

# Цифрова обработка на изображения

## Геометрични операции с изображения

доц. Милена Лазарова, кат. КС, ФКСУ

# Билинейна интерполация

- Размери на оригиналното изображение  $I: R' \times C'$
- Размери на мащабираното изображение  $J: R \times C$
- Мащабиращи коефициенти (входно към изходно изобр.)

$$s_R = R' / R \text{ и } s_C = C' / C$$

- Ако  $r_f = r \cdot s_R$  за  $r = 1, \dots, R$

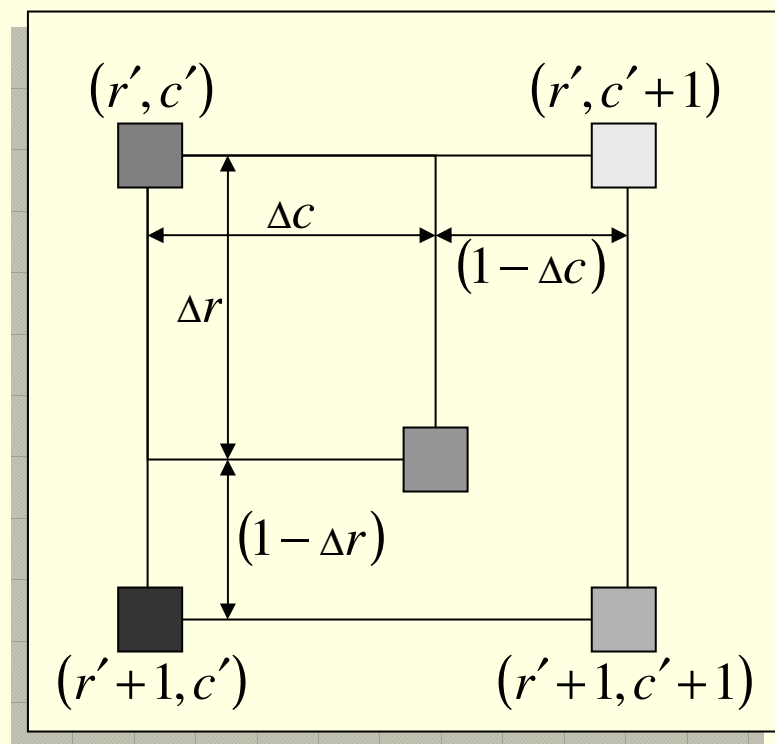
$$c_f = c \cdot s_C \text{ за } c = 1, \dots, C$$

- и  $r' = \lfloor r_f \rfloor$  и  $c' = \lfloor c_f \rfloor$

$$\Delta r = r_f - r' \text{ и } \Delta c = c_f - c'$$

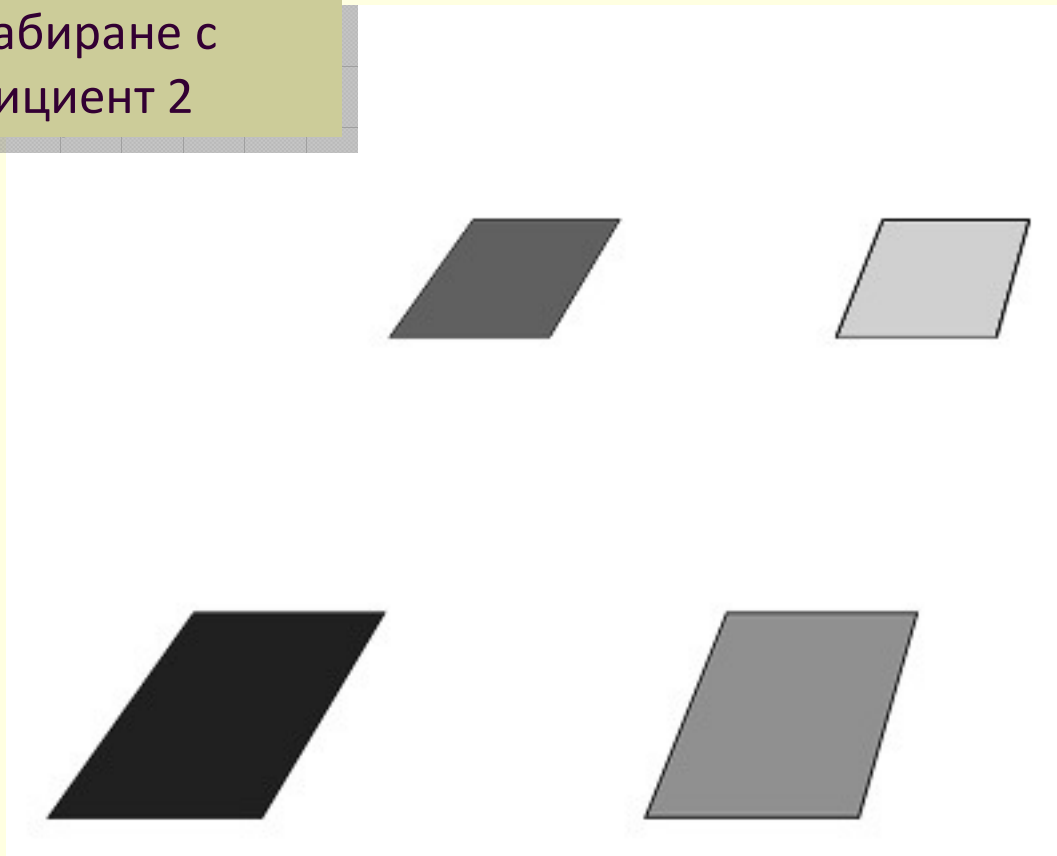
- ТО

$$\begin{aligned} J(r, c) = & I(r', c') \cdot (1 - \Delta r) \cdot (1 - \Delta c) \\ & + I(r' + 1, c') \cdot \Delta r \cdot (1 - \Delta c) \\ & + I(r', c' + 1) \cdot (1 - \Delta r) \cdot \Delta c \\ & + I(r' + 1, c' + 1) \cdot \Delta r \cdot \Delta c \end{aligned}$$



