

# Цифрова обработка на изображения

Възстановяване на изображения

# Enhancement vs. Restoration

---

## ■ *Image enhancement*

- подобряване на **визуалното** представяне на изображението
- **субективен** процес
  - евристичен подход

## ■ *Image restoration*

- възстановяване на изображението чрез премахване на шумове и изкривявания
- **обективен** процес
  - използва априорни знания за наличните шумове и дефекти
  - базира се на моделиране на шумовете, които се наслагват върху изображението
  - прилага се инверсна операция за премахването им и възстановяване на оригиналното, незашумено изображение
  - използва оценка на качеството на възстановяване на изображението

# Шум в изображенията

- Всички изображения, получени чрез оптична проекция върху сензорен масив, са зашумени



- **Видове шум**

- **корелиран шум**

- електрически смущения
    - смущения в източника/сензора
    - изкривявания и артефакти
      - halftone distortion/moiré patterns

- **некорелиран шум**

- квантов шум в CCD матрицата
    - шум от сребърните гранули във филмите
    - невронен шум в ретината
    - шум от квантоване в цифровата фотография

# Шум в изображенията

## ■ Изображения с адитивен шум

зашумено  
изображение

адитивен шум



$$J(r, c) = I(r, c) + N(r, c)$$

незашумено  
изображение



пространствена област

зашумено  
изображение

адитивен  
шум



$$J(v, u) = I(v, u) + N(v, u)$$

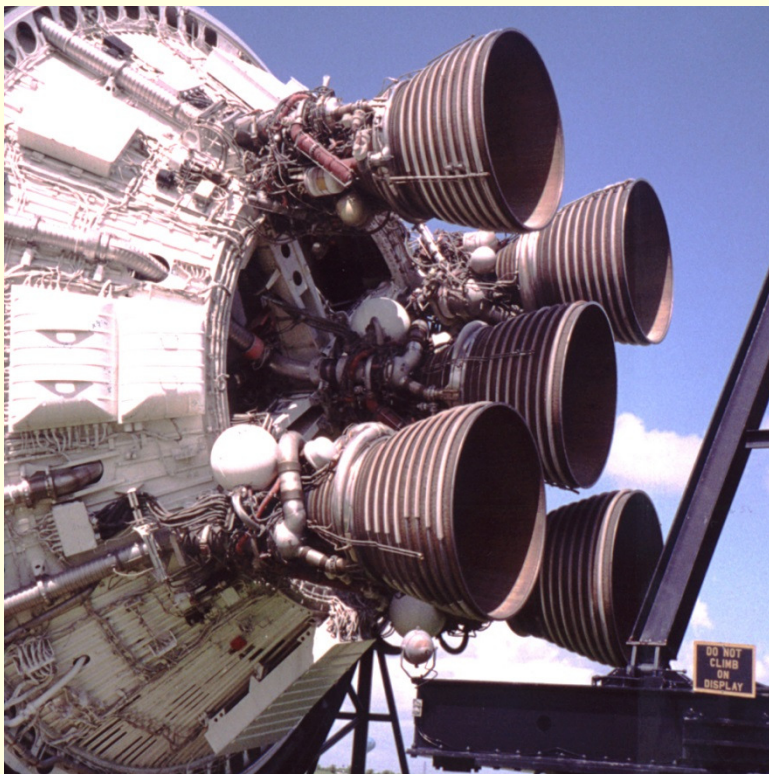
незашумено  
изображение



честотна област

# Корелиран шум

Периодичен шум



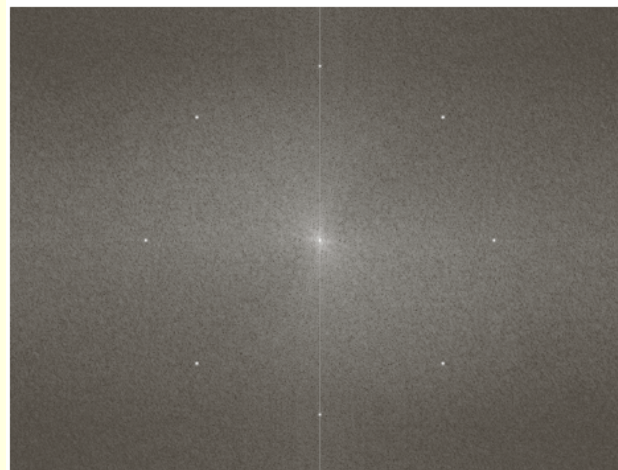
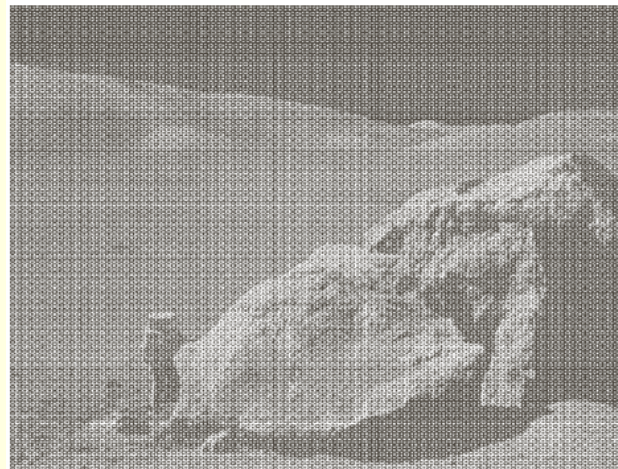
оригинално изображение



изображение + шум

# Корелиран шум

## Синусоидален шум

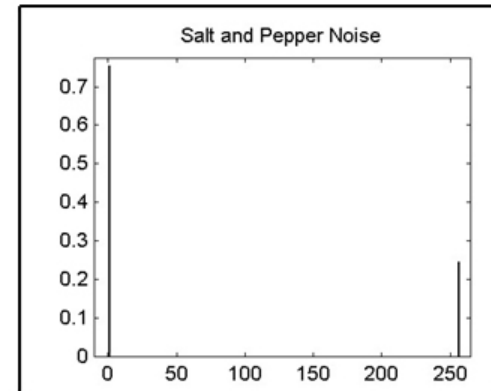
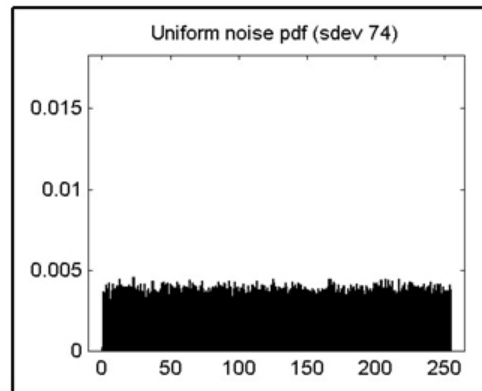
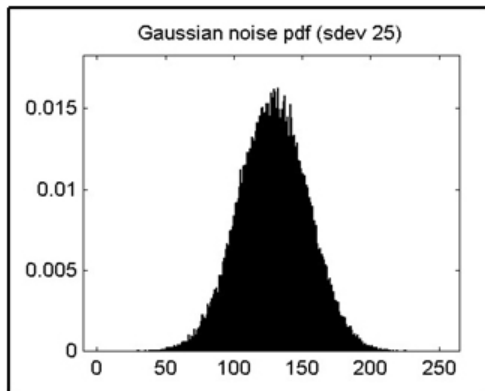
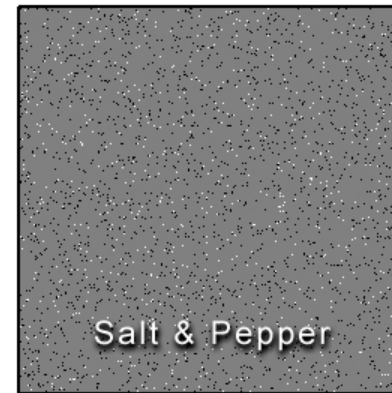
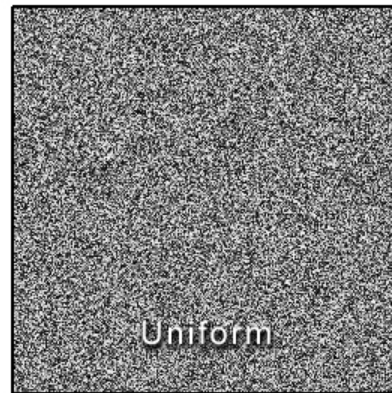
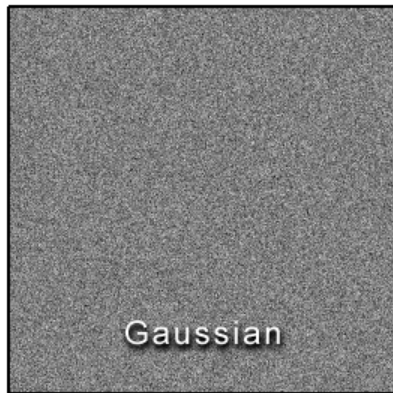


a  
b

### FIGURE 5.5

(a) Image corrupted by sinusoidal noise.  
(b) Spectrum (each pair of conjugate impulses corresponds to one sine wave). (Original image courtesy of NASA.)

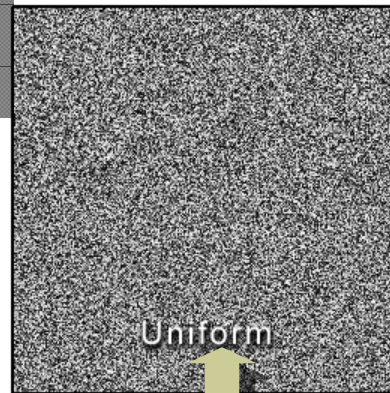
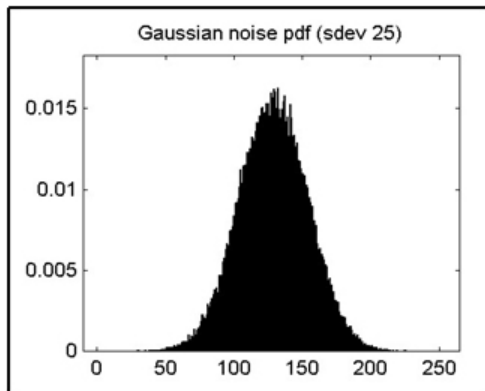
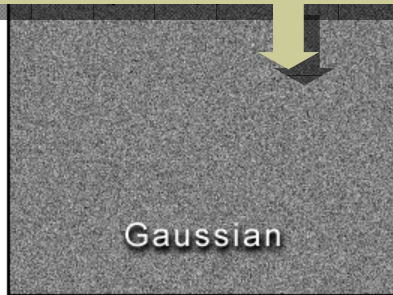
# Некорелиран шум



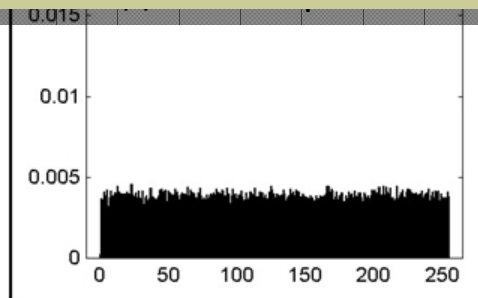
Всяка стойност на пиксел се асоциира с вероятност, определена от съответното разпределение

# Некорелиран шум

Най-вероятната стойност (мат. очакване) е 128 със средна разлика от нея 25 (станд.отклонение)



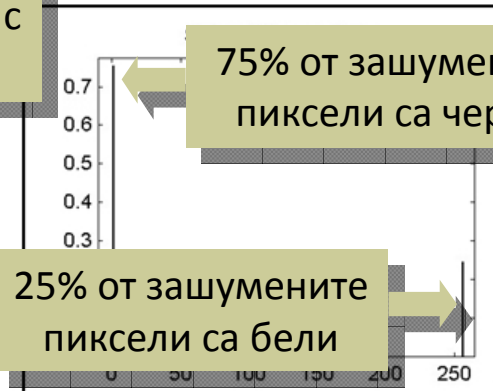
Всички стойности се срещат с еднаква вероятност



Само 12.5% от пикселите съдържат шум (sparse noise)

75% от зашумените пиксели са черни

25% от зашумените пиксели са бели





# Вероятностни функции

- Гаусова функция

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(z-\mu)^2 / 2\sigma^2}$$

- Rayleigh функция

$$p(z) = \begin{cases} \frac{2}{b}(z-a)e^{-(z-a)^2 / b}, & \text{за } z \geq a \\ 0, & \text{за } z < a \end{cases}$$

- Gamma (Erlang) функция

$$p(z) = \begin{cases} \frac{a^b \cdot z^{b-1}}{(b-1)!} e^{-az}, & \text{за } z \geq 0 \\ 0, & \text{за } z < 0 \end{cases}$$

# Вероятностни функции

- Експоненциална функция

$$p(z) = \begin{cases} a.e^{-az}, & \text{за } z \geq 0 \\ 0, & \text{за } z < 0 \end{cases}$$

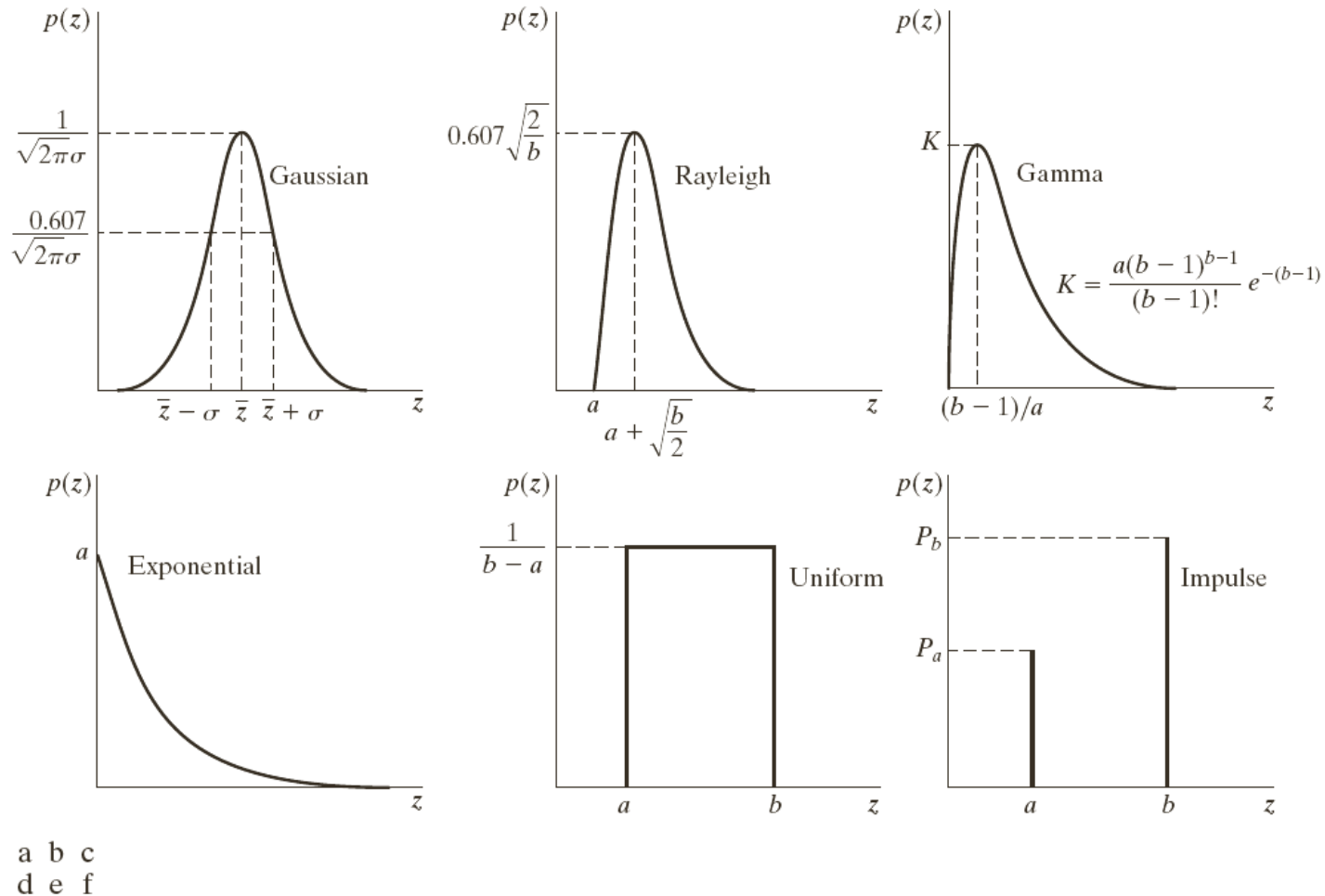
- Равномерна функция

$$p(z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{за } a \leq z \leq b \\ 0, & \text{в противен сл.} \end{cases}$$

- Импулсна функция

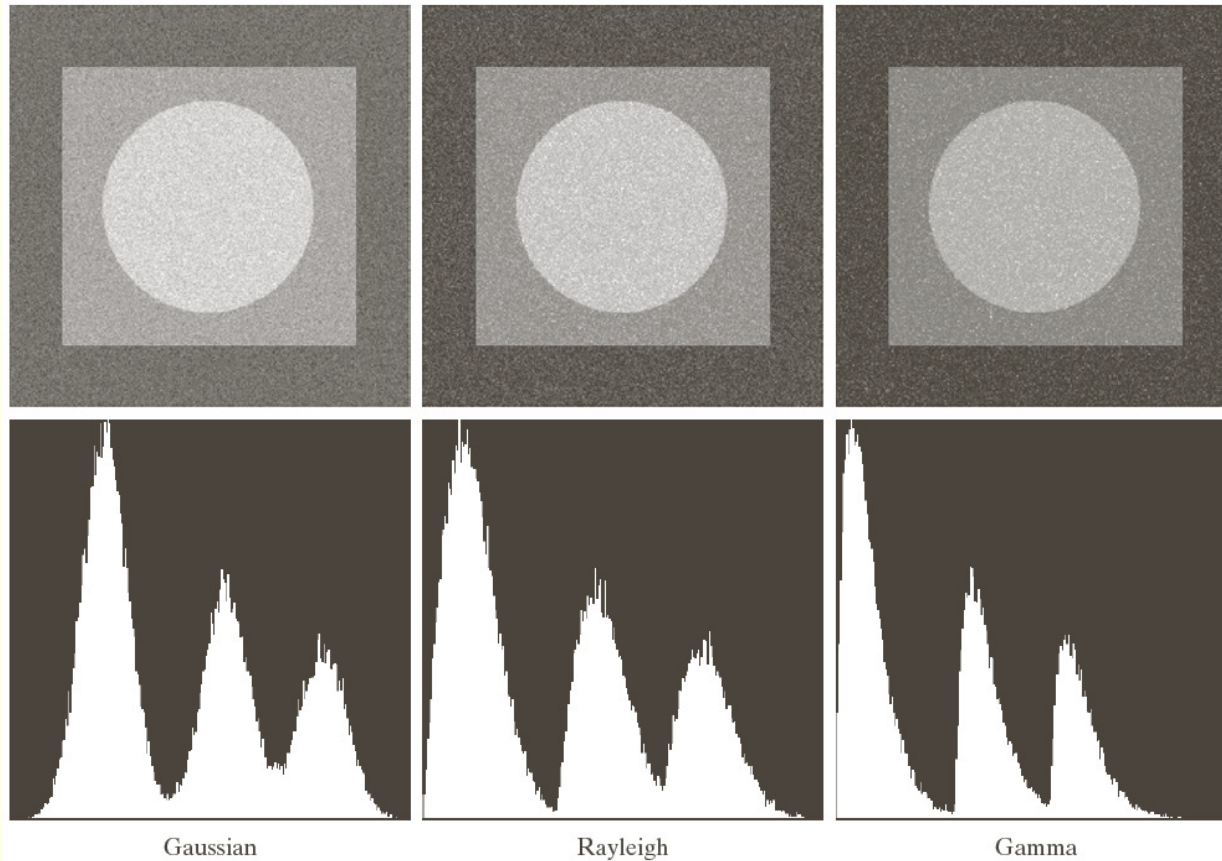
$$p(z) = \begin{cases} P_a, & \text{за } z = a \\ P_b, & \text{за } z = b \\ 0, & \text{в прот.сл.} \end{cases}$$

