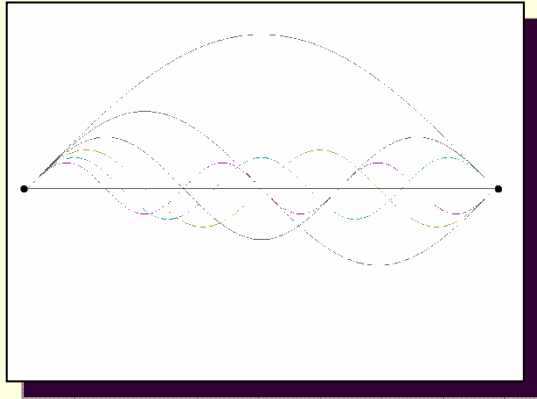


Joseph Fourier  
1768-1830

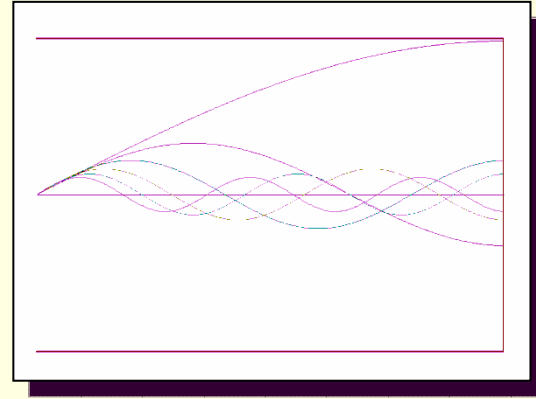
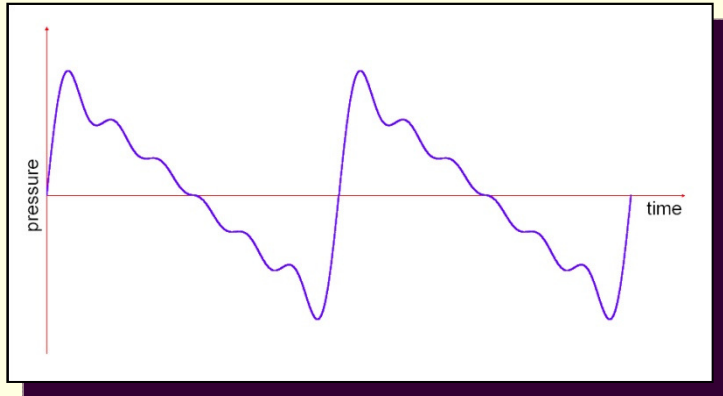


**FIGURE 4.1** The function at the bottom is the sum of the four functions above it. Fourier's idea in 1807 that periodic functions could be represented as a weighted sum of sines and cosines was met with skepticism.

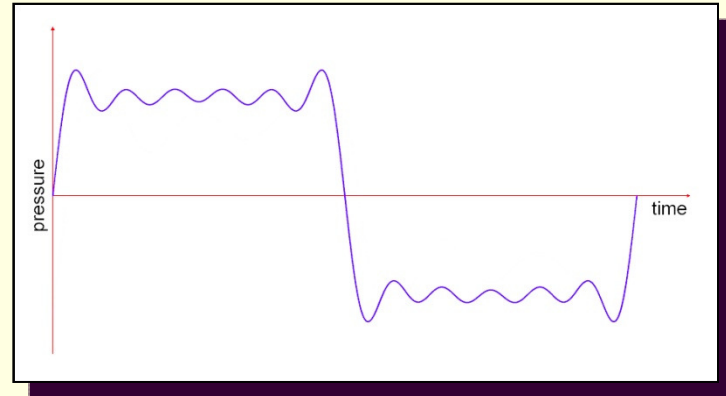
# Звукови вълни



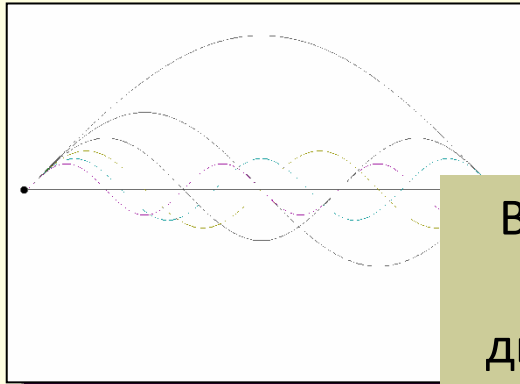
“string” звук →



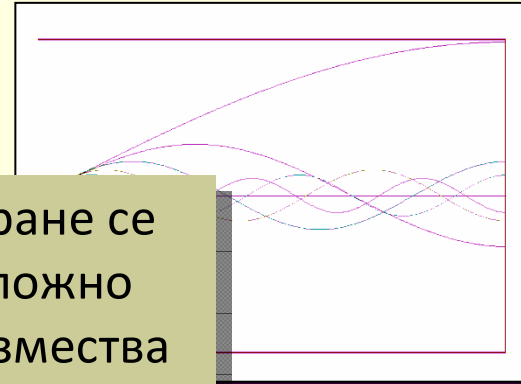
“pipe” звук →



# Звукови вълни



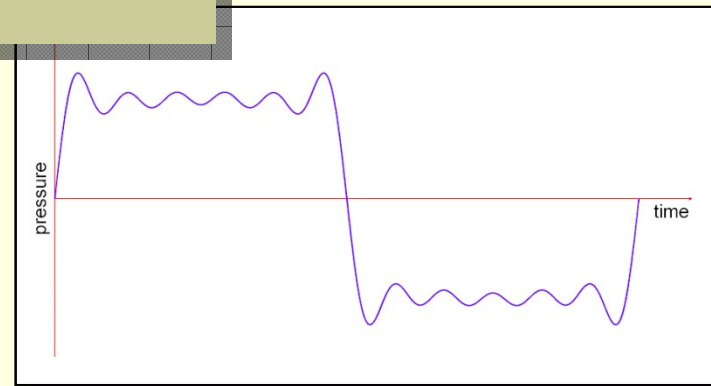
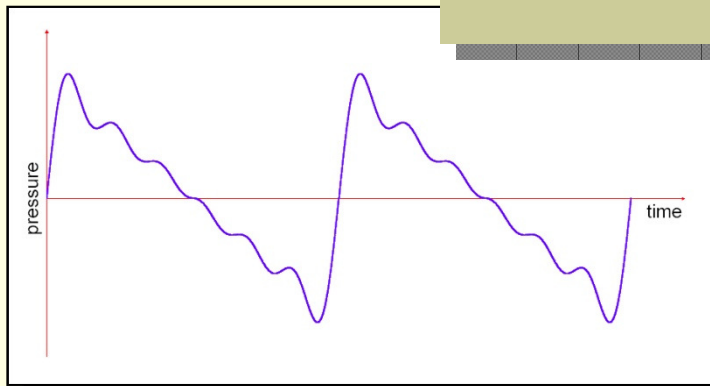
“string”



“pipe” звук



Вълните на вибриране се сумират в едно сложно движение, което измества въздуха около вибриращия обект

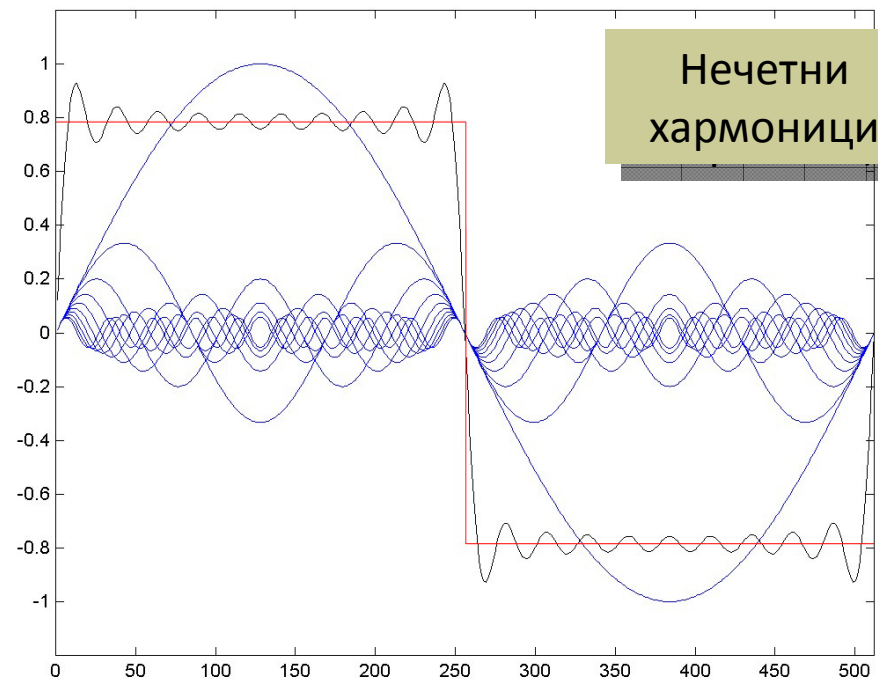


Четни  
хармоници

Нечетни  
хармоници

# Представяне на сигналите

- Всеки реален сигнал има представяне в честотната област
- хармониците (син цвят) се сумират в “накъдрена” квадратна вълна (черен цвят)
- с увеличаване на броя на сумираните хармоници се апроксимира квадратна вълна (червен цвят)

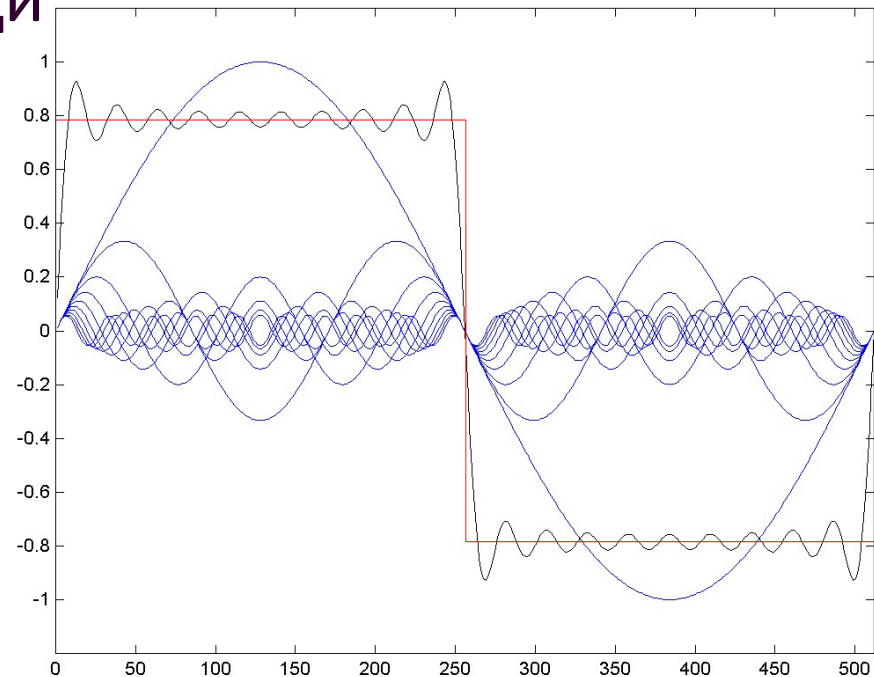


$$sq(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (2n+1)t \right]$$

# Представяне на сигналите

- Всеки *периодичен* сигнал може да се представи като сума на синусоиди

- синусоидите се наричат **базови функции**
- коефициентите се наричат **коефициенти на Фурие**



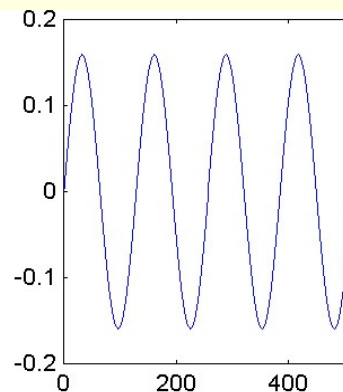
$$sq(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (2n+1)t \right]$$

# Представяне на сигналите

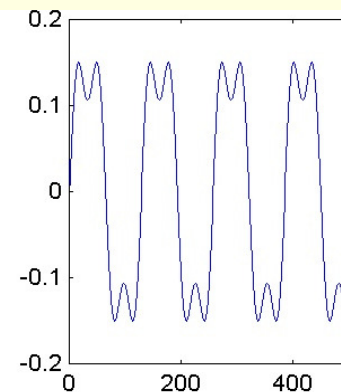
- *Пример:* частична сума на хармоници на квадратна вълна

границата на дадена последователност от частични суми е точно квадратна вълна

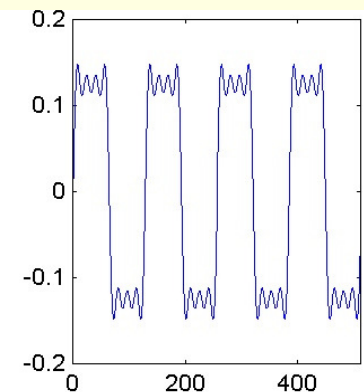
(границата на сума от  $n$  синусоиди когато  $n$  клони към безкрайност)



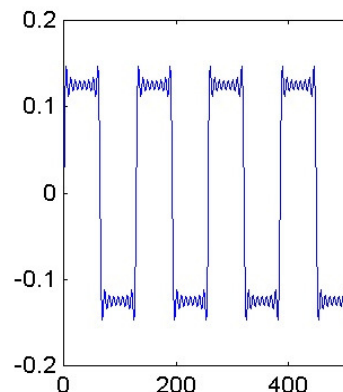
1 синусоида



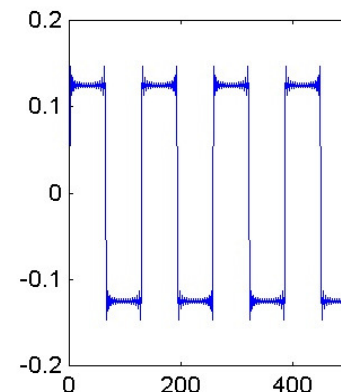
2 синусоиди



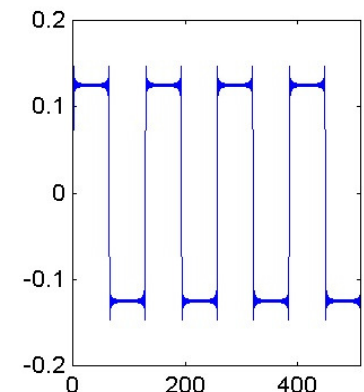
4 синусоиди



8 синусоиди

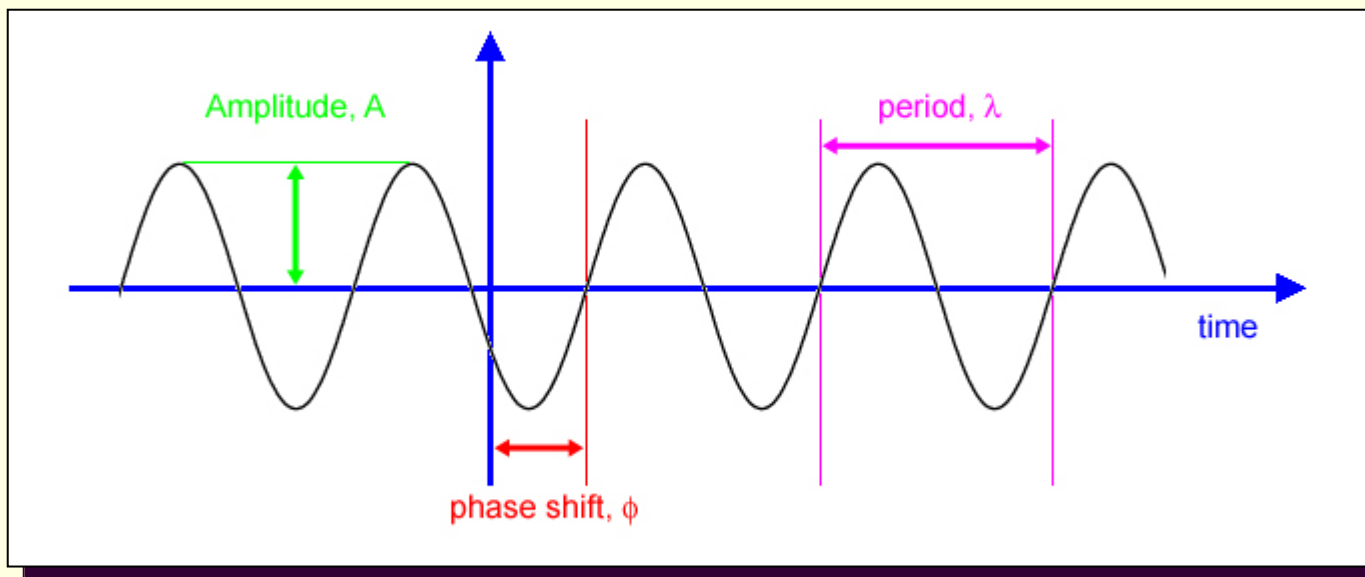


16 синусоиди



32 синусоиди

# Синусоида



$$f(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} t - \phi\right)$$

$1/\lambda$  е честота на синусоидата [Hz]  
 $2\pi/\lambda$  е ъглова честота [rad/s]



# Скаларно произведение

---

- **Скаларно произведение на два вектора**
  - *scalar product, dot product, inner product*

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t) g^*(t) dt$$

- където  $g^*(t)$  е комплексно спрегнатата функция на  $g(t)$

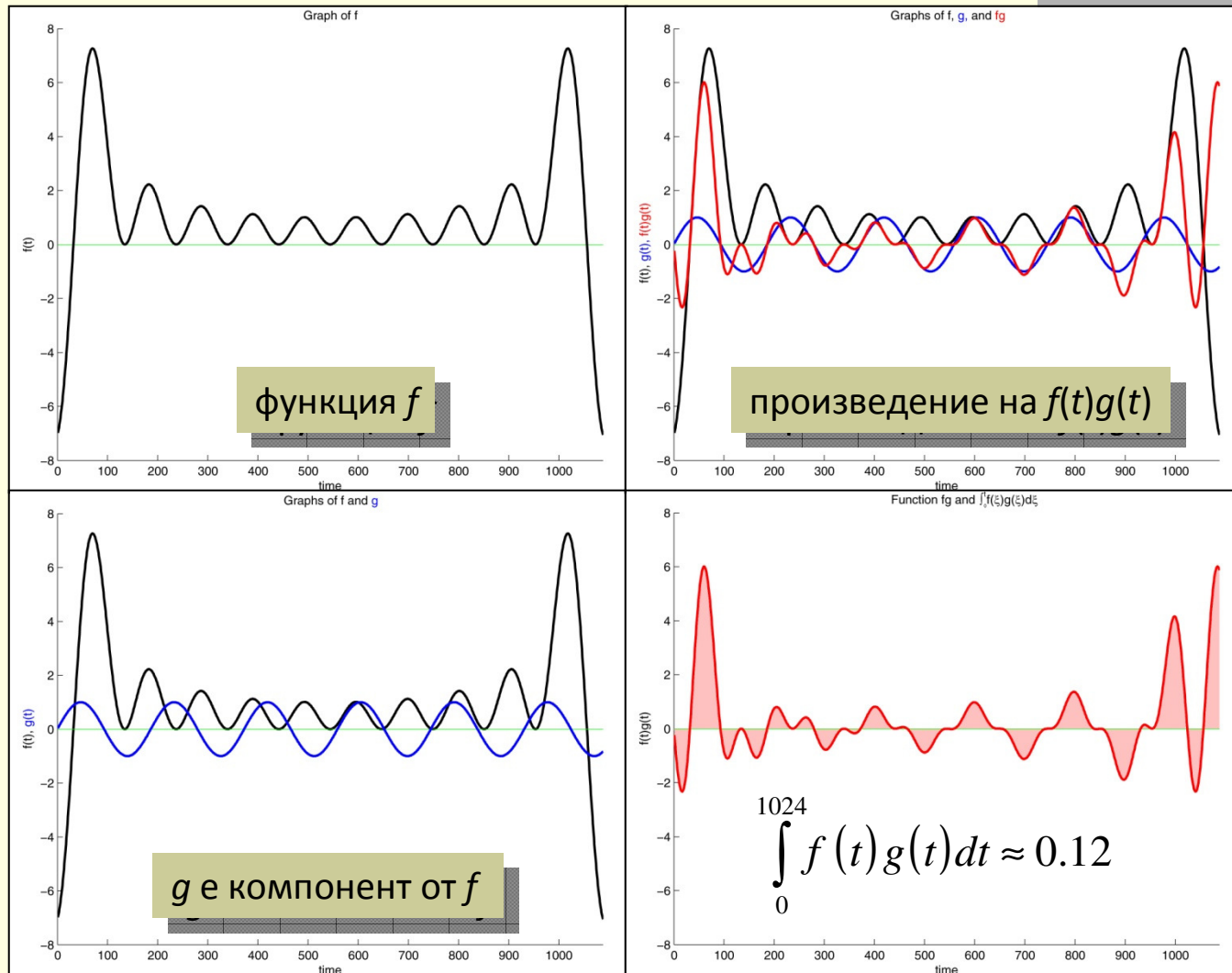
# Скаларно произведение

- Определя подобие между две функции в интервала  $[-\lambda/2, \lambda/2]$

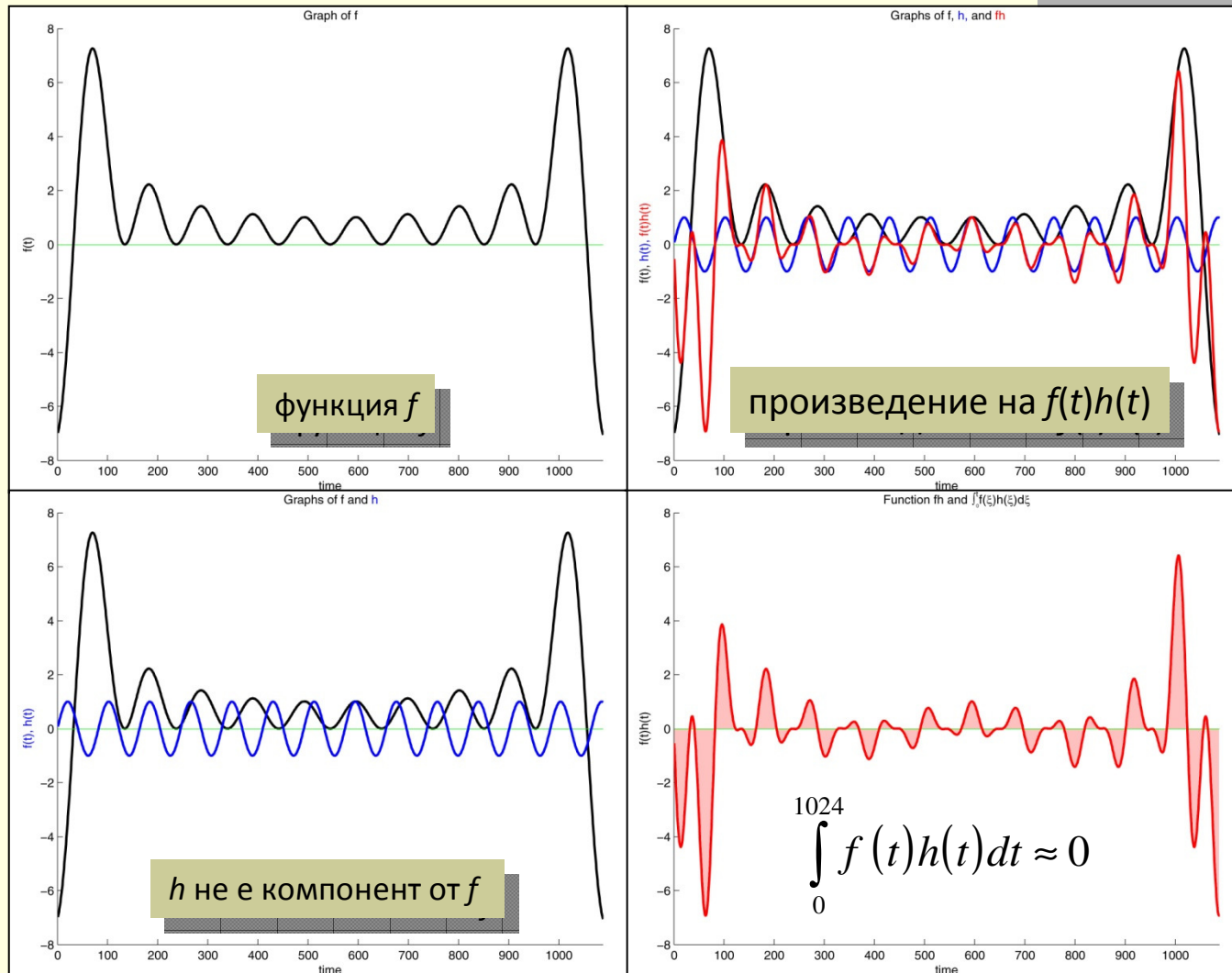
$$\langle f, g \rangle = \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t) g^*(t) dt$$