# Билинейна интерполация

Мащабиране с  
коефициент 2



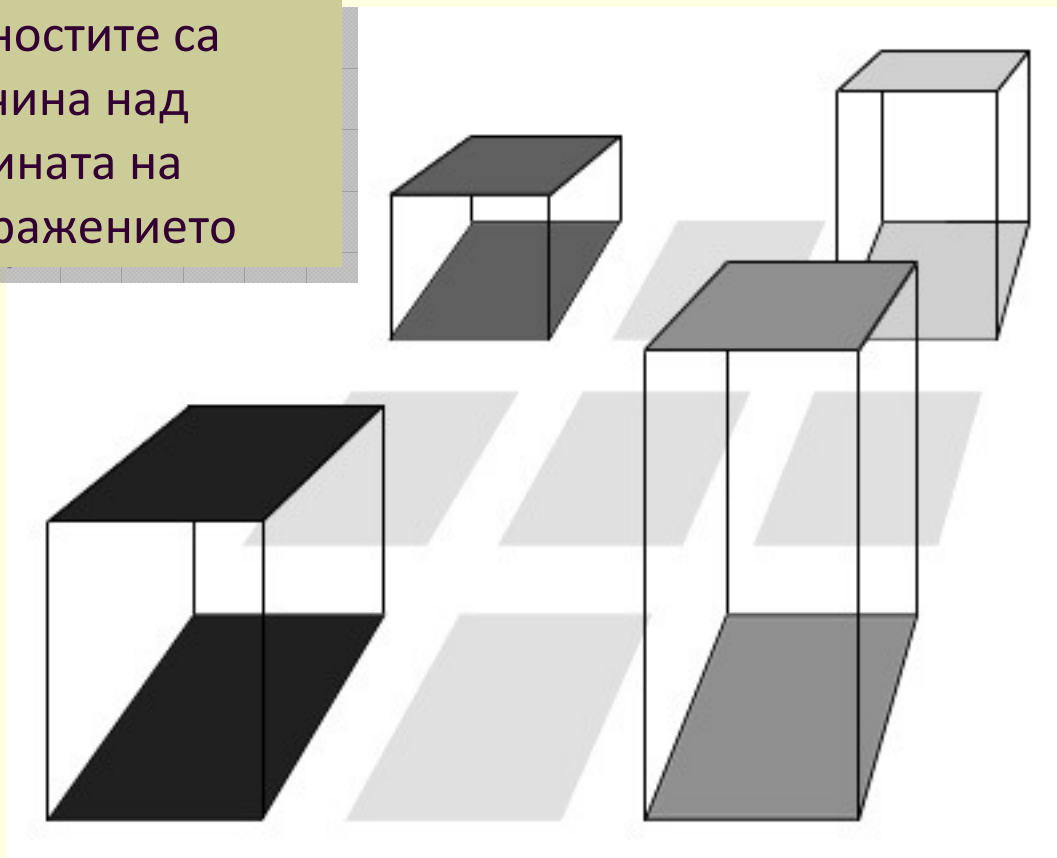
# Билинейна интерполация

Мащабирането  
изисква да се  
добавят се нови  
пиксели



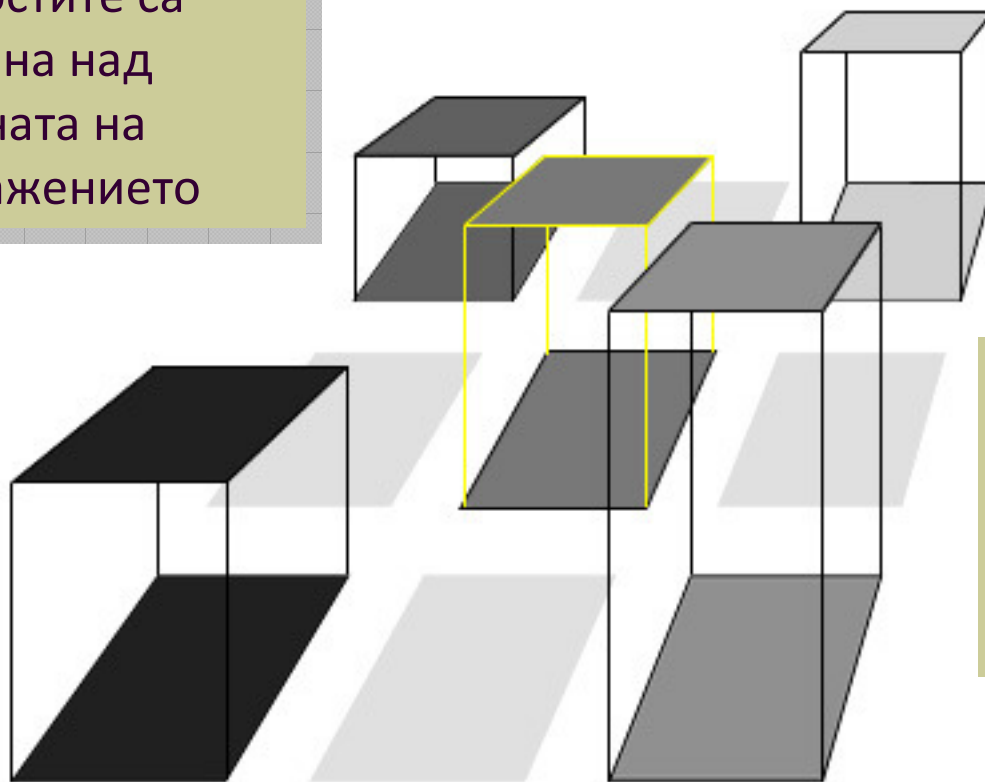
# Билинейна интерполация

Стойностите са височина над равнината на изображението



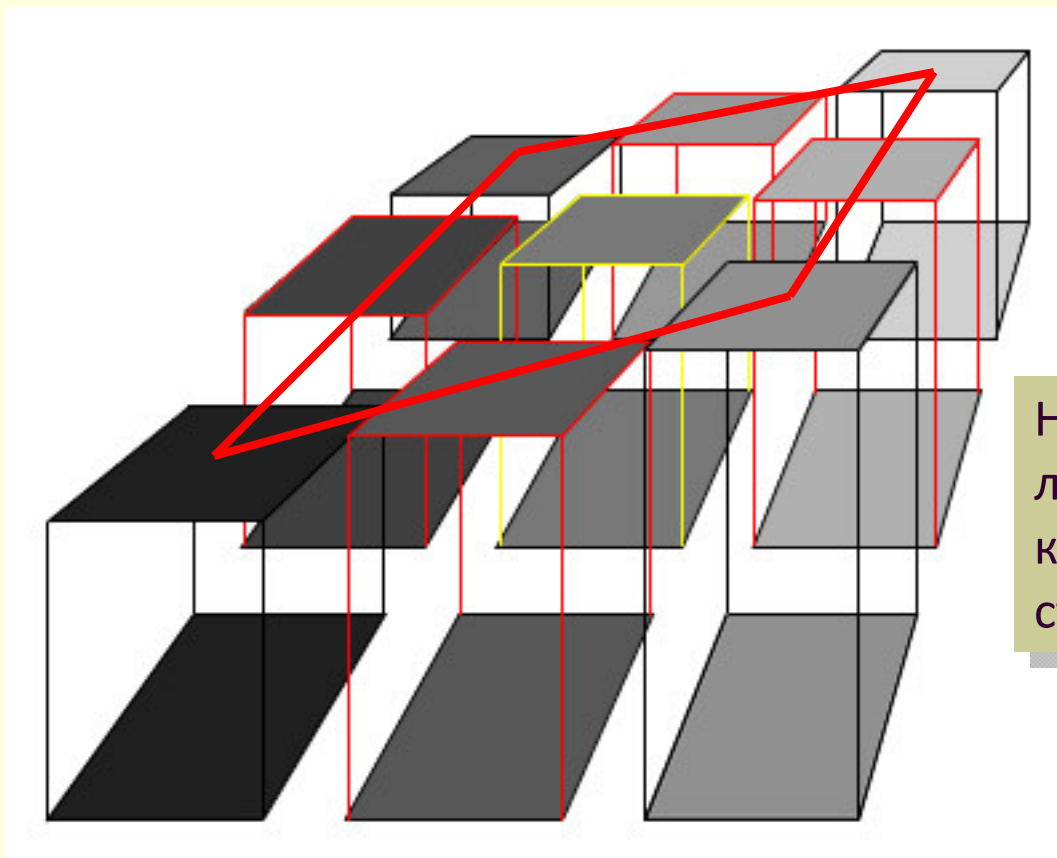
# Билинейна интерполация

Стойностите са височина над равнината на изображението



Стойността в центъра е претеглена средна стойност от четирите ъгъла

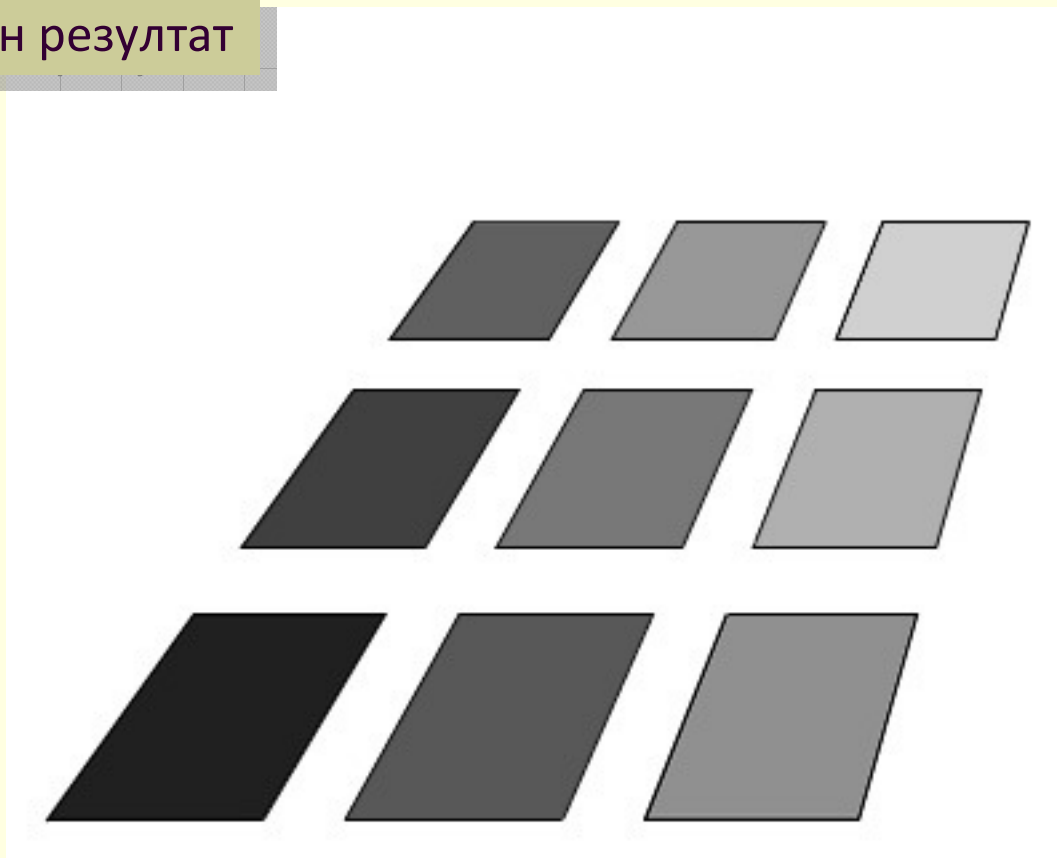
# Билинейна интерполация



Новите пиксели  
лежат на линиите,  
които свързват  
старите стойности

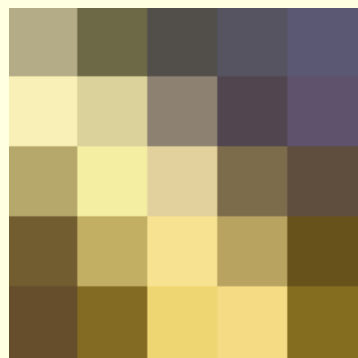
# Билинейна интерполация

Краен резултат





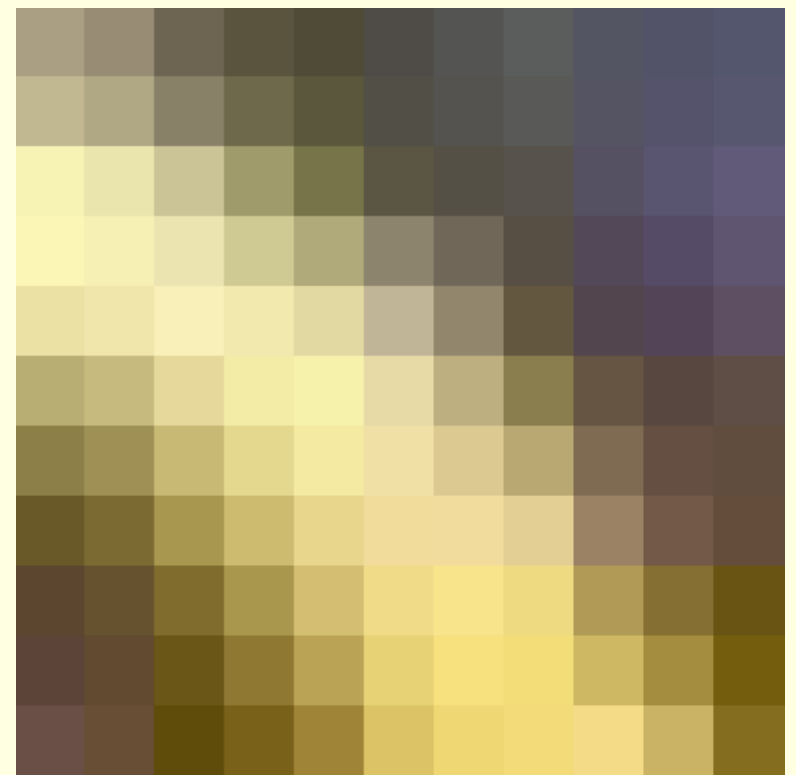
# Билинейна интерполация



5:7



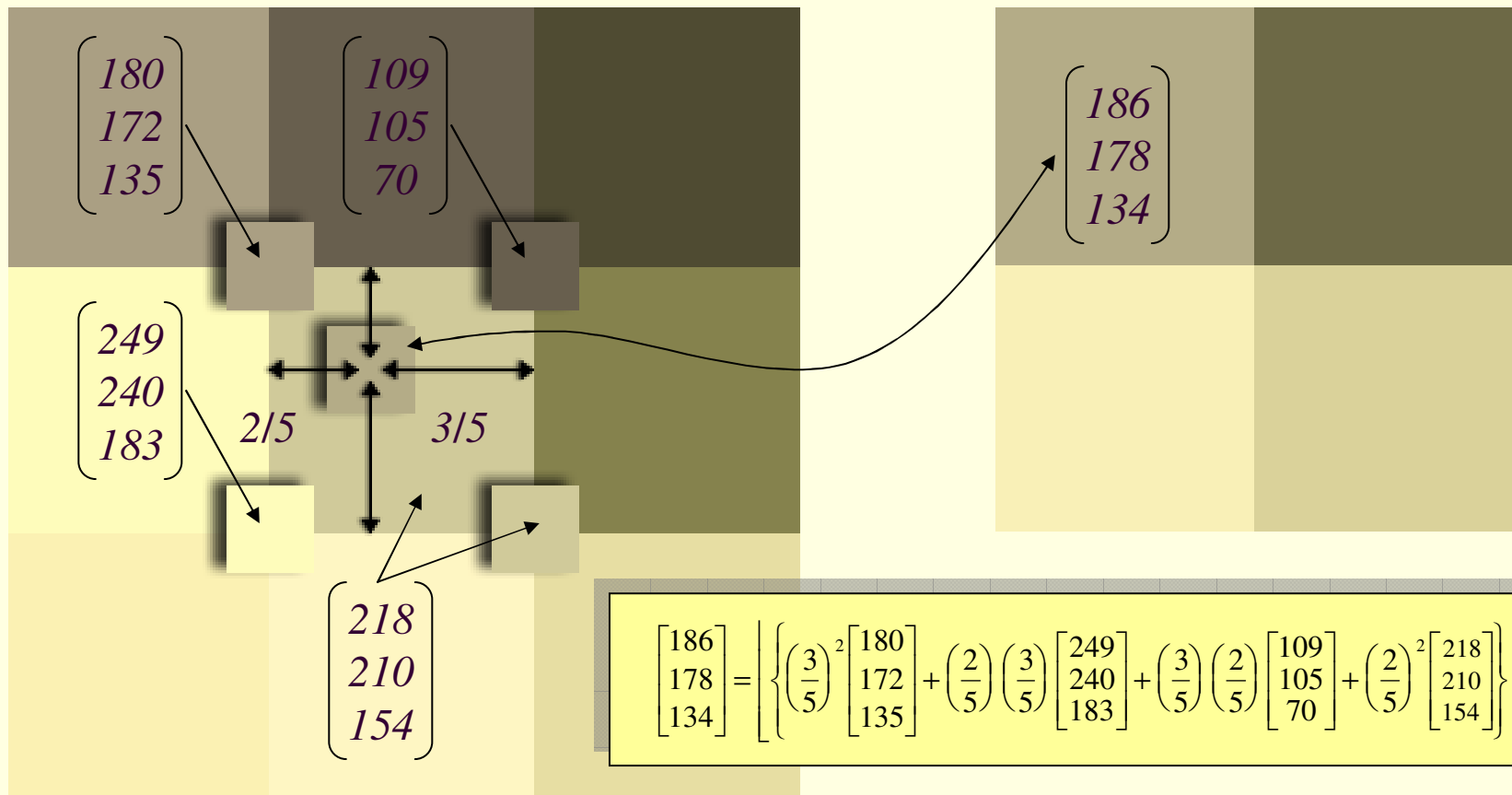
1:1



11:7

# Билинейна интерполация

**Пример:** мащабиране на изображение до 5/7 от размерите му



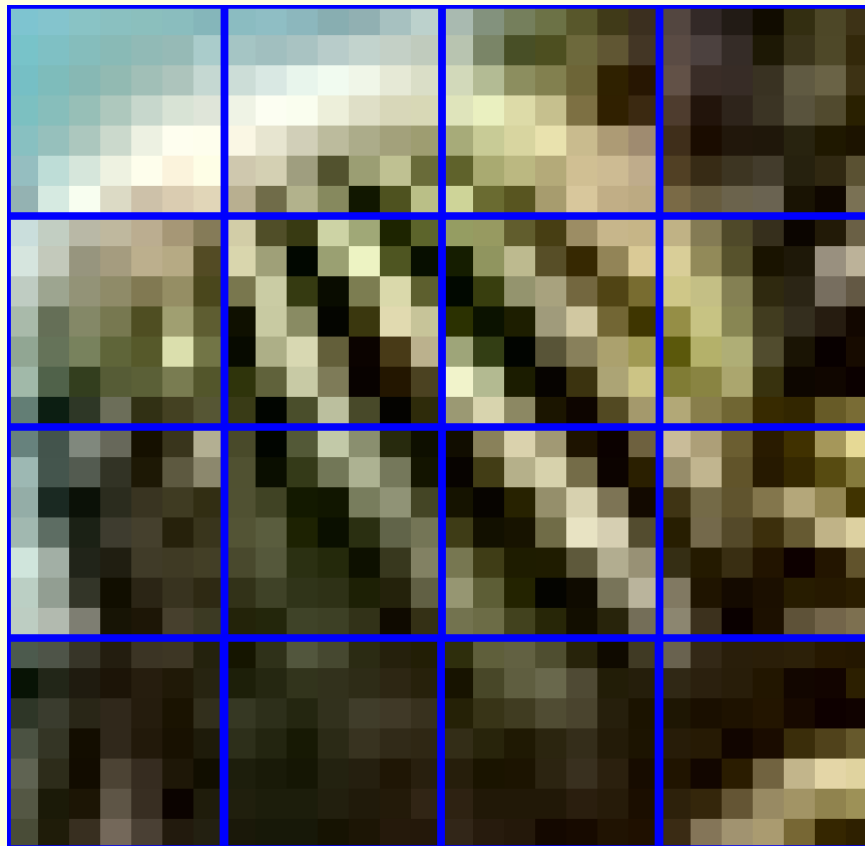
# Билинейна интерполация

*Пример:* мащабиране на изображение до  $3/7$  от размерите на оригиналното изображение



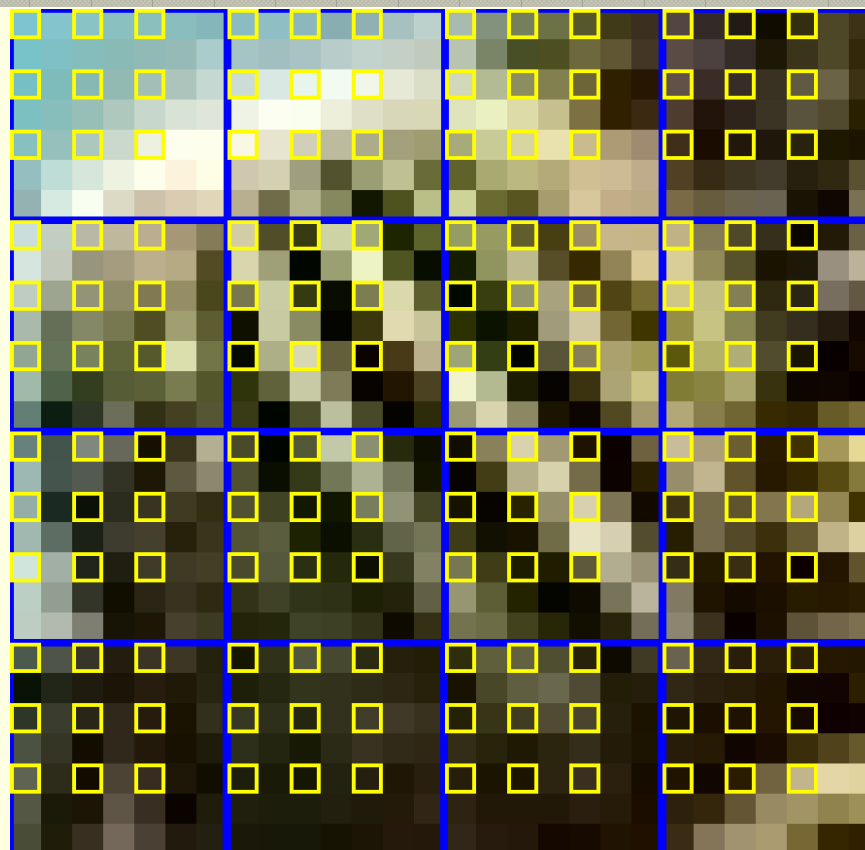
# Билинейна интерполация

За всяка област с размери  $7 \times 7$  се избират  $3 \times 3 = 9$  координати на пиксели



# Билинейна интерполация

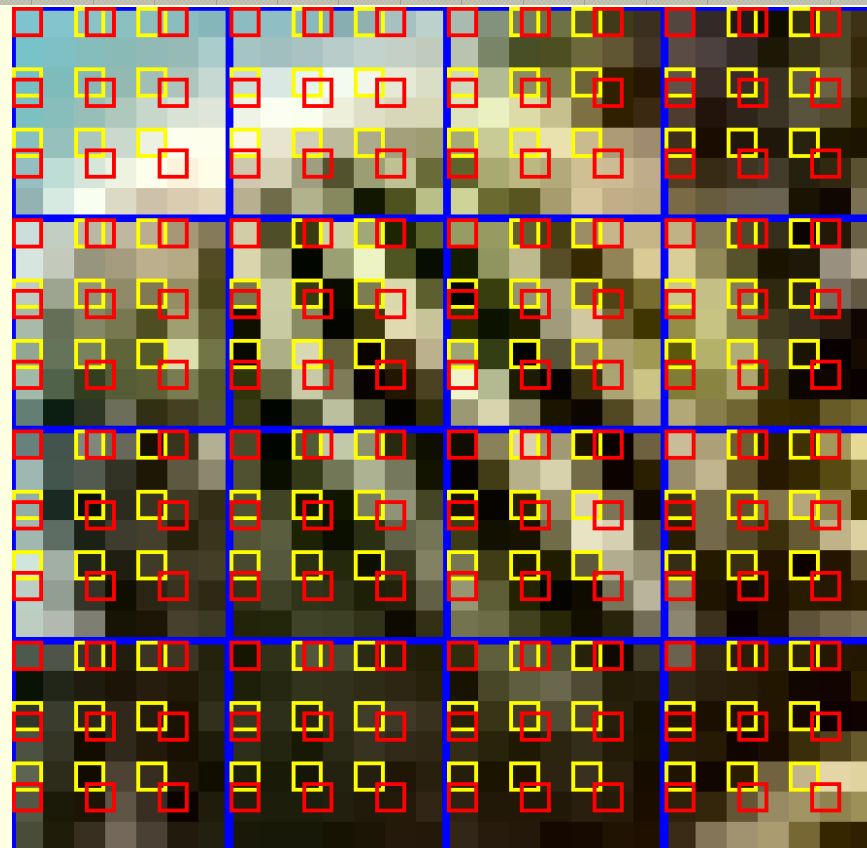
При мащабиране с най-близки съседни 9 пиксела са използваните стойности от оригиналното изображение