# Вероятностни функции



**FIGURE 5.2** Some important probability density functions.

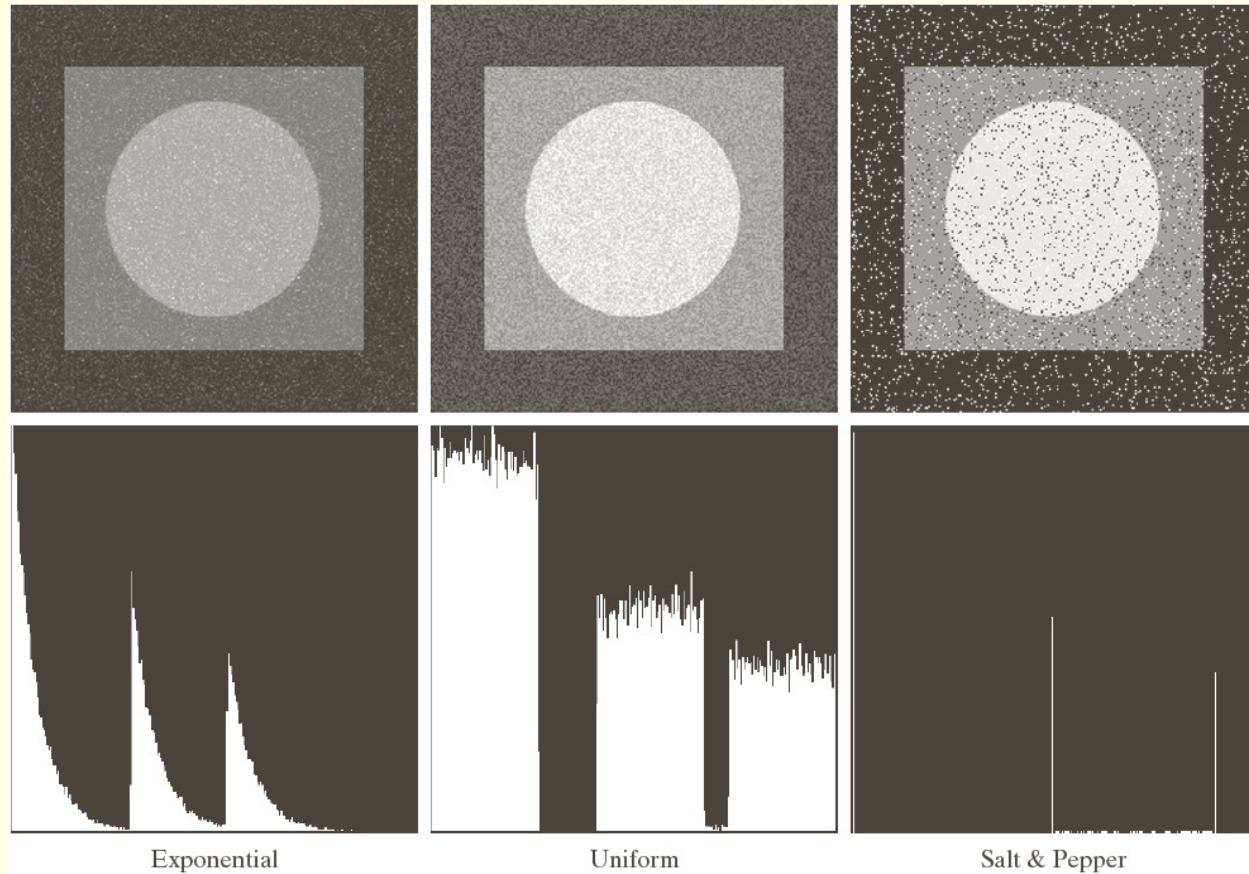
# Некорелиран шум



a b c  
d e f

**FIGURE 5.4** Images and histograms resulting from adding Gaussian, Rayleigh, and gamma noise to the image in Fig. 5.3.

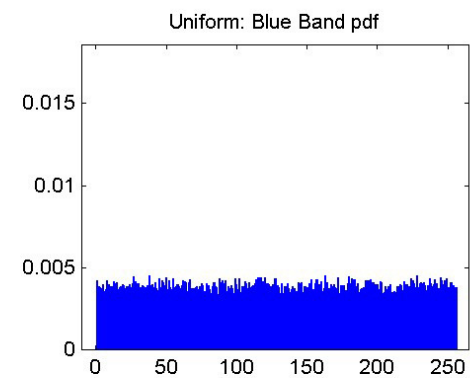
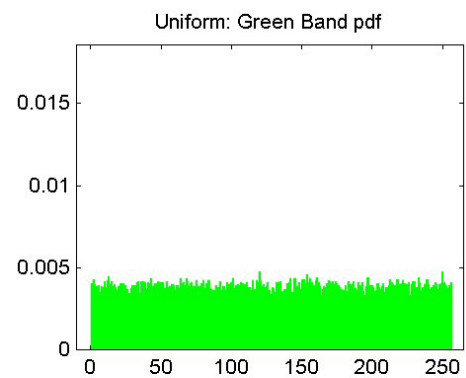
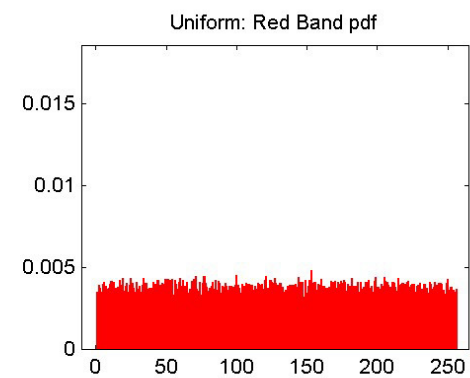
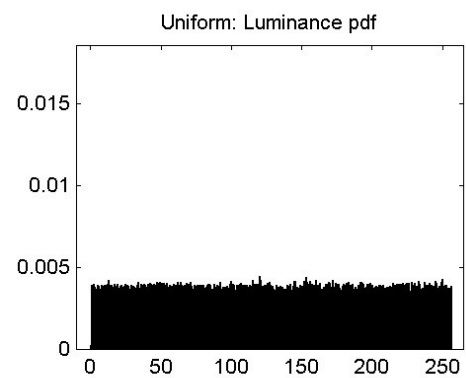
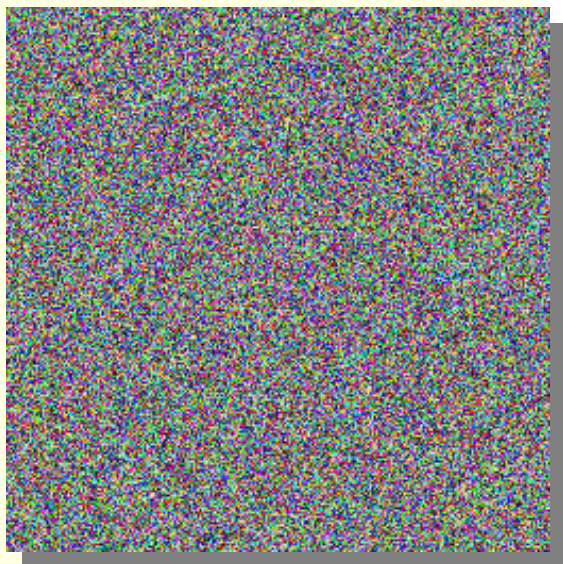
# Некорелиран шум



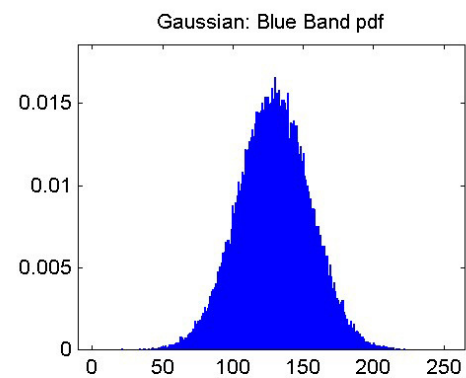
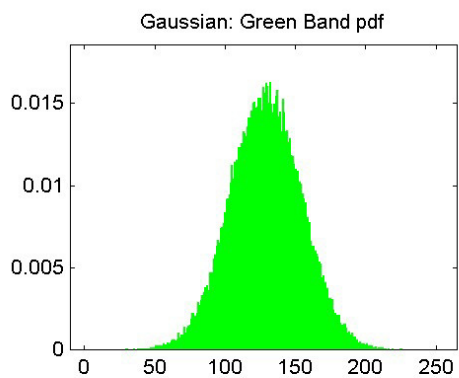
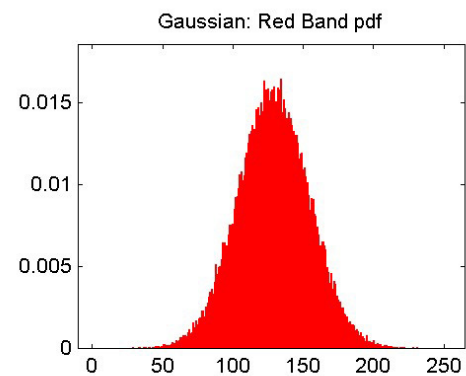
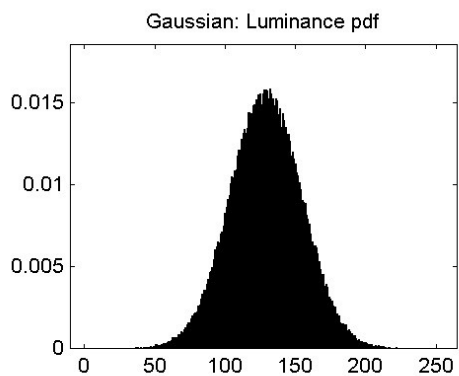
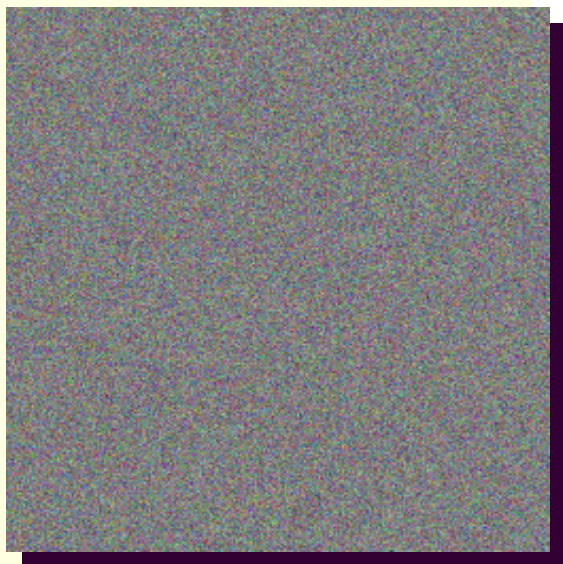
g h i  
j k l

**FIGURE 5.4** (Continued) Images and histograms resulting from adding exponential, uniform, and salt and pepper noise to the image in Fig. 5.3.

# Постоянен шум



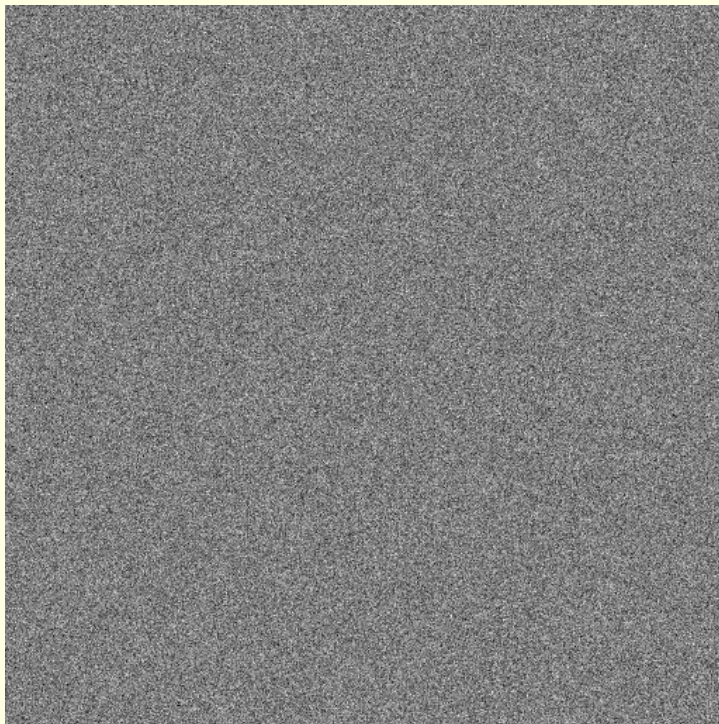
# Гауссов шум



# Гаусов шум

## *Gaussian IID шум*

Independent, Identically Distributed  
(няма пространствена корелация)





# Възстановяване на изображение

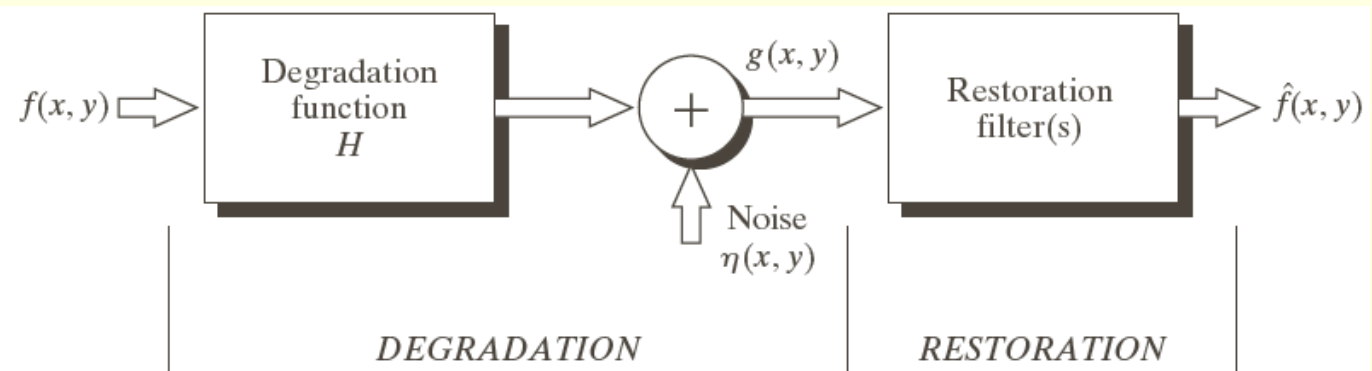
*пространствена област*

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + \eta(x, y)$$

*честотна област*

$$G(u, v) = H(u, v) \cdot F(u, v) + N(u, v)$$

**FIGURE 5.1**  
A model of the image degradation/restoration process.



# Автокорелация на изображение

- Мярка за подобие на изображението с изместено негово копие
- Автокорелацията се изчислява като
  - определя се изображението  $\tilde{I}$  като разлика на оригиналното изображение  $I$  и средната стойност за цялото изображение
  - определя се сумата на попикселното умножение на  $\tilde{I}$  с изместено негово копие

$$A_I(\rho, \chi) = \frac{1}{RC} \sum_{r=1}^R \sum_{c=1}^C \tilde{I}(r, c) \tilde{I}(\psi(r + \rho; R, \psi(c + \chi; C))$$

$$\tilde{I}(\rho, \chi) = \tilde{I}(\rho, \chi) - \frac{1}{RC} \sum_{r=1}^R \sum_{c=1}^C I(r, c) \quad \psi(x; N) = \begin{cases} \text{mod}(x, N) & \text{при } x \geq 0 \\ \text{mod}(x + N, N) & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

# Автокорелация на Гаусов IID шум

- Автокорелацията е обратна Фурие трансформация на спектралната функция за Гаусов IID шум



$$PS(I) = |F(I)|^2$$



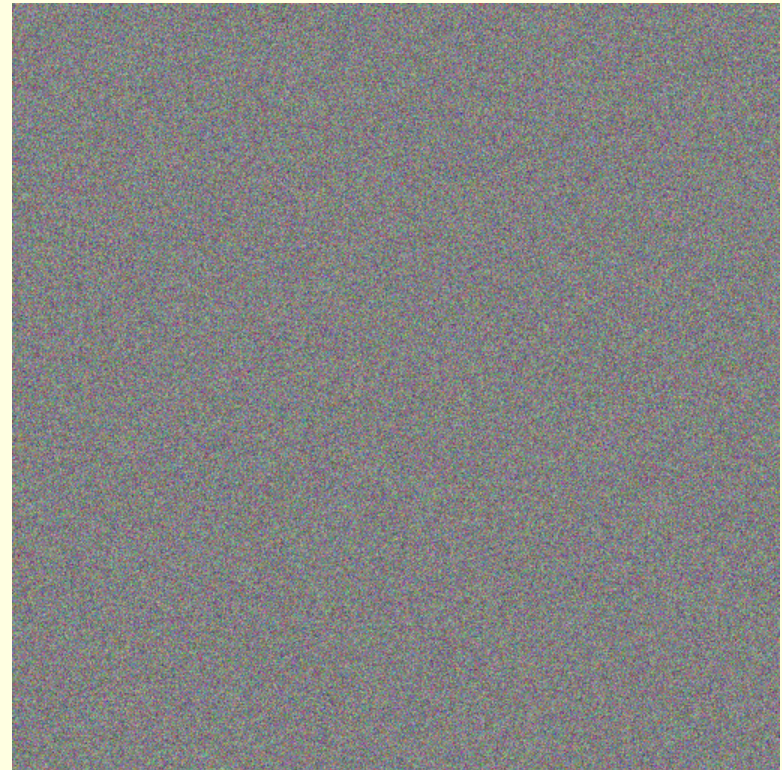
$$A_I(\rho, \chi) = \text{Re} \left[ F^{-1} \left\{ |F(I)|^2 \right\} \right]$$