- може да се разглежда като количествен израз на съдържанието на  $g$  в  $f$  или като **проекция** на  $f$  върху  $g$
- скаларното произведение е **максимално** когато  $f = g$  (и имат еднаква енергия)
- скаларното произведение е **нула** когато  $f$  и  $g$  са напълно различни

# Скалярно произведение



# Скалярно произведение



# Скаларно произведение

## 3 различни представяния

- представянето с **реални** коефициенти съдържа **амплитудата** на синусоидата

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} t\right) dt$$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} t\right) dt$$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t) \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} t\right) - i \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} t\right) \right] dt$$

$$= \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda} t} dt$$

$$= \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$e^{-i\frac{2\pi}{\lambda} t} = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} t\right) - i \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} t\right)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{\lambda}$$

- представянето с **комплексни** коефициенти съдържа **амплитудата** и **фазата** на синусоидата

# Фурие последователност

- декомпозиция на  $\lambda$ -периодичен сигнал като сума от синусоиди

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{\lambda} t\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda} t\right)$$

- представянето на функция чрез **Фурие последователност** е сума от синусоидни базисни функции умножени с коефициенти

- **Фурие коефициентите** са скалярно произведение на функцията и базисните функции
- **базисните функции** съответстват на различни вълни на трептене

$$A_n = \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t) \left[ \cos\left(\frac{2\pi n}{\lambda} t - \phi_n\right) \right] dt \text{ for } n \geq 0$$
$$B_n = \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t) \left[ \sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda} t - \phi_n\right) \right] dt \text{ for } n \geq 0$$

- $\lambda$ -периодичен сигнал:  $\exists \lambda \in \mathfrak{R}$  такава че  $f(t \pm n\lambda) = f(t)$

# Фурије последователност

- може да се представи и чрез комплексни експоненти

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{+i\frac{2\pi n}{\lambda}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n| e^{+i\left(\frac{2\pi n}{\lambda}t + \phi_n\right)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n| \cos\left(\frac{2\pi n}{\lambda}t + \phi_n\right) + i \cdot |C_n| \sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda}t + \phi_n\right) \end{aligned}$$

$$i = \sqrt{-1}$$

$$C_n = |C_n| e^{+i\phi_n}$$

$$C_n = |C_n| e^{+i\phi_n} = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t) e^{-i\frac{2\pi n}{\lambda}t} dt$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t) \left[ \cos\left(\frac{2\pi n}{\lambda}t - \phi_n\right) - i \cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda}t - \phi_n\right) \right] dt$$

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$$

$$f(t + n\lambda) = f(t)$$

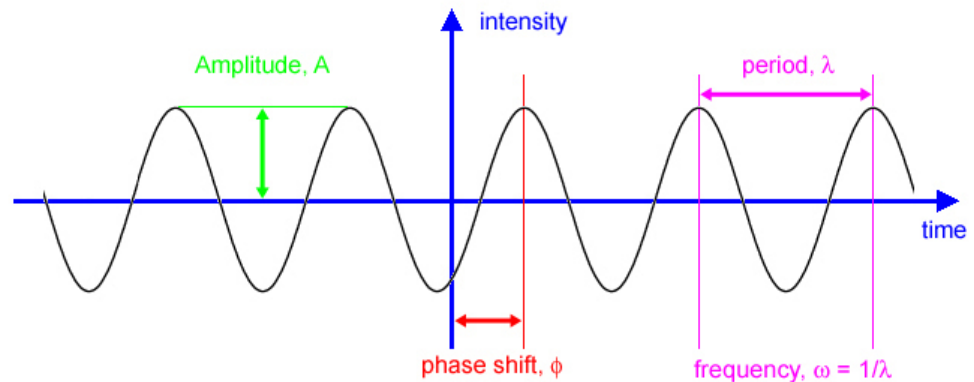
завсяко целочислено  $n$

# Фурие последователност

- Фурие коефициентите са комплексни числа

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{+i \frac{2\pi n t}{\lambda}} \quad \text{където} \quad C_n = |C_n| e^{+i \phi_n}.$$

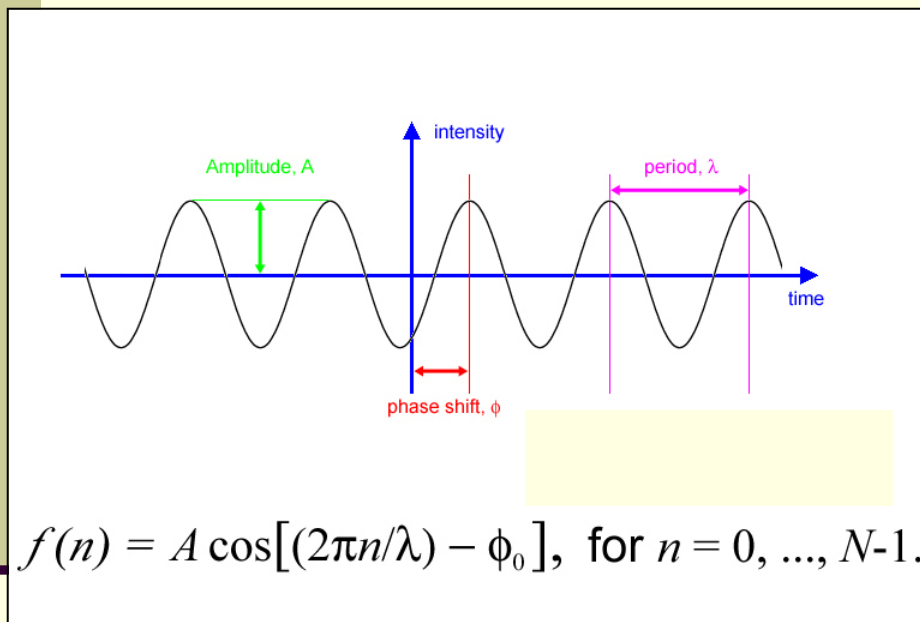
$C_n$  представя големината  $A = |C_n|$  и относителната фаза  $\phi$  на онази част от оригиналния сигнал  $f(t)$ , която е синусоида с честота  $\omega_n = n / \lambda$



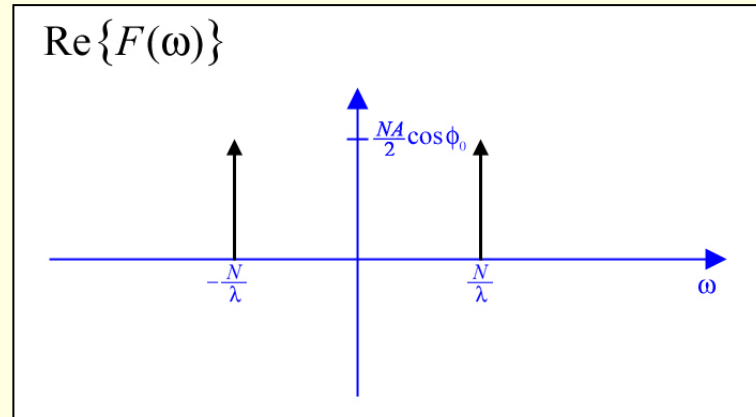


# Фурие последователност

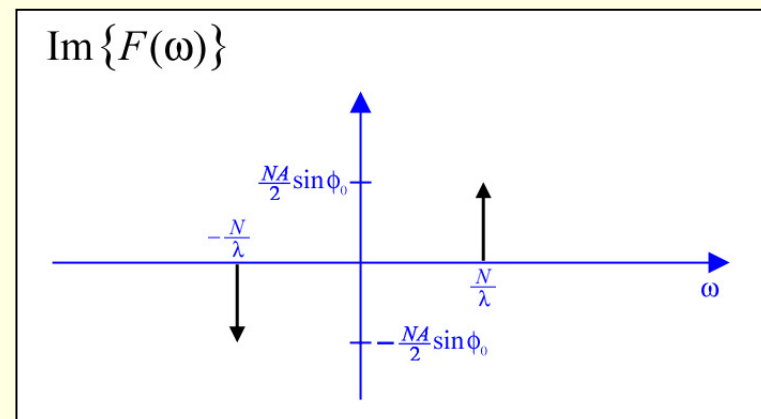
- реална+имагинерна част



Фурие последователността на косинусова функция е двойка импулси с комплексни амплитуди

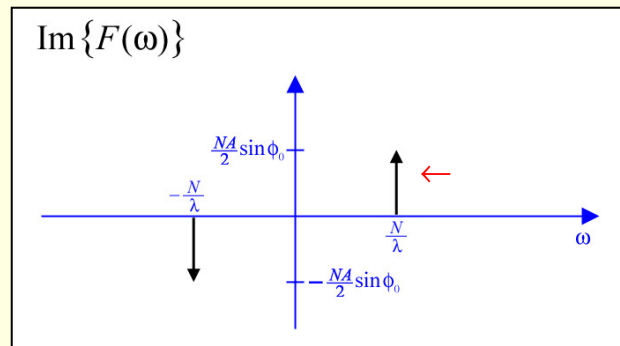
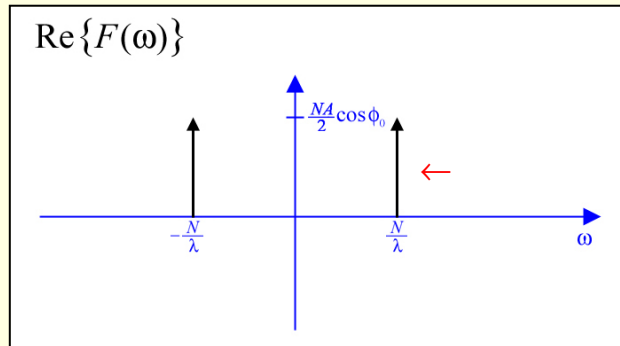


$$F(\omega) = \left(\frac{NA}{2} \cos \phi\right) [\delta(\omega + N/\lambda) + \delta(\omega - N/\lambda)] + i\left(\frac{NA}{2} \sin \phi\right) [-\delta(\omega + N/\lambda) + \delta(\omega - N/\lambda)]$$

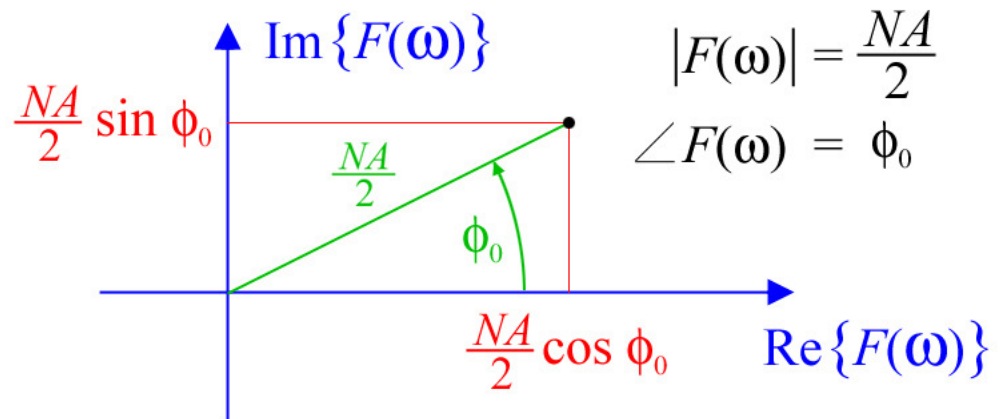


# Фурије последователност

- Реалните и имагинерните части при положителни честоти,  $N/\lambda$ , определят големината  $NA/2$  и фазата  $\phi_0$



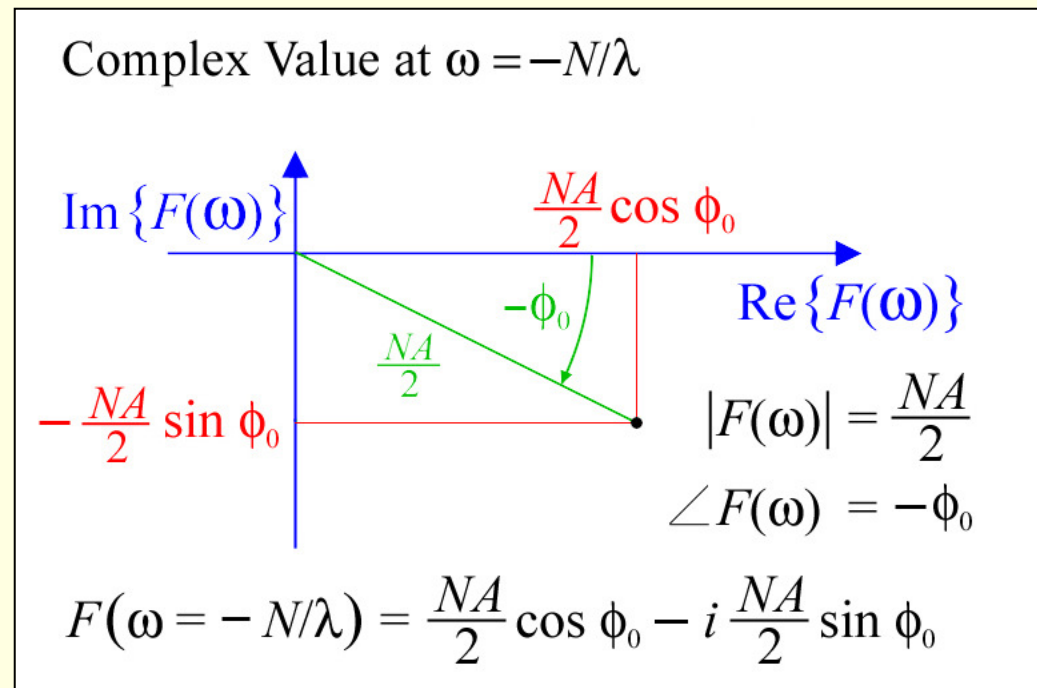
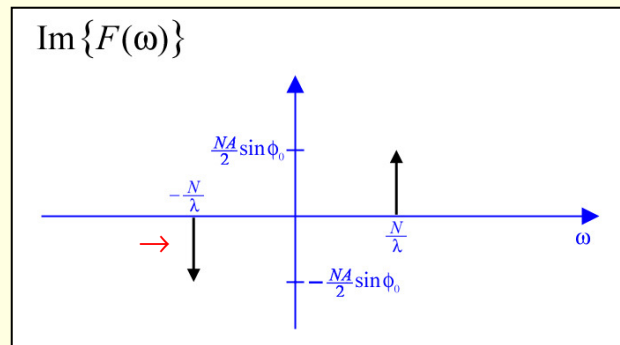
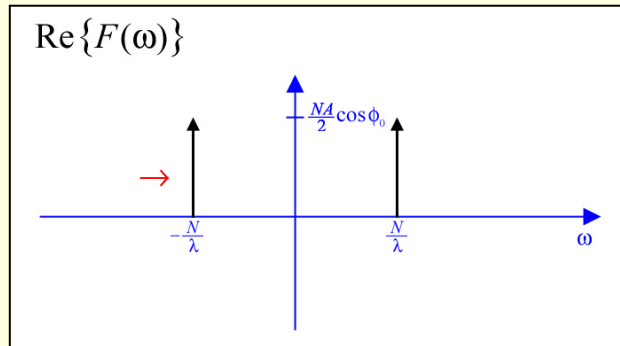
Complex Value at  $\omega = + N/\lambda$



$$F(\omega = +N/\lambda) = \frac{NA}{2} \cos \phi_0 + i \frac{NA}{2} \sin \phi_0$$

# Фурије последователност

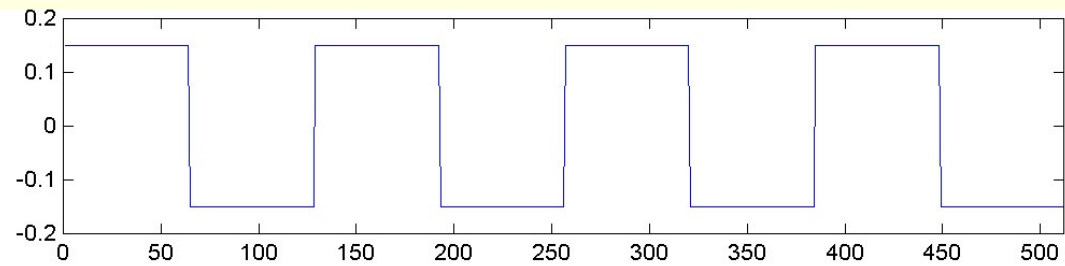
- Реалните и имагинерните части при отрицателни честоти,  $-N/\lambda$ , определят големината  $NA/2$  и фазата  $-\phi_0$



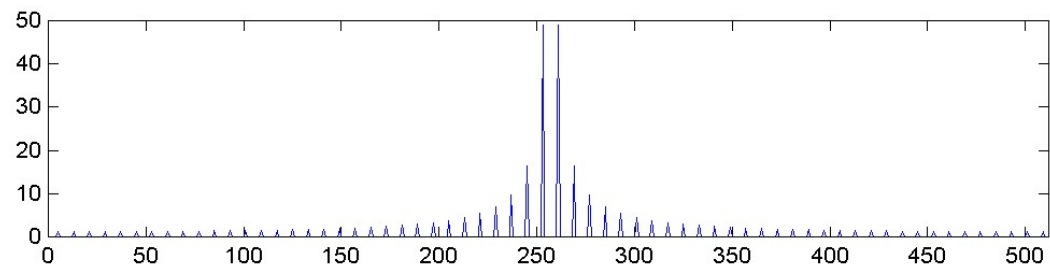
# Фурие последователност

- Фурие последователност на квадратна вълна

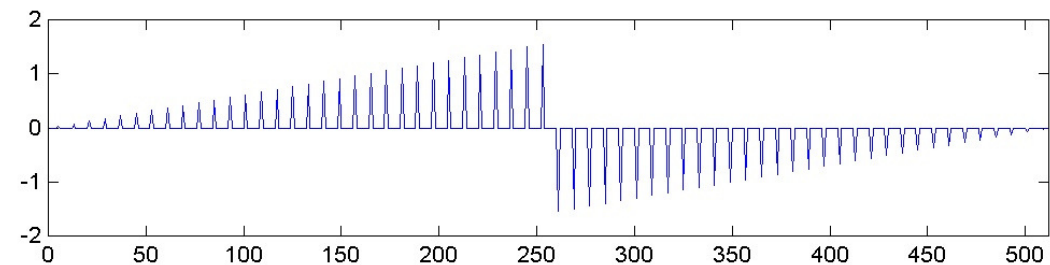
*Сигнал във  
времето  
област*



*Фурие  
амплитуда*



*Фурие фаза*



# Фурие трансформация

- Декомпозиция на **непериодичен** сигнал в безкрайна сума от синусоиди

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{i\Phi(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i2\pi\omega t} dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos(2\pi\omega t) + i \sin(2\pi\omega t)] dt$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i2\pi\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| e^{-i(2\pi\omega t + \Phi(\omega))} d\omega$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) [\cos(2\pi\omega t) - i \sin(2\pi\omega t)] d\omega$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| [\cos(2\pi\omega t + \Phi(\omega)) - i \sin(2\pi\omega t + \Phi(\omega))] d\omega$$