**В жълто:**  
пикселите,  
използвани при  
метода “най-  
близки съседни”

# Билинейна интерполация

При мащабиране с билинейна интерполация 9те използвани стойности са равномерно разпределени



**В жълто:**

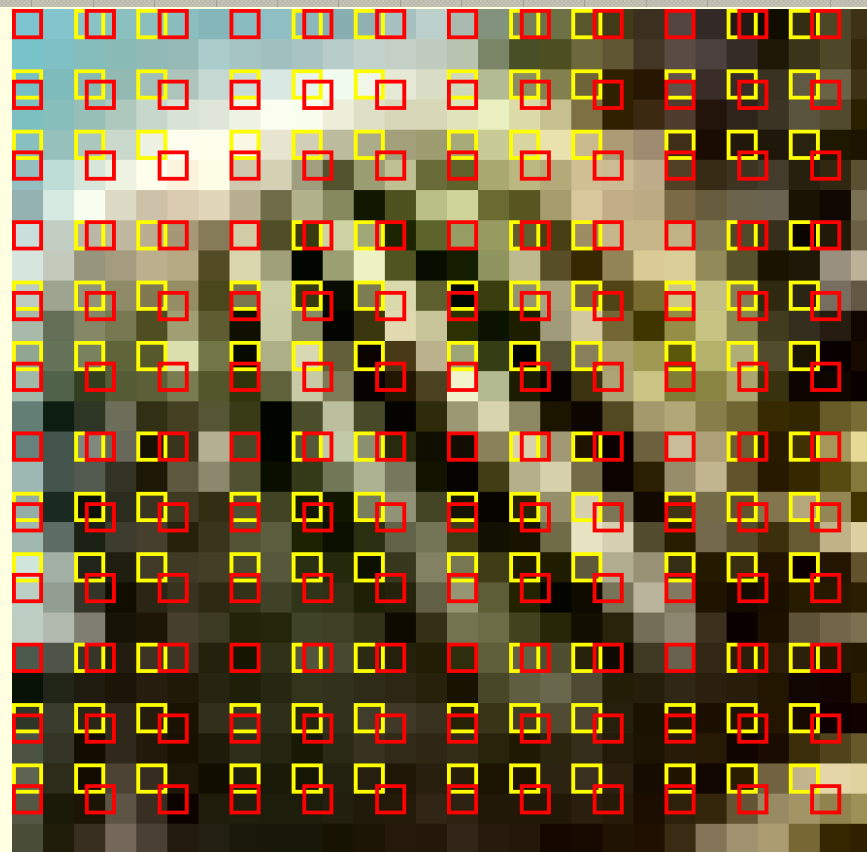
пикселите,  
използвани при  
метода “най-  
близки съседни”

**В червено:**

пиксели,  
използвани при  
метода  
“билинейна  
интерполация”

# Билинейна интерполация

При мащабиране с билинейна интерполация 9те използвани стойности са равномерно разпределени



**В жълто:**

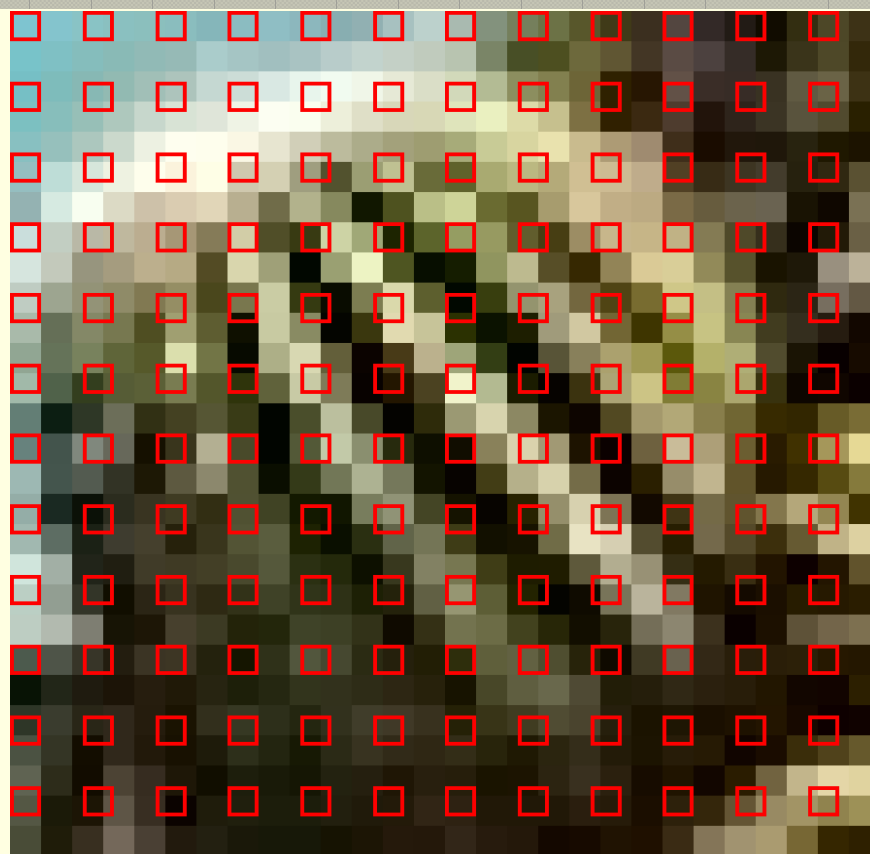
пикселите,  
използвани при  
метода “най-  
близки съседни”

**В червено:**

пиксели,  
използвани при  
метода  
“билинейна  
интерполация”

# Билинейна интерполация

При мащабиране с билинейна интерполация 9те използвани стойности са равномерно разпределени

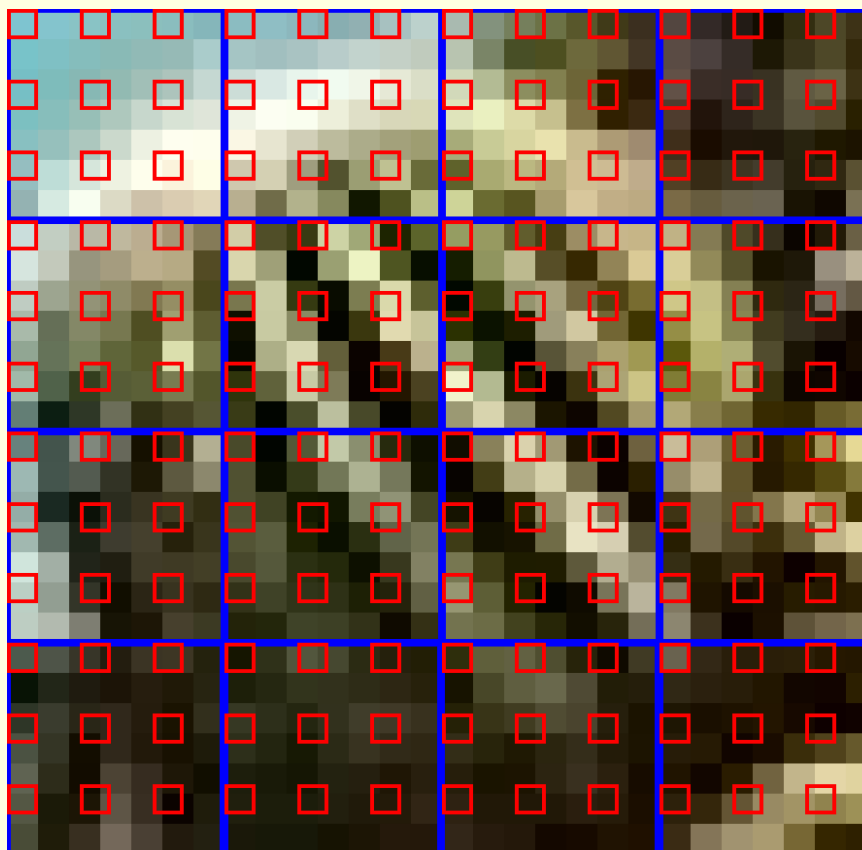


Избраните стойности покриват пиксели в изображението



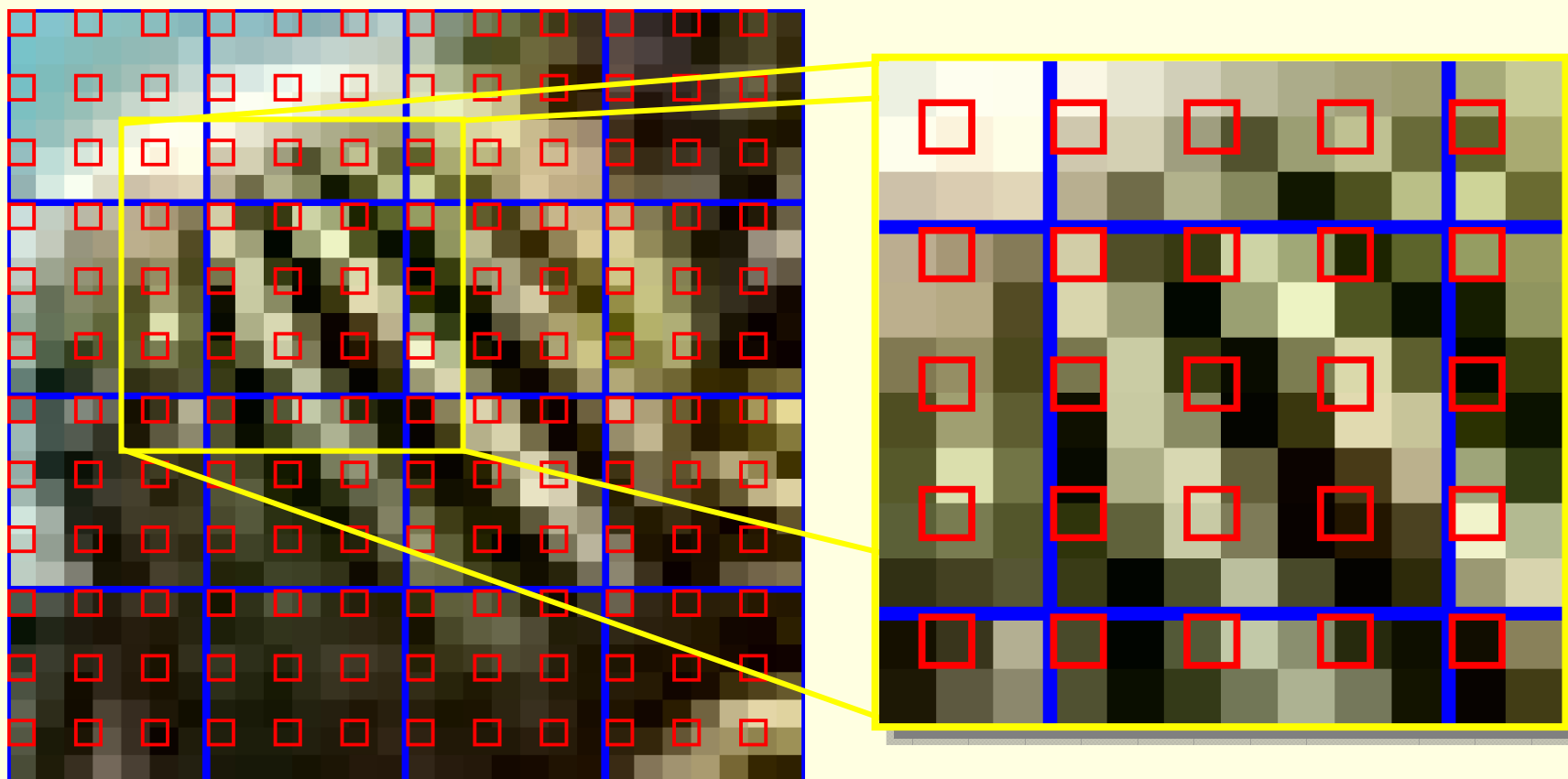
# Билинейна интерполация

За всяка област с размери  $7 \times 7$  се избират  $3 \times 3 = 9$  координати на пиксели



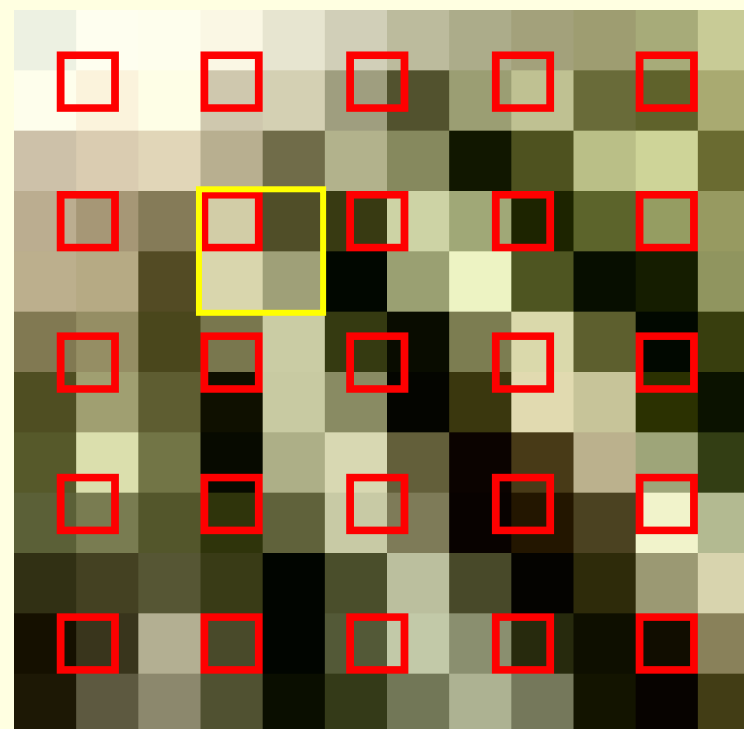
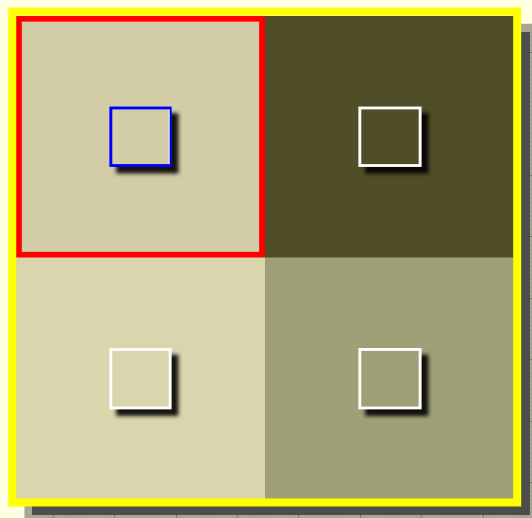
Избраните стойности покриват пиксели в изображението