# Некорелиран шум

---



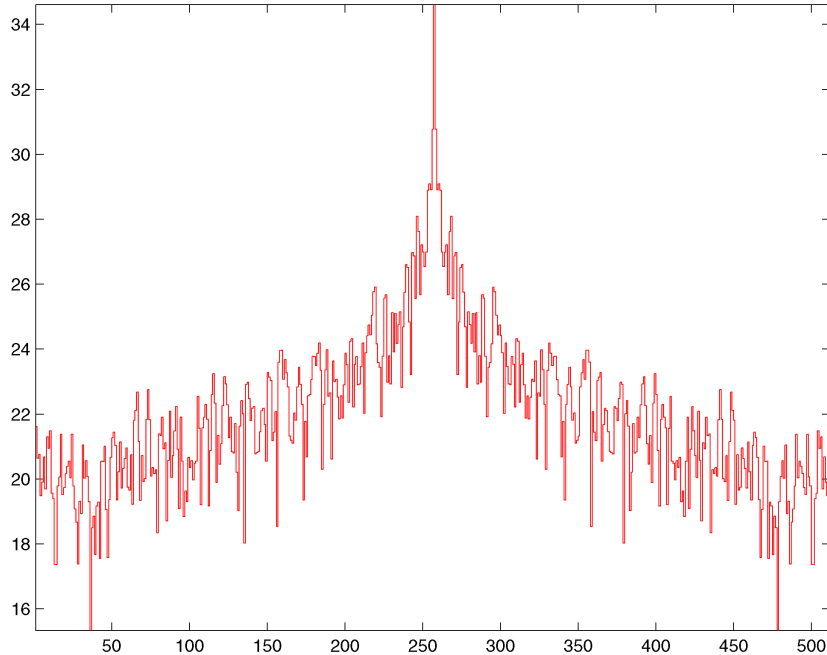
незашумено изображение



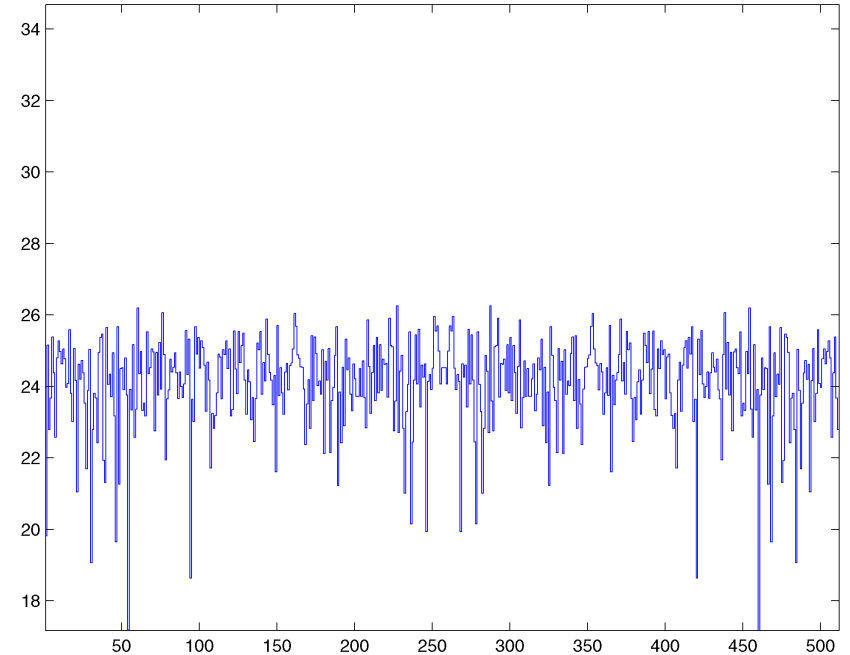
Гаусов шум

# Некорелиран шум

- Спектрална функция на незашумено изображение и Гаусов шум



централен профил на  
спектралната функция  
на незашумено изображение



централен профил на  
спектралната функция  
на Гаусов шум

# Некорелиран шум

- Изображение зашумено с Гаусов шум



изображение + Гаусов шум

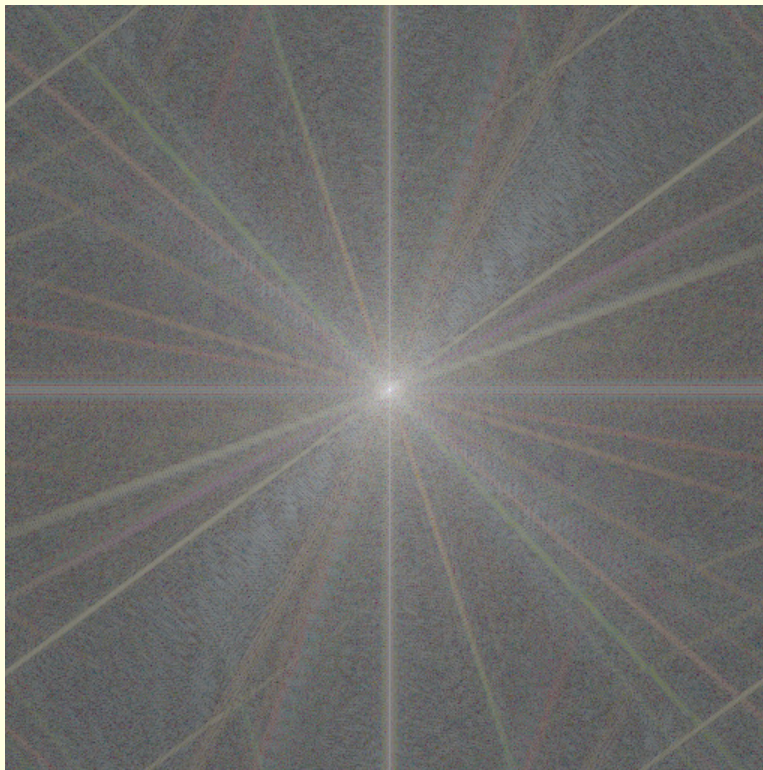


$$|I(v,u)|^2 < |N(v,u)|^2 \quad |I(v,u)|^2 > |N(v,u)|^2 \quad |I(v,u)|^2 < |N(v,u)|^2$$

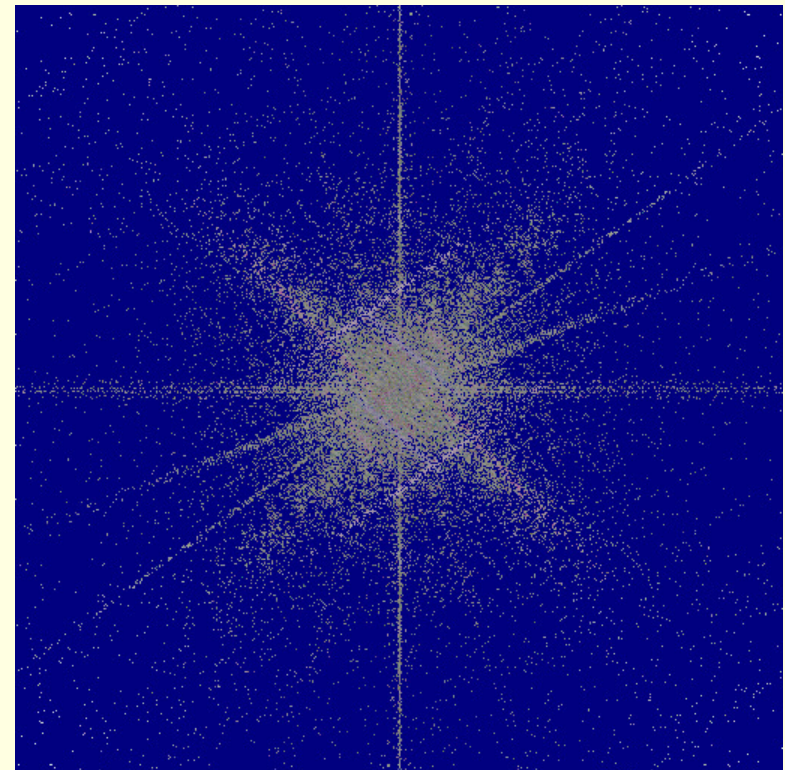
централен профил на  
спектр.ф. на изображение + Гаусов шум

# Некорелиран шум

- Спектрална функция на незашумено изображение и Гаусов шум



оригинално изображение



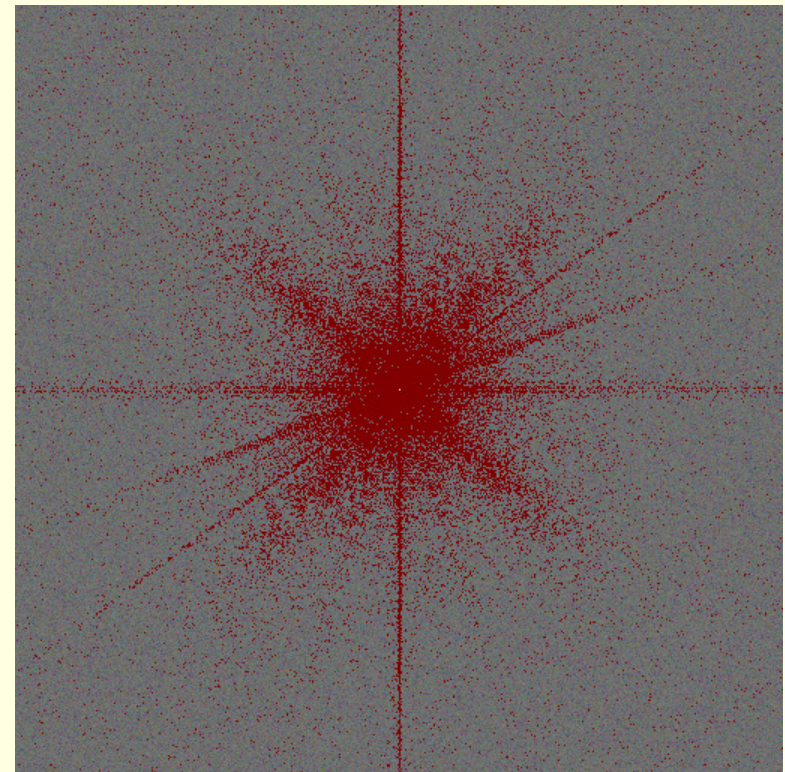
в син цвят – шум > изображение

# Некорелиран шум

- Спектрална функция на незашумено изображение и Гаусов шум



шум



в червен цвят – изображение > шум

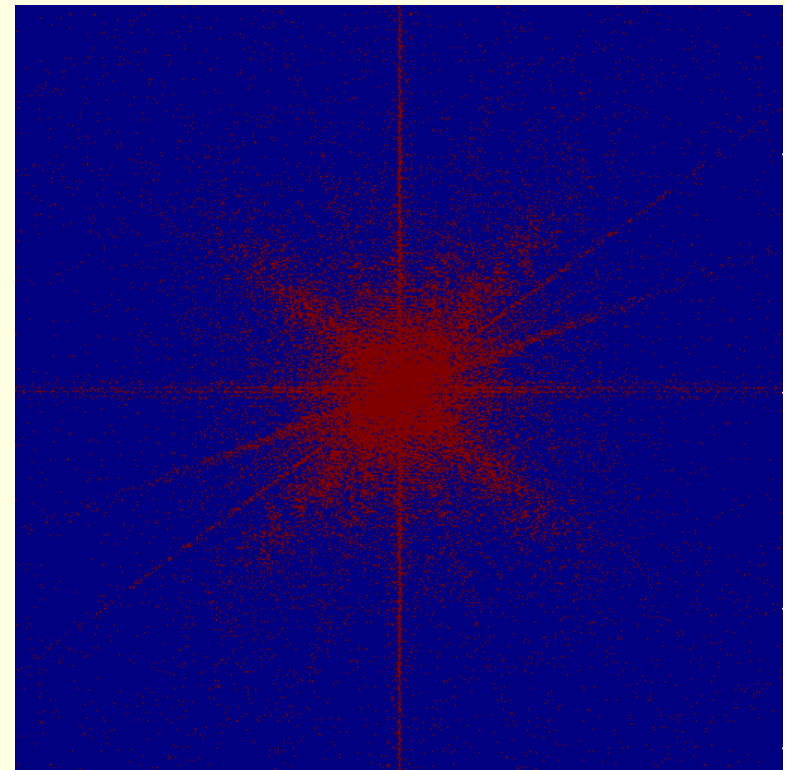


# Некорелиран шум

- Спектрална функция на незашумено изображение и Гаусов шум



спектрална функция  
на Гаусов шум



спектрална функция  
на изображение & шум

# Аддитивен шум

---



оригинално  
изображение



шум



изображение+шум

# Аддитивен шум

Спектрална функция

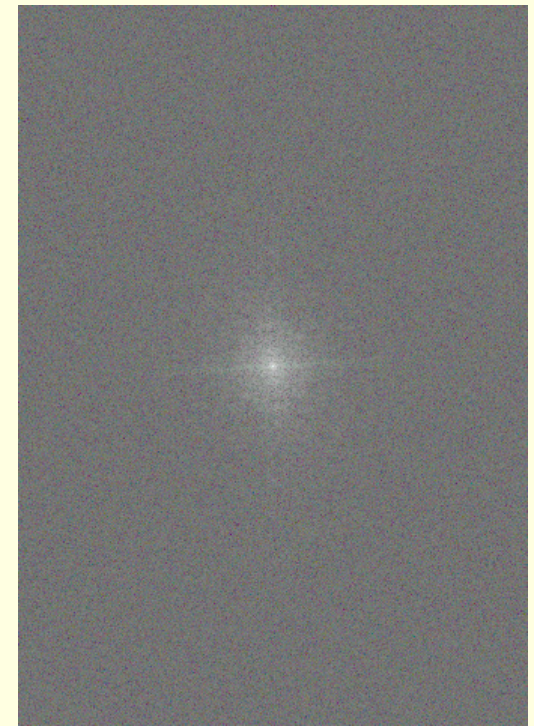
$$\log\{|F(I)|^2 + 1\}$$



оригинално  
изображение



шум



изображение+шум

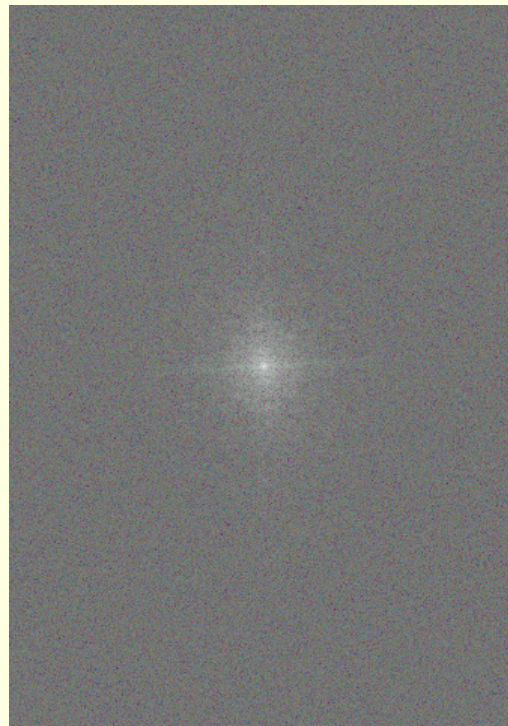
# Аддитивен шум

Спектрална функция

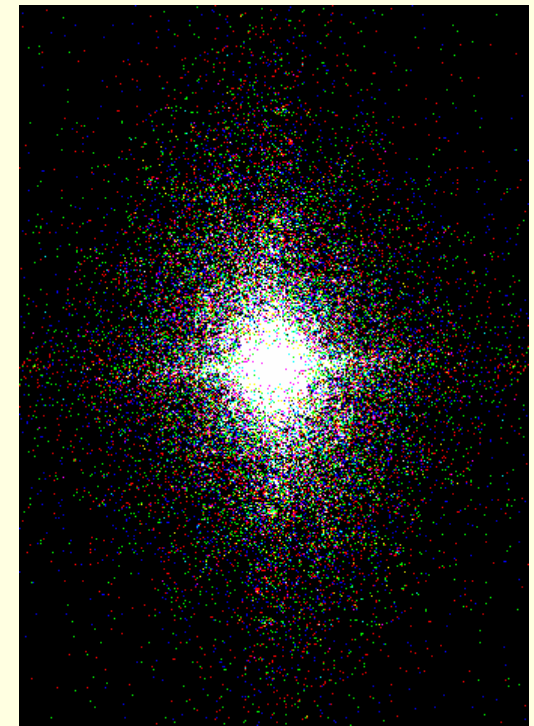
$$\log\{|F(I)|^2 + 1\}$$



оригинално  
изображение

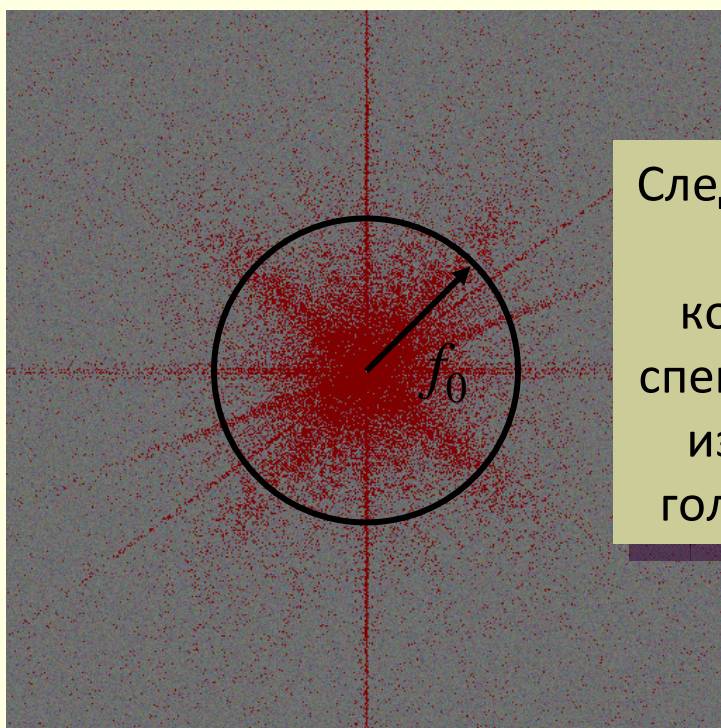


изображение+шум



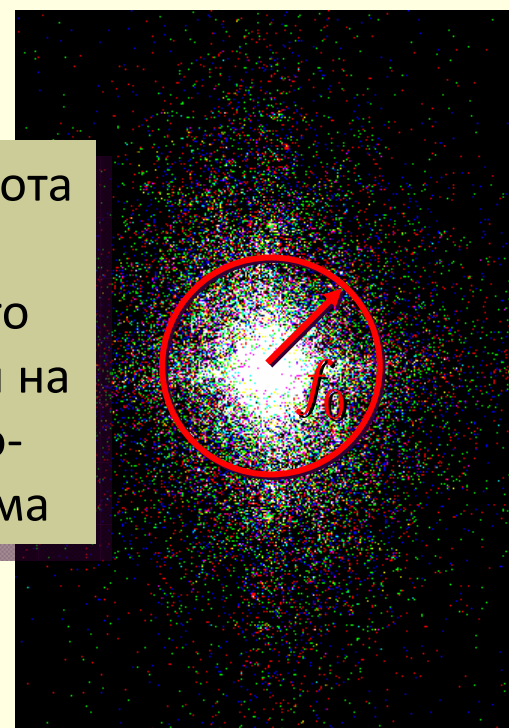
изображение > шум

# Филтрация с изглаждащ филтър



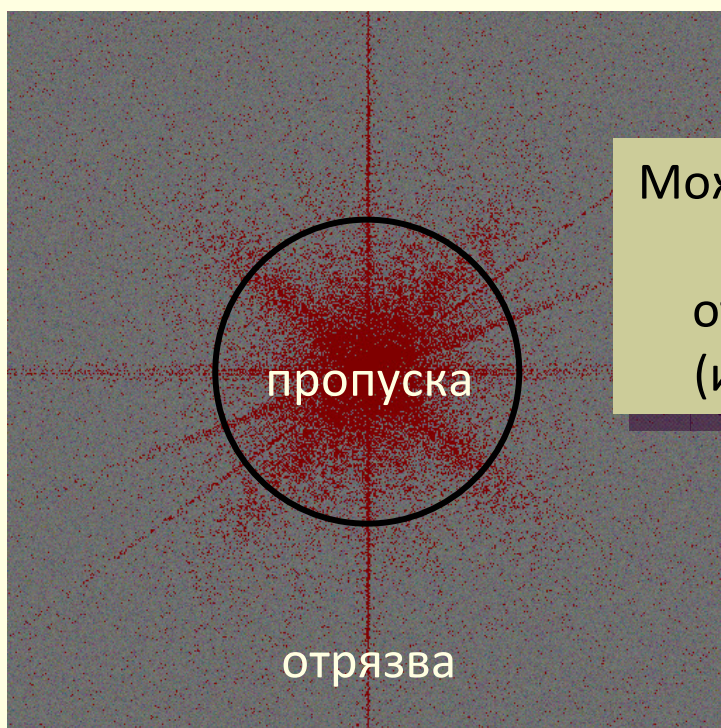
в червен цвят: изображение > шум

След определена честота  $f_0$  има повече компоненти, за които спектралната функция на изображението е по-голяма от тази на шума