# Дискретна Фурие трансформация

- Дискретен сигнал  $\{h_k \mid k = 0, 1, 2, \dots, N-1\}$  с крайна дължина  $N$  може да се представи като претеглена сума от  $N$  синусоиди  $\{e^{-i2\pi kn/N} \mid n = 0, 1, 2, \dots, N-1\}$

$$h_k = \sum_{n=0}^{N-1} H_n e^{-i2\pi kn/N}$$

- където множеството  $\{H_n \mid n = 0, 1, 2, \dots, N-1\}$  са Фурие коефициентите дефинирани като проекции на оригиналния сигнал върху синусоида  $n$

$$H_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{+i2\pi kn/N}$$

# 2D трансформация на Фурие

- Фурие коефициентите се представят като скаларни произведения

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi\omega t} dt = \langle f(t), e^{+i2\pi\omega t} \rangle$$

$$H_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-i2\pi kn/N} = \langle h_k, e^{+i2\pi kn/N} \rangle$$

- т.е. оценяват подобие на

$$f(t) \text{ и } e^{+i2\pi\omega t} \text{ за } t \in (-\infty, \infty)$$

- или на последователностите

$$\{h_k\}_{k=0}^{N-1} \text{ и } \{e^{+i2\pi kn/N}\}_{k=0}^{N-1}$$

# 2D трансформация на Фурие

Непрекъснатата Фурие трансформация допуска, че безкрайно изображение съществува в крайна област от безкрайна равнина



$$I(r, c) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(v, u) e^{+i2\pi(vr+uc)} dudv$$

$$I(v, u) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(r, c) e^{-i2\pi(vr+uc)} dcdr$$



# 2D трансформация на Фурие

Дискретната Фурие трансформация допуска, че изображението съществува върху затворена повърхнина – тороид



Photo: Bart Nagel [www.bartnagel.com](http://www.bartnagel.com)

$$I(r, c) = \sum_{v=0}^{R-1} \sum_{u=0}^{C-1} I(v, u) e^{+i2\pi \left( \frac{vr}{R} + \frac{uc}{C} \right)}$$

$$I(v, u) = \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{c=0}^{C-1} I(r, c) e^{-i2\pi \left( \frac{rv}{R} + \frac{cu}{C} \right)}$$

# 2D трансформация на Фурие

- Ако  $I(r,c)$  е монохроматично изображение с  $R$  реда и  $C$  колони, то Фурие представянето на изображението е

$$I(r,c) = \sum_{u=0}^{R-1} \sum_{v=0}^{C-1} \mathbf{I}(v,u) e^{+i2\pi\left(\frac{vr}{R} + \frac{uc}{C}\right)},$$

- където Фурие коефициентите ( $R \times C$  на брой) са:

$$\mathbf{I}(v,u) = \frac{1}{RC} \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{c=0}^{C-1} I(r,c) e^{-i2\pi\left(\frac{vr}{R} + \frac{uc}{C}\right)}$$

(комплексните експоненти са синусоиди)

# 2D трансформация на Фурие

- Ако допуснем, че  $R = C = N$ , то

$$e^{\pm i 2\pi \left(\frac{vr}{R} + \frac{uc}{C}\right)} = e^{\pm i \frac{2\pi}{N} (vr + uc)} = e^{\pm i \frac{2\pi\omega}{N} (r \sin \theta + c \cos \theta)}$$

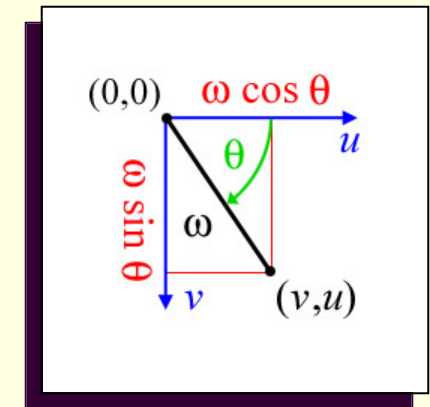
- където

$$v = \omega \sin \theta, \quad u = \omega \cos \theta, \quad \omega = \sqrt{v^2 + u^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)$$

- Ако  $\lambda = \frac{N}{\omega}$ ,

- то

$$e^{\pm i 2\pi \frac{1}{\lambda} (r \sin \theta + c \cos \theta)} = \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (r \sin \theta + c \cos \theta) \right] \pm i \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (r \sin \theta + c \cos \theta) \right].$$



В изображението началото на координатната система за  $r$  и  $c$  е в горния ляв ъгъл, затова  $\theta$  е положително и нараства по посока на часовниковата стрелка

# 2D трансформация на Фурие

- Реалната и имагинерната части са синусоидални “решетки” с единична амплитуда, период  $\lambda$  и посока  $\theta$

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{\pm i 2 \pi \frac{1}{\lambda} (r \sin \theta + c \cos \theta)} \right\} = \pm \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (r \sin \theta + c \cos \theta) \right]$$

$$\operatorname{Im} \left\{ e^{\pm i 2 \pi \frac{1}{\lambda} (r \sin \theta + c \cos \theta)} \right\} = \pm \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (r \sin \theta + c \cos \theta) \right]$$

- където

- $\frac{\omega}{N}$  – честота

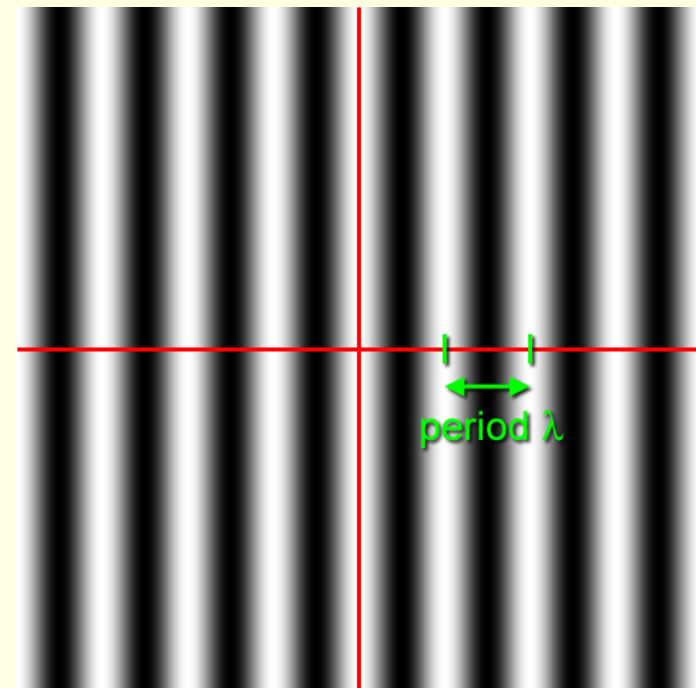
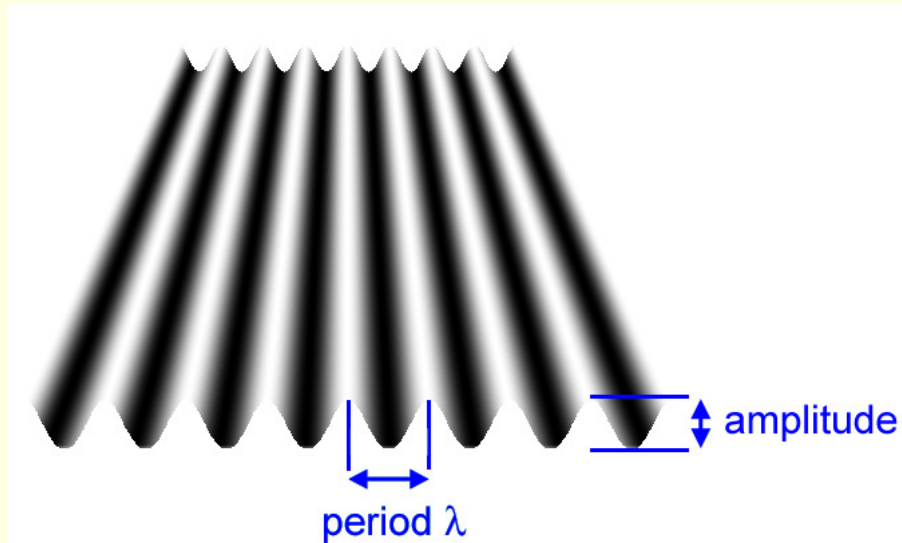
- $\frac{2\pi\omega}{N}$  – радиантна честота

- $\lambda = \frac{N}{\omega}$  – дължината на вълната в пиксели

# 2D трансформация на Фурие

$$I(r, c) = \frac{A}{2} \left\{ \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (r \cdot \sin \theta + c \cdot \cos \theta) + \phi \right] + 1 \right\}$$

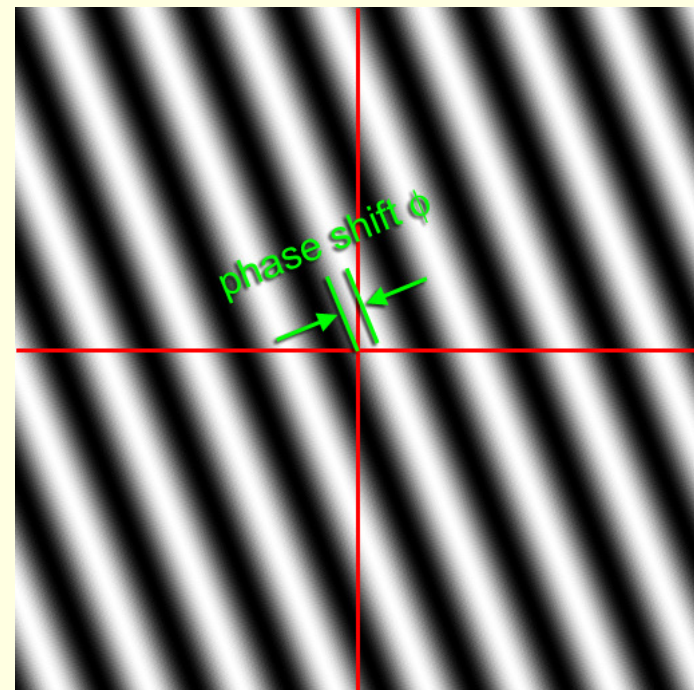
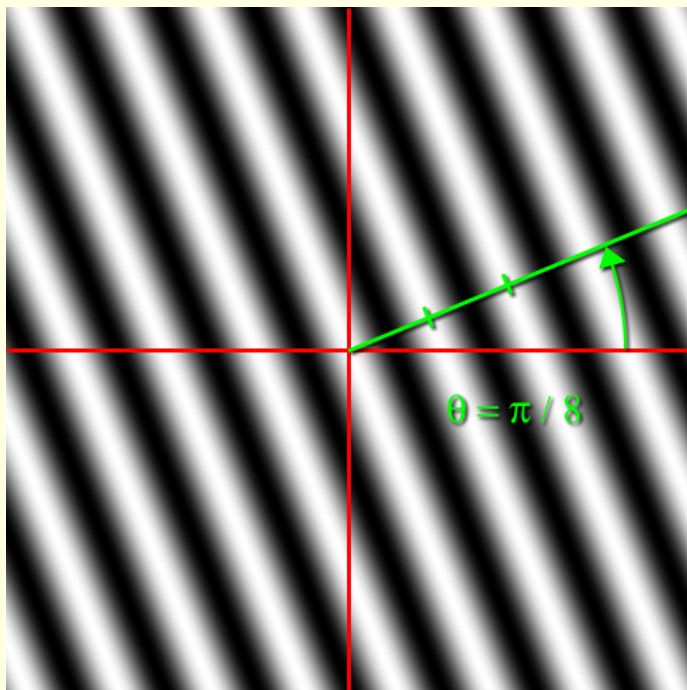
- 2D синусоидите във Фурие представянето на изображението са
  - равнинни вълни с амплитуди изразени в нюанси на сивото (grayscale) и период определен като дължина в брой пиксели



# 2D трансформация на Фурие

$$I(r, c) = \frac{A}{2} \left\{ \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (r \cdot \sin \theta + c \cdot \cos \theta) + \phi \right] + 1 \right\}$$

- 2D синусоидите във Фурие представянето на изображението имат
  - специфична ориентация и фазово отместване



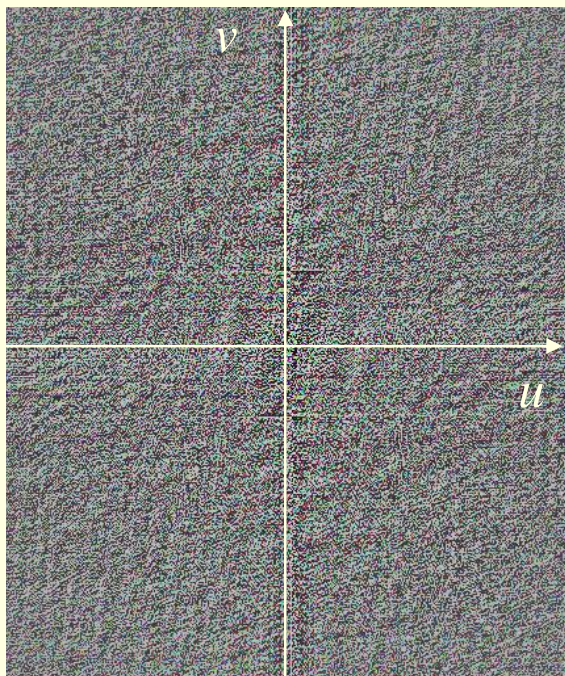


# 2D трансформация на Фурие

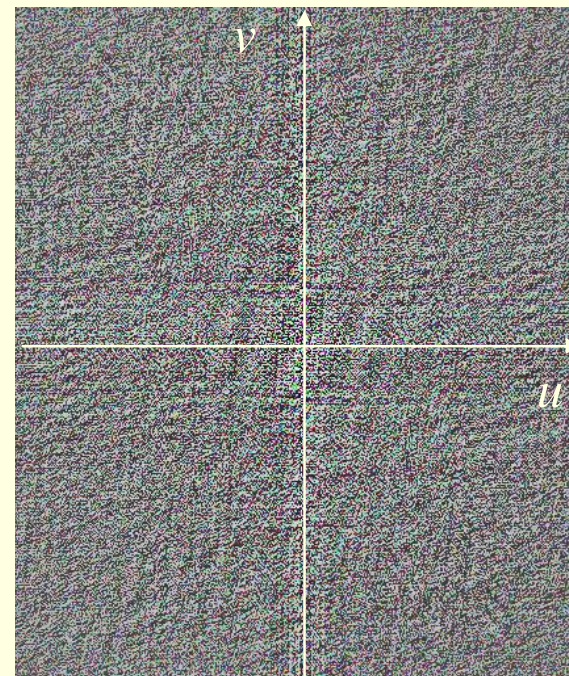
Трансформация на Фурие за изображение



$I$



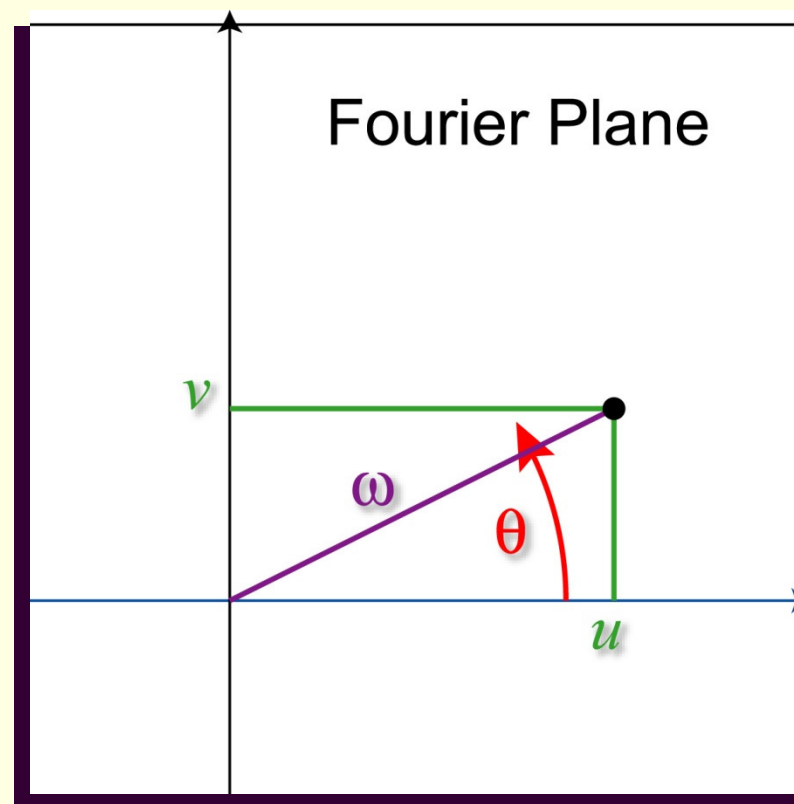
$\text{Re}\{F\{I\}\}$



$\text{Im}\{F\{I\}\}$

# Точка в честотната област

- Точката с координати  $(u, v)$ , т.е. колона  $u$  и ред  $v$  представлява синусоида с дължина на вълната  $\omega$  и ориентация  $\theta$  (ако  $R = C = N$ )
  - амплитудата е  $\omega = N/\lambda$
  - където  $\lambda$  е дължината на вълната и  $R = C = N$





# Точка в честотната област

- В честотното представяне на изображение честотите  $\lambda_u$  и  $\lambda_v$  се представят пропорционално чрез стойностите на R и C

$$\lambda_u = \frac{C}{u} \quad \text{и} \quad \lambda_v = \frac{R}{v} \quad \text{пиксела}$$

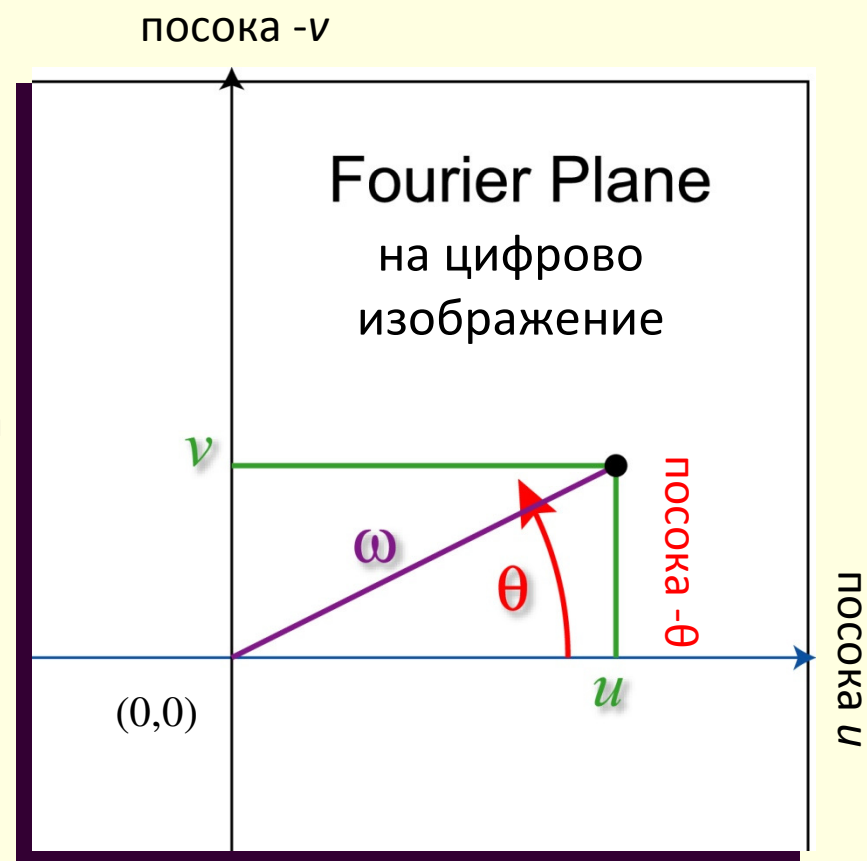
- посоката и дължината на вълната са

$$\theta_{\text{wf}} = \tan^{-1}\left(\frac{vC}{uR}\right), \quad \lambda_{\text{wf}} = \sqrt{\left(\frac{C}{u}\right)^2 + \left(\frac{R}{v}\right)^2}$$