# Билинейна интерполация



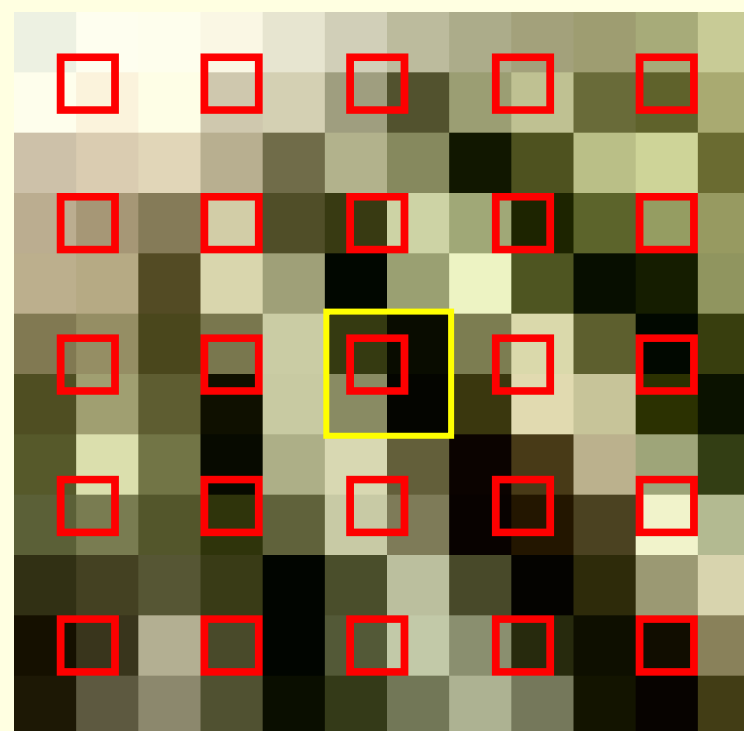
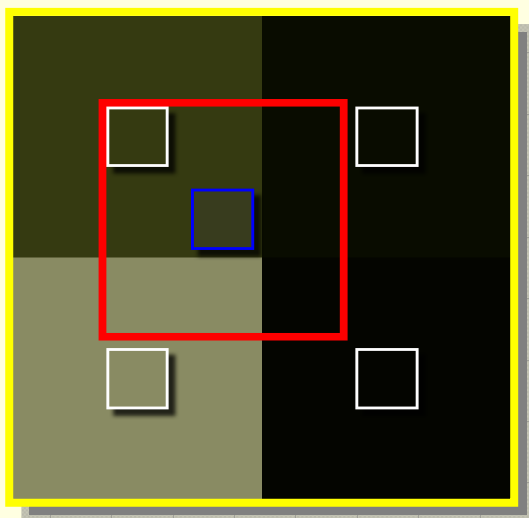
# Билинейна интерполация

*В син цвят:* местоположение на пиксел в изходното изображение



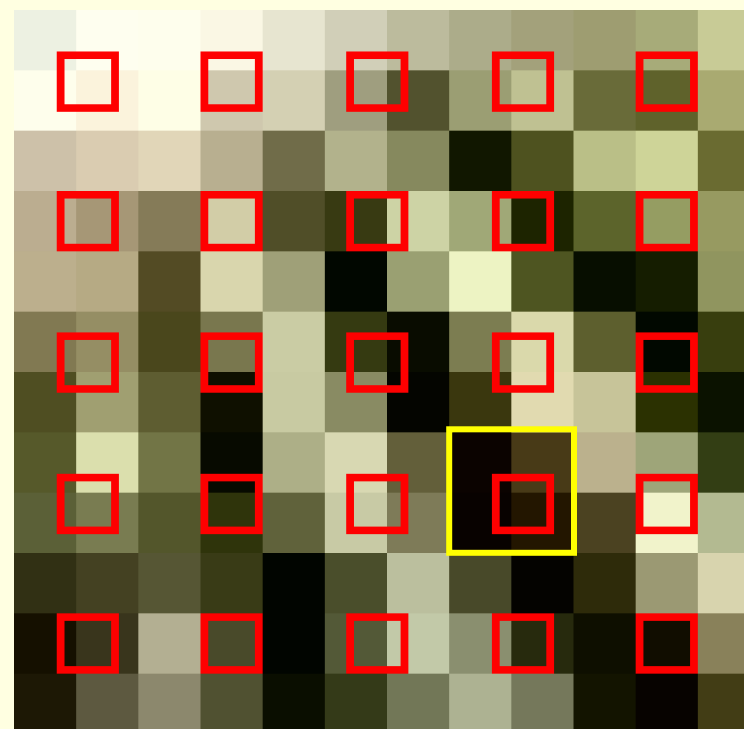
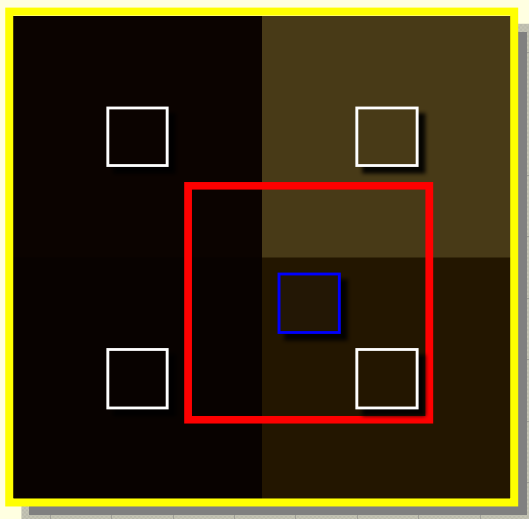
# Билинейна интерполация

*В син цвят:* местоположение на пиксел в изходното изображение

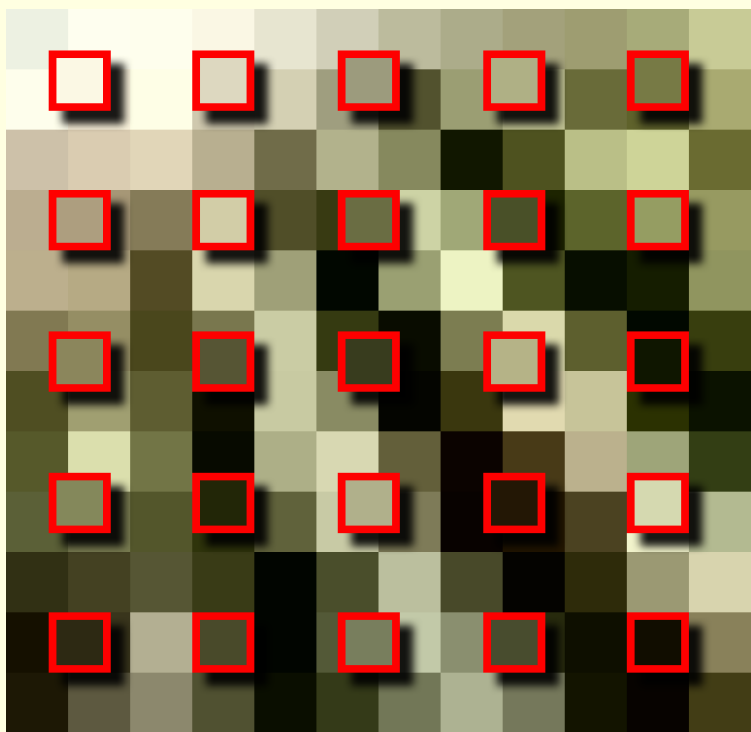


# Билинейна интерполация

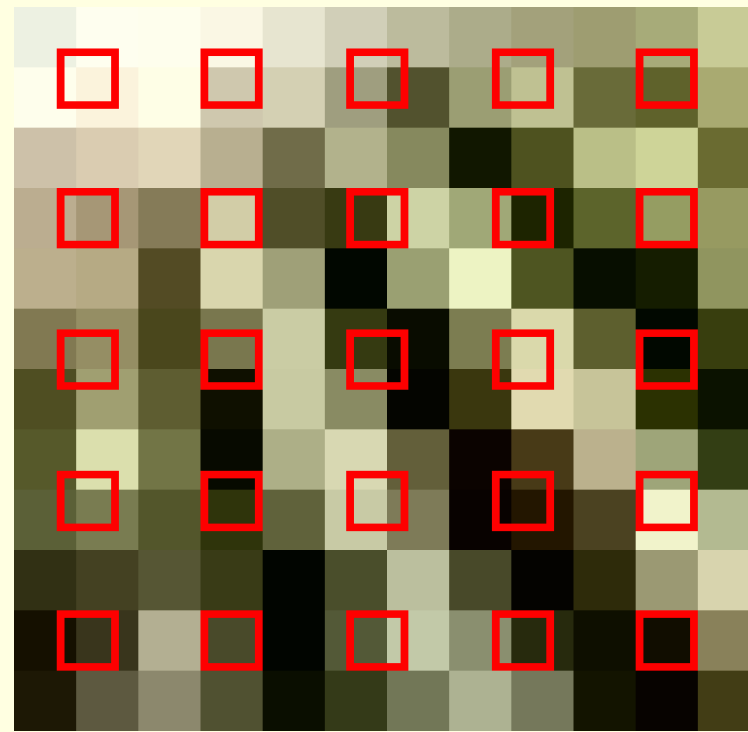
*В син цвят:* местоположение на пиксел в изходното изображение