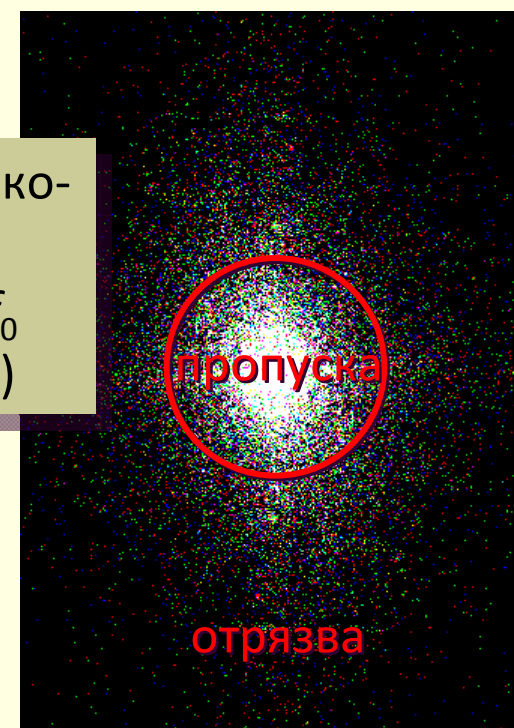


изображение > шум

# Филтрация с изглаждащ филтър



Може се приложи ниско-  
честотен филтър с  
отрязваща честота  $f_0$   
(изглаждащ филтър)



в червен цвят: изображение > шум

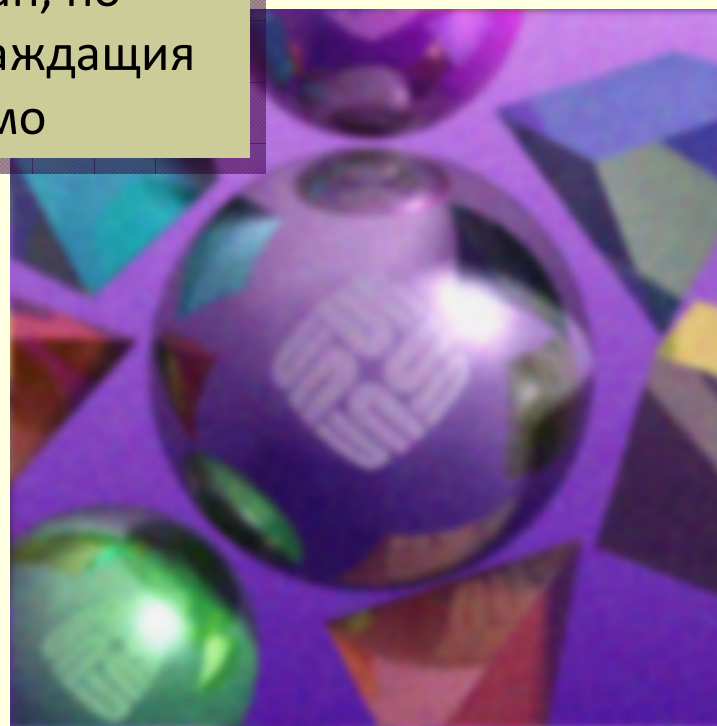
изображение > шум

# Филтрация с изглаждащ филтър

Резултатът не е много добър – шумът е филтриран, но размиването от изглаждащия филтър е голямо



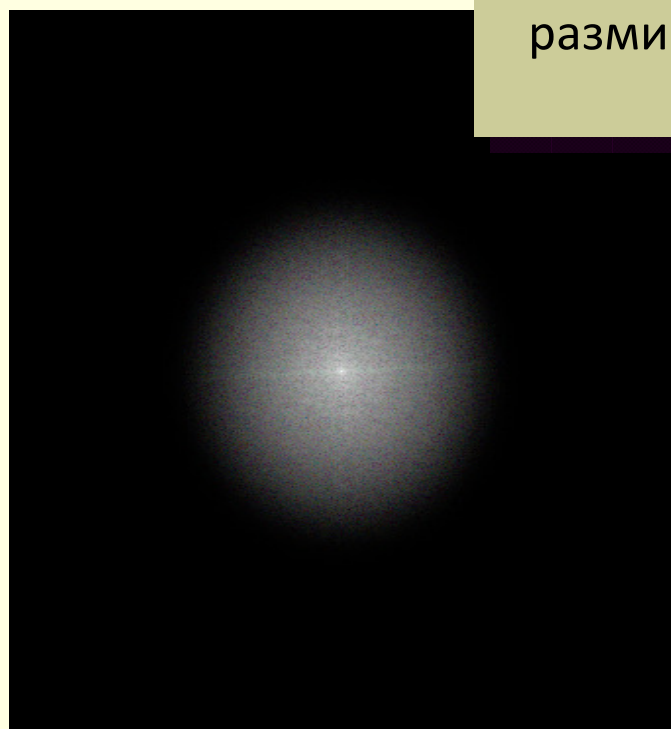
Спектрална функция на изображението филтрирано с Гаусов филтър



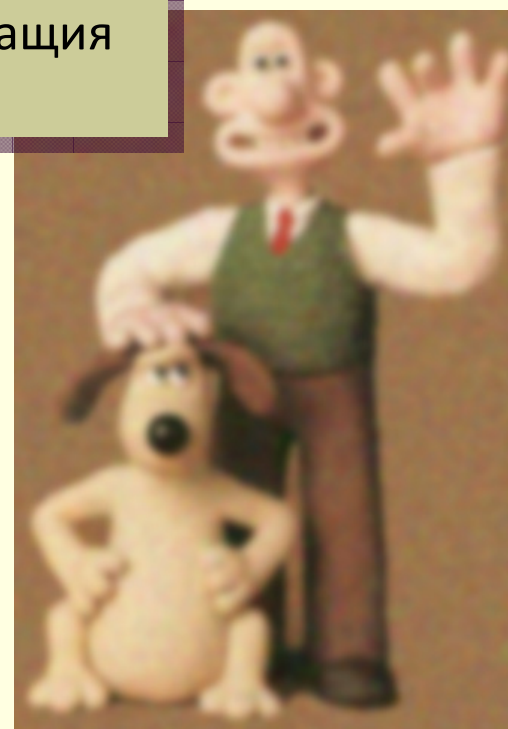
Изображението след филтриране с Гаусов филтър

# Филтрация с изглаждащ филтър

Резултатът не е много добър – шумът е филтриран, но размиването от изглаждащия филтър е голямо



Спектрална функция на изображението филтрирано с Гаусов филтър

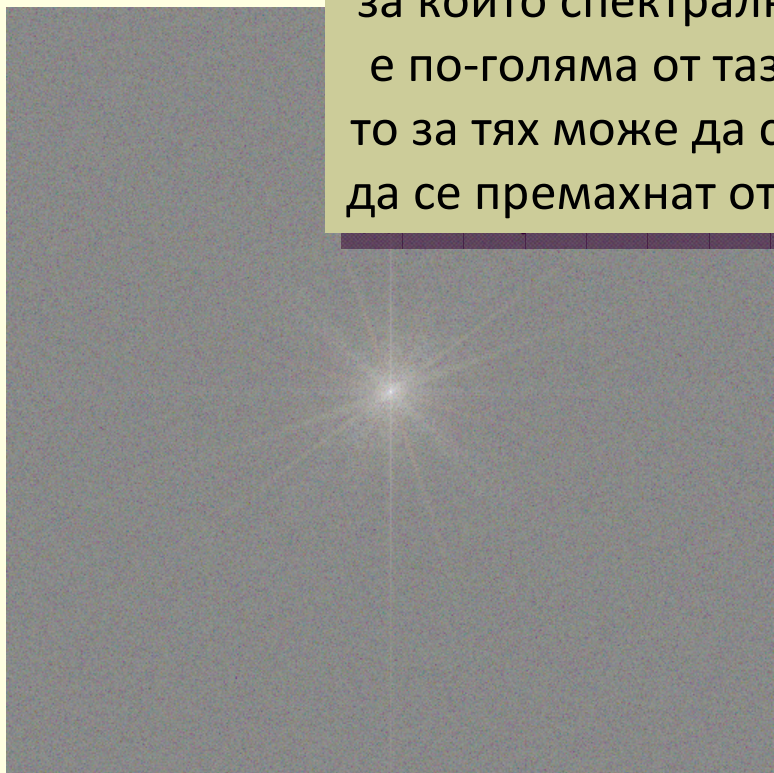


Изображението след филтриране с Гаусов филтър

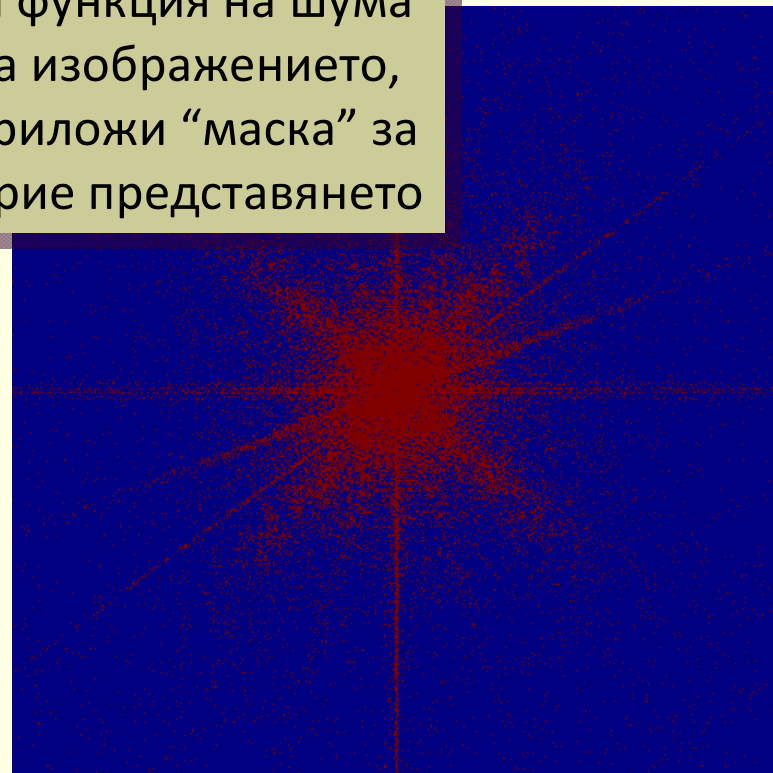


# Филтрация с маскиране на шума

Ако са известни честотните компоненти, за които спектралната функция на шума е по-голяма от тази на изображението, то за тях може да се приложи “маска” за да се премахнат от Фурие представянето



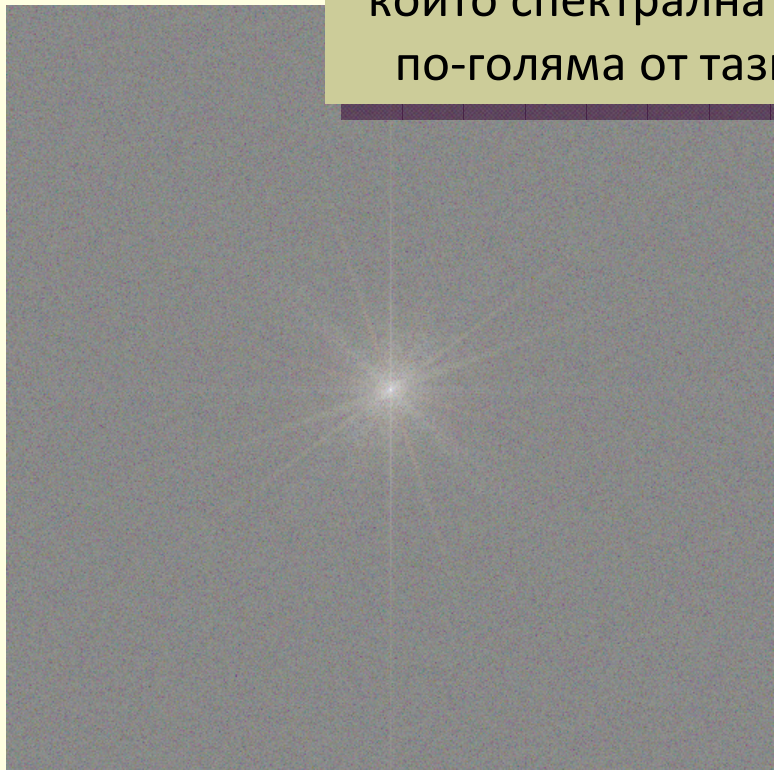
Спектрална функция на шума



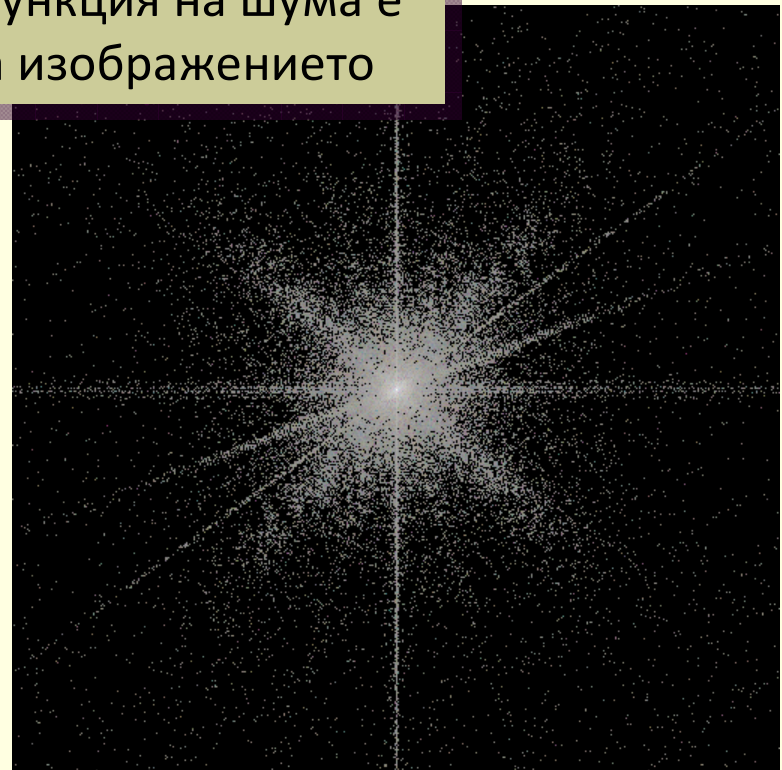
червено: изображение > шум  
синьо: изображение < шум

# Филтрация с маскиране на шума

Маскират се честотните компоненти, за които спектралната функция на шума е по-голяма от тази на изображението



Спектрална функция на шума



маскирани компонентите,  
за които изображение > шум

# Филтрация с маскиране на шума

С обратна Фурие трансформация се получава филтрирано изображение



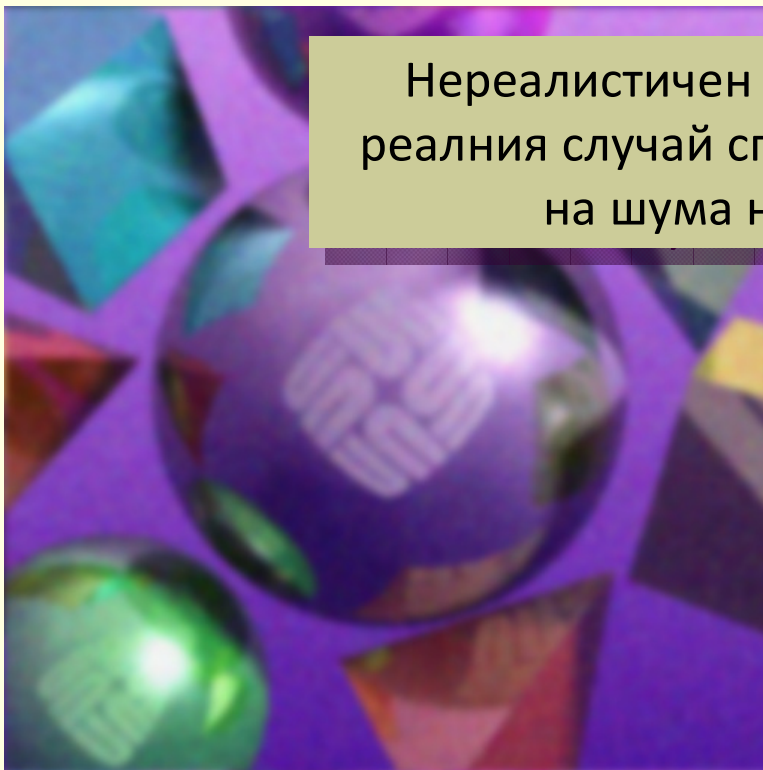
изображение с Гаусов шум



изображение, филтрирано  
с маскиране на шума

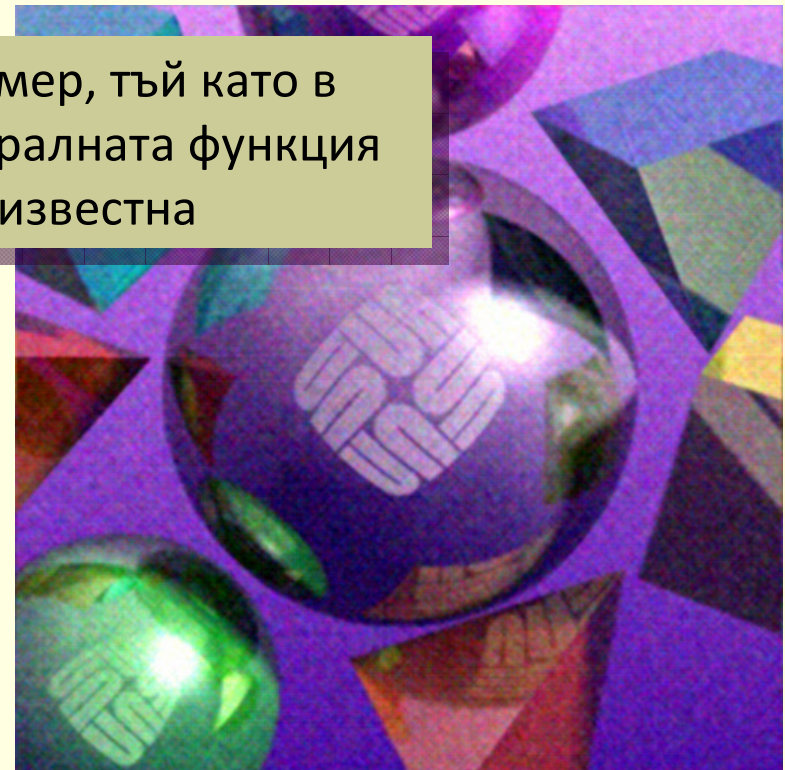
# Филтрация с маскиране на шума

- По-добър резултат при маскиране на шума, въпреки че изображението все още е зашумено



изображение, филтрирано  
с Гаусов филтър

Нереалистичен пример, тъй като в  
реалния случай спектралната функция  
на шума не е известна



изображение, филтрирано  
с маскиране на шума

# Филтрация на адитивен шум

---

- ***Изглаждащи пространствени филтри***
  - филтър по средна стойност
- ***Пространствени филтри с подреждане***
  - медианен филтър
- ***Адаптивни пространствени филтри***

# Филтрация на адитивен шум

## ■ Изглаждащи пространствени филтри

- филтър по средна стойност (**arithmetic mean filter**)

$$\tilde{I} = \frac{1}{mn} \sum_{(s,t) \in S_{x,y}} I(s,t)$$

$S_{x,y}$  – локална околност с размери  $m \times n$   
 $I$  – оригинално изображение  
 $\tilde{I}$  – филтрирано изображение