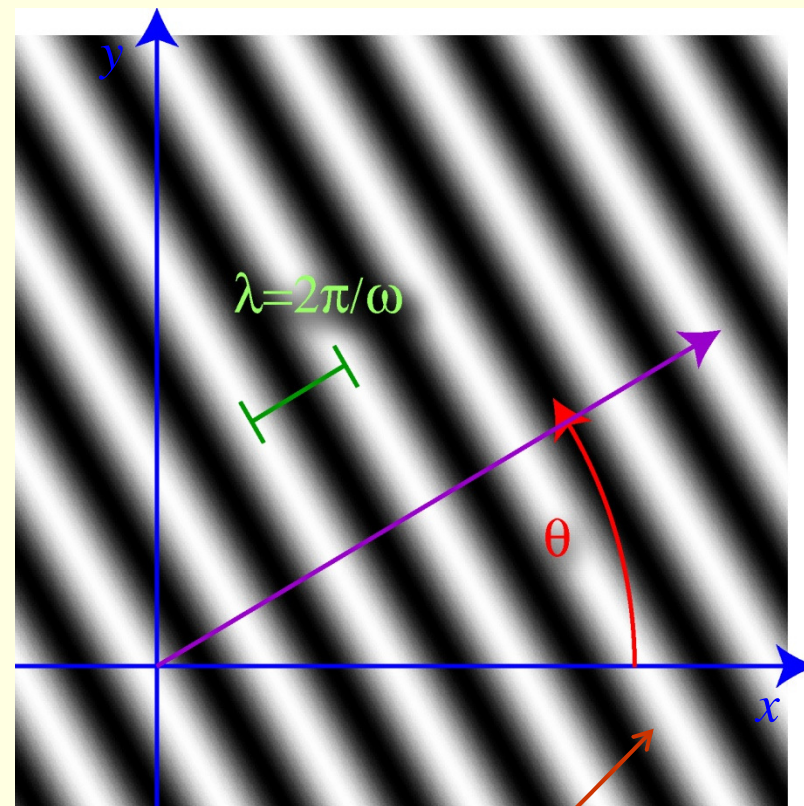
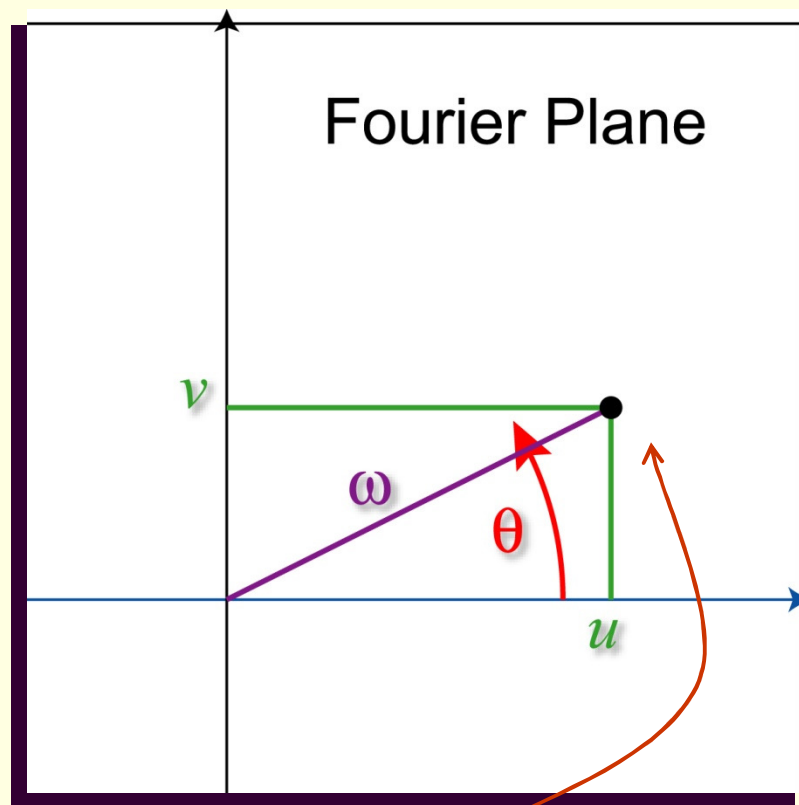
- честотата се представя пропорционално чрез стойностите на R и C

$$\omega_u = \frac{u}{C}, \quad \omega_v = \frac{v}{R}$$

$$\omega_{\text{wf}} = 1 / \sqrt{\left(\frac{C}{u}\right)^2 + \left(\frac{R}{v}\right)^2} \quad \text{периода}$$



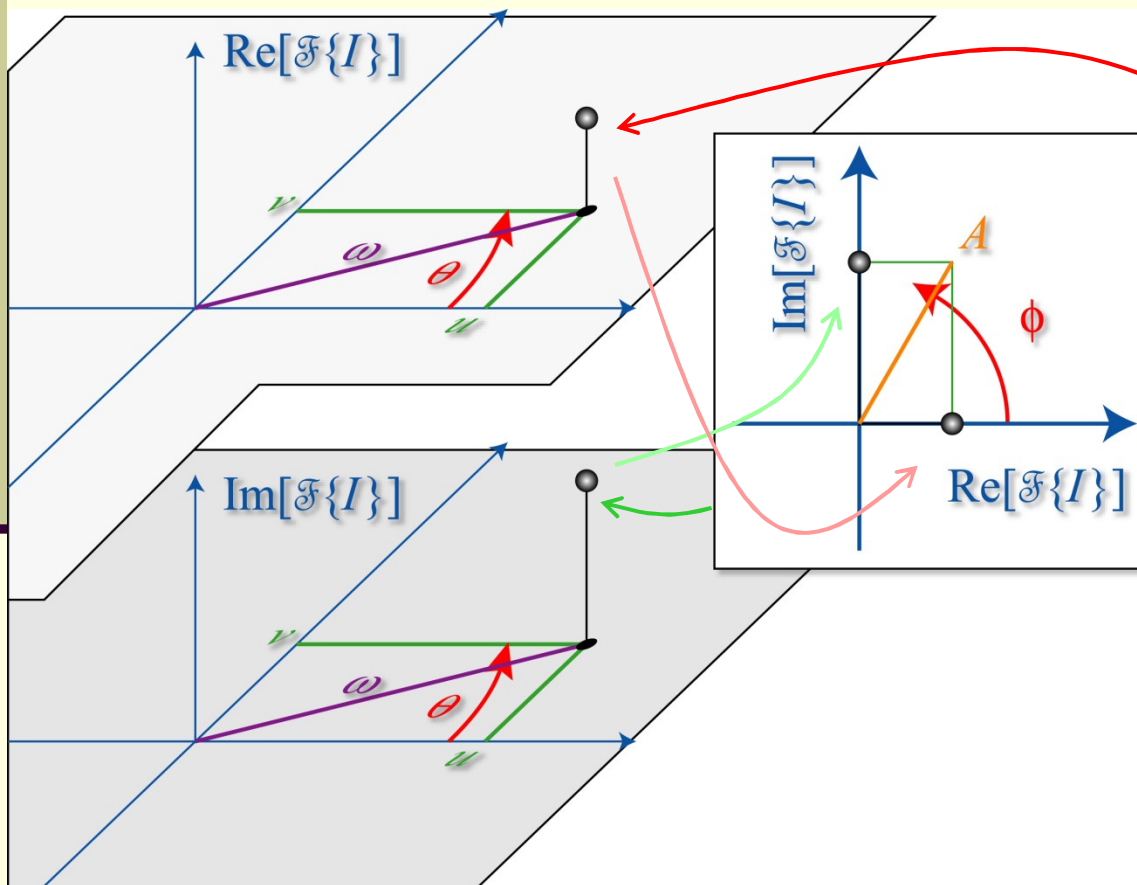
# Точка в честотната област



Точката представя определена синусоида от решетката

# Коефициенти на Фурие

- Стойността на коефициент във Фурие представянето е **КОМПЛЕКСНО ЧИСЛО**

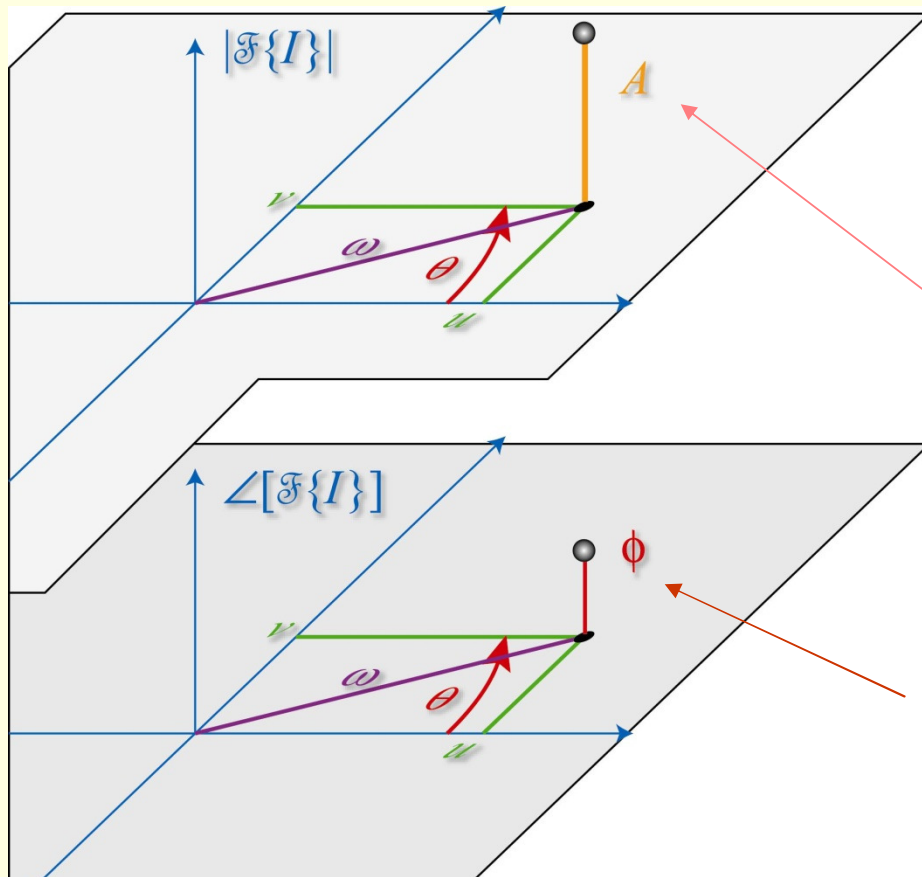


комплексно  
число с  
реална и  
имагинерна  
части

Числото може да се представи чрез големина  $A$  и фаза  $\phi$ , който представляват амплитудата и фазовото отместване на синусоидата с честота  $\omega$  и посока  $\theta$

# Коефициенти на Фурие

Представянето с **големина** и **фаза** има по-ясен физически смисъл

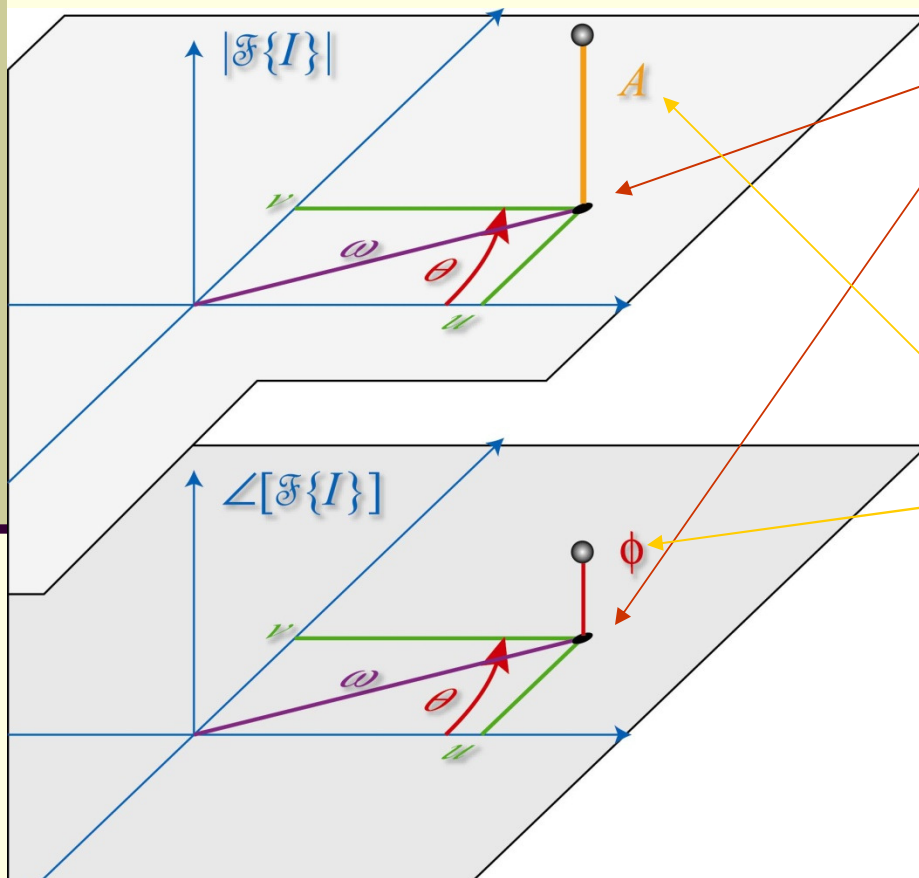


Големината  $A(\omega, \theta)$  в точка  $(\omega, \theta)$  представя амплитудата на синусоидата

Фазата  $f(\omega, \theta)$  представя отместването спрямо началото на координатната система

# Коефициенти на Фурие

Коефициент на Фурие в точка  $(u, v)$



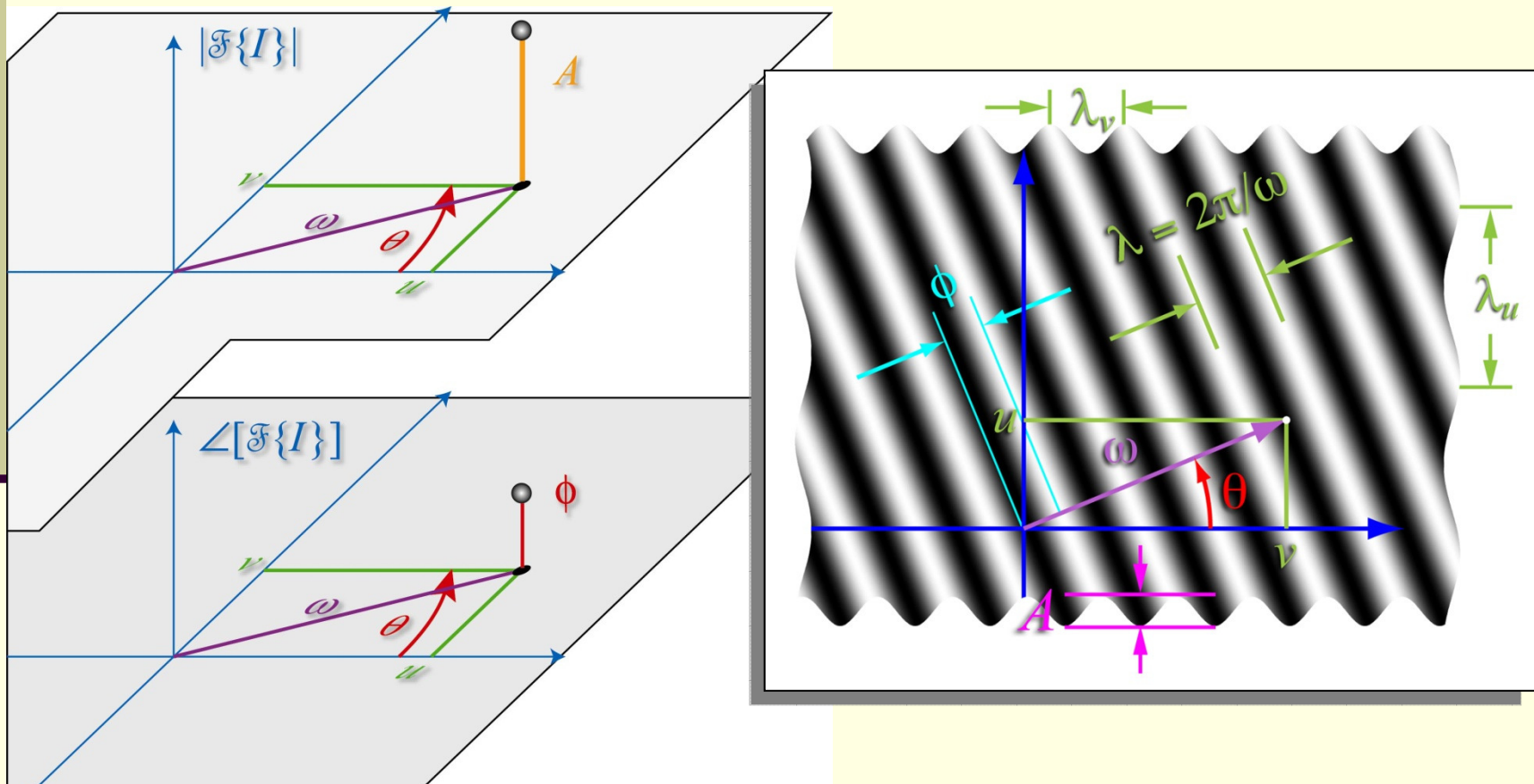
Точка  $(u, v)$  в честотната област

представя синусоидалната  
решетка за честота  $\omega$  и  
ориентация  $\theta$

Комплексната стойност  $F(u, v)$   
от Фурие трансформацията в  
точка  $(u, v)$  представя  
амплитудата  $A$  и фазовото  
отместване  $\phi$  на синусоидата

# Коефициенти на Фурие

Коефициент на Фурие в точка  $(u, v)$





# Фурие трансформация

Фурие трансформация на изображение

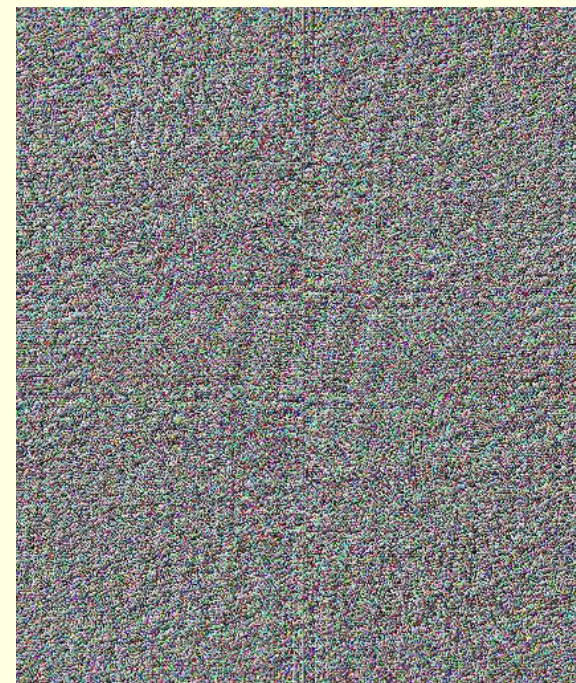
■ *големина и фаза*



$I$



$\log\{|F\{I\}|^2+1\}$



$\angle[F\{I\}]$



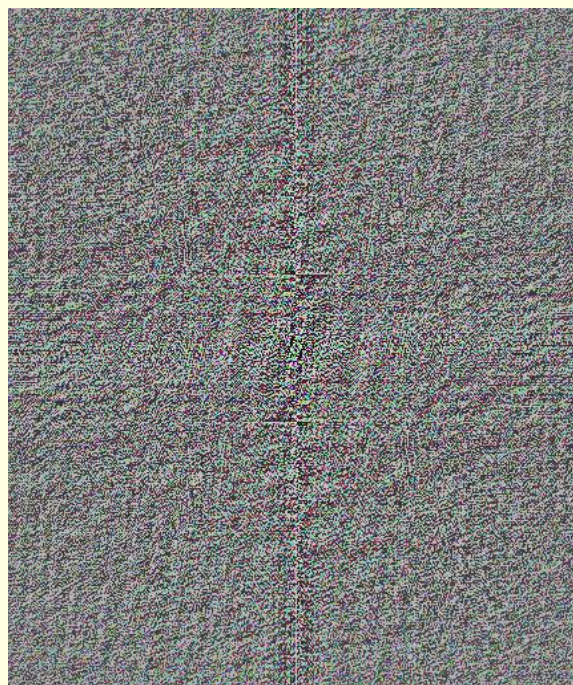
# Фурие трансформация

Фурие трансформация на изображение

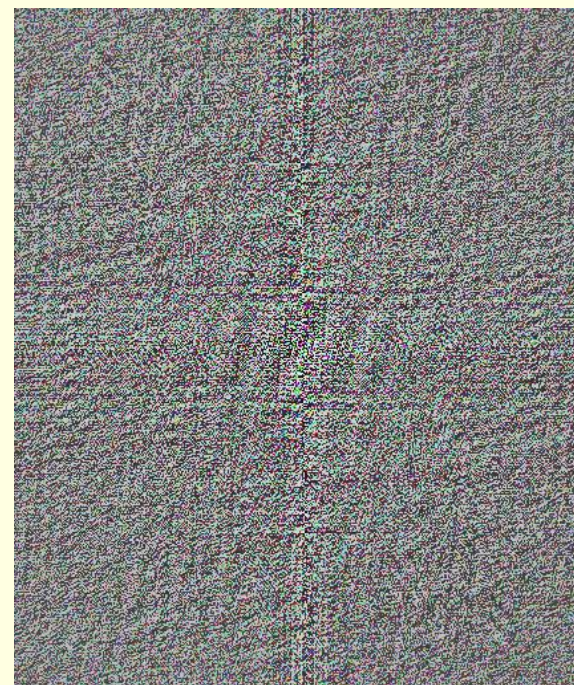
■ *реална и имагинерна част*



$f$



$\text{Re}[F\{f\}]$



$\text{Im}[F\{f\}]$



# Спектрална функция

- Спектралната функция на даден сигнал е квадрата на големината на Фурие трансформацията

$$\begin{aligned} |\mathbf{I}(u, v)|^2 &= \mathbf{I}(u, v) \mathbf{I}^*(u, v) \\ &= [\operatorname{Re} \mathbf{I}(u, v) + i \operatorname{Im} \mathbf{I}(u, v)] [\operatorname{Re} \mathbf{I}(u, v) - i \operatorname{Im} \mathbf{I}(u, v)] \\ &= [\operatorname{Re} \mathbf{I}(u, v)]^2 + [\operatorname{Im} \mathbf{I}(u, v)]^2 \end{aligned}$$

- Във всяка точка  $(u, v)$  спектралната функция показва квадрата на честотния коефициент