# Билинейна интерполация

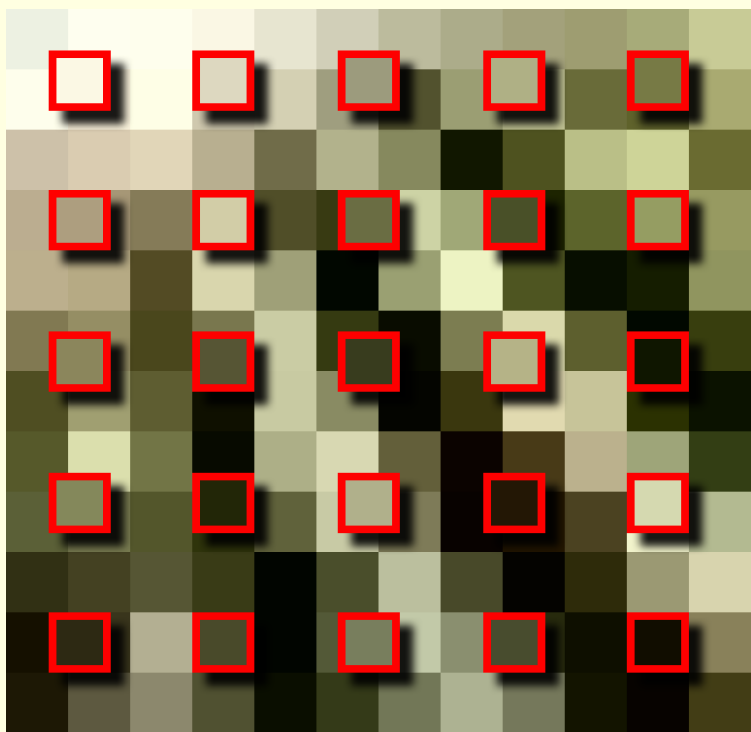


местоположение и стойност  
на новите пиксели



местоположение на  
новите пиксели

# Билинейна интерполация



местоположение и стойност  
на новите пиксели



местоположение и стойност  
на новите пиксели

# Билинейна интерполация

---

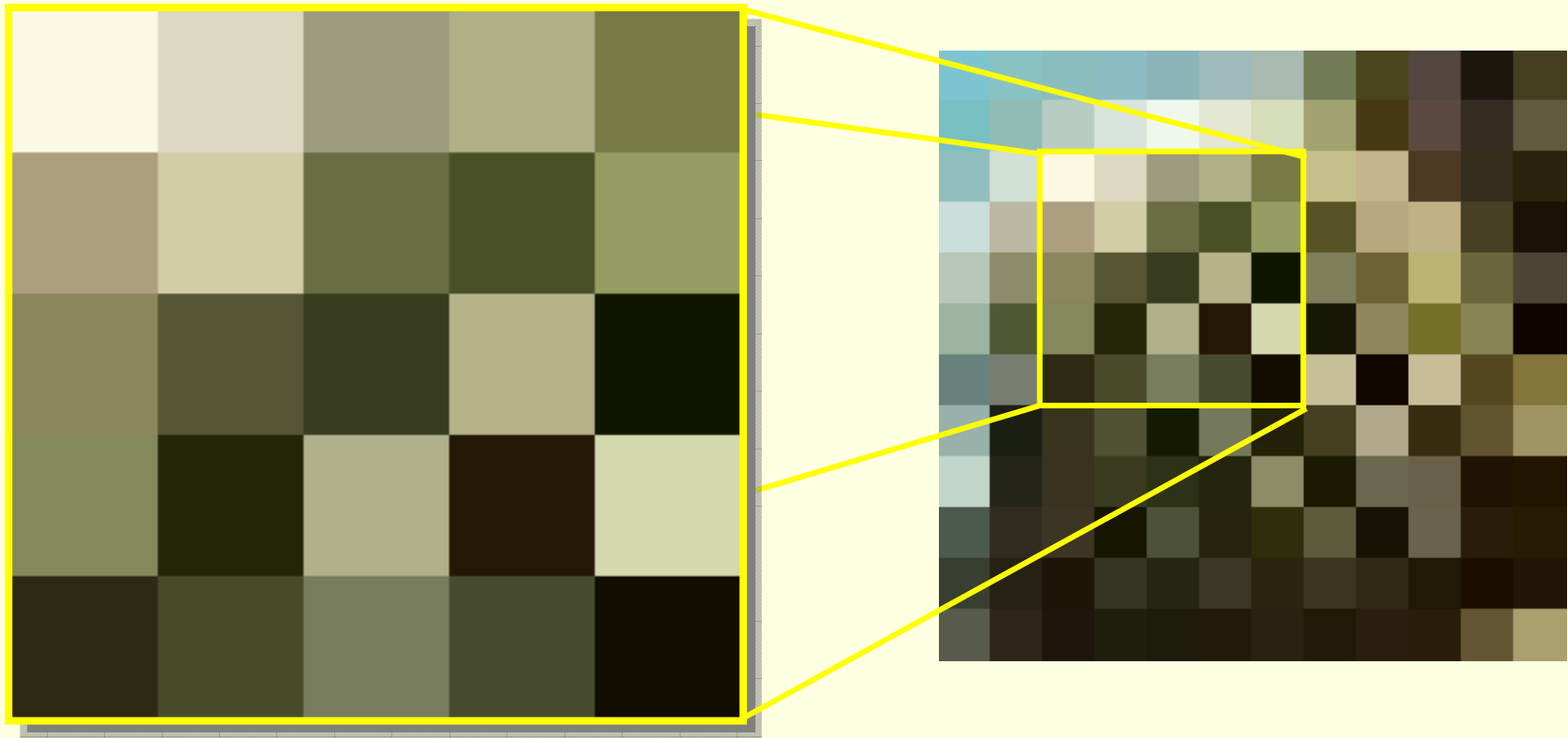


ново изображение от  
новите пиксели



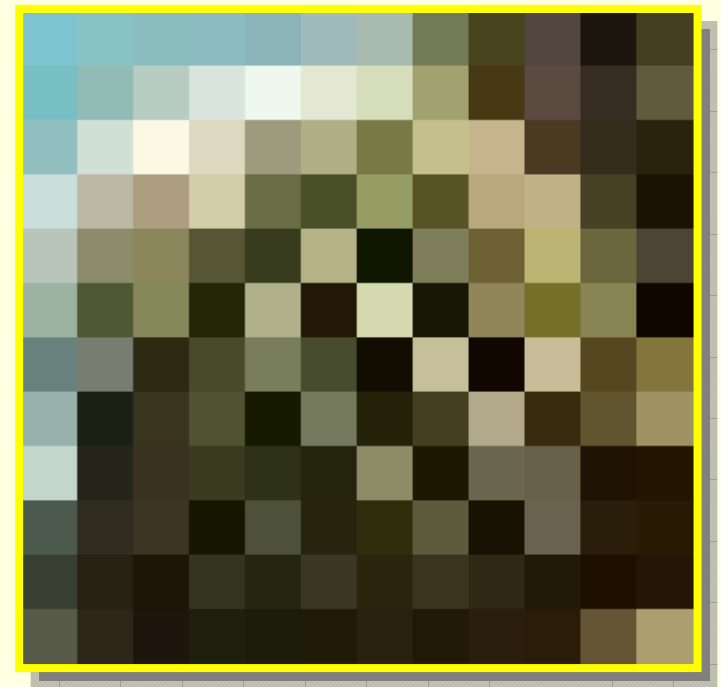
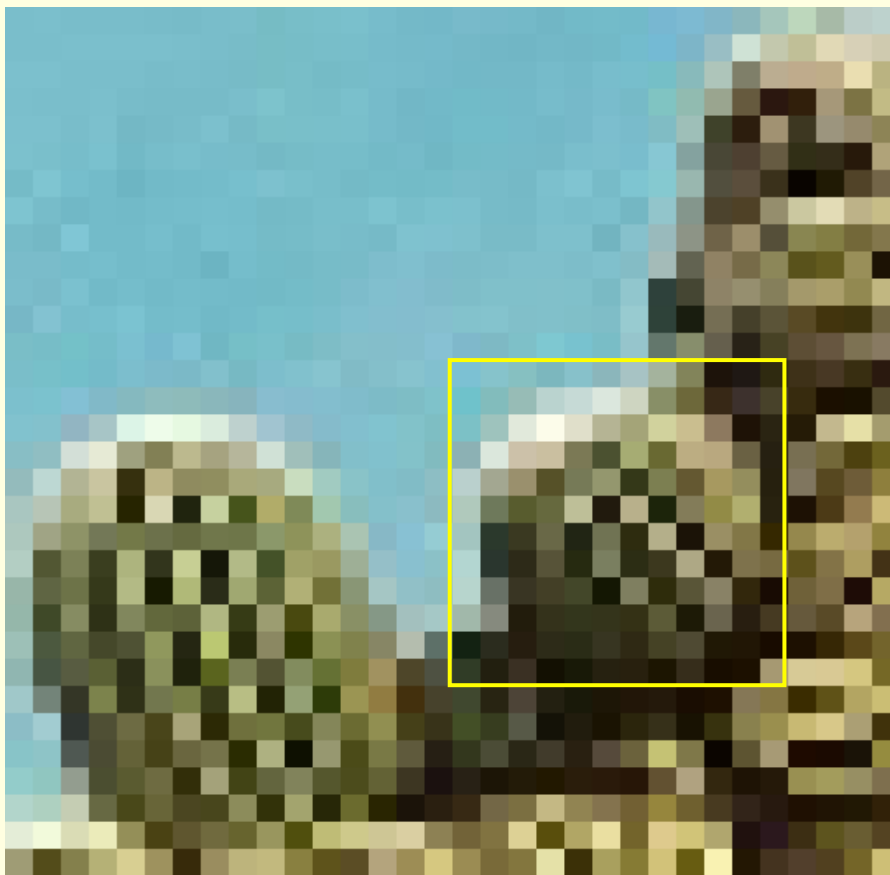


# Билинейна интерполация

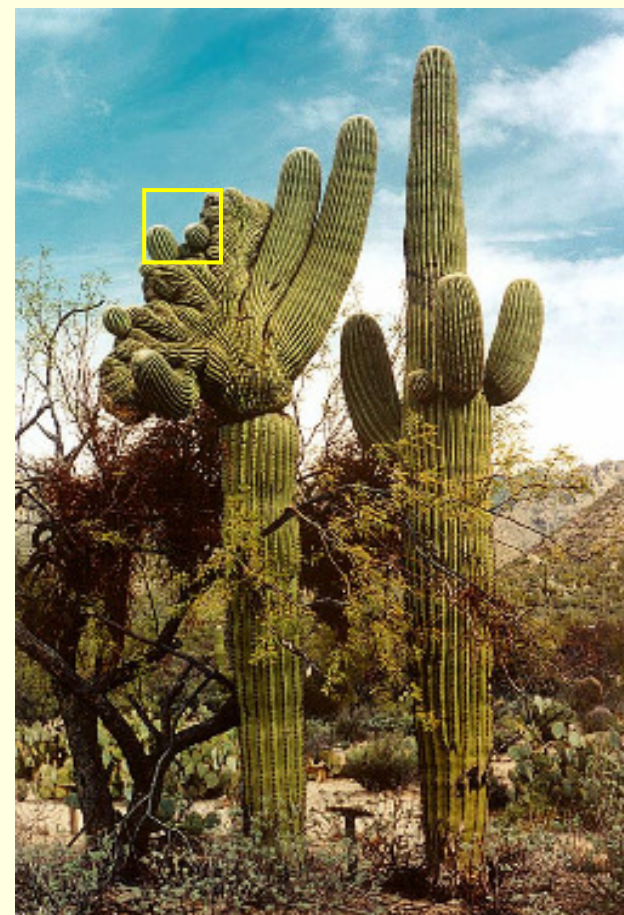
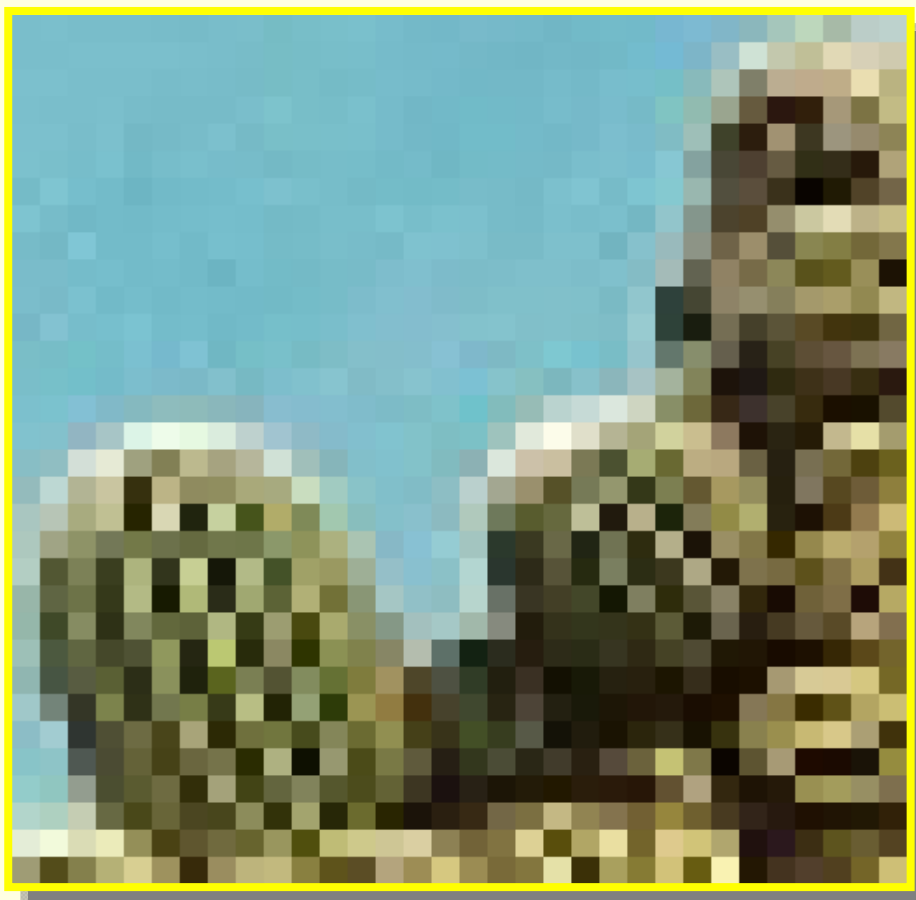