- геометрична средна стойност (**geometric mean filter**)

$$\tilde{I} = \prod_{(s,t) \in S_{x,y}} I(s,t)^{\frac{1}{mn}}$$

по-слабо филтрира дребни детайли в сравнение с аритметичната средна стойност

- хармонична средна стойност (**harmonic mean filter**)

$$\tilde{I} = \frac{mn}{\sum_{(s,t) \in S_{x,y}} I(s,t)}$$

филтрира добре позитивен импулсен шум (salt noise) и Гаусов шум, но не негативен импулсен шум (pepper noise)

- контрахармонична средна стойност (**contraharmonic mean filter**)

$$\tilde{I} = \frac{\sum_{(s,t) \in S_{x,y}} I(s,t)^{Q+1}}{\sum_{(s,t) \in S_{x,y}} I(s,t)^Q}$$

$Q$  – ред на филтъра  
при  $Q=0$ : редуцира се до аритметична ср.ст.  
при  $Q=-1$ : редуцира се до хармонична ср.ст.  
при  $Q>0$  филтрира позитивни импулсни шумове  
при  $Q<0$  филтрира негативни импулсни шумове

# Филтрация на адитивен шум

## ■ Изглаждащи пространствени филтри

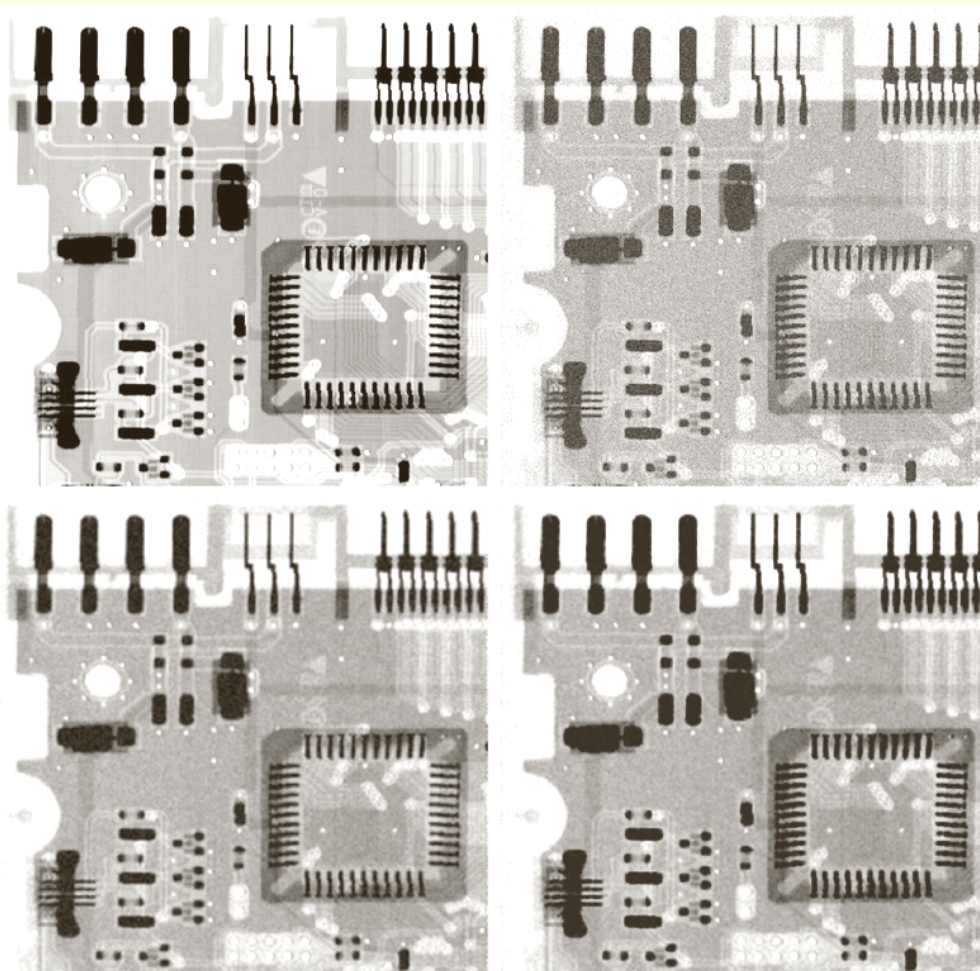
a b  
c d

**FIGURE 5.7**

(a) X-ray image.  
(b) Image corrupted by additive Gaussian noise. (c) Result of filtering with an arithmetic mean filter of size  $3 \times 3$ . (d) Result of filtering with a geometric mean filter of the same size.

(Original image courtesy of Mr. Joseph E. Pascente, Lixi, Inc.)

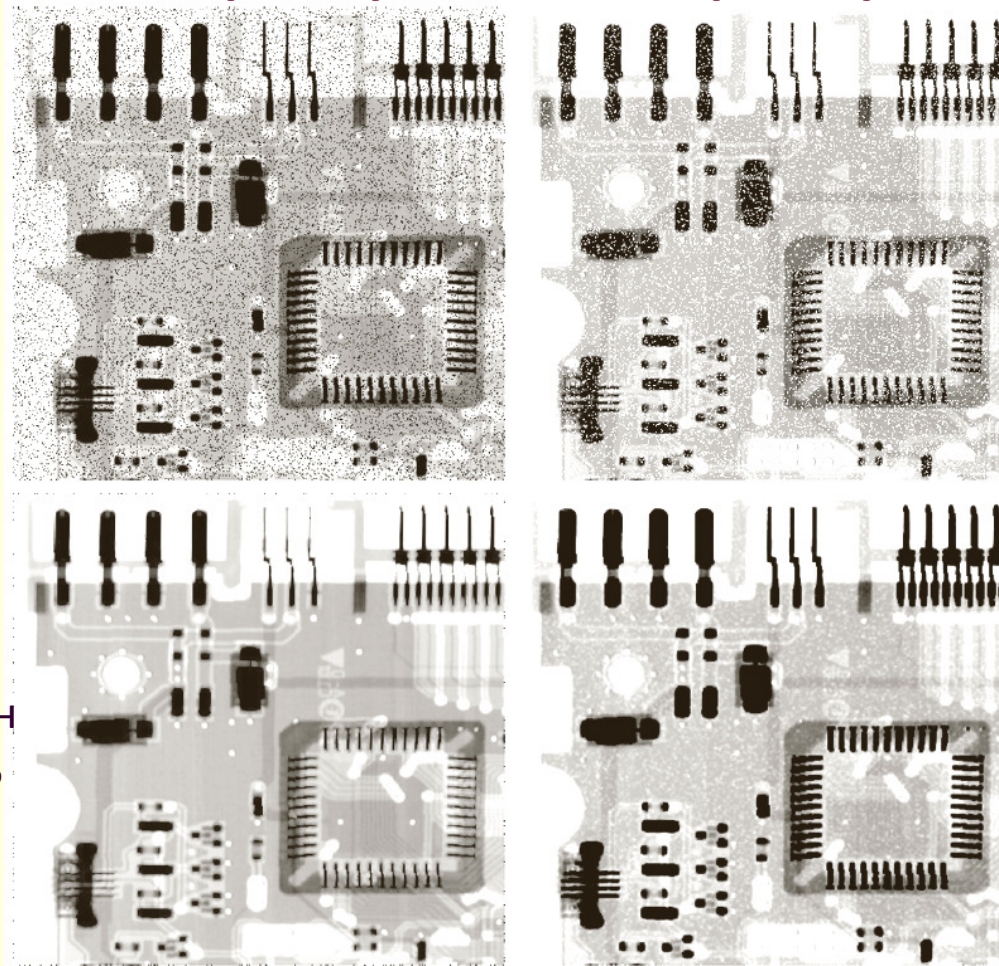
аритметична  
средна  
стойност



геометрична  
средна  
стойност

# Филтрация на адитивен шум

## ■ Изглаждащи пространствени филтри



a b  
c d

**FIGURE 5.8**

(a) Image corrupted by pepper noise with a probability of 0.1. (b) Image corrupted by salt noise with the same probability. (c) Result of filtering (a) with a  $3 \times 3$  contra-harmonic filter of order 1.5. (d) Result of filtering (b) with  $Q = -1.5$ .

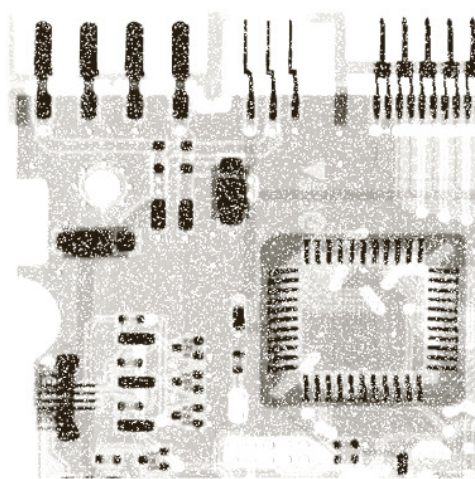
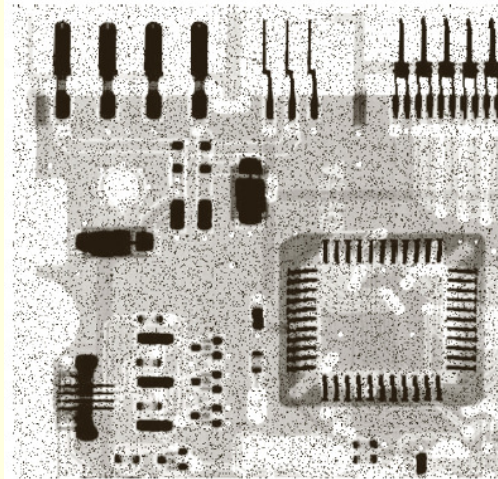
контрахармоничен  
филтър от ред 1.5

контрахармоничен  
филтър от ред -1.5



# Филтрация на адитивен шум

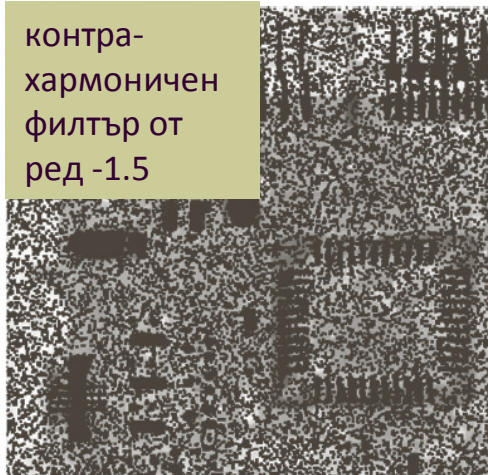
## Изглаждащи пространствени филтри



a b  
c d  
**FIGURE 5.8**  
(a) Image corrupted by pepper noise with a probability of 0.1. (b) Image corrupted by salt noise with the same probability.

a b

**FIGURE 5.9**  
Results of selecting the wrong sign in contraharmonic filtering.  
(a) Result of filtering Fig. 5.8(a) with a contraharmonic filter of size  $3 \times 3$  and  $Q = -1.5$ .  
(b) Result of filtering 5.8(b) with  $Q = 1.5$ .



# Филтрация на адитивен шум

## ■ Пространствени филтри с подреждане

### *Order-Statistics Filters, Rank-Ordered Filters*

- медианен филтър (*median filter*)

$$\tilde{I} = \underset{(s,t) \in S_{x,y}}{\text{median}} \{I(s,t)\}$$

много добре филтрира случайни шумове, както биполярни, така и униполярни

- максимален и минимален филтър (*max & min filters*)

$$\tilde{I} = \underset{(s,t) \in S_{x,y}}{\max} \{I(s,t)\} \quad \tilde{I} = \underset{(s,t) \in S_{x,y}}{\min} \{I(s,t)\}$$

максималния филтър редуцира salt noise  
минималния филтър редуцира pepper noise

- филтър по средна точка (*midpoint filter*)

$$\tilde{I} = \frac{1}{2} \left[ \underset{(s,t) \in S_{x,y}}{\max} \{I(s,t)\} + \underset{(s,t) \in S_{x,y}}{\min} \{I(s,t)\} \right]$$

комбинира подреждане и осредняване  
филтрира добре случаен шум (Гаусов или равномерен)

- средна стойност с изрязване (*Alpha-trimmed mean filter*)

$$\tilde{I} = \frac{1}{mn - d} \sum_{(s,t) \in S_{x,y}} I_{trim}(s,t)$$

най-малките  $d/2$  и най-големите  $d/2$  стойности в локалната околност не се разглеждат, останалите се осредняват

# Филтрация на адитивен шум

## ■ Пространствени филтри с подреждане

a b  
c d

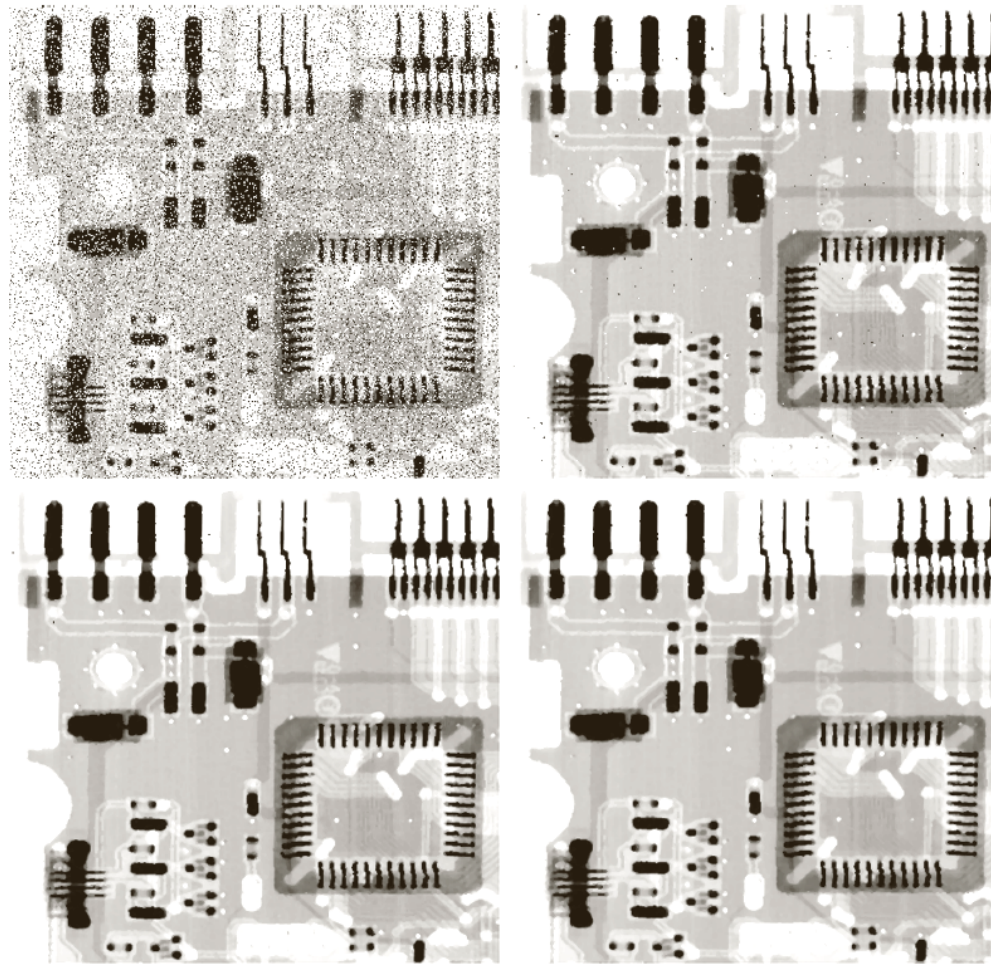
**FIGURE 5.10**

(a) Image corrupted by salt-and-pepper noise with probabilities  $P_a = P_b = 0.1$ .

(b) Result of one pass with a median filter of size  $3 \times 3$ .

(c) Result of processing (b) with this filter.

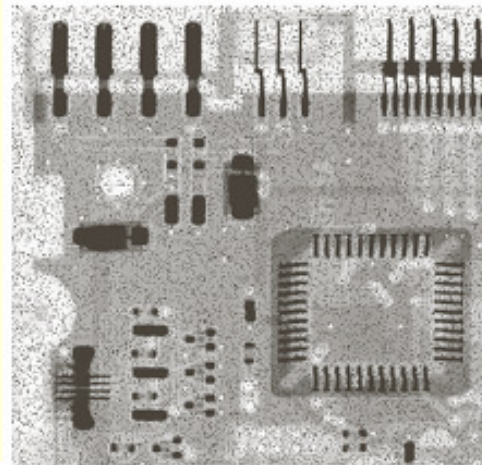
(d) Result of processing (c) with the same filter.



итеративно  
прилагане на  
медианен  
филтър

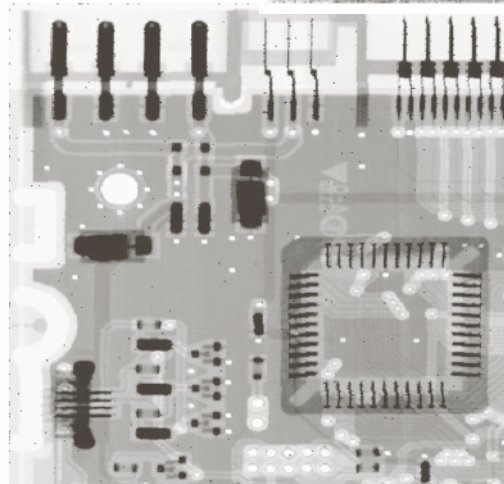
# Филтрация на адитивен шум

## ■ Пространствени филтри с подреждане

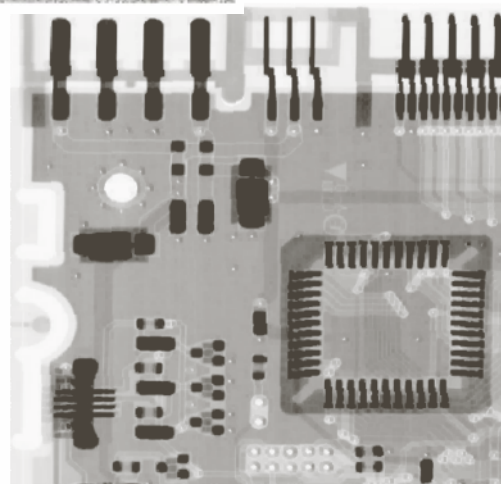


**FIGURE 5.8**  
(a) Image corrupted by pepper noise with a probability of 0.1

**a b**  
**FIGURE 5.11**  
(a) Result of filtering Fig. 5.8(a) with a max filter of size  $3 \times 3$ . (b) Result of filtering 5.8(b) with a min filter of the same size.

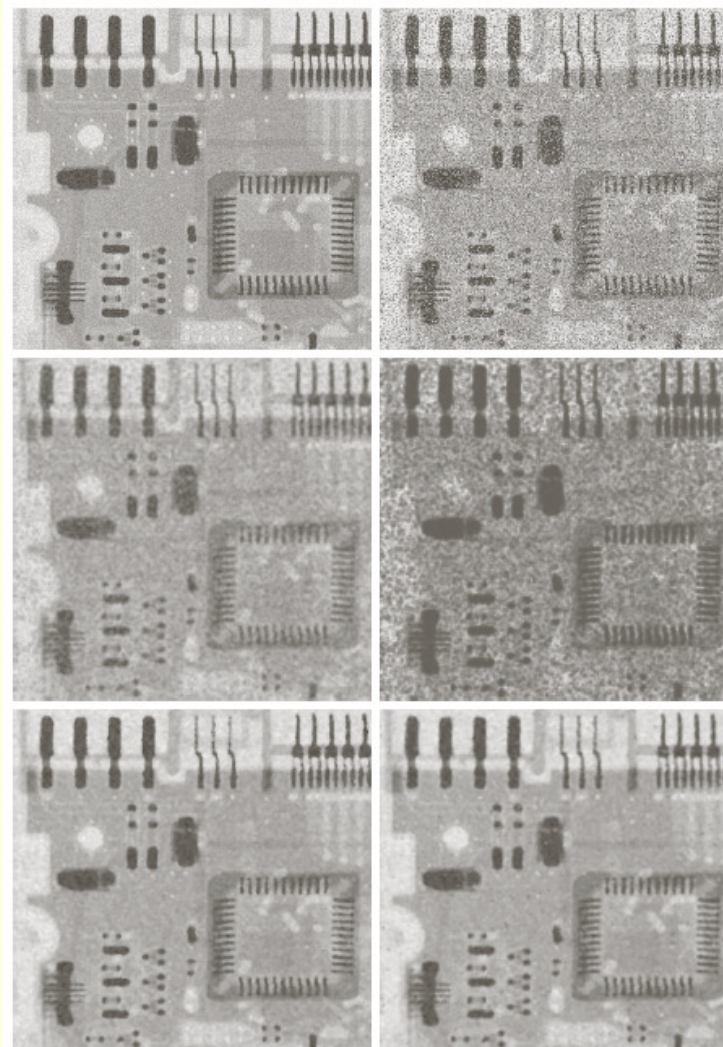


максимален филтър



минимален филтър

# Филтрация на адитивен шум



a	b
c	d
e	f

**FIGURE 5.12**

(a) Image corrupted by additive uniform noise.