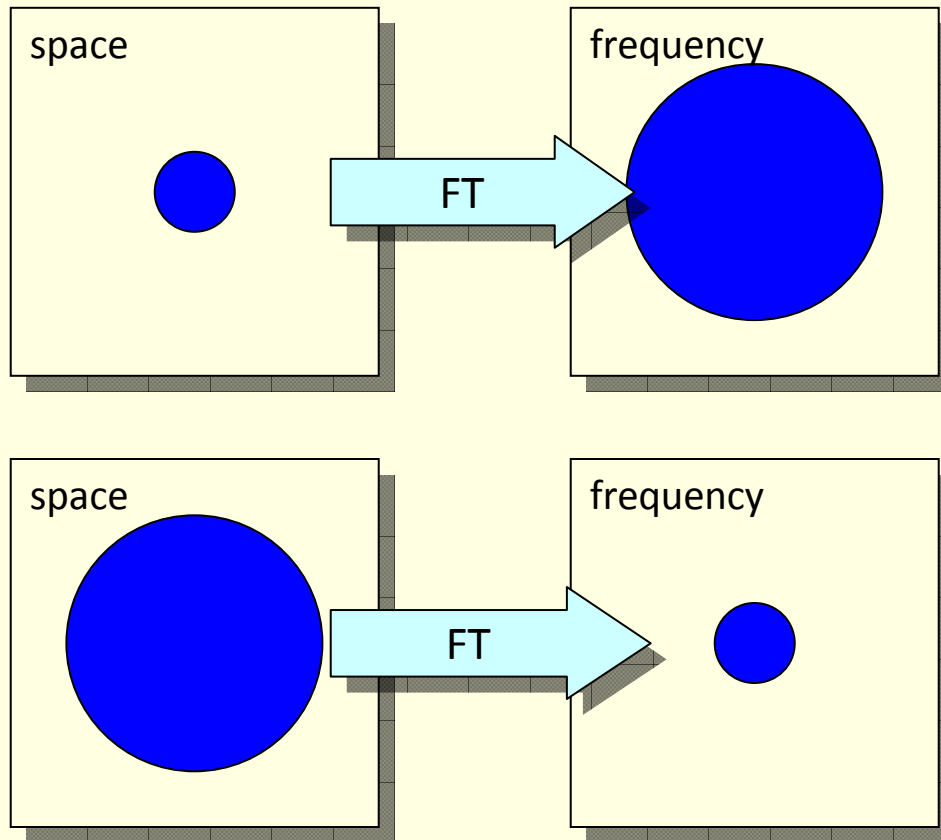
$$\text{с период } \lambda = 1/\sqrt{u^2 + v^2}$$

$$\text{и ориентация } \theta = \tan^{-1}(v/u)$$

- За визуализиране на спектралната функция обикновено се използва логаритмична функция

# Uncertainty Relation

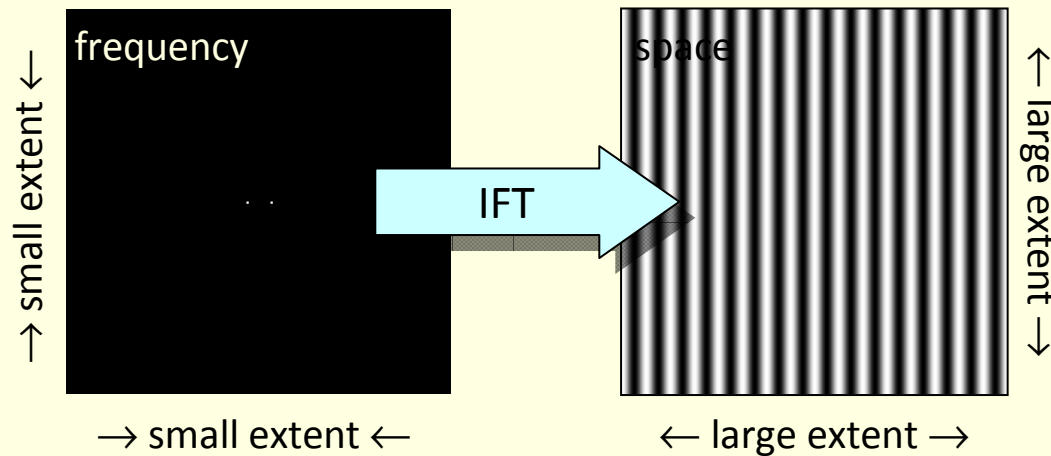
- Малък обект в пространството на изображението има голям обхват в честотната област и обратно



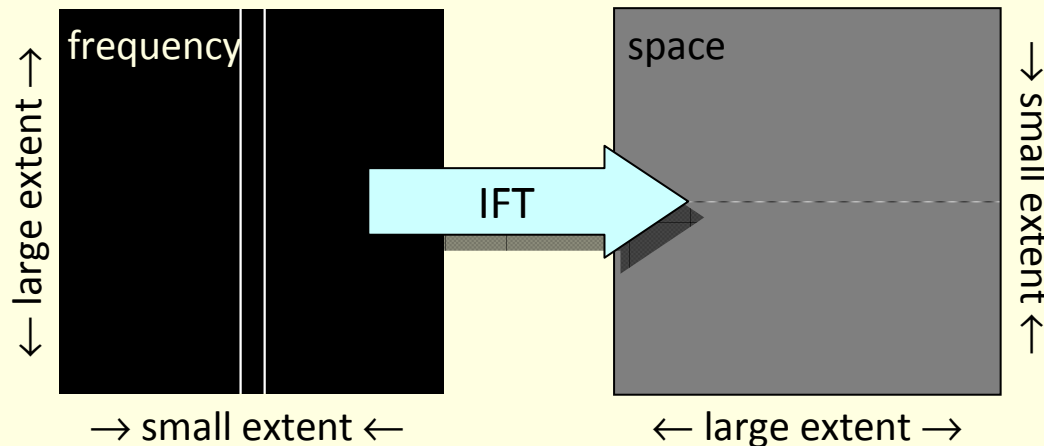
Ако  $\Delta x \Delta y$  са размерите на обект в пространството на изображението и  $\Delta u \Delta v$  е обхвата му в честотната област

$$\Delta x \Delta y \cdot \Delta u \Delta v \geq \frac{1}{16\pi^2}$$

# Uncertainty Relation



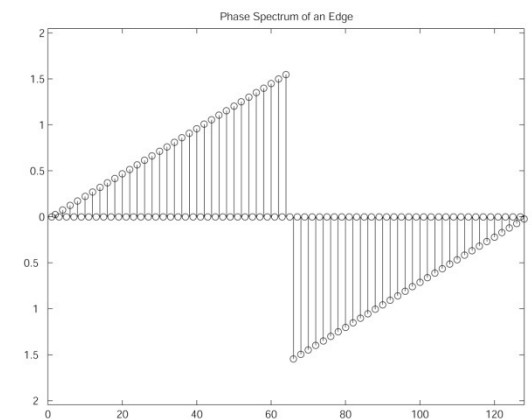
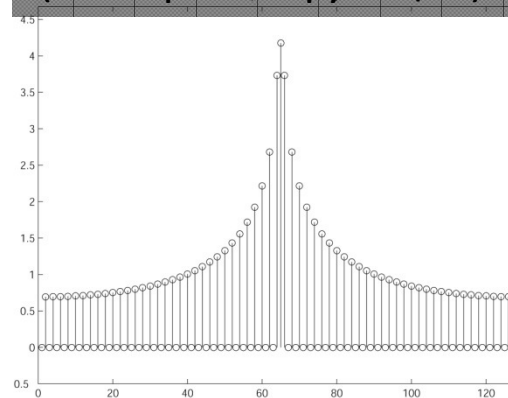
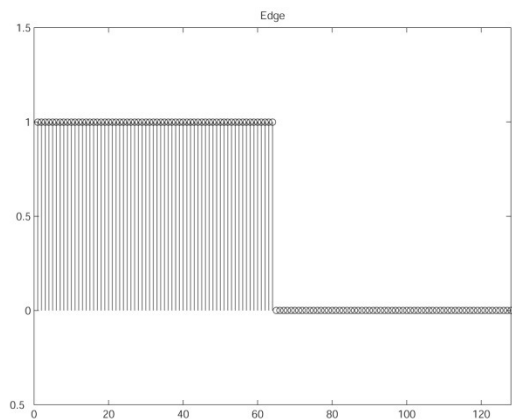
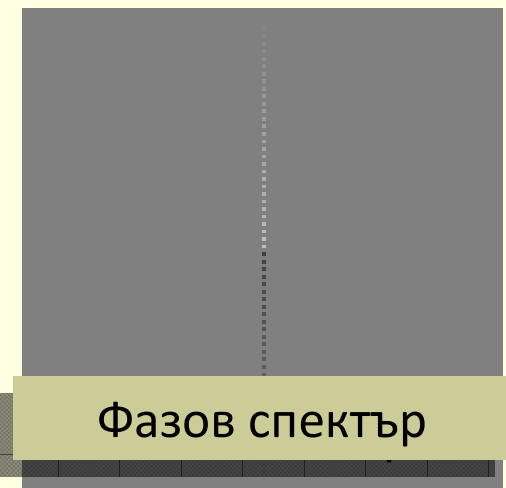
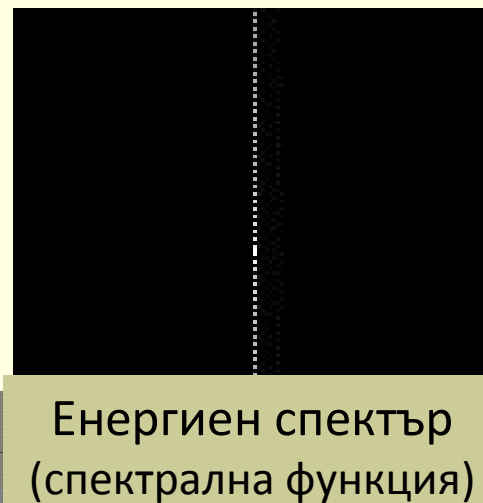
Симетрична двойка импулси е синусоида в честотната област



Симетрична двойка линии в честотната област е синусоидална линия в пространството на изображението

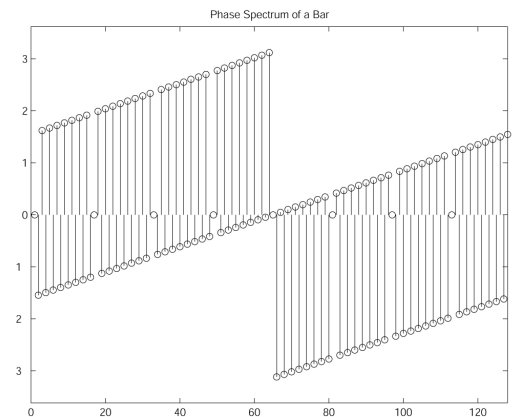
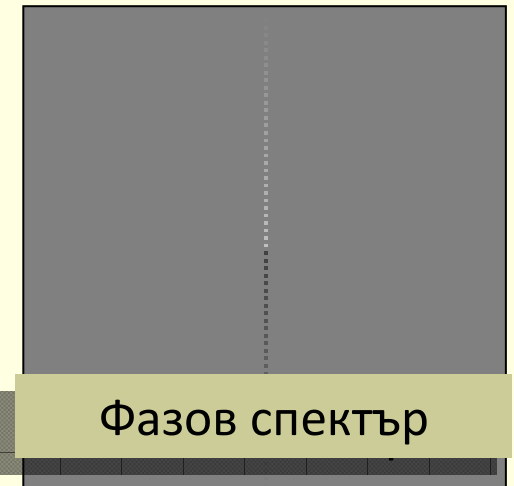
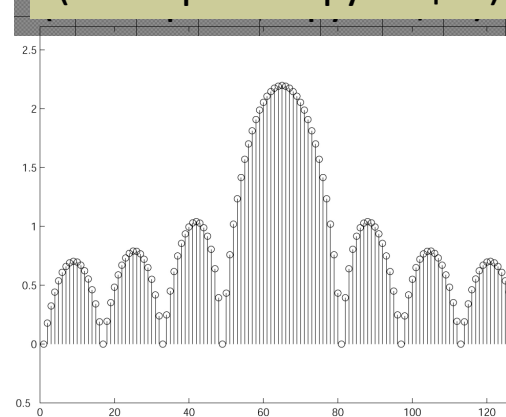
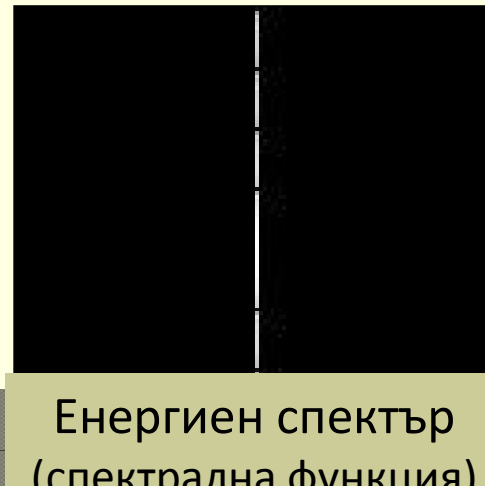
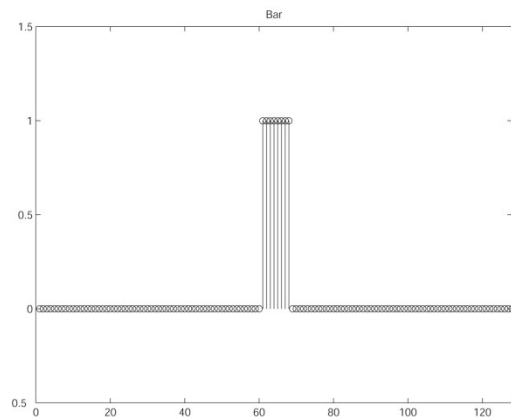
# Фурие трансформация

## Фурие трансформация на контур



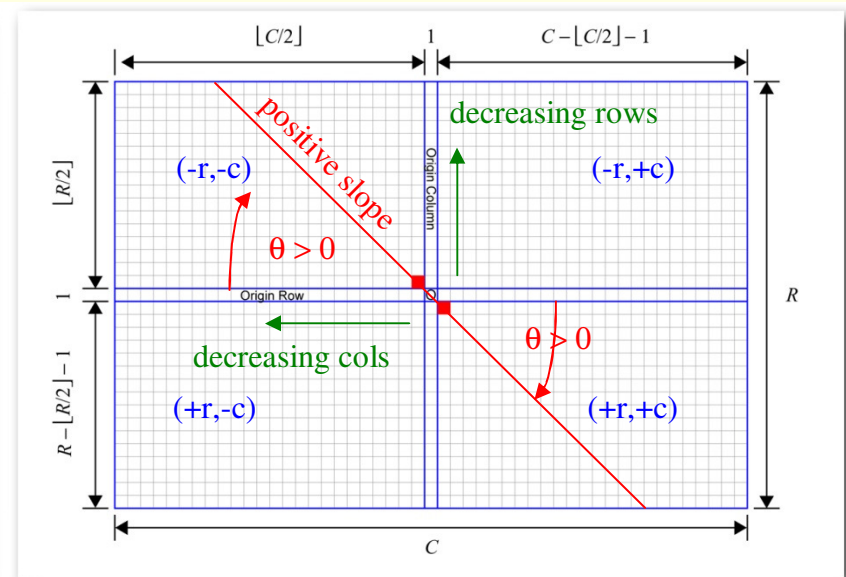
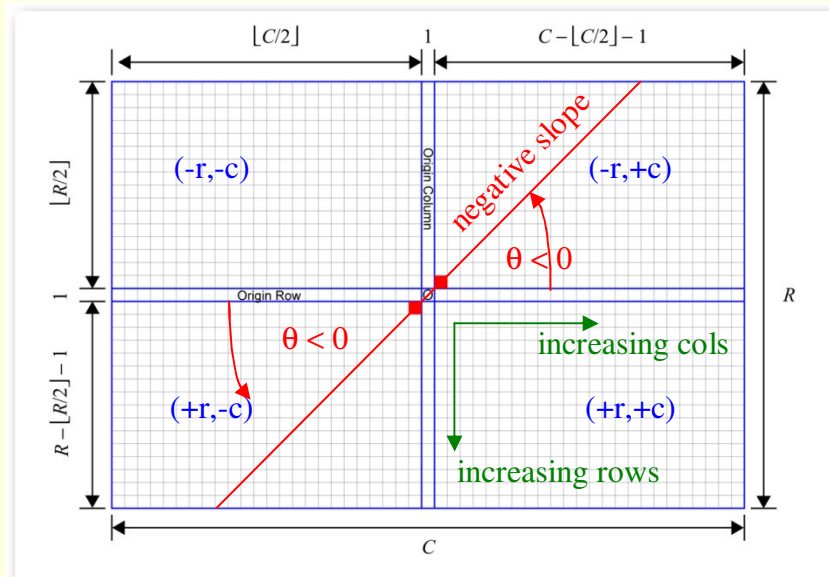
# Фурие трансформация

## Фурие трансформация на правоъгълен обект



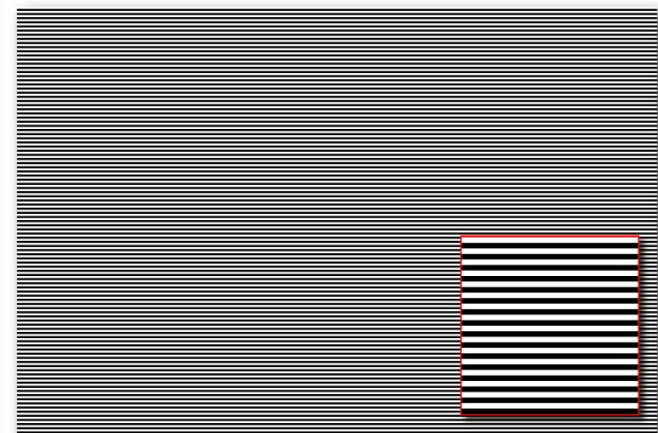
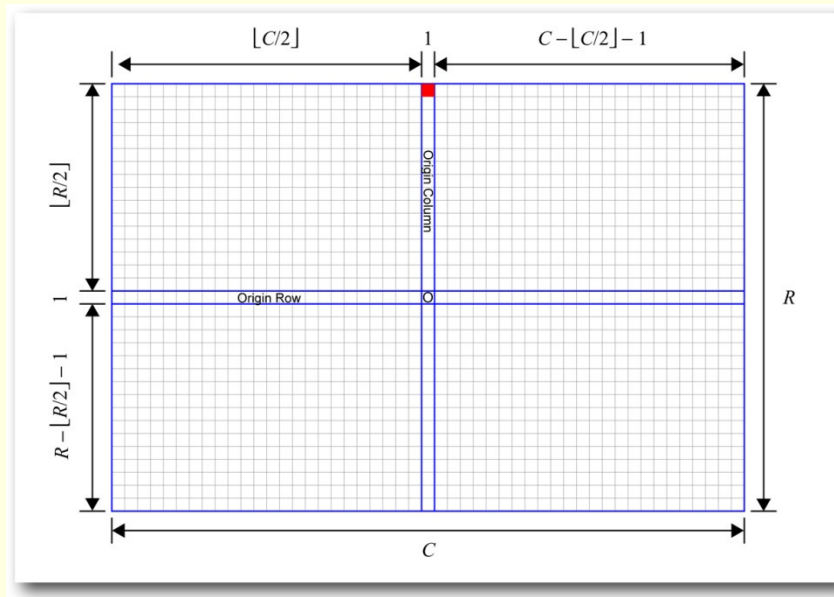
# Фурие трансформация

- Координати и посоки в честотната област
  - номера на реда се увеличава надолу
  - номера на колоната се увеличава надясно
  - наклонът и ъглите са противоположни на тези при дясно ориентирана координатна система



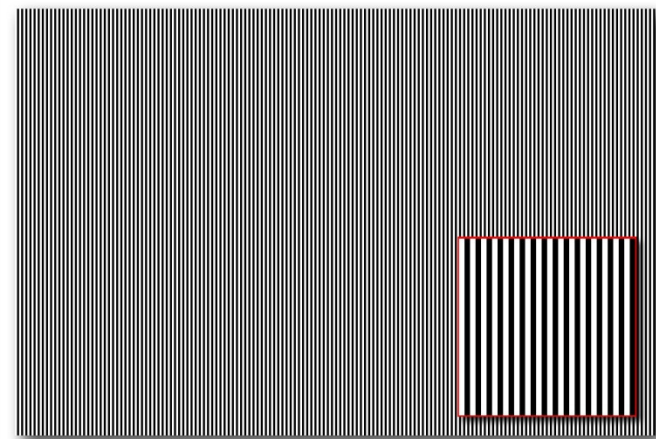
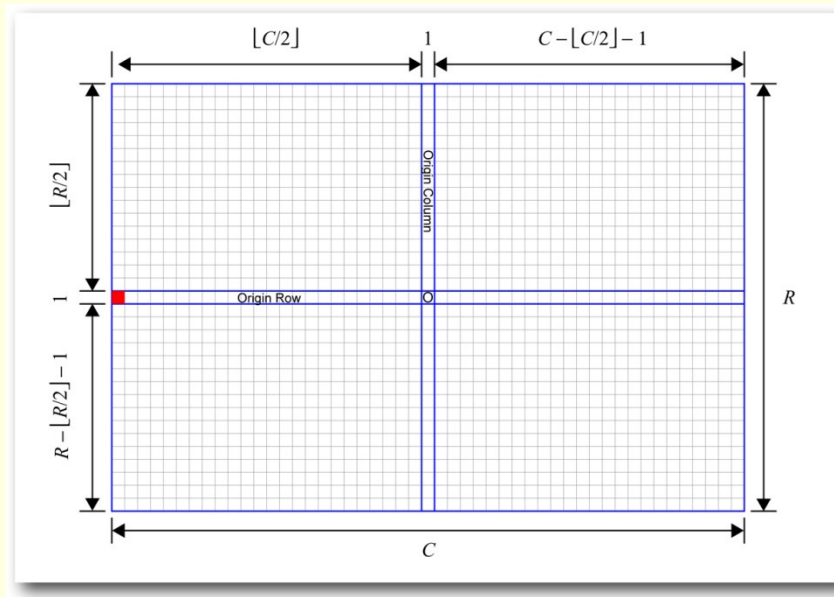
# Обратна Фурие трансформация