# Билинейна интерполация

---

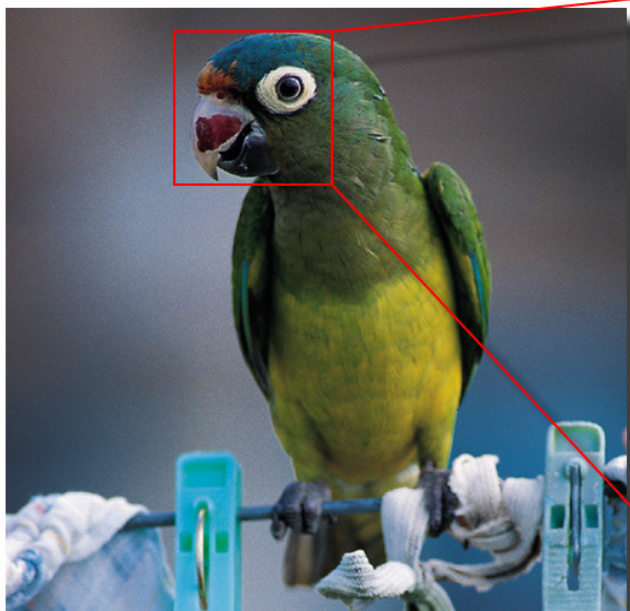


# Билинейна интерполация

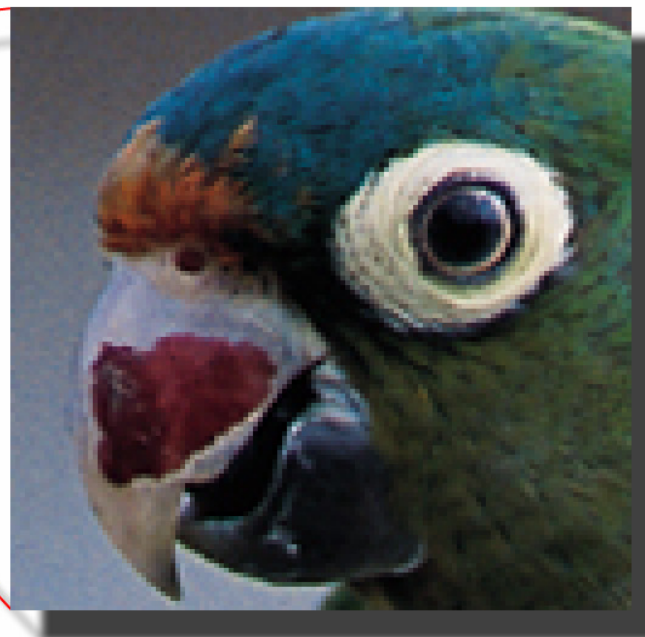


# Билинейна интерполация - пример

Мащабиране:  
увеличаване 4x



оригинално изображение



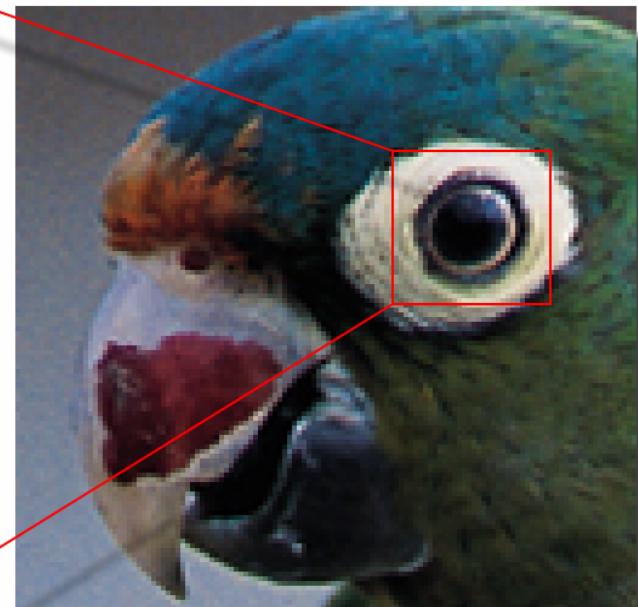
част от изображението

# Билинейна интерполация - пример

Мащабиране:  
увеличаване 4x



пример за интерполация

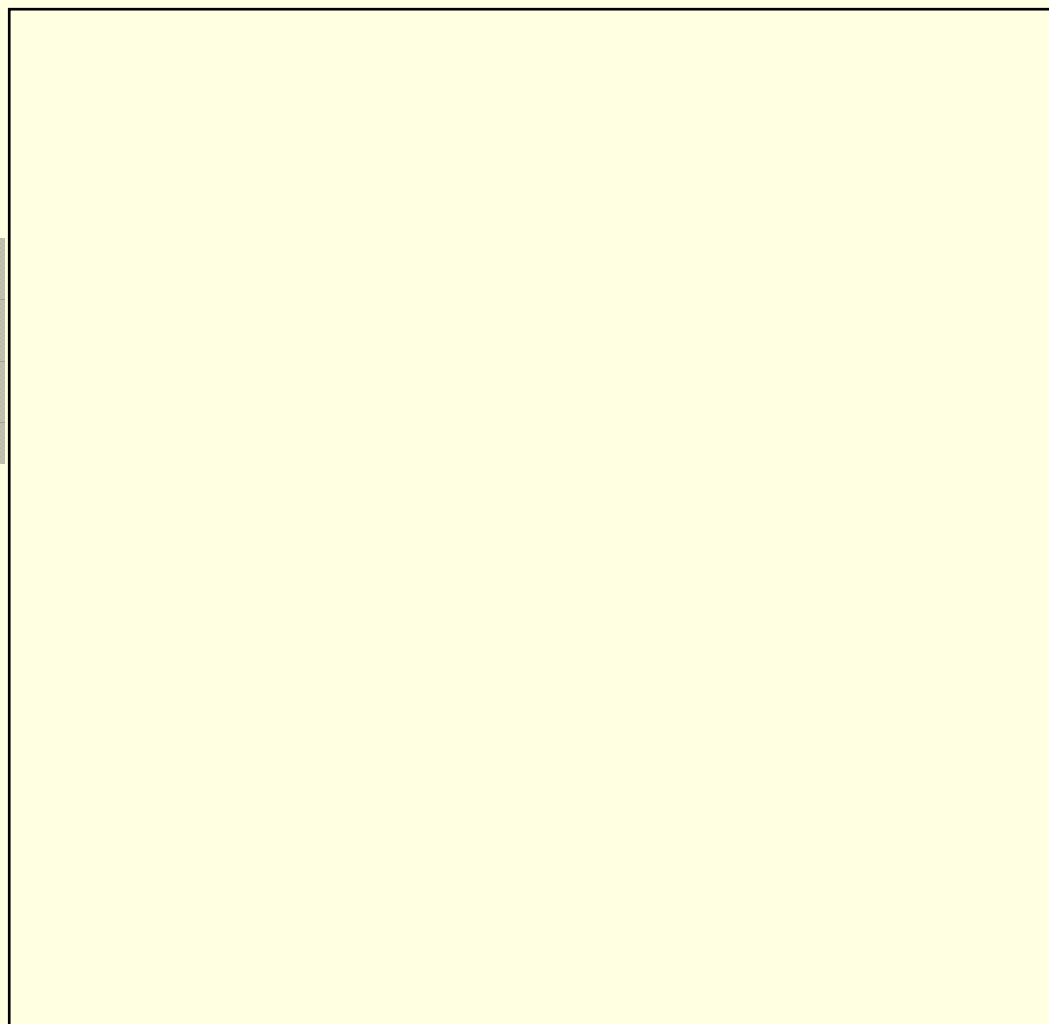


част от изображението

# Билинейна интерполация - пример

Мащабиране:  
увеличаване 4x

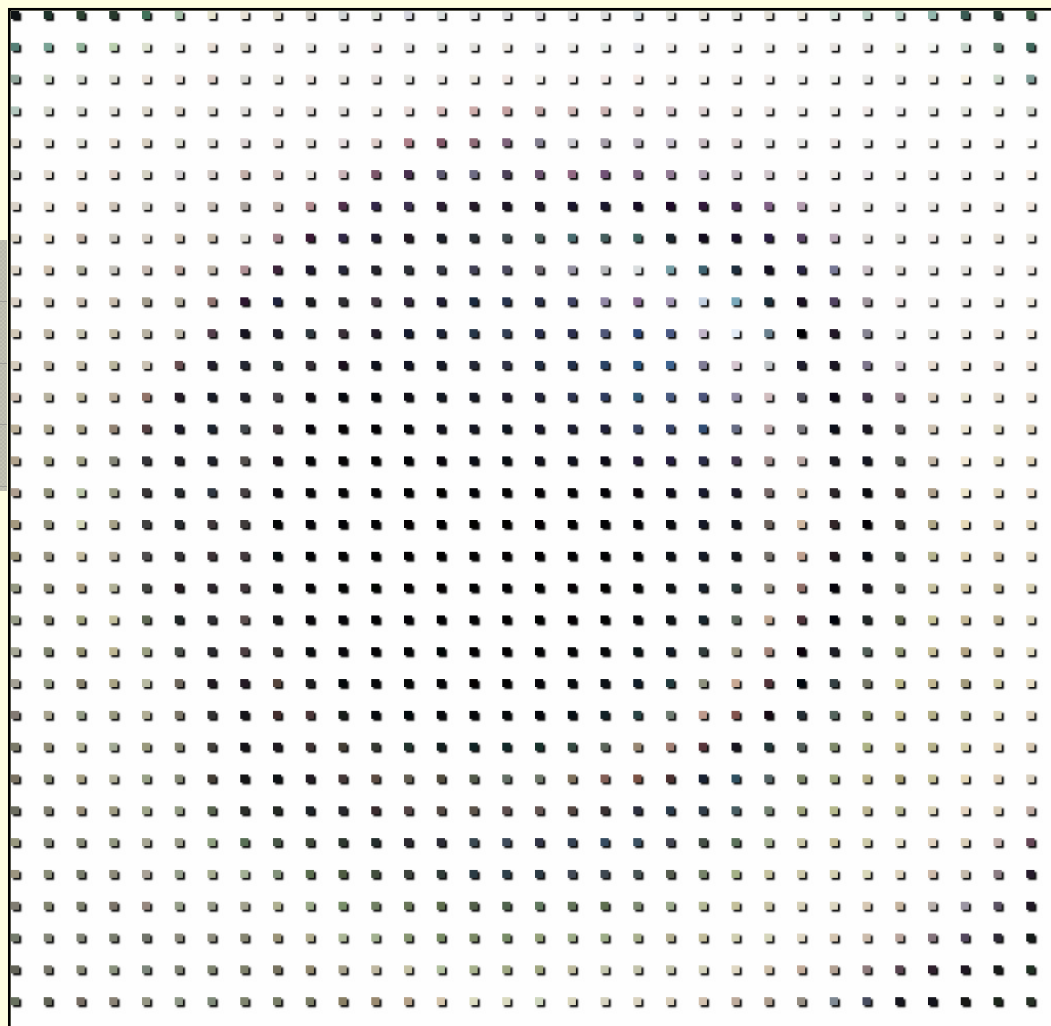
Създава се изображение с  
размери, четири пъти  
по-големи от тези на  
оригиналното изображение



# Билинейна интерполация - пример

Мащабиране:  
увеличаване 4x

Всеки 4-ти пиксел  
на всеки 4-ти ред има  
стойността на пиксел от  
оригиналното изображение



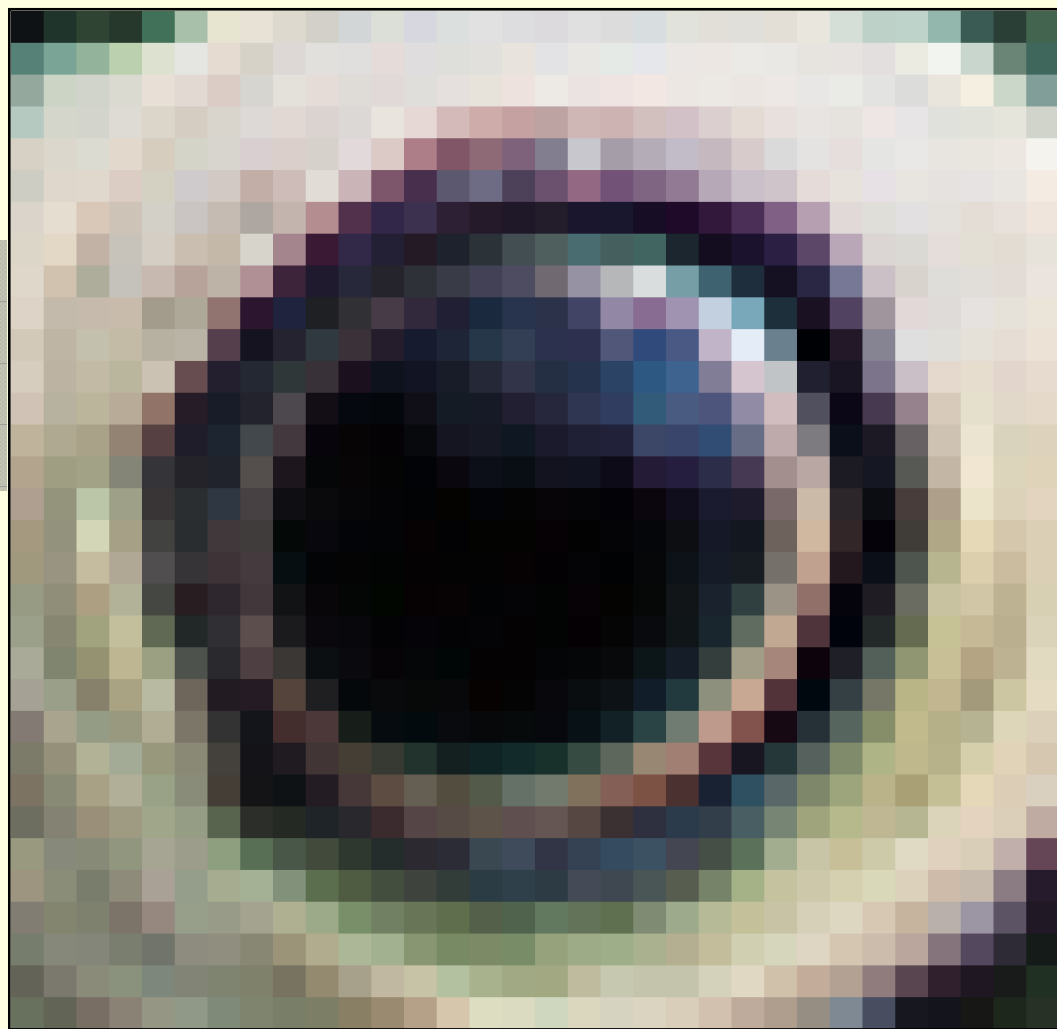
# Билинейна интерполация - пример

Мащабиране:  
увеличаване 4x

Всеки 4-ти пиксел  
на всеки 4-ти ред има  
стойността на пиксел от  
оригиналното изображение



всеки пиксел се  
повтаря в област 4x4





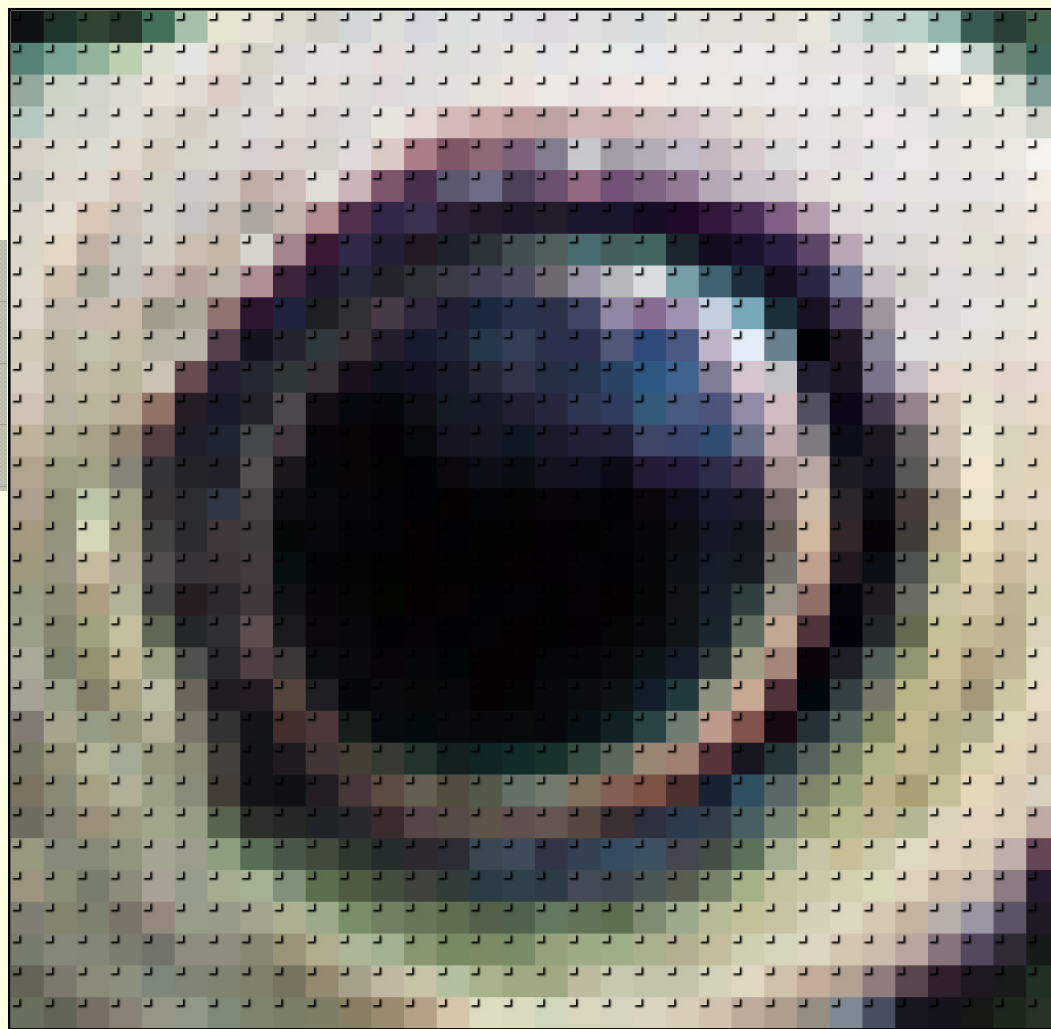
# Билинейна интерполация - пример

Мащабиране:  
увеличаване 4x

Всеки 4-ти пиксел  
на всеки 4-ти ред има  
стойността на пиксел от  
оригиналното изображение



повторения +  
оригинални стойности



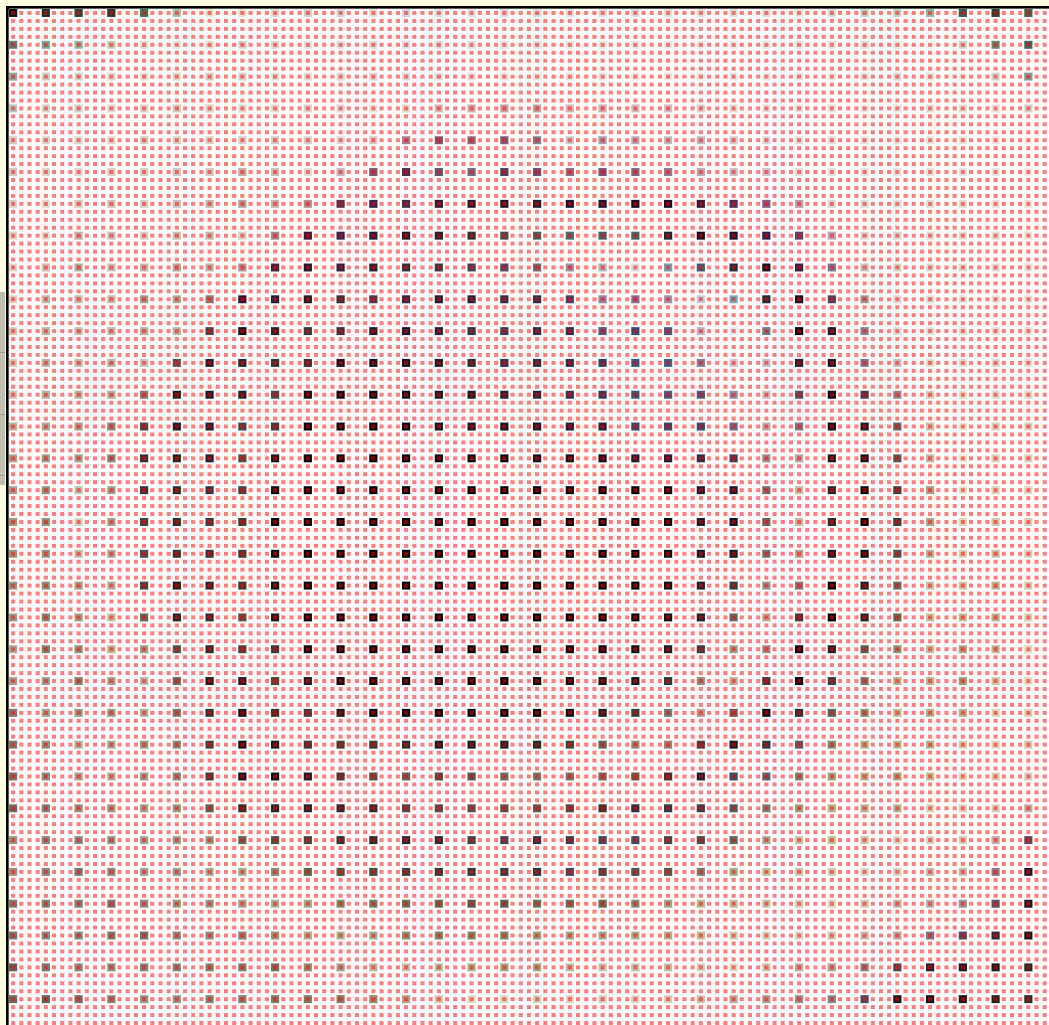
# Билинейна интерполация - пример

Мащабиране:  
увеличаване 4x

За всяка област 4x4 трябва  
да се определят стойностите  
на останалите 15 пиксела