(b) Image additionally corrupted by additive salt-and-pepper noise.

Image (b) filtered with a  $5 \times 5$ ;

(c) arithmetic mean filter;

(d) geometric mean filter;

(e) median filter;

and (f) alpha-trimmed mean filter with  $d = 5$ .

аритметична  
средна  
стойност

медианен  
филтър

геометрична  
средна  
стойност

alpha-trimmed  
средна стойност

# Филтрация на адитивен шум

---

## ■ *Адаптивни филтри*

- филтъра се променя в зависимост от статистически параметри за стойностите в локалната околност
  - по-добре филтрират шумове от не-адаптивните филтри
  - по-голяма изчислителна сложност

## ■ *Адаптивен медианен филтър*

- редуцира импулсни шумове
- изглажда случайни шумове
- редуцира деформации на обектите
  - например удебеляване или изтъняване на линии

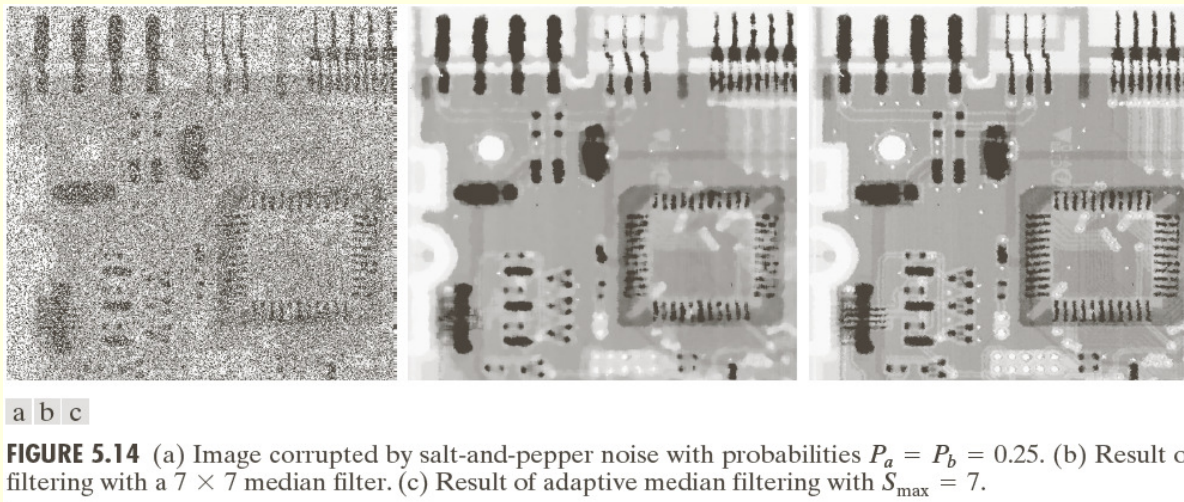
# Филтрация на адитивен шум

## ■ *Адаптивен медианен филтър*

- $z_{\min}$  – минимална стойност в локалната околност
- $z_{\max}$  – максимална стойност в локалната околност
- $z_{\text{med}}$  – медианна стойност в локалната околност
- $z_{x,y}$  – стойност на централния пиксел в локалната околност
- $S_{\max}$  – максимален допустим размер на локалната околност
- изпълнява се в две фази А и В
  - *фаза А*
    - $A_1 = z_{\text{med}} - z_{\min}; A_2 = z_{\text{med}} - z_{\max}$
    - ако  $A_1 > 0$  и  $A_2 < 0$  изпълни фаза В
    - в противен случай увеличи размера на локалната околност
    - ако размера на локалната околност  $< S_{\max}$  повтори фаза А
    - в противен случай резултатът е  $z_{x,y}$
  - *фаза В*
    - $B_1 = z_{x,y} - z_{\min}; B_2 = z_{x,y} - z_{\max}$
    - ако  $B_1 > 0$  и  $B_2 < 0$  то резултатът е  $z_{x,y}$
    - в противен случай резултатът е  $z_{\text{med}}$

# Филтрация на адитивен шум

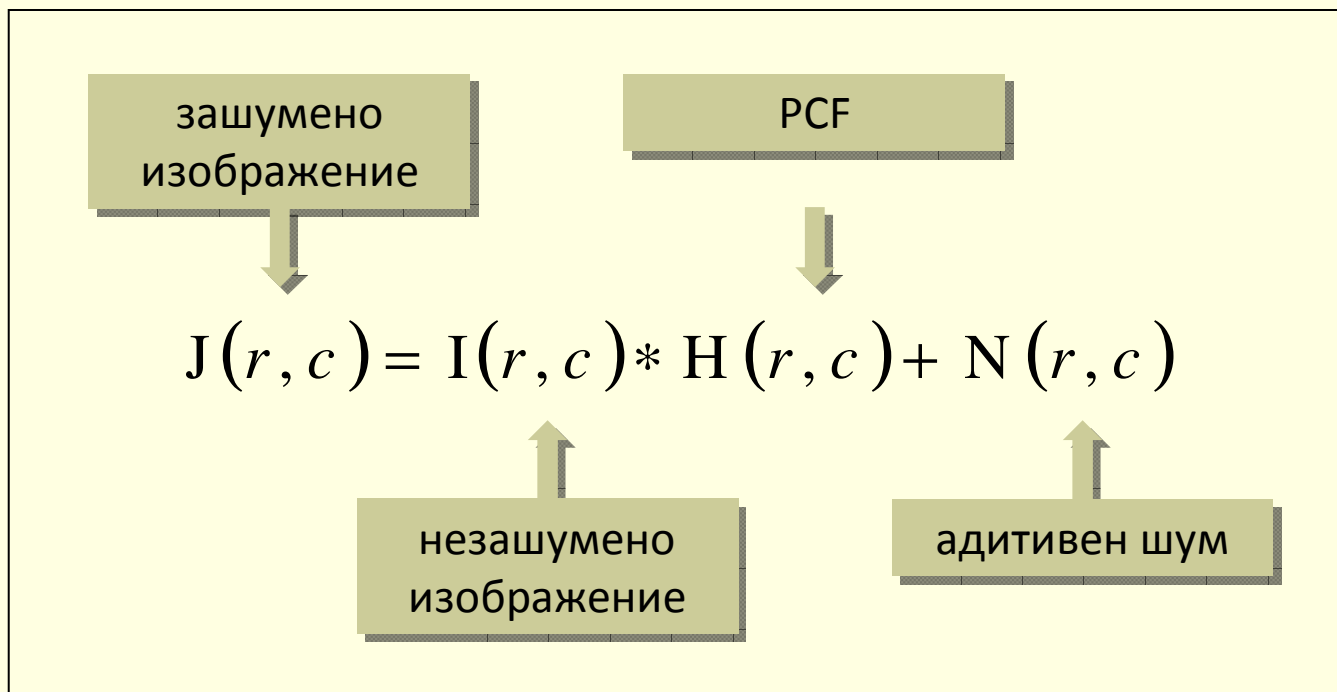
- *Адаптивен медианен филтър*





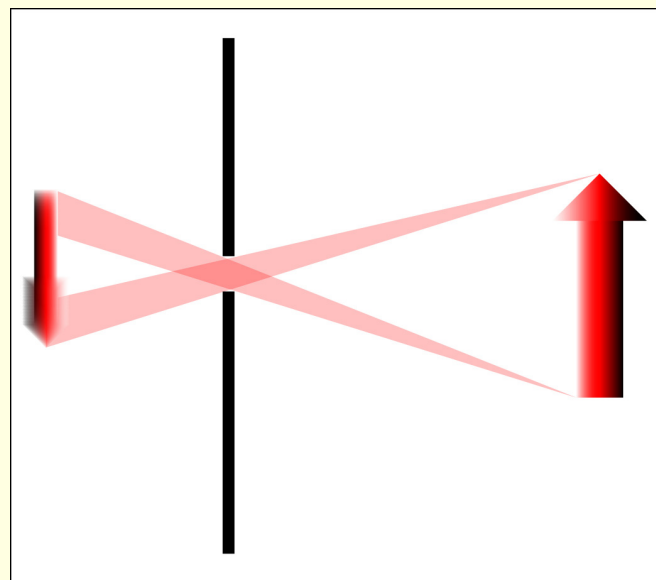
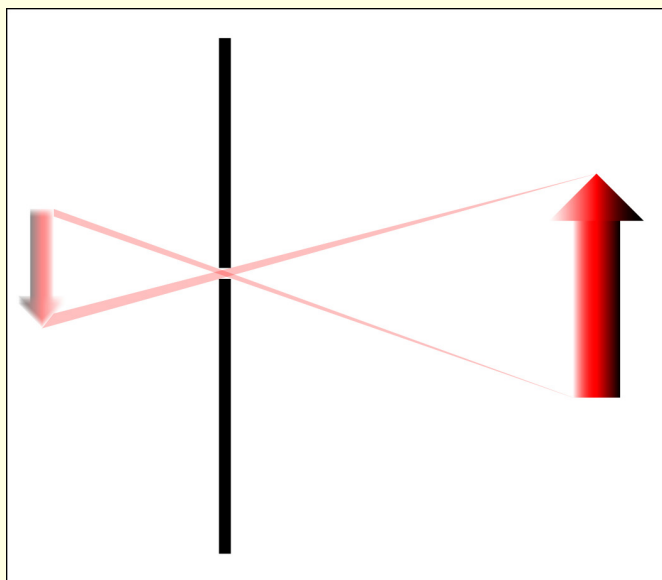
# Шумове в изображенията

- Общият модел на шумовете в изображенията включва
  - адитивен шум
  - конволюция с PCF (Point Spread Function)
    - нарича се още оптична предавателна функция



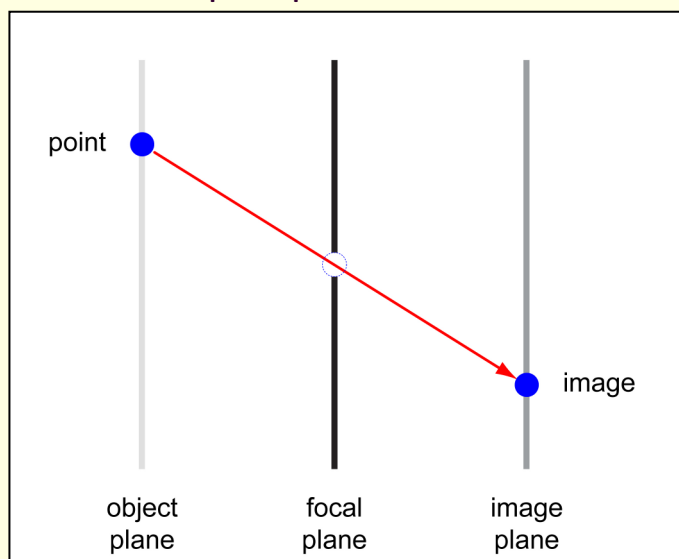
# Pointspread оператори

- Линейни модели на изкривяванията, възникващи в процеса на възприемане/получаване на изображения
  - линеен модел  $\Rightarrow$  конволюционен оператор
  - пример за pointspread оператор е апертурното изкривяване (aperture distortion)
    - неизбежна последица от получаването на изображение с камера с апертюра по-голяма от точка

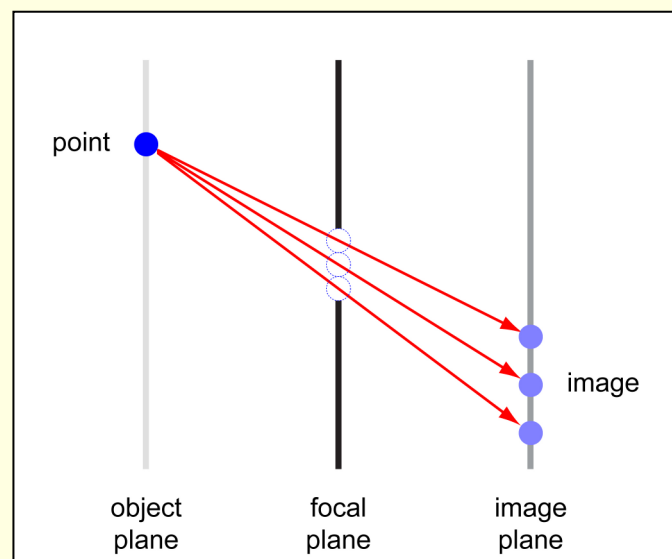


# Pointsread оператори

- Камера без обектив
  - изобразява **една** точка от обекта в **една** точка от изображението
- Камера с обектив
  - изобразява **една** точка от обекта в **много** точки от изображението
    - “разпръсква” точките



камера без обектив  
(pinhole camera, “камера-обскура”)



камера с обектив

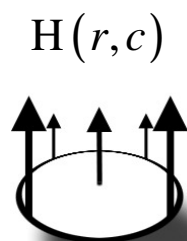
# Pointspread оператори

- Pointspread оператори и конволюция
  - конволюцията може да се извърши чрез умножение, изместване и сумиране
  - същият ефект на “размиване” на изображението се получава при формирането му с камера с апертура

$I(r,c)$



$J(r,c) = I(r,c) * H(r,c)$

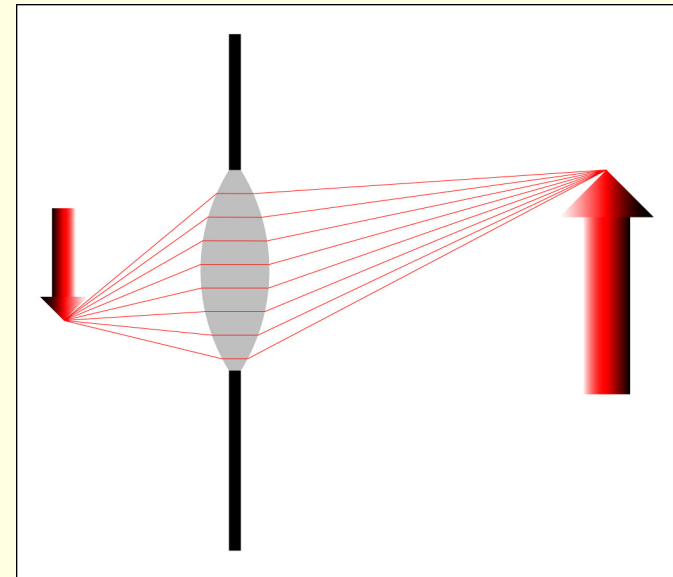
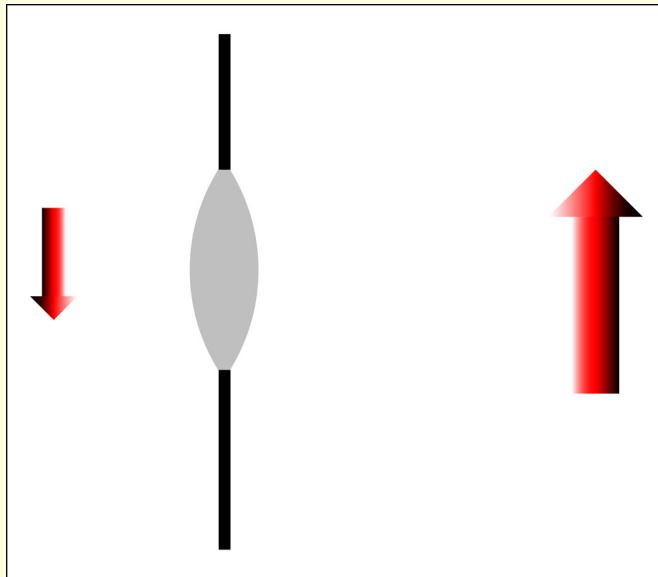


# Pointspread оператори

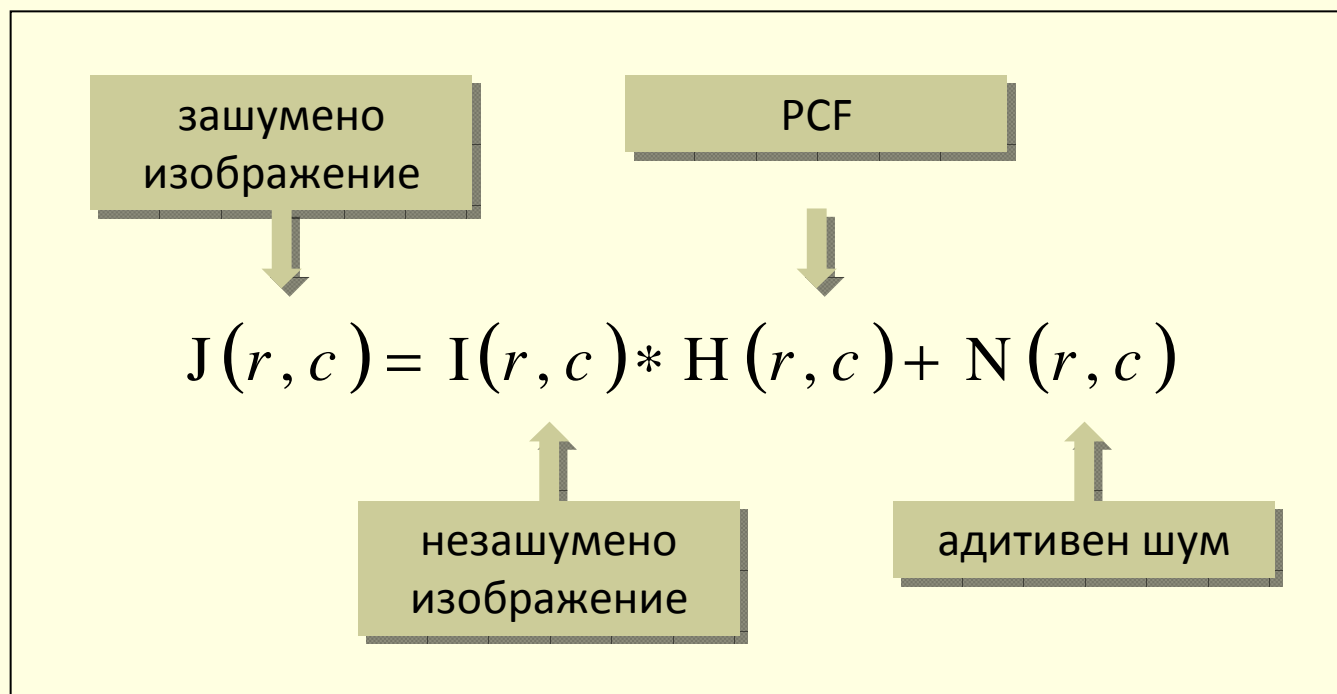
## ■ Лещи

- подходящо избраните лещи фокусират светлината излъчвана от точка и така редуцират размиването
- нито една леща не редуцира размиването идеално
- лещите също внасят собствено изкривяване