- Обратна Фурие трансформация на импулс
  - **хоризонтална синусоида с най-голямата възможна честота**  
( $C$  е четно)
    - посоката на вълната е “хоризонтална”



# Обратна Фурие трансформация

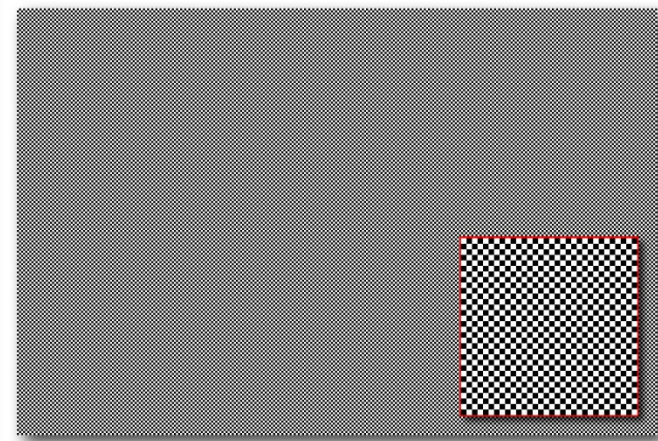
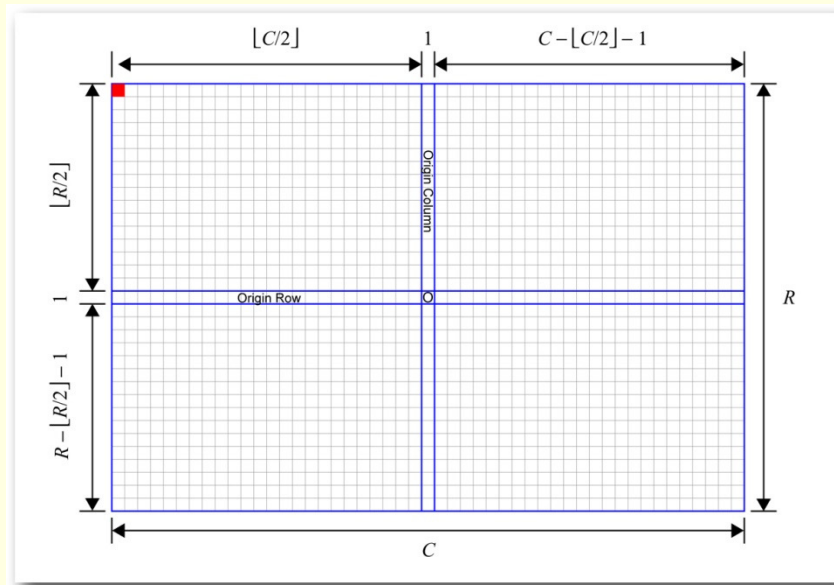
- Обратна Фурие трансформация на импулс
  - **вертикална синусоида с най-голямата възможна честота**  
( $R$  е четно)
    - посоката на вълната е “вертикална”





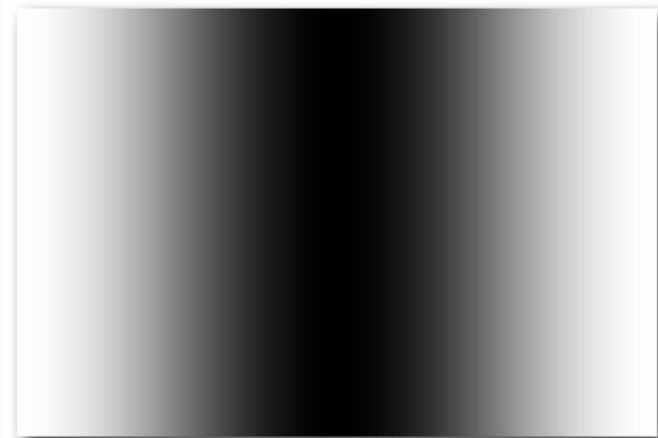
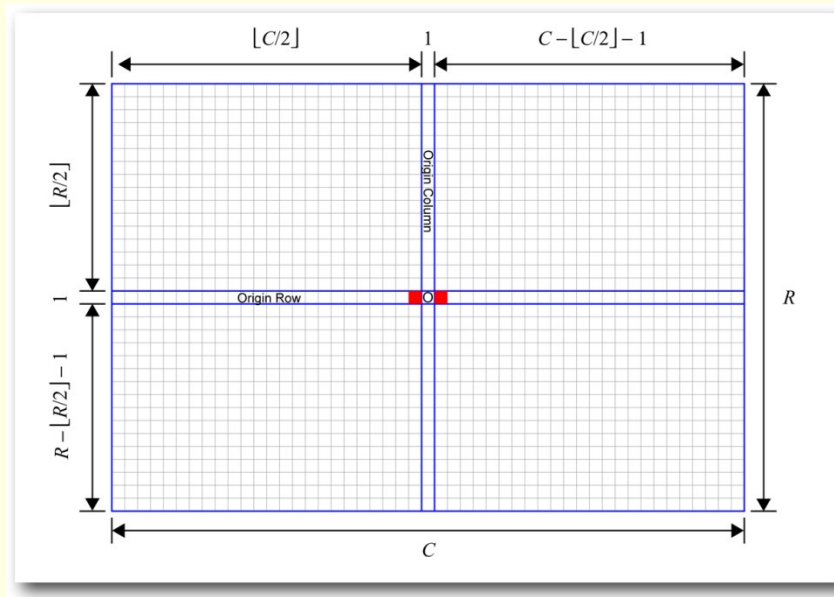
# Обратна Фурие трансформация

- Обратна Фурие трансформация на импулс
  - **синусоида с най-голямата възможна честота (горизонтална+вертикална) (R и C са четни)**
    - “шахматен” модел



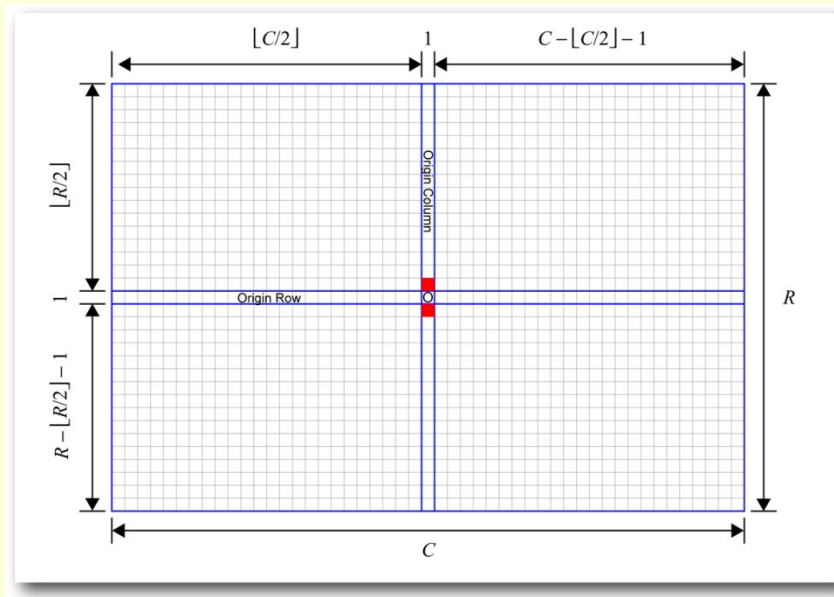
# Обратна Фурие трансформация

- Обратна Фурие трансформация на импулси
  - **хоризонтална синусоида с най-малката възможна честота**
    - посоката на вълната е “хоризонтална”



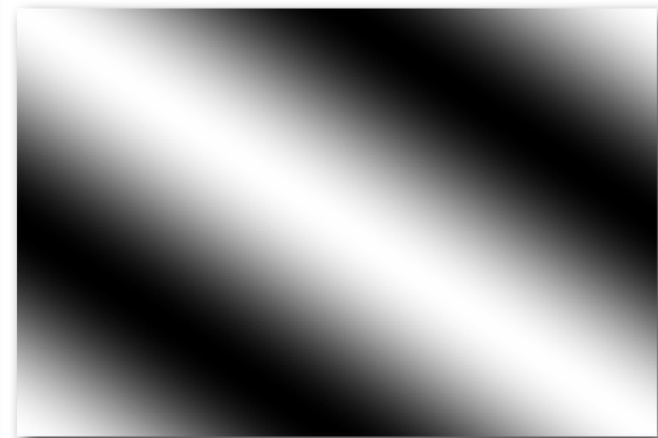
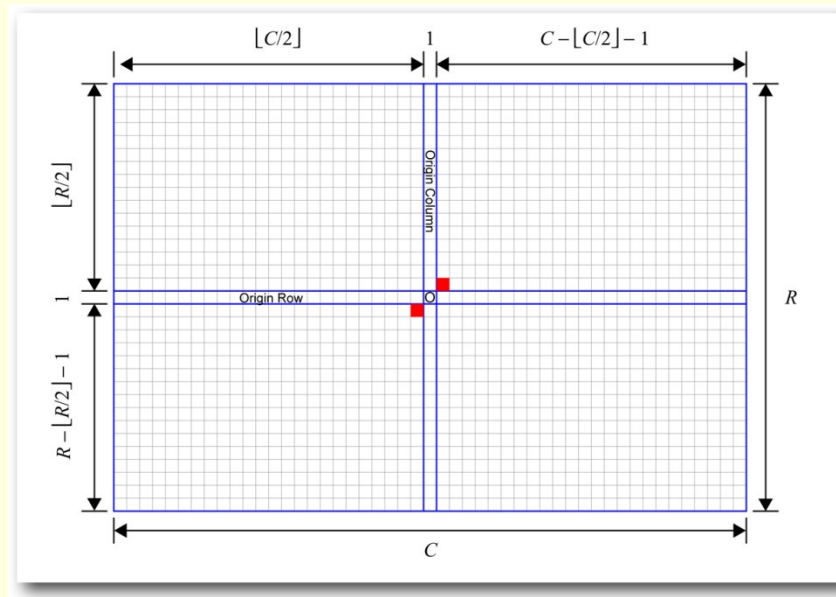
# Обратна Фурие трансформация

- Обратна Фурие трансформация на импулси
  - **вертикална синусоида с най-малката възможна честота**
    - посоката на вълната е “вертикална”



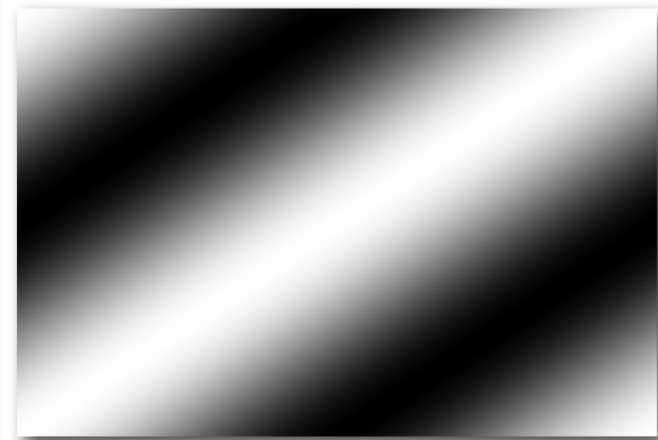
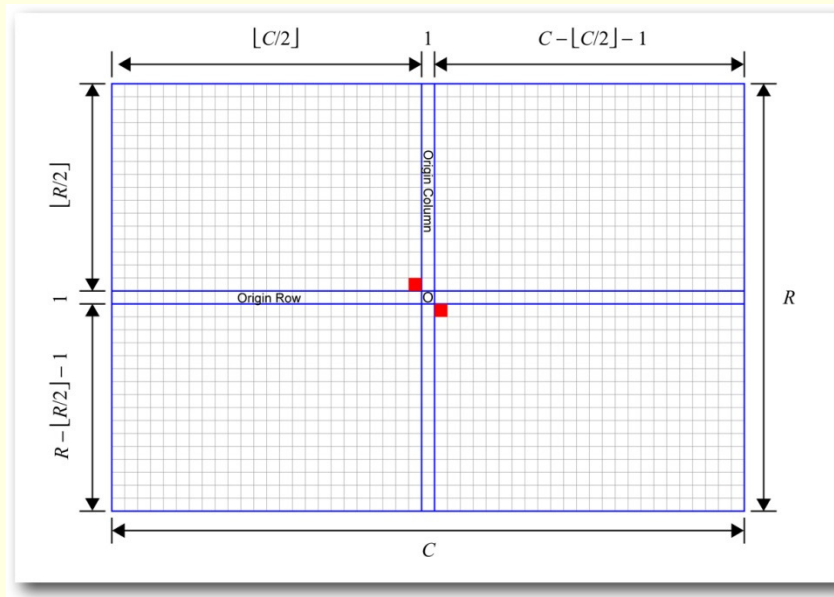
# Обратна Фурие трансформация

- Обратна Фурие трансформация на импулси
  - **синусоида с най-малката възможна честота (негативен диагонал)**
    - посоката на вълната е по негативния диагонал



# Обратна Фурие трансформация

- Обратна Фурие трансформация на импулси
  - **синусоида с най-малката възможна честота (позитивен диагонал)**
    - посоката на вълната е по позитивния диагонал



# Честотна област

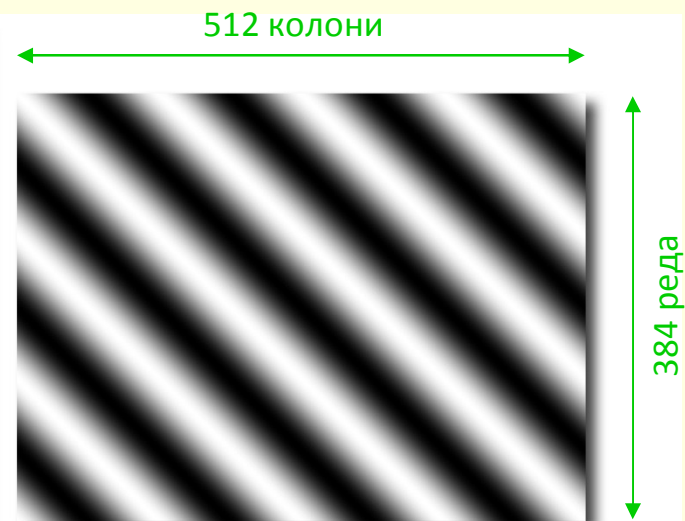
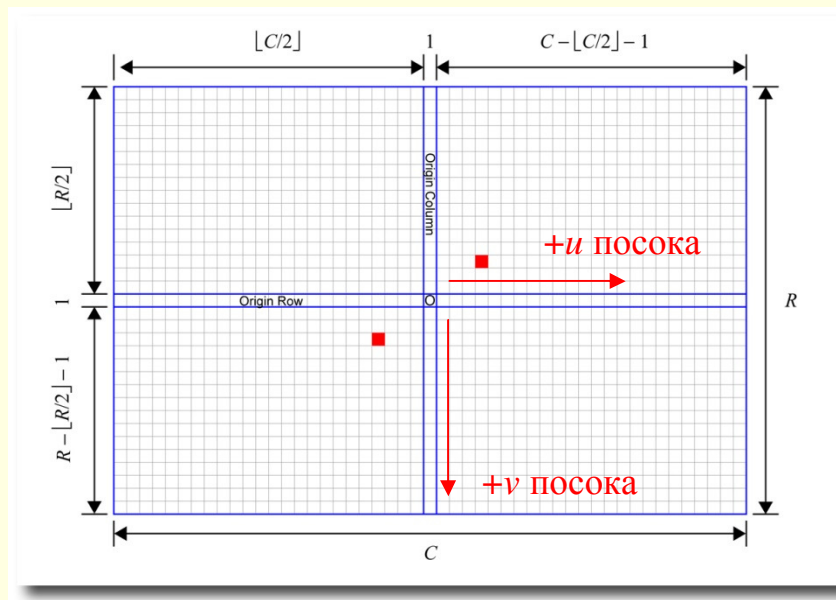
## ■ Честота и дължина на вълната в честотната област

### ■ *честота*

- $(u, v) = (4, 3)$

### ■ *дължина на вълната*

- $(\lambda_u, \lambda_v) = (128, 128)$



# Честотна област

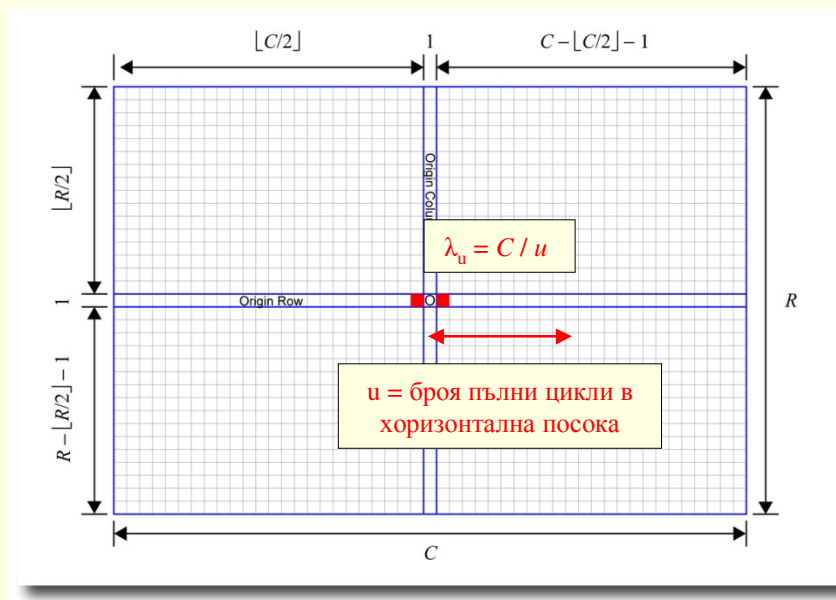
## ■ Честота и дължина на вълната в честотната област

### ■ *честота*

- $(u,v) = (1,0)$

### ■ *дължина на вълната*

- $\lambda_u = 512$



# Честотна област

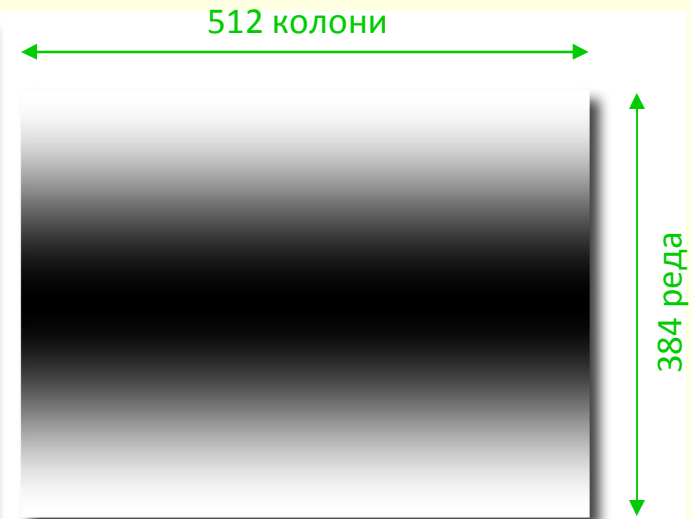
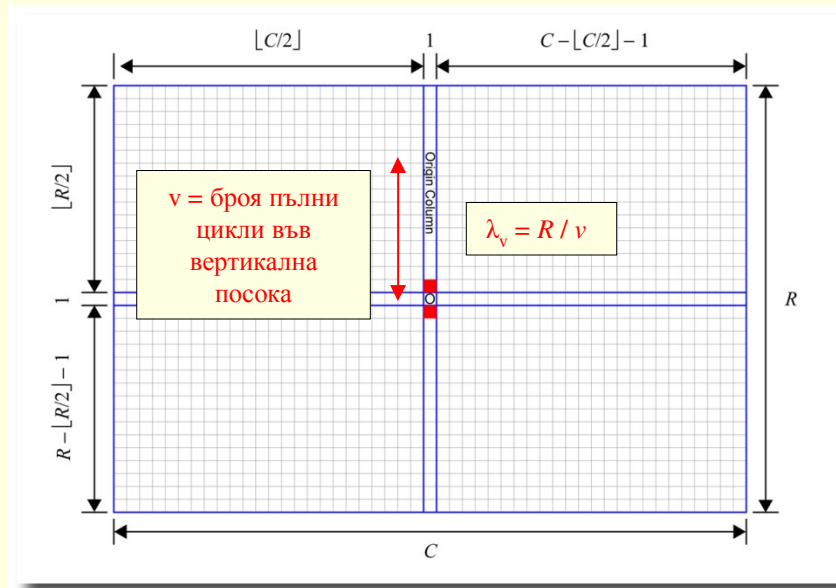
## ■ Честота и дължина на вълната в честотната област