всяка розова точка е пиксел  
в изходното изображение



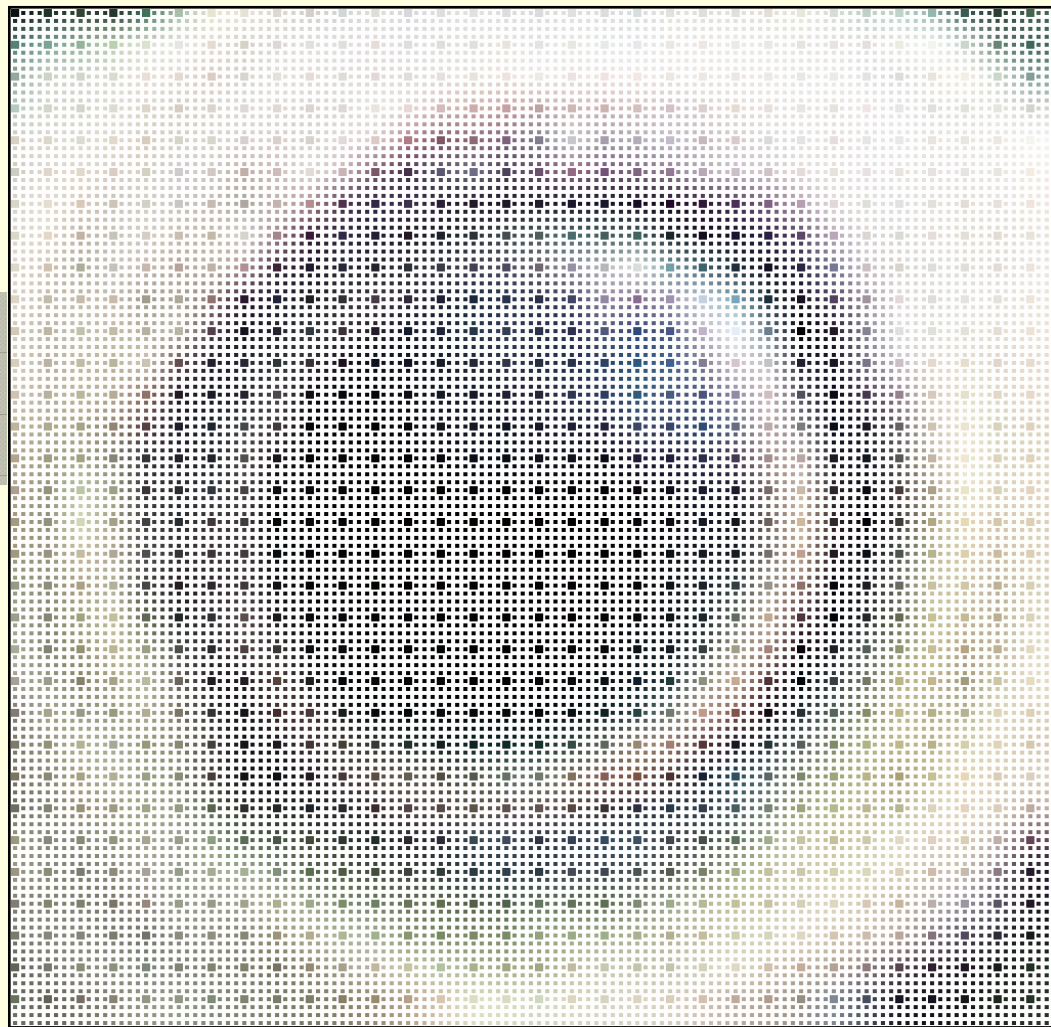
# Билинейна интерполация - пример

Мащабиране:  
увеличаване 4x

За всяка област 4x4 се  
определят междинни  
стойности



определят се междинни  
стойности за всички 15 пиксела



# Билинейна интерполация - пример

Мащабиране:  
увеличаване 4x

Междинните стойности се  
попълват в изображението



всяка розова точка е пиксел в  
изходното изображение



# Билинейна интерполация - пример

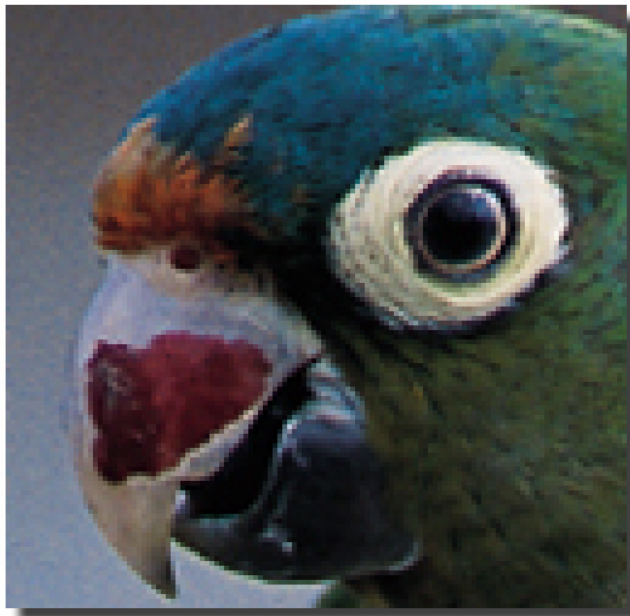
Мащабиране:  
увеличаване 4x

Краен резултат:  
*билинейна  
интерполация*



# Билинейна интерполация - пример

Мащабиране:  
увеличаване 4x



Най-близки съсед



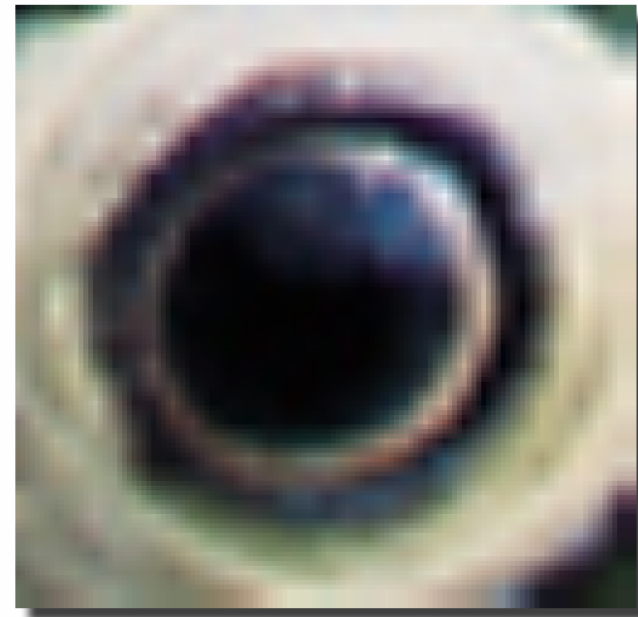
Билинейна интерполация

# Билинейна интерполация - пример

Мащабиране:  
увеличаване 4x



Най-близки съседни



Билинейна интерполация

# Бикубична интерполация

## ■ Билинейна интерполация

- стойностите на пикселите в изходното изображение се определят като претеглена сума от стойностите на 4-те съседни входни пиксела  $I(r',c')$ ,  $I(r'+1,c')$ ,  $I(r'+1,c'+1)$  и  $I(r',c'+1)$

## ■ **Бикубична интерполация**

- освен тези 4 пиксела се използват и техните **частни производни**

$$\left\{ \left\{ \frac{\partial}{\partial c'} I(r' + i, c' + j), \right. \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial r'} I(r' + i, c' + j), \right. \\ \left. \left. \frac{\partial}{\partial c' r'} I(r' + i, c' + j) \right\}_{j=0}^1 \right\}_{i=0}^1$$

|                |              |                |                |
|----------------|--------------|----------------|----------------|
| $(r'-1, c'-1)$ | $(r'-1, c')$ | $(r'-1, c'+1)$ | $(r'-1, c'+2)$ |
| $(r', c'-1)$   | $(r', c')$   | $(r', c'+1)$   | $(r', c'+2)$   |
| $(r'+1, c'-1)$ | $(r'+1, c')$ | $(r'+1, c'+1)$ | $(r'+1, c'+2)$ |
| $(r'+2, c'-1)$ | $(r'+2, c')$ | $(r'+2, c'+1)$ | $(r'+2, c'+2)$ |



# Бикубична интерполация

## ■ Бикубична интерполация

- производните се изчисляват за локални области на 4те съседни пиксела
- за всеки пиксел в изходното изображение се разглежда **локална околност 4x4**

$$\left\{ \left\{ \frac{\partial}{\partial c'} I(r' + i, c' + j), \right. \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial r'} I(r' + i, c' + j), \right. \\ \left. \left. \frac{\partial}{\partial c' r'} I(r' + i, c' + j) \right\}_{j=0}^1 \right\}_{i=0}^1$$

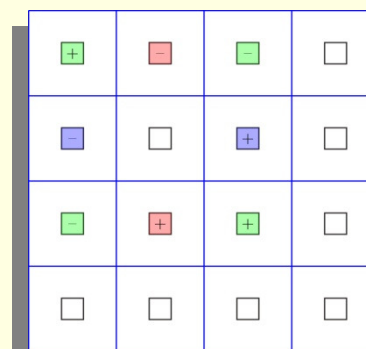
|                |              |                |                |
|----------------|--------------|----------------|----------------|
| $(r'-1, c'-1)$ | $(r'-1, c')$ | $(r'-1, c'+1)$ | $(r'-1, c'+2)$ |
| $(r', c'-1)$   | $(r', c')$   | $(r', c'+1)$   | $(r', c'+2)$   |
| $(r'+1, c'-1)$ | $(r'+1, c')$ | $(r'+1, c'+1)$ | $(r'+1, c'+2)$ |
| $(r'+2, c'-1)$ | $(r'+2, c')$ | $(r'+2, c'+1)$ | $(r'+2, c'+2)$ |

# Бикубична интерполация

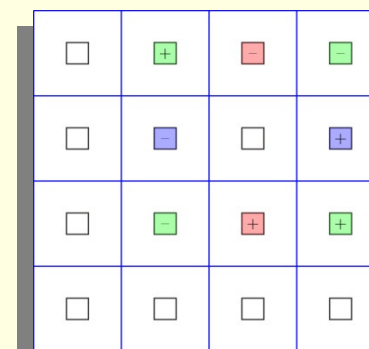
$N(r',c')$  е локална област за пиксел  $(r',c')$  съдържаща 8 съседни пиксела

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r'} I(r',c') &= \text{средна стойност на} \\ &\text{крайни разлики за } (r',c') \\ &= \frac{1}{2} [(I(r'+1,c') - I(r',c')) \\ &\quad + (I(r',c') - I(r'-1,c'))] \\ &= \frac{1}{2} [I(r'+1,c') - I(r'-1,c')] \end{aligned}$$

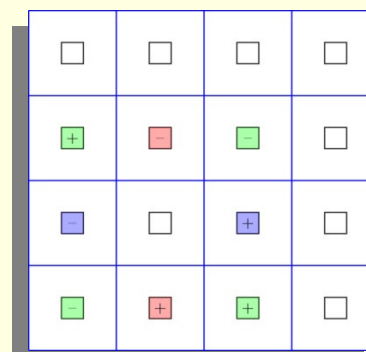
|  |       |   |
|--|-------|---|
|  | ..... | $\frac{\partial}{\partial r'} I(r,c)$   |
|  | ..... | $\frac{\partial}{\partial c'} I(r,c)$   |
|  | ..... | $\frac{\partial}{\partial r'c'} I(r,c)$ |



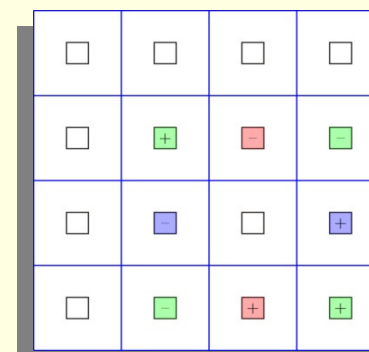
$N(r',c')$



$N(r',c'+1)$



$N(r'+1,c')$



$N(r'+1,c'+1)$

# Бикубична интерполация

$N(r', c')$

$$\frac{\partial}{\partial r'} I(r', c') = \frac{1}{2} [I(r'+1, c') - I(r'-1, c')],$$

$$\frac{\partial}{\partial c'} I(r', c') = \frac{1}{2} [I(r', c'+1) - I(r', c'-1)],$$

$$\frac{\partial}{\partial c' r'} I(r', c') = \frac{1}{4} [I(r'+1, c'+1) - I(r'+1, c'-1) + I(r'-1, c'-1) - I(r'-1, c'+1)]$$

|   |   |   |  |
|---|---|---|--|
| + | - | - |  |
| - |   | + |  |
| - | + | + |  |
|   |   |   |  |

# Бикубична интерполация

$$N(r', c' + 1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r'} I(r', c' + 1) = \frac{1}{2} [I(r' + 1, c' + 1) - I(r' - 1, c' + 1)],$$

$$\frac{\partial}{\partial c'} I(r', c' + 1) = \frac{1}{2} [I(r', c' + 2) - I(r', c')],$$

$$\frac{\partial}{\partial c' r'} I(r', c' + 1) = \frac{1}{4} [I(r' + 1, c' + 2) - I(r' + 1, c') + I(r' - 1, c') - I(r' - 1, c' + 2)]$$

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| □ | + | - | - |
| □ | - | □ | + |
| □ | - | + | + |
| □ | □ | □ | □ |

# Бикубична интерполация

$$N(r'+1, c'+1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r'} I(r'+1, c'+1) = \frac{1}{2} [I(r'+2, c'+1) - I(r', c'+1)],$$

$$\frac{\partial}{\partial c'} I(r'+1, c'+1) = \frac{1}{2} [I(r'+1, c'+2) - I(r'+1, c')],$$

$$\frac{\partial^2}{\partial c' r'} I(r'+1, c'+1) = \frac{1}{4} [I(r'+2, c'+2) - I(r'+2, c') + I(r', c') - I(r', c'+2)]$$

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| □ | □ | □ | □ |
| □ | + | - | - |
| □ | - | □ | + |
| □ | - | + | + |

# Бикубична интерполация

$$N(r'+1, c')$$

$$\frac{\partial}{\partial r'} I(r'+1, c') = \frac{1}{2} [I(r'+2, c') - I(r', c')],$$

$$\frac{\partial}{\partial c'} I(r'+1, c') = \frac{1}{2} [I(r'+1, c'+1) - I(r'+1, c'-1)],$$

$$\frac{\partial^2}{\partial c' r'} I(r'+1, c') = \frac{1}{4} [I(r'+2, c'+1) - I(r'+2, c'-1) + I(r', c'-1) - I(r', c'+1)]$$

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| □ | □ | □ | □ |
| + | - | - | □ |
| - | □ | + | □ |
| - | + | + | □ |

# Бикубична интерполация

$$S_r = \begin{cases} R'/R, & \text{if } R' > R, \\ (R'-1)/R, & \text{if } R' < R. \end{cases}$$

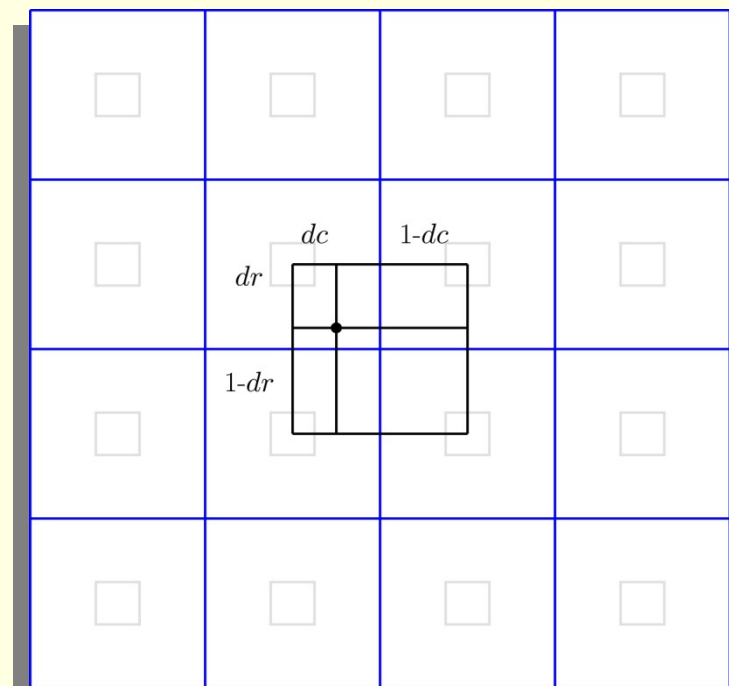
$$S_c = \begin{cases} C'/C, & \text{if } C' > C, \\ (C'-1)/C, & \text{if } C' < C. \end{cases}$$

$$r_f = [(1, \dots, R) \cdot S_r], c_f = [(1, \dots, C) \cdot S_c]$$

$$(r', c') = (\lfloor r_f \rfloor, \lfloor c_f \rfloor)$$

$$(dr, dc) = (r_f - r', c_f - c')$$

Аналогично на  
интерполация  
по най-близки  
съседни



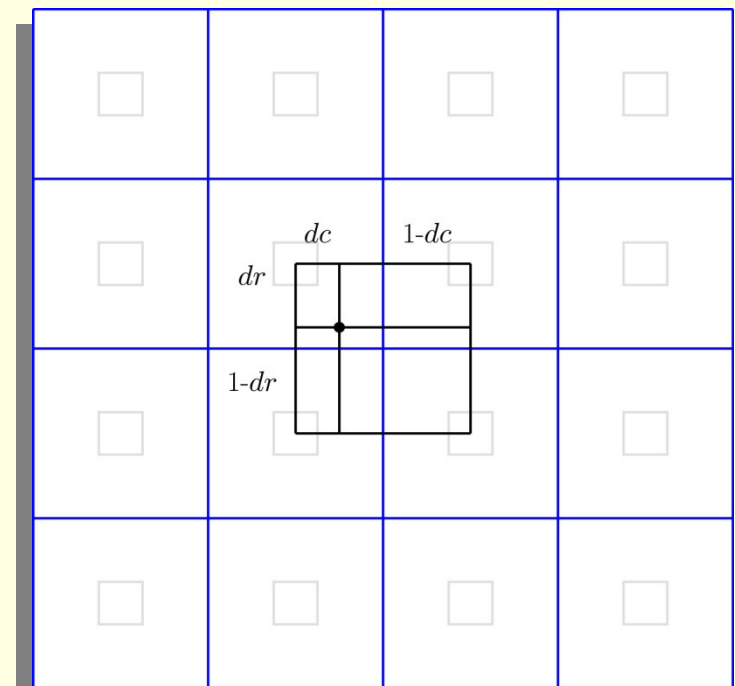
# Бикубична интерполация

$$J(r, c) = \sum_{m=-1}^2 \sum_{n=-1}^2 I(r' + m, c' + n) P(dr - m) P(n - dc)$$

$$P(x) = \frac{1}{6} \left[ Q(x+2)^3 - 4Q(x+1)^3 - 6Q(x)^3 - 4Q(x-1)^3 + Q(x-2)^3 \right]$$

$$Q(x) = \begin{cases} x & \text{за } x > 0 \\ 0 & \text{за } x \leq 0 \end{cases}$$