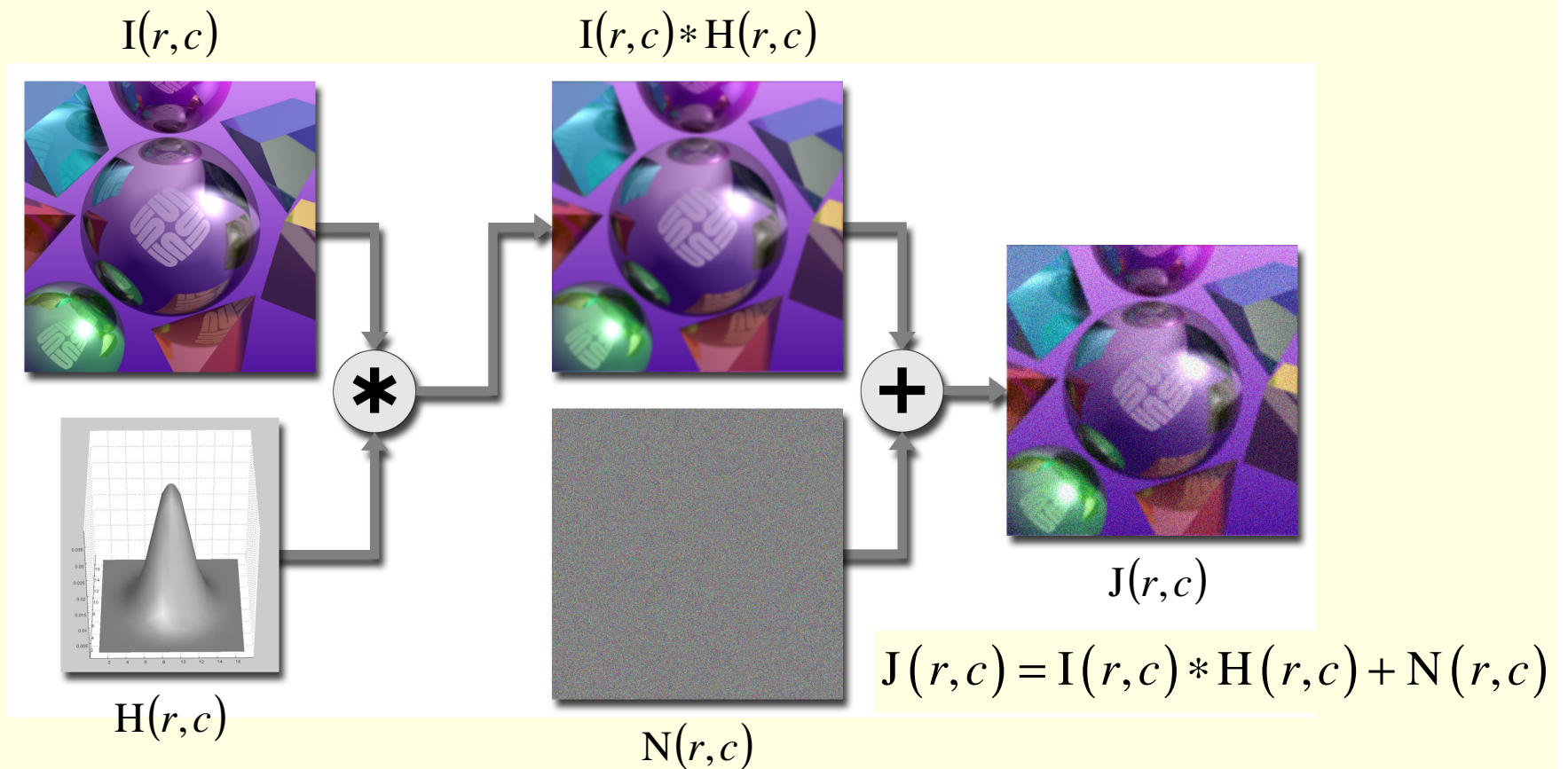
- Резултатът от използването на леща може да се изрази като конволюция на изображението с оптичска предавателна функция



# Модел на шумовете в изображение

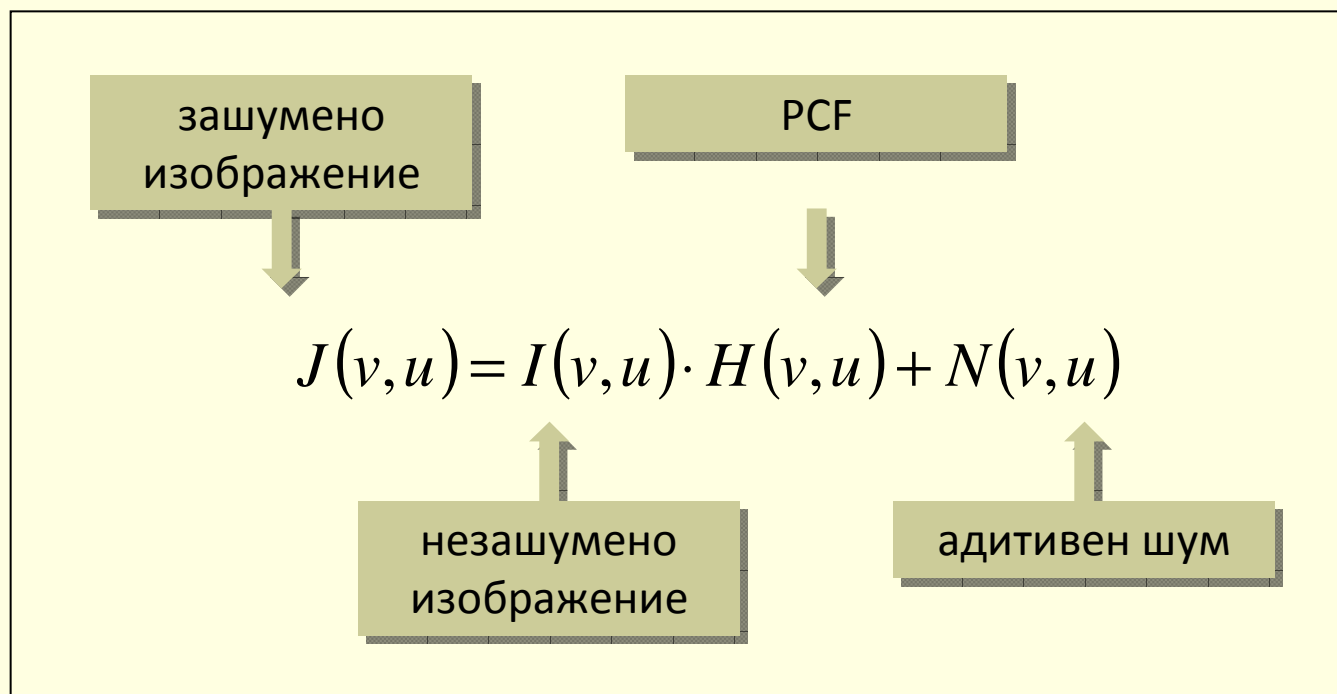


# Модел на шумовете в изображение



# Модел на шумовете в изображение

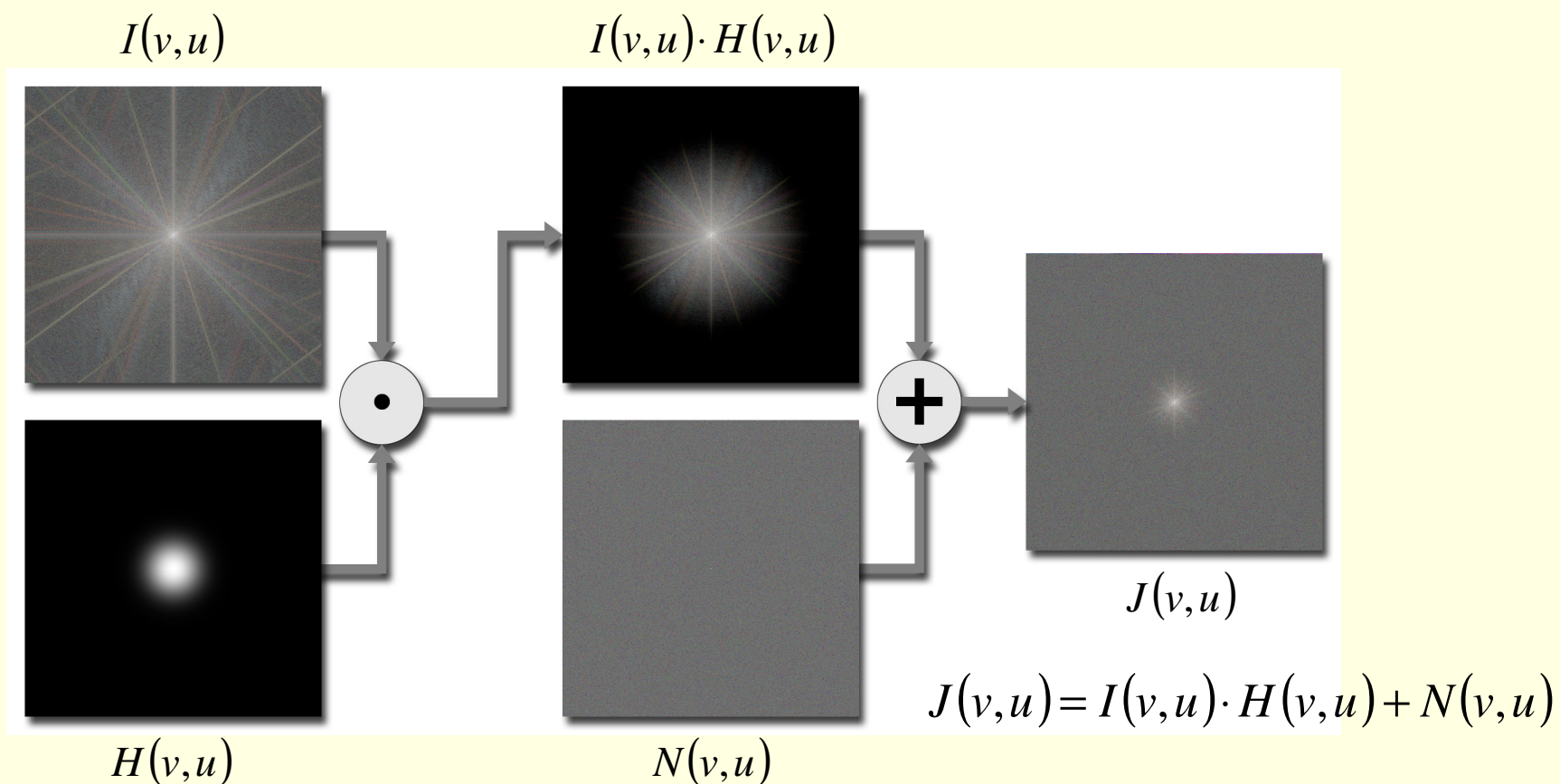
В честотната област





# Модел на шумовете в изображение

В честотната област



# Възстановяване на изображение

- Нека модела на шумовете в изображение се представя в честотната област като

$$J(u, v) = K(u, v) + N(u, v)$$

- където

$$K(u, v) = I(u, v) \cdot H(u, v)$$

- $I$  е идеално (незашумено) изображение
- $H$  е pointspread function
- $N$  е адитивен шум

- Възстановяване на изображението

- филтриране с филтър  $W$ , който премахва колкото е възможно повече шумове

$$\tilde{K}(v, u) = W(v, u) \cdot J(v, u)$$

- Коригираното изображение се определя с обратна трансформация на Фурие

$$\tilde{I}(u, v) = \frac{\tilde{K}(u, v)}{H(u, v)} = \frac{W(u, v) \cdot J(u, v)}{H(u, v)}$$

# Възстановяване на изображение

- За определяне на филтър  $W$ , с който филтрирано изображение е възможно най-близо до идеалното преди зашумяването се минимизира енергията на разликата между оригиналното и филтрираното изображение
- Идеалният филтър за възстановяване на изображението минимизира квадратичната грешка

- LMS (Least Mean Square)

$$\mathcal{E}^2 = \iint |I - \tilde{I}|^2 dudv$$

- **Филтър на Винер**

- Weiner filter
- минимизира сумарната квадратична грешка между филтрираното и оригиналното изображение

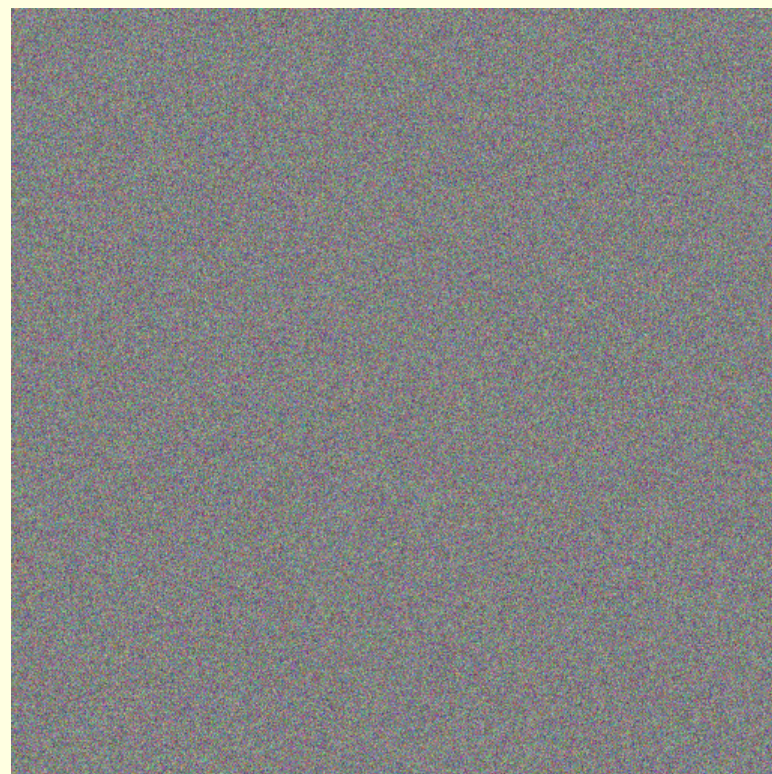
$$W = \frac{H^* |I|^2}{|H|^2 |I|^2 + |N|^2}$$

# Филтър на Винер

---



незашумено изображение



Гаусов IID шум

# Филтър на Винер

PSF е импулсна функция – *identity function*



незашумено изображение

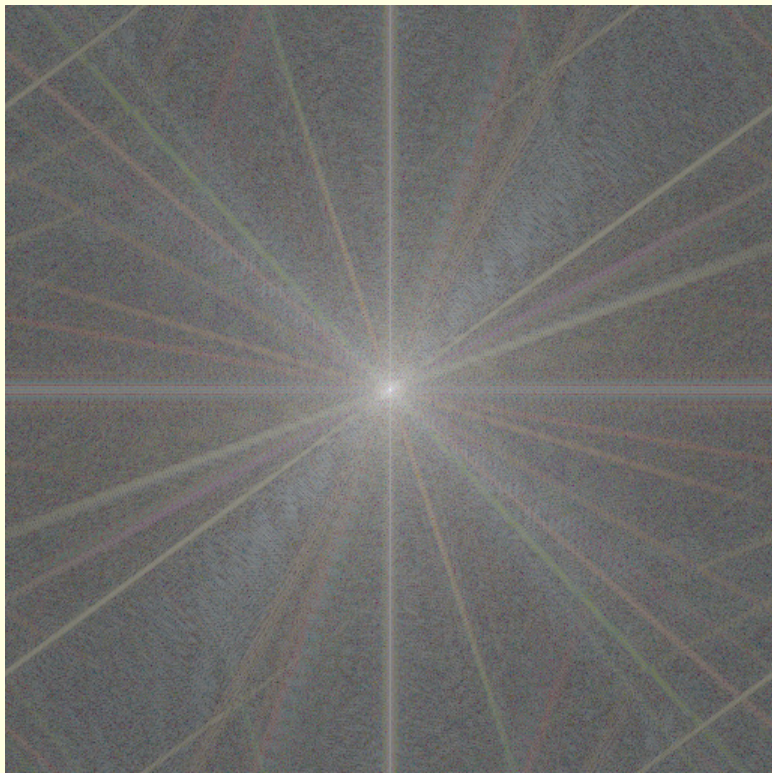


зашумено изображение

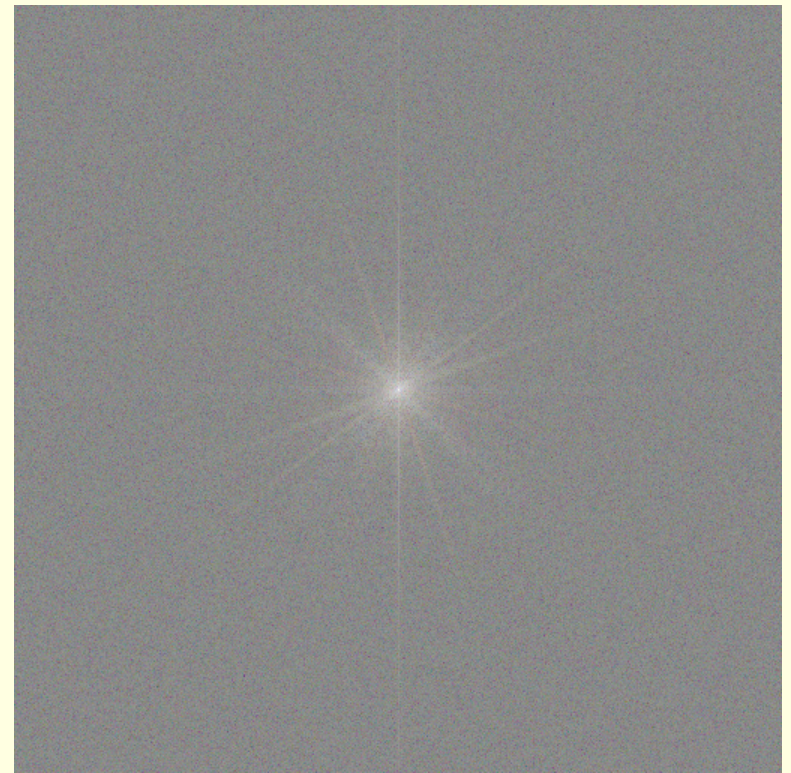
***Адитивен шум***

# Филтър на Винер

Спектрална функция



незашумено изображение



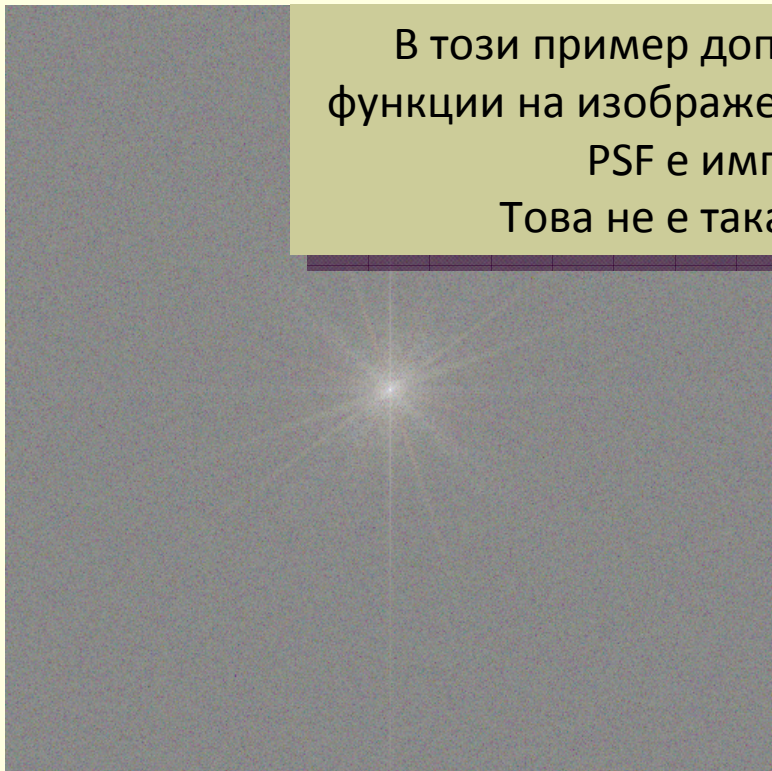
зашумено изображение

***Адитивен шум***

# Филтър на Винер

## Спектрална функция

В този пример допускаме, че спектралните функции на изображението и шума са известни и PSF е импулсна функция  
Това не е така в реалните случаи