### ■ *честота*

- $(u,v) = (0,1)$

### ■ *дължина на вълната*

- $\lambda_u = 384$





# Честотна област

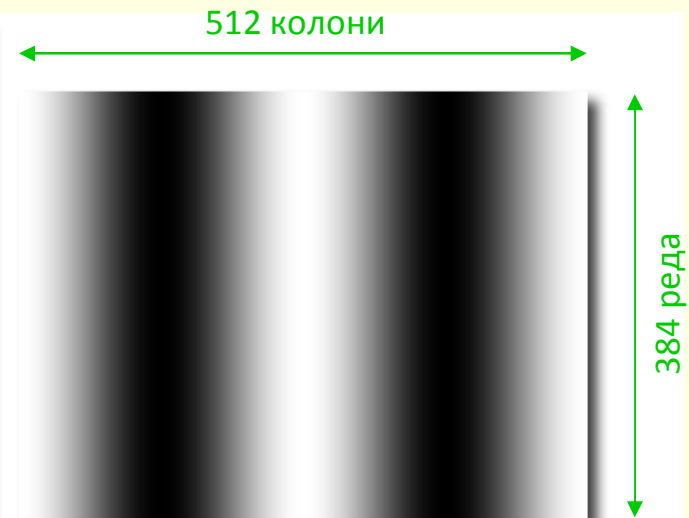
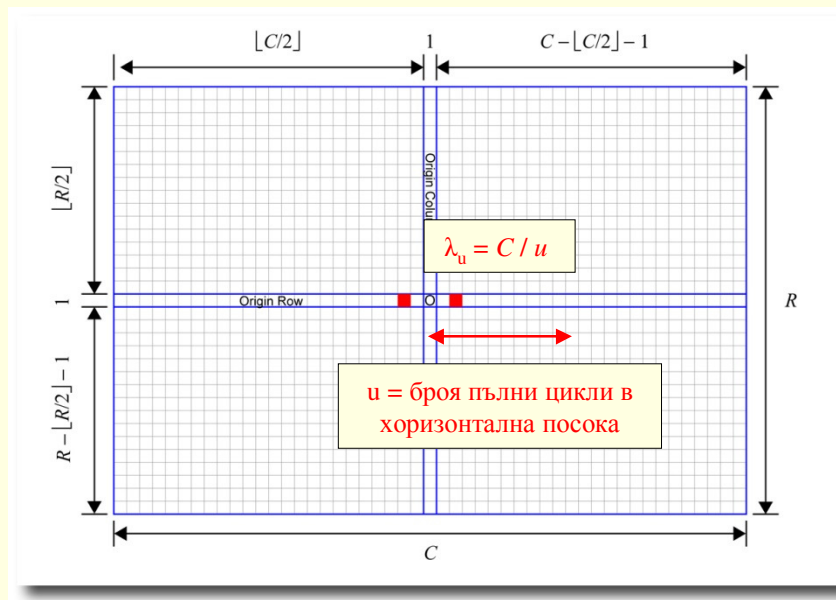
## ■ Честота и дължина на вълната в честотната област

### ■ *честота*

- $(u,v) = (2,0)$

### ■ *дължина на вълната*

- $\lambda_u = 256$



# Честотна област

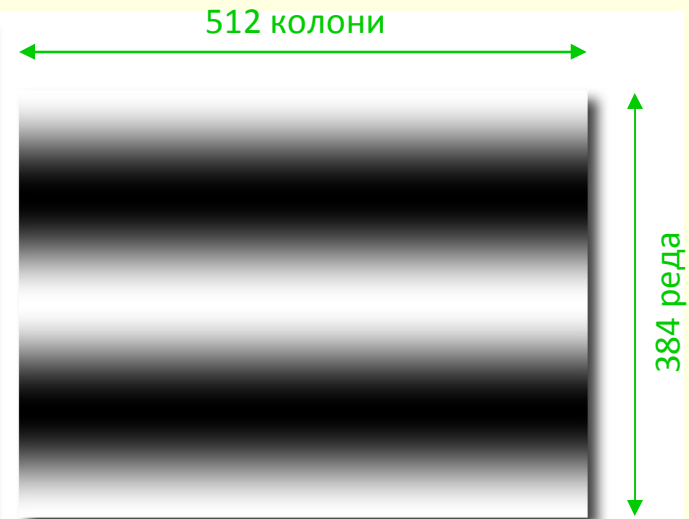
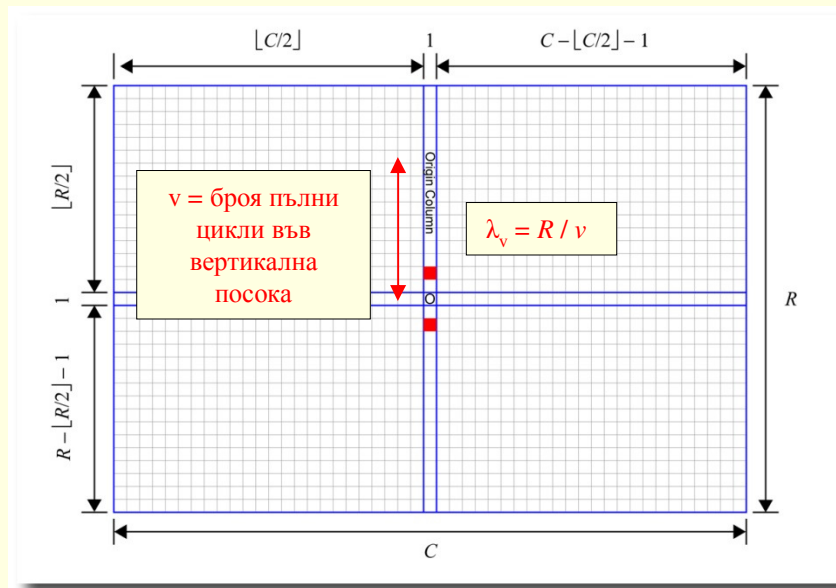
## ■ Честота и дължина на вълната в честотната област

### ■ *честота*

- $(u,v) = (0,2)$

### ■ *дължина на вълната*

- $\lambda_v = 192$



# Честотна област

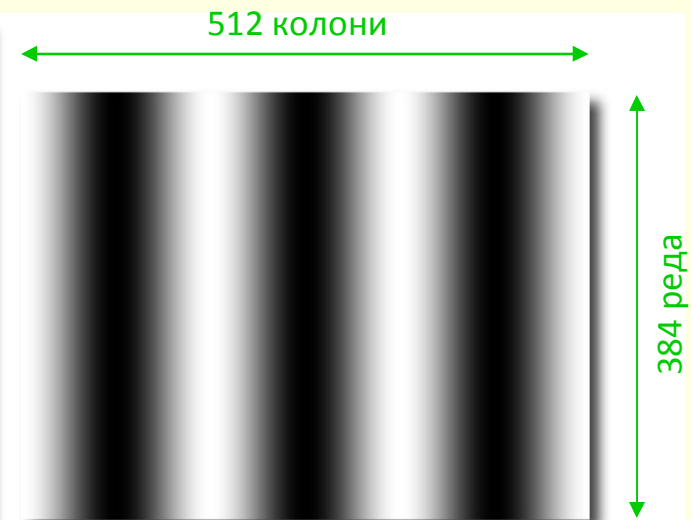
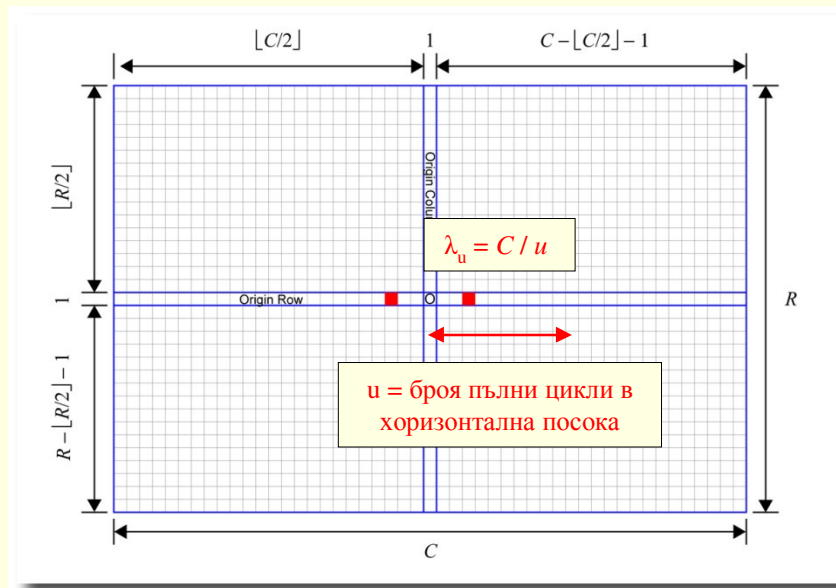
## ■ Честота и дължина на вълната в честотната област

### ■ *честота*

- $(u,v) = (3,0)$

### ■ *дължина на вълната*

- $\lambda_u = 170 \frac{2}{3}$



# Честотна област

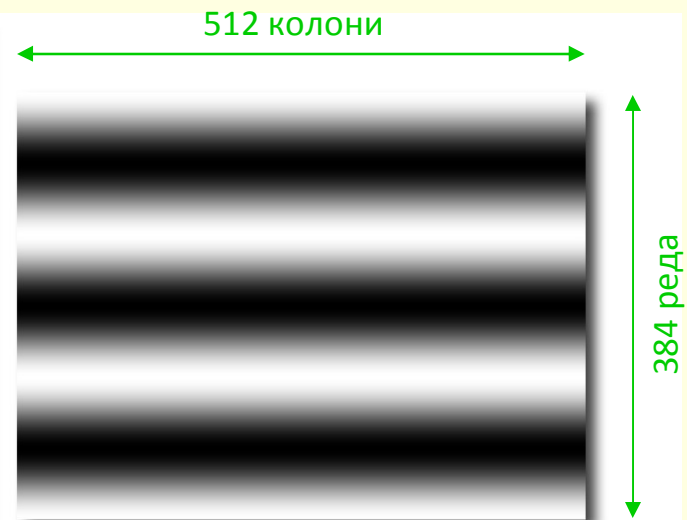
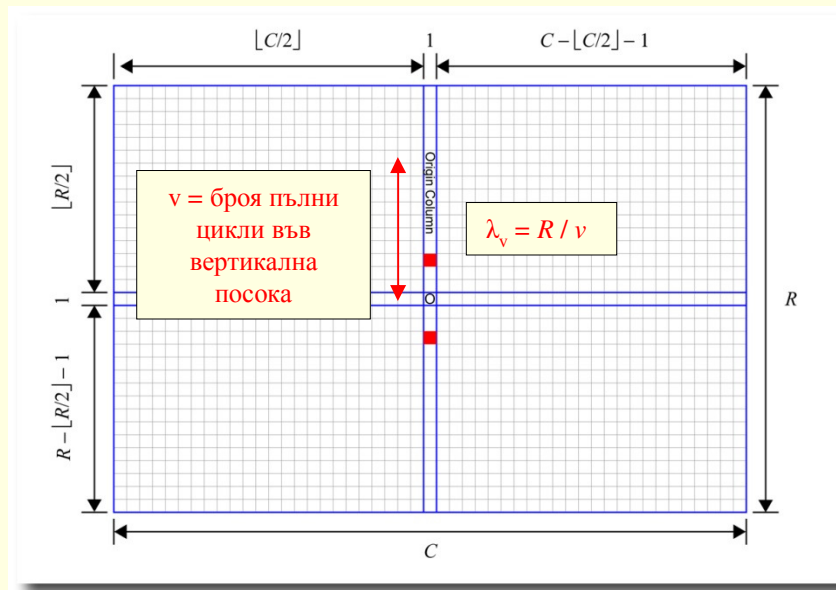
## ■ Честота и дължина на вълната в честотната област

### ■ *честота*

- $(u,v) = (0,3)$

### ■ *дължина на вълната*

- $\lambda_v = 128$



# Честотна област

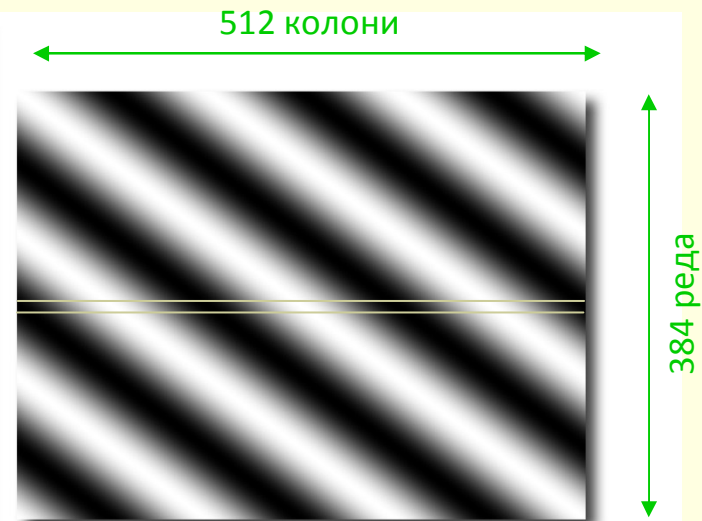
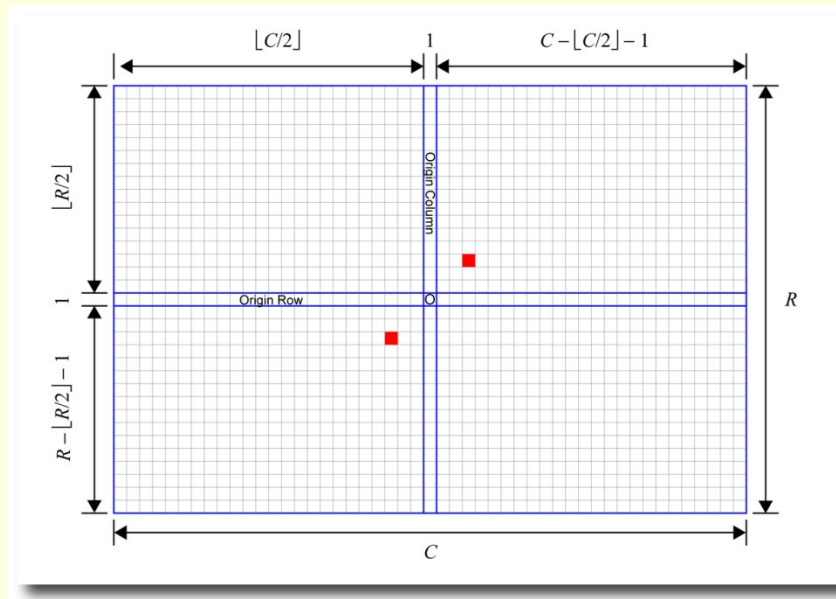
- Честота и дължина на вълната в честотната област

- **честота**

- $(u, v) = (3, 3)$

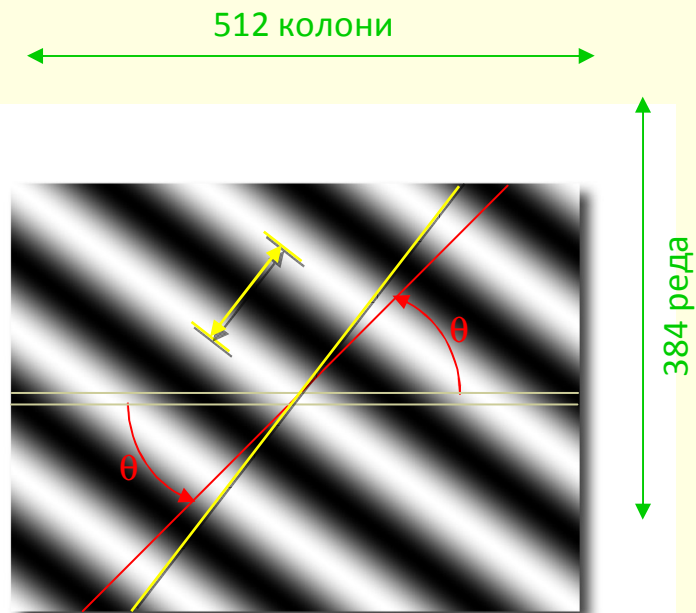
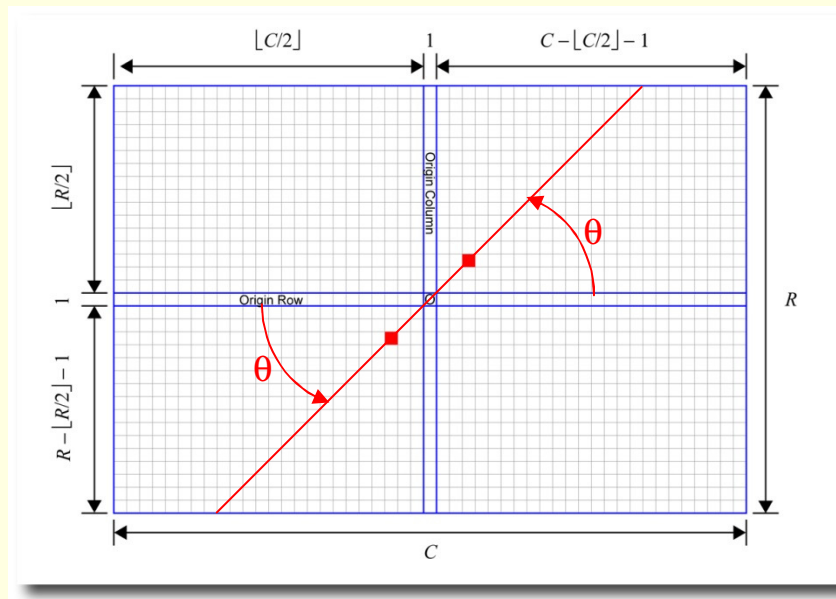
- **дължина на вълната**

- $(\lambda_u, \lambda_v) = (170 \frac{2}{3}, 128)$



# Честотна област

- В честотната област за **квадратно** изображение
  - ориентацията на линия през двойка точки съвпада с ориентацията на вълна през изображението
- Не е така за **правоъгълно** изображение
  - ъгълът е  $45^\circ$  в честотната област и около  $53^\circ$  в изображението (жълтата линия)

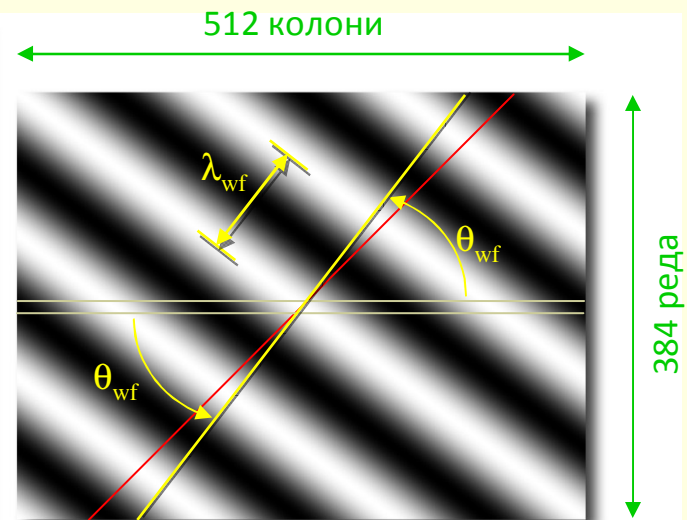
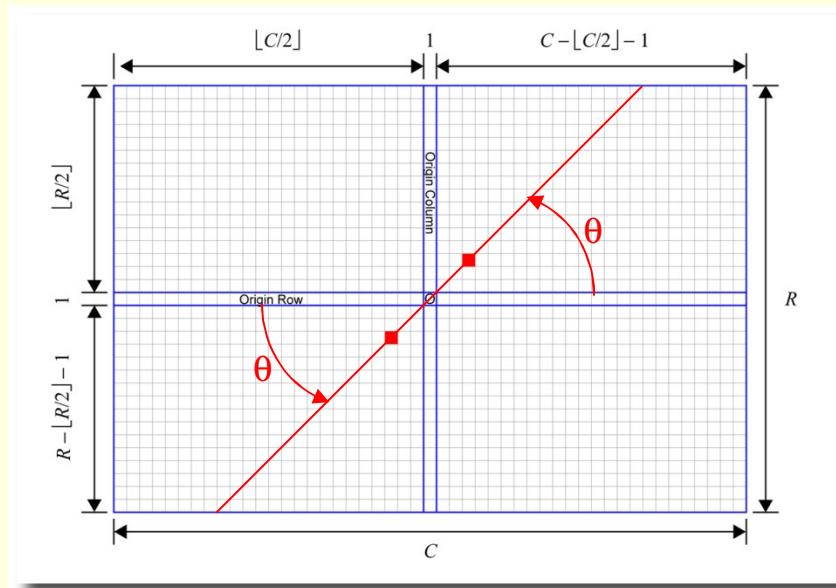


# Честотна област

- Наклона на посоката на вълната в изображението се определя от  $(v/R)/(u/C)$ , затова

- ъгълът е  $\theta_{wf} = \tan^{-1}\left(\frac{vC}{uR}\right)$

- дължината на вълната е  $\lambda_{wf} = \sqrt{\left(\frac{C}{u}\right)^2 + \left(\frac{R}{v}\right)^2}$



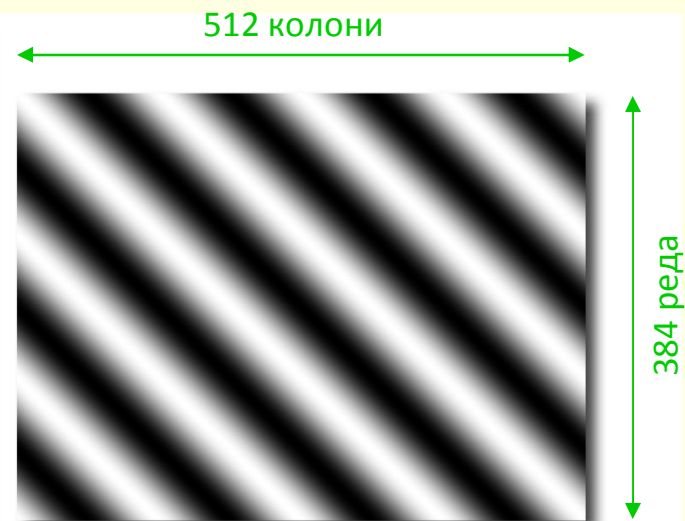
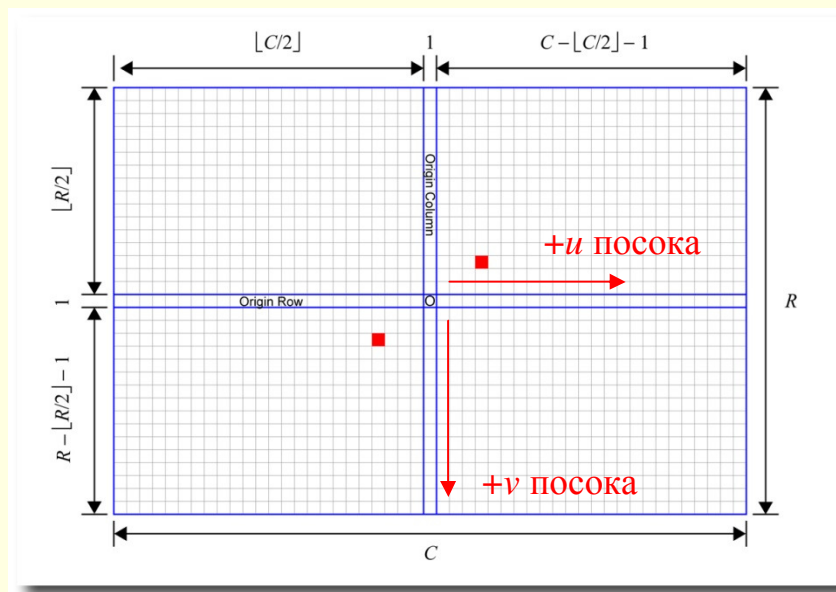
# Честотна област