Производните за всеки от 4те съседни пиксела са комбинирани в сума на произведения на полиноми



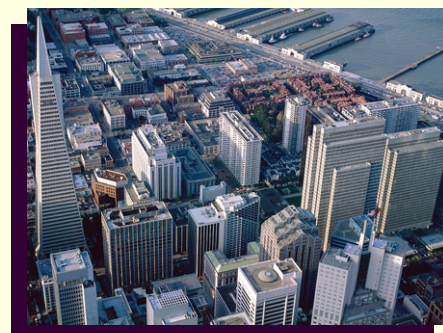
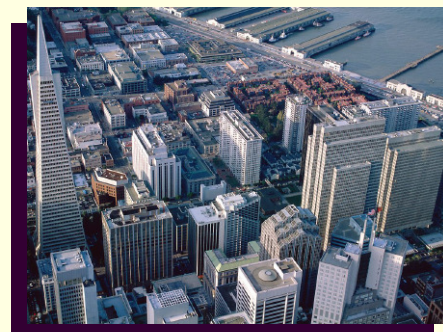
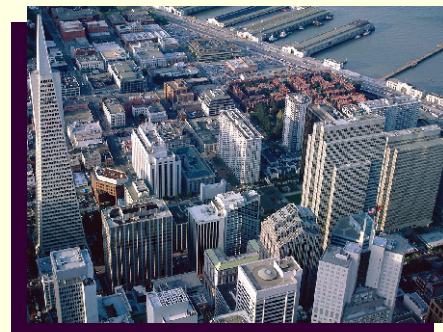


# Бикубична интерполация

Пример: мащабиране на изображение до 3/7 от размерите на оригиналното изображение



оригинално изображение



най-близки съседи  
билинейна инт.  
бикубична инт.

# Бикубична интерполация

Мащабиране: намаляване 3/7

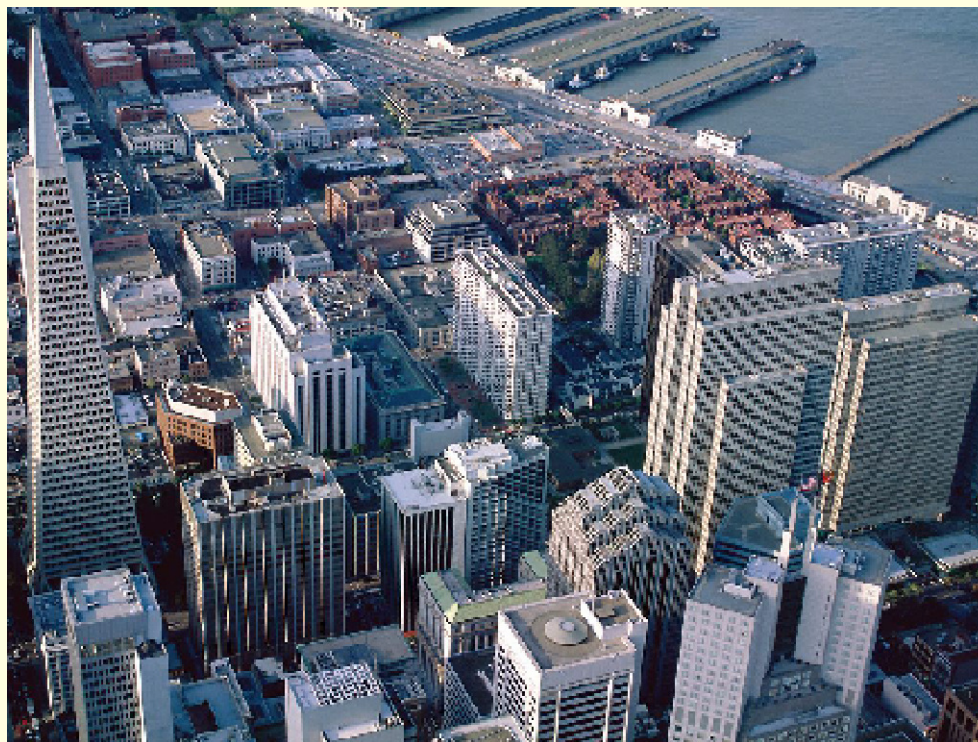


оригинално изображение

# Бикубична интерполация

---

Мащабиране: намаляване 3/7 (увеличено)

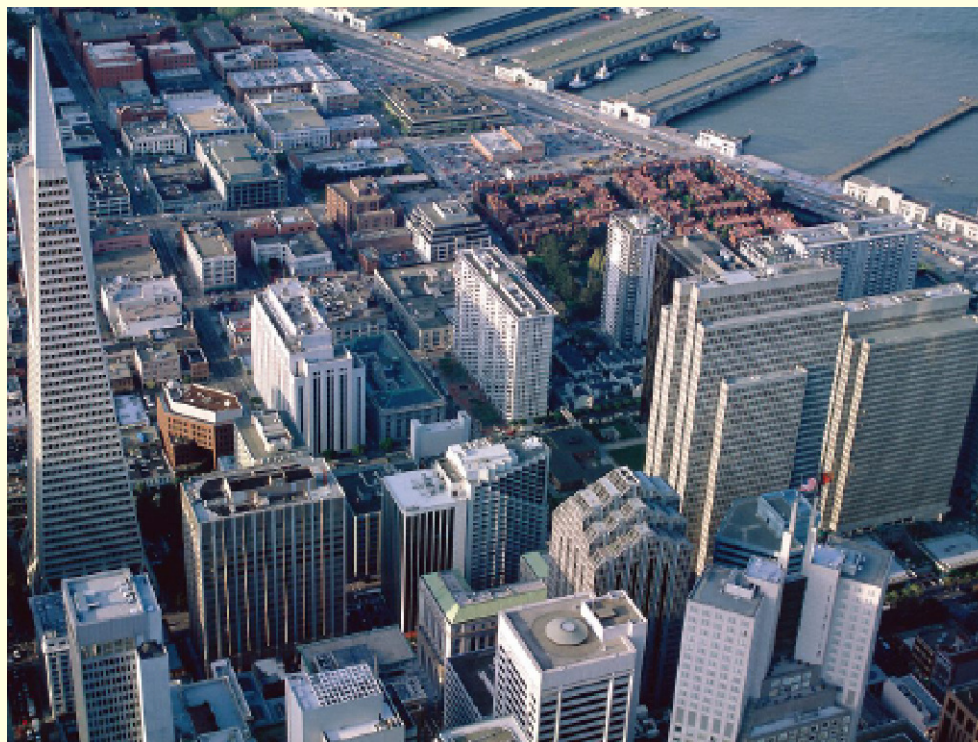


най-близки съседни

# Бикубична интерполация

---

Мащабиране: намаляване 3/7 (увеличено)



билинейна интерполация

# Бикубична интерполация

---

Мащабиране: намаляване 3/7 (увеличено)



бикубична интерполация

# Бикубична интерполация

Мащабиране: увеличаване 7/3



най-близки съсед



# Бикубична интерполация

Мащабиране: увеличаване 7/3



билинейна  
интерполация



# Бикубична интерполация

Мащабиране: увеличаване 7/3



бикубична  
интерполация





# Геометрично изкривяване

- Входно изображение /

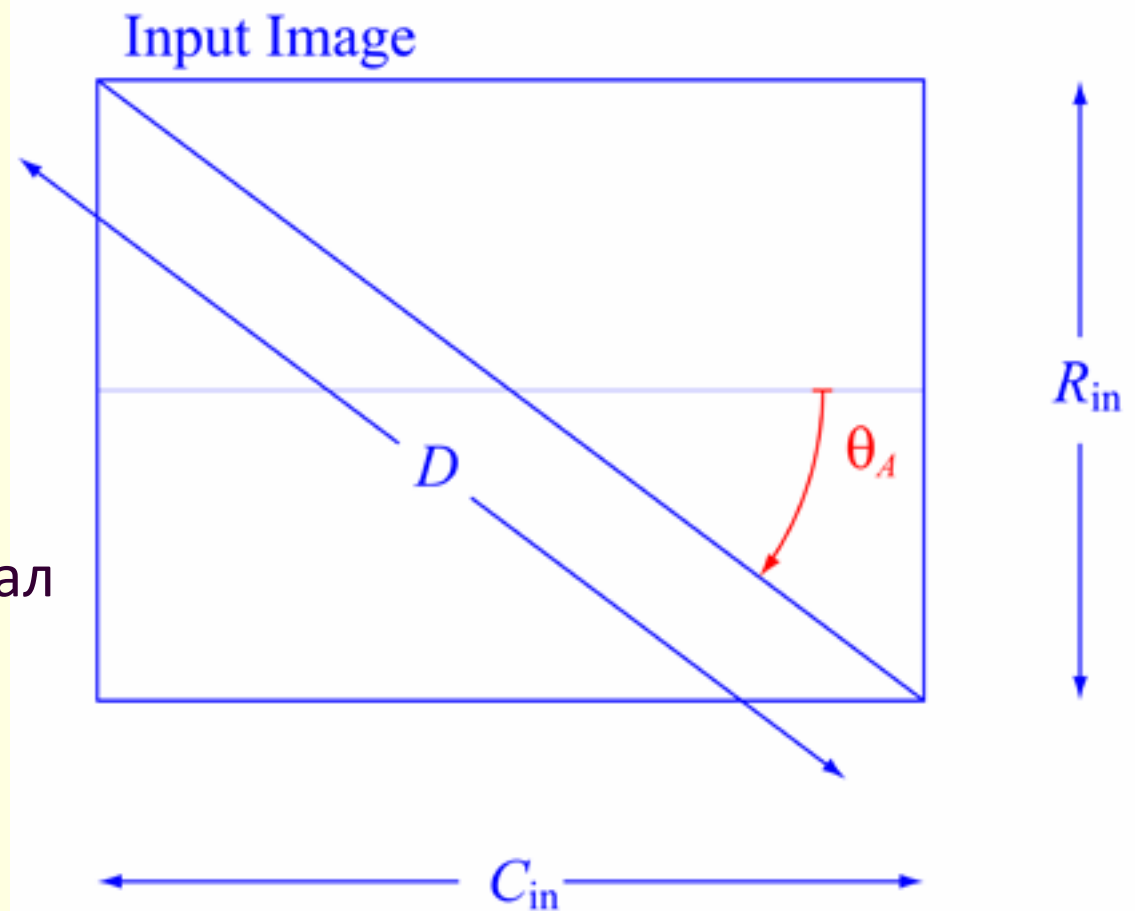
- размери  $R_{in} \times C_{in}$

- Ъгъл на завъртане

$$\theta_A = \tan^{-1} \left[ \frac{R_{in}}{C_{in}} \right]$$

- Дължина на диагонал

$$D = \sqrt{R_{in}^2 + C_{in}^2}$$



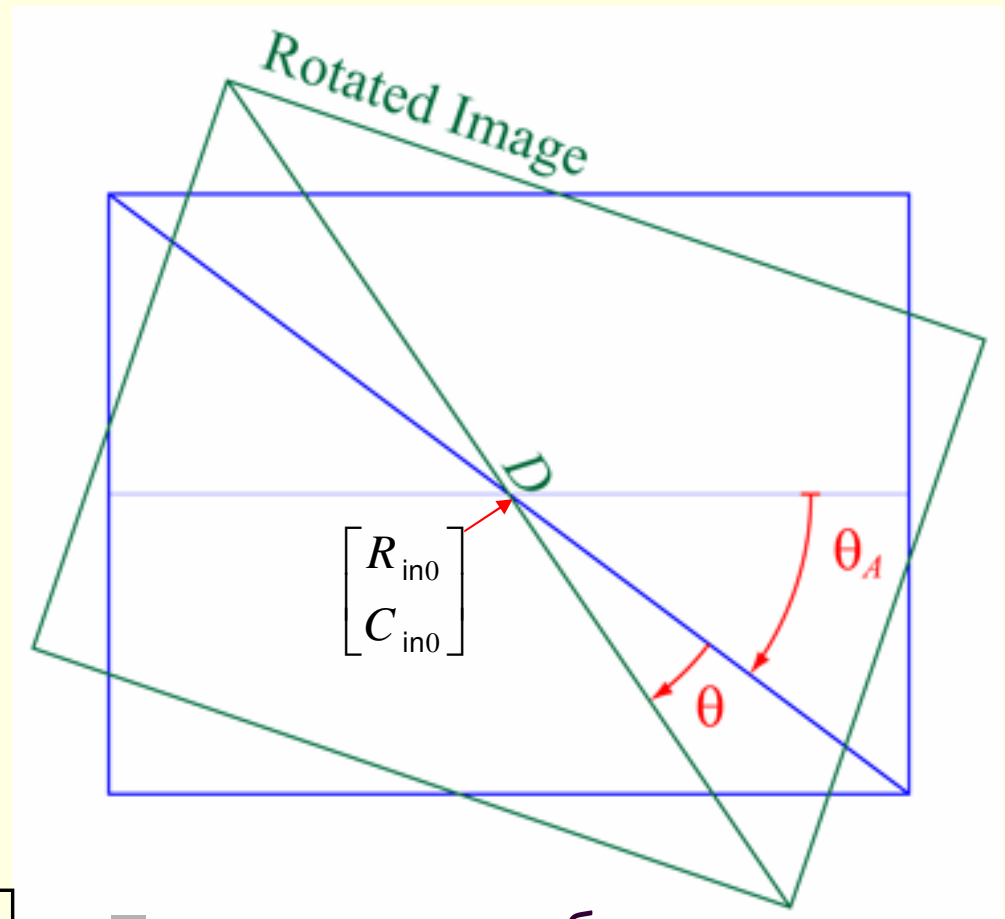
# Геометрично изкривяване

- ъгъл на завъртане  $\theta$
- ротационна матрица

$$P(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

- трансформация на координати на входното изображение към координати в изходното изображение

$$\begin{bmatrix} r \\ c \end{bmatrix} = P(\theta) \begin{bmatrix} r_{in} - R_