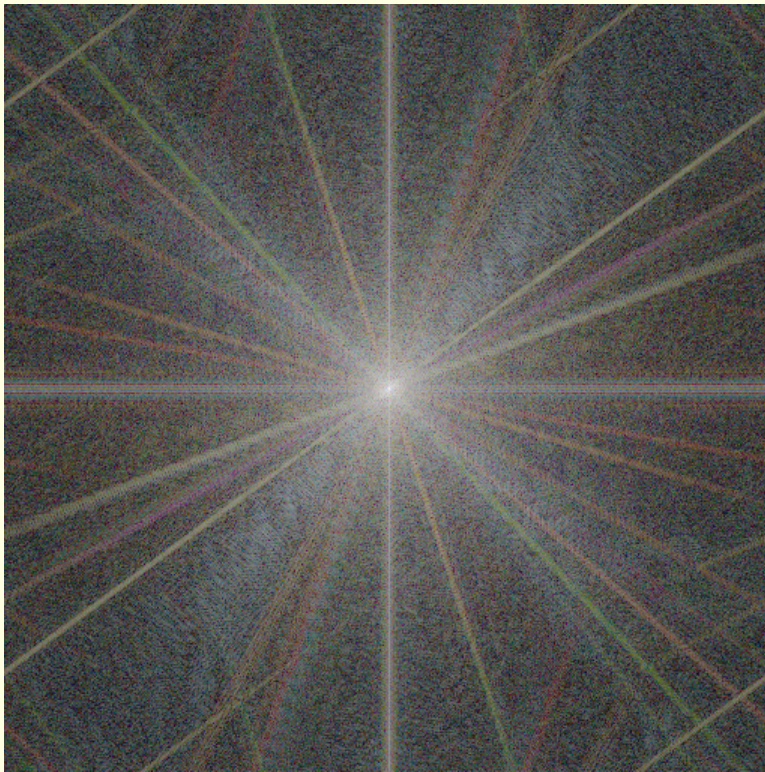
зашумено изображение



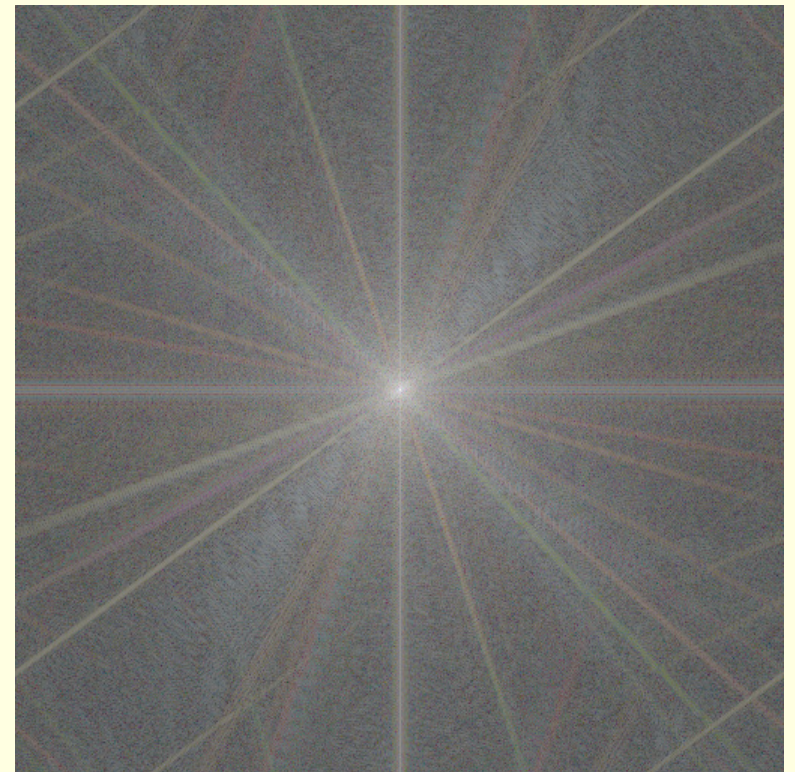
филтър на Винер

# Филтър на Винер

Спектрална функция



изображение филтрирано  
с филтър на Винер



оригинално изображение



# Филтър на Винер

---

Адитивен шум



зашумено изображение



Изображение филтрирано  
с филтър на Винер

# Филтър на Винер

---

Аддитивен шум



Изображение филтрирано  
с филтър на Винер



незашумено изображение

# Филтър на Винер

PSF е функцията  $h$ : Гаусова функция:  $\mu=0$ ,  $\sigma=2$



незашумено изображение

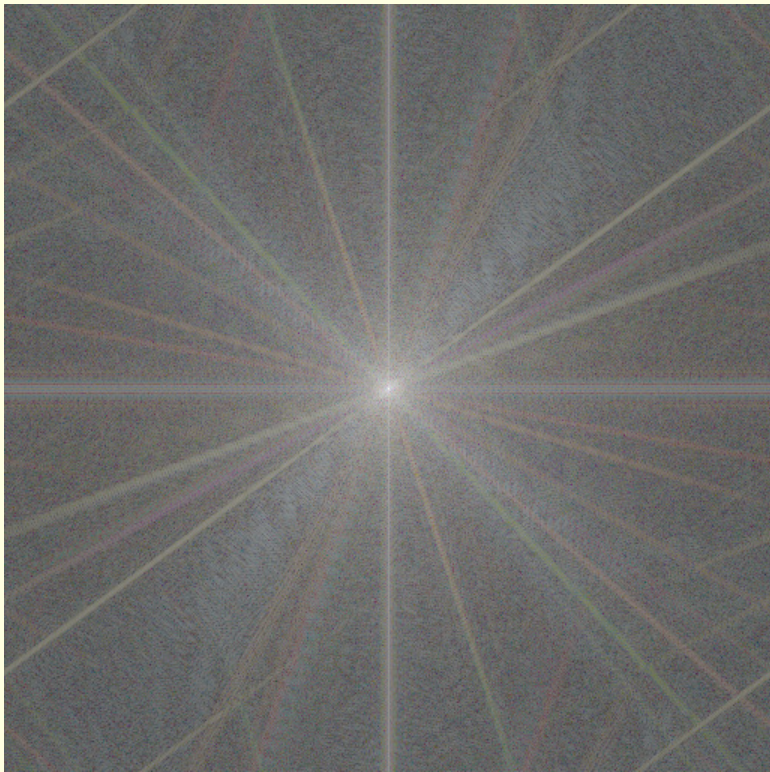


зашумено изображение

$$J = I * h + N$$

# Филтър на Винер

Спектрална функция



незашумено изображение

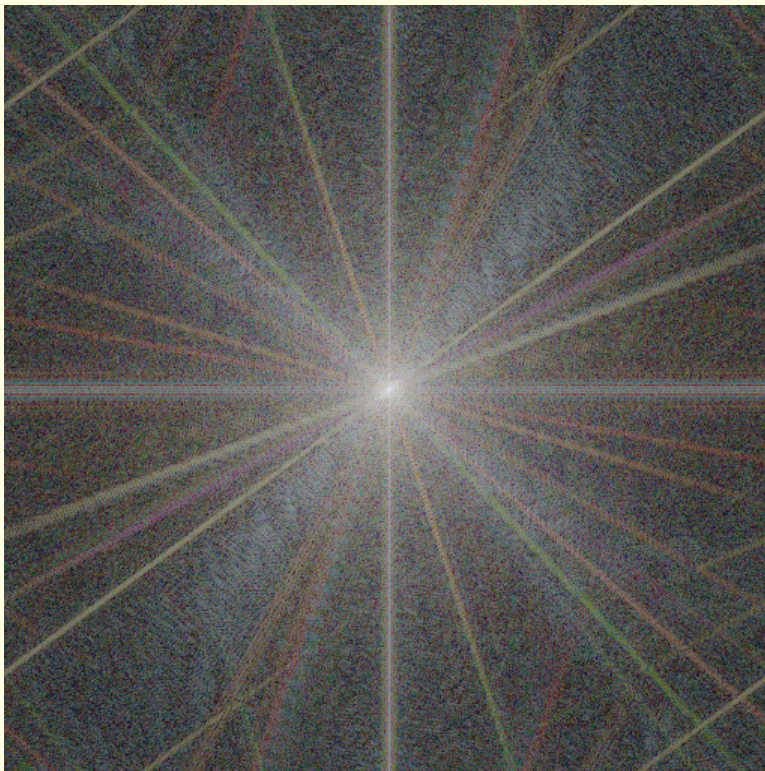


зашумено изображение

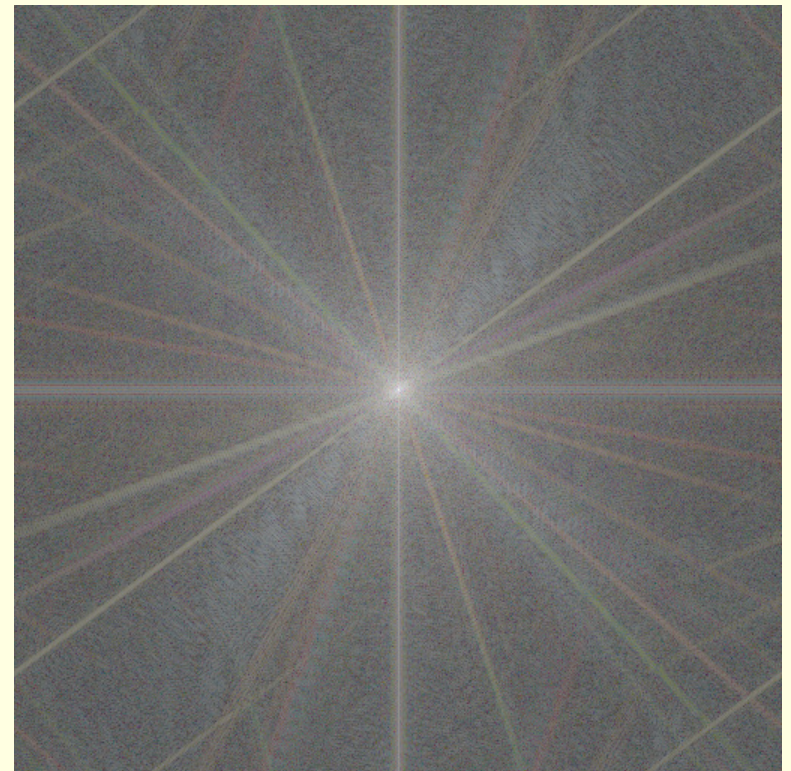
$$J = I * h + N$$

# Филтър на Винер

Спектрална функция



изображение филтрирано  
с филтър на Винер

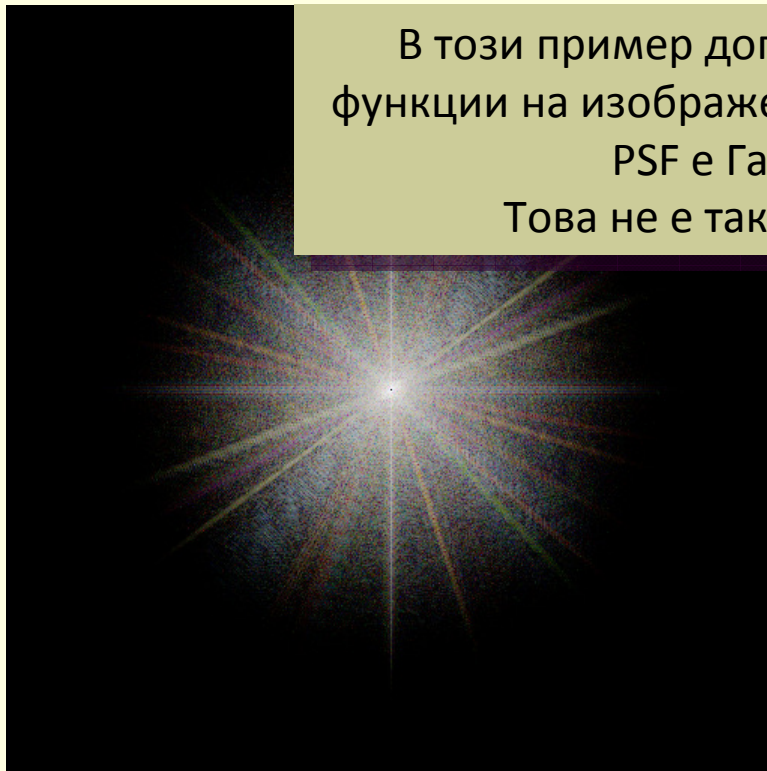


оригинално изображение

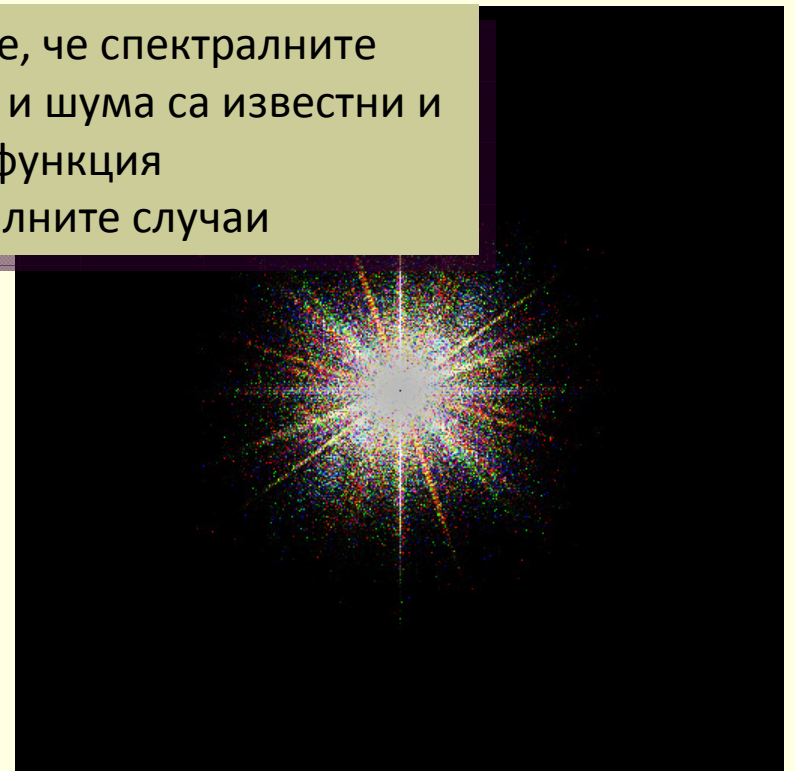
# Филтър на Винер

## Спектрална функция

В този пример допускаме, че спектралните функции на изображението и шума са известни и PSF е Гаусова функция  
Това не е така в реалните случаи



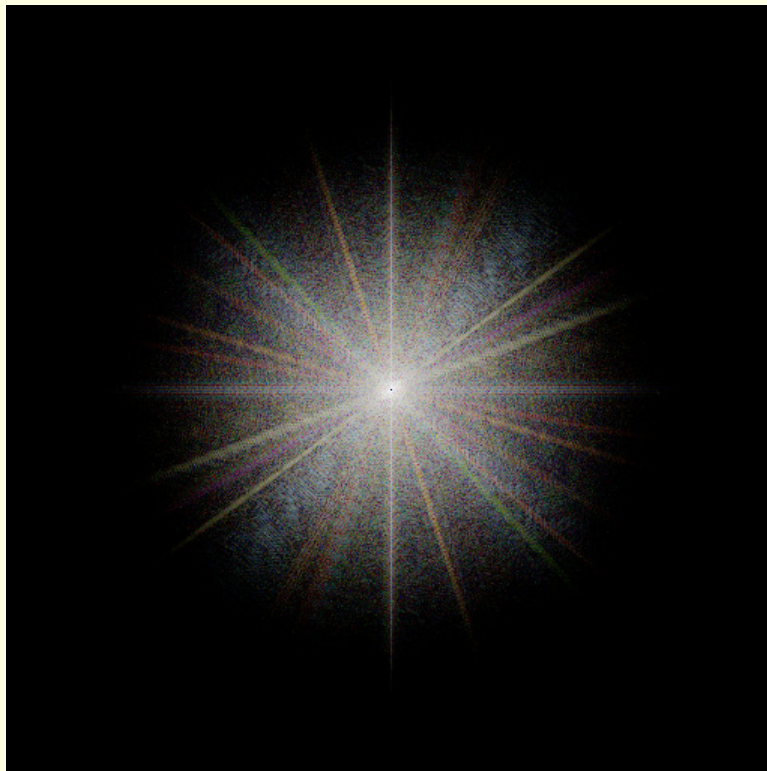
изображение филтрирано  
с филтър на Винер



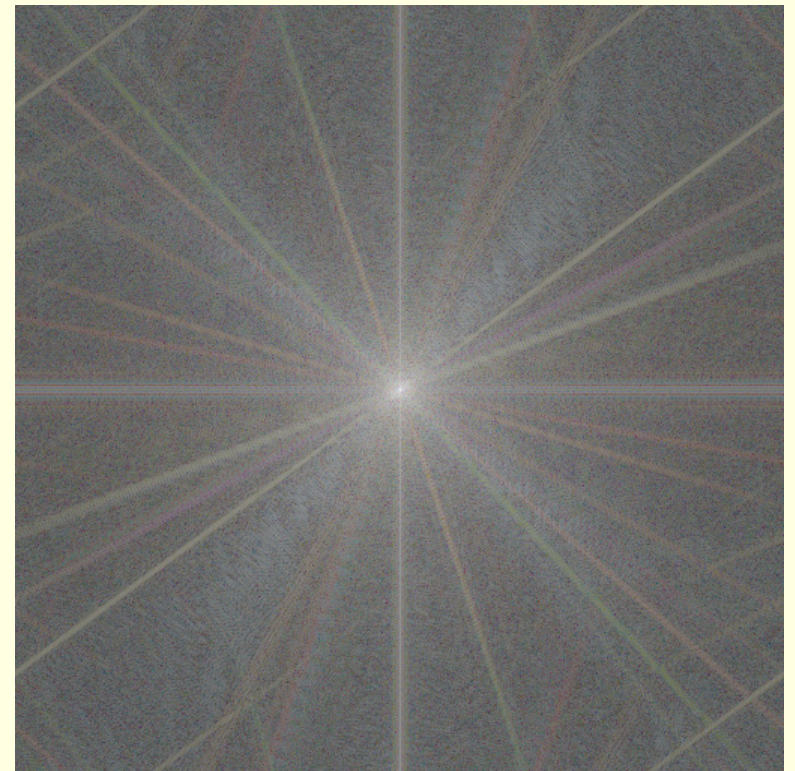
филтър на Винер

# Филтър на Винер

Спектрална функция



изображение филтрирано  
с филтър на Винер



оригинално изображение

# Филтър на Винер

---

Адитивен шум



зашумено изображение

$$J = I * h + N$$



Изображение филтрирано  
с филтър на Винер



# Филтър на Винер

---

Аддитивен шум



Изображение филтрирано  
с филтър на Винер



незашумено изображение