- Отношението на размерите на изображението е  $R/C = 3/4$

- Затова за честота  $(4,3)$  вълната има

- ъгъл:  $\theta_{wf} = \tan^{-1}\left(\frac{3 \cdot 512}{4 \cdot 384}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 3}\right) = \tan^{-1}(1) = 45^\circ$

- дължина:  $\lambda_{wf} = \sqrt{\left(\frac{512}{4}\right)^2 + \left(\frac{384}{3}\right)^2} = \sqrt{2 \cdot 128^2} = 128\sqrt{2}$

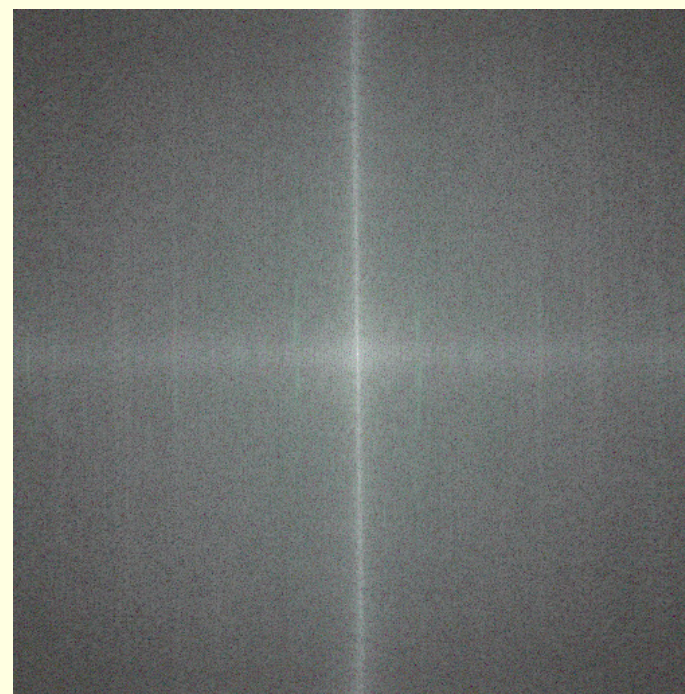
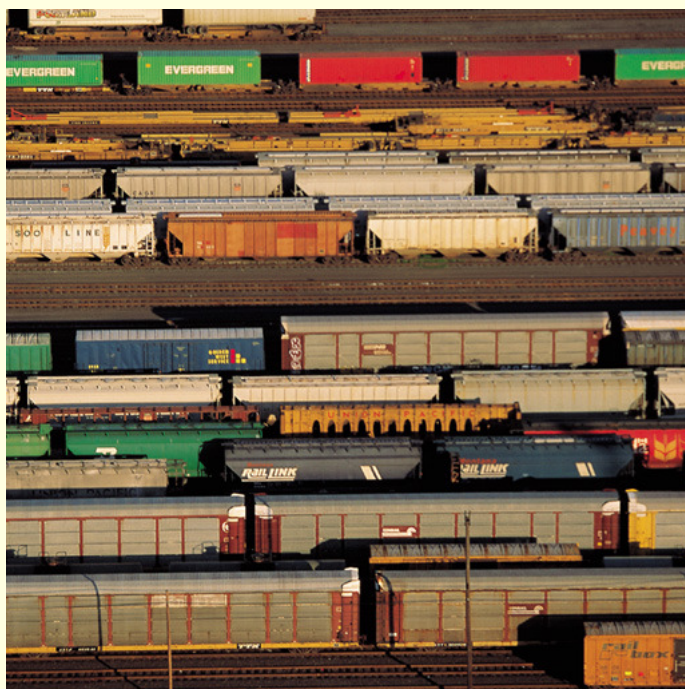




# Фурие трансформация

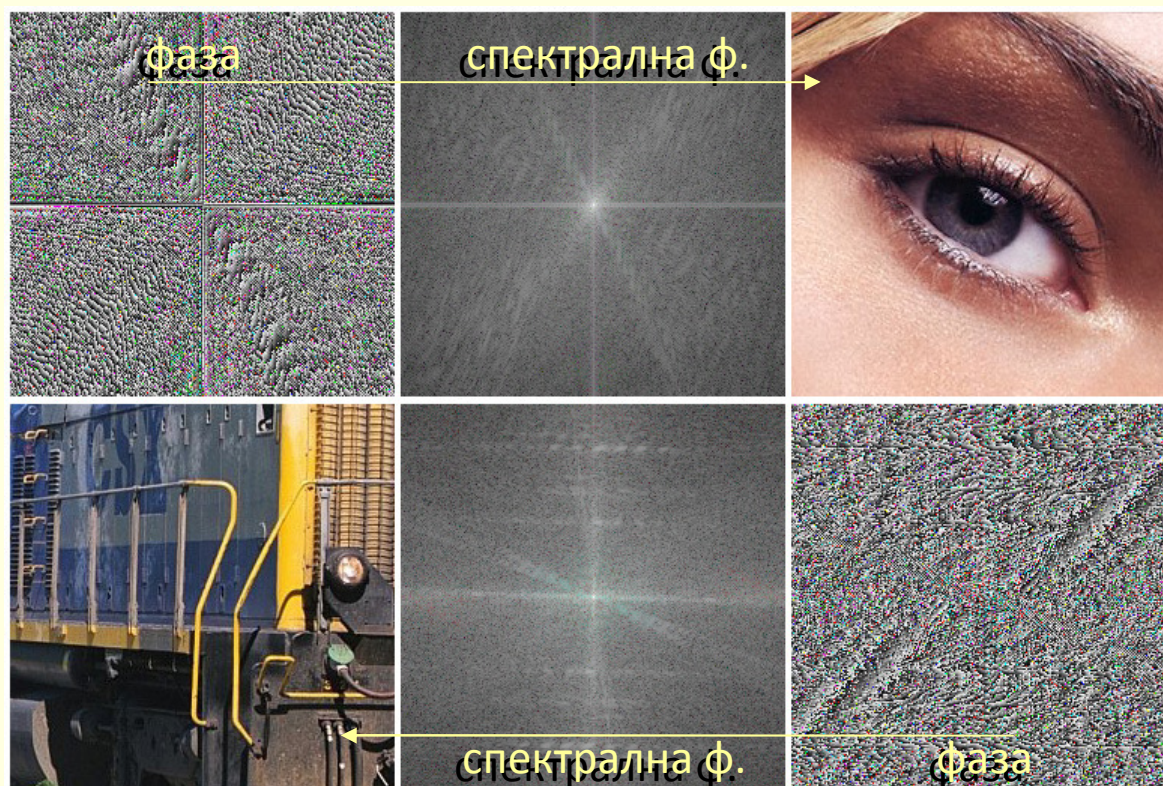
---

Спектрална функция на изображение



# Фурие трансформация

Фурие трансформация на изображение



# 2D трансформация на Фурие

---

- Приложение на трансформацията на Фурие в обработка на изображения
  - обяснение на причините за изкривявания и деформации на изображението при намаляването на стъпката на дискретизиране и подход за избягване на това изкривяване
  - полезна за редуциране на шумове в изображението и подобряване на визуалното му представяне
  - приложение при откриване на специфични характеристики в изображението, например откриване на контури



# Фурие трансформация

## ■ Изображение /

*I*

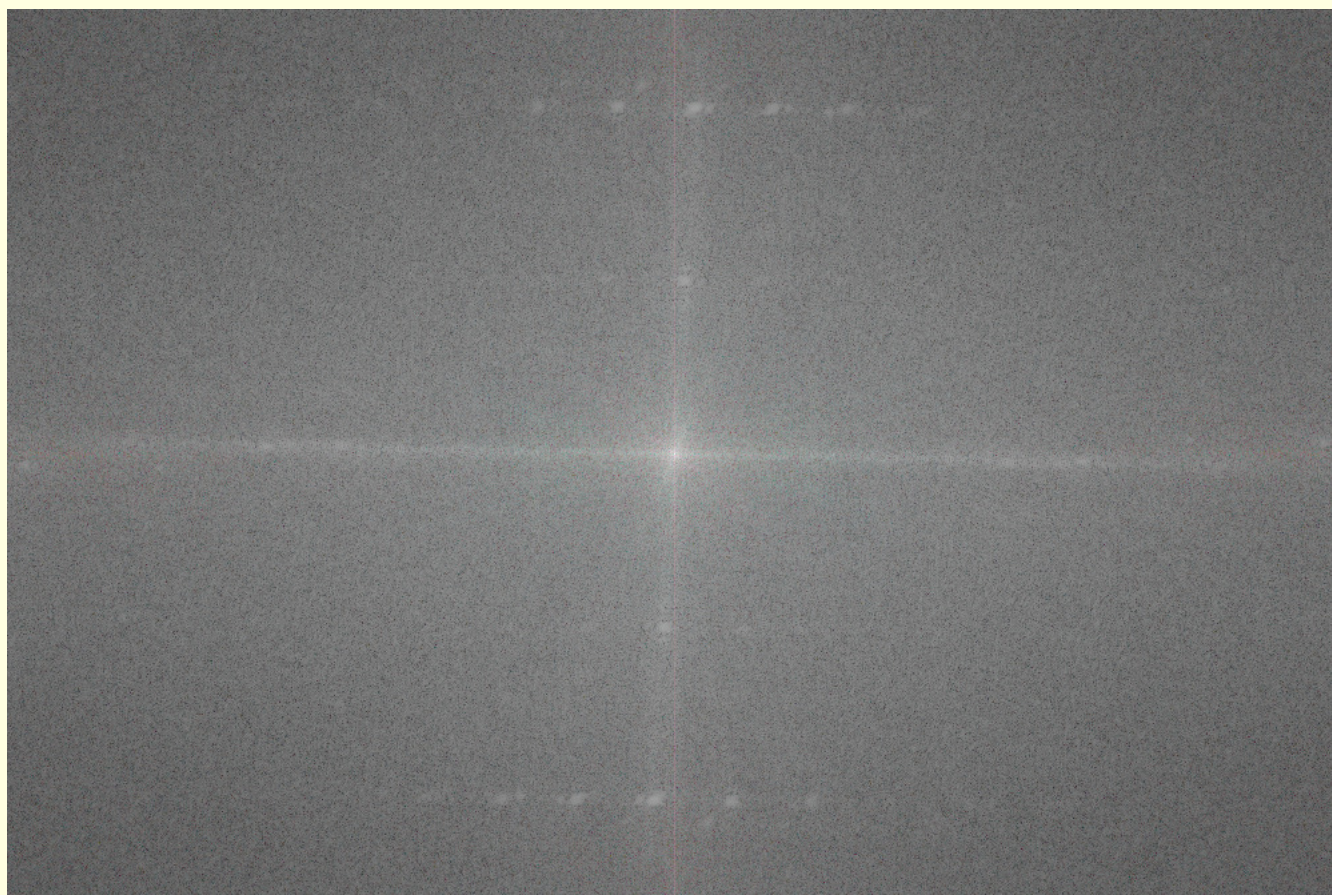




# Фурие трансформация

- Големина на Фурие трансформацията

$\log|\mathbf{F}\{I\}|$

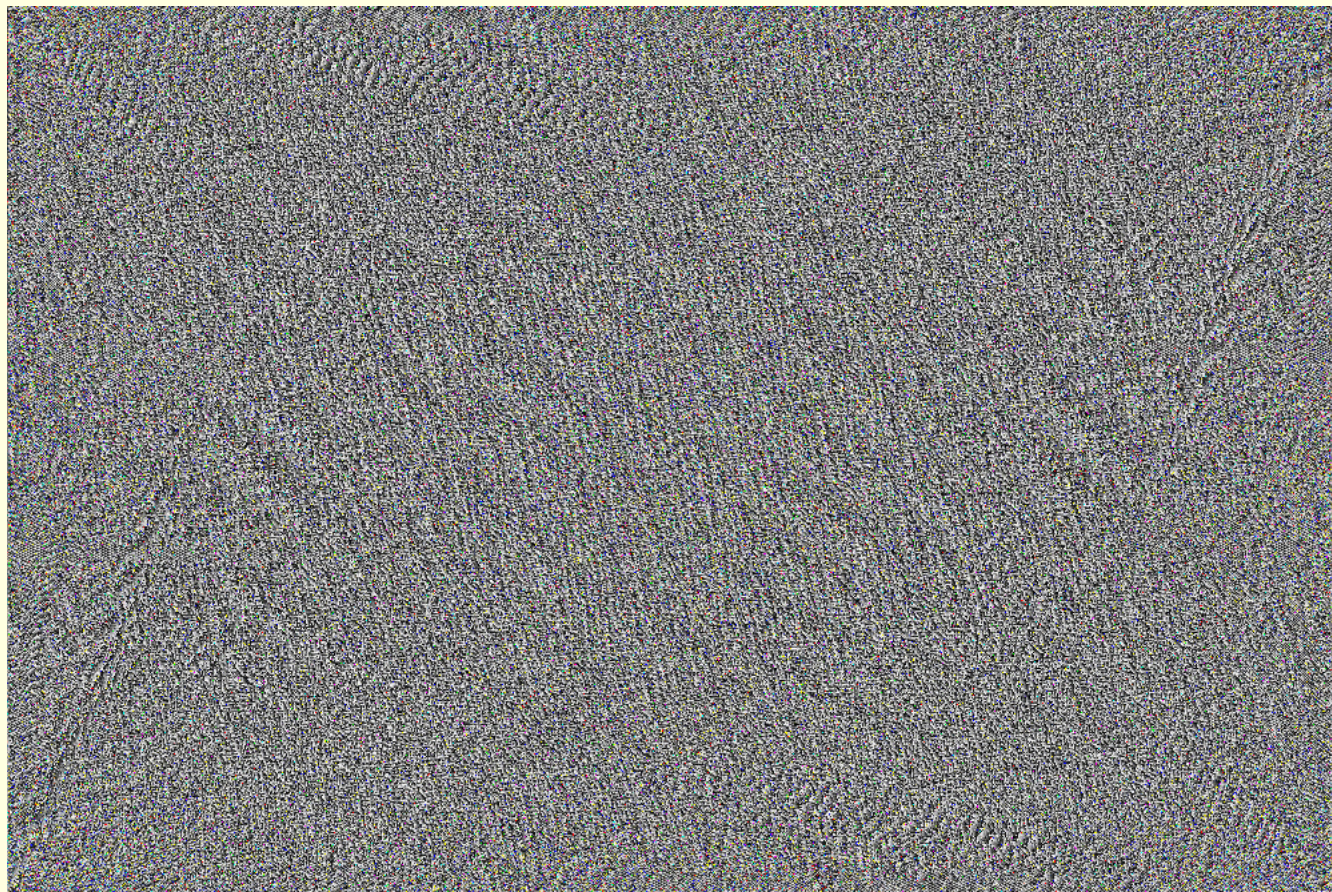




# Фурие трансформация

- Фаза на Фурие трансформацията

$\angle \mathbf{F}\{I\}$



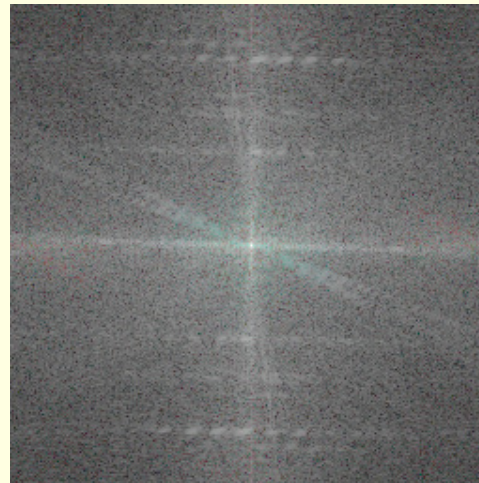


# Фурие трансформация

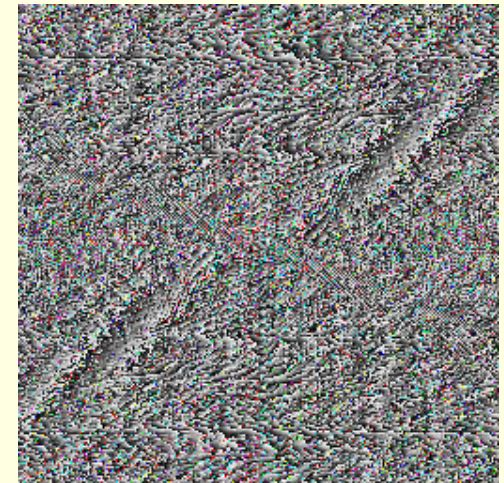
- Къде се съдържа визуална информация за изображението: в големината или във фазата на Фурие преобразуването?



оригинално  
изображение



големина на Фурие  
трансформация

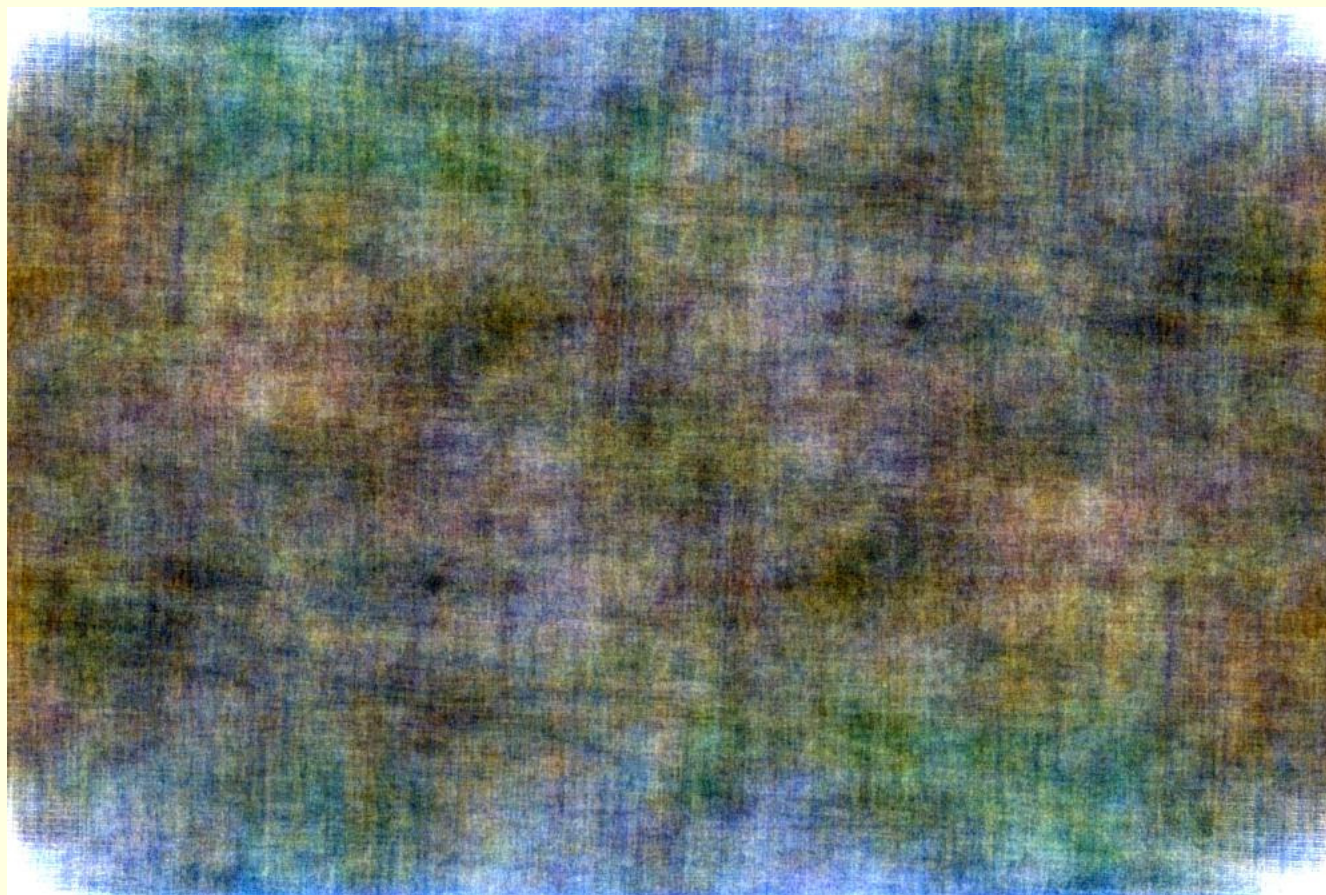


фаза на Фурие  
трансформация

# Фурие трансформация

---

- Възстановяване на изображението с използване само на големината





# Фурие трансформация

- Възстановявана на изображението с използване само на фазата



КРАЙ

Следваща тема:

*Филтрация на изображения в  
честотната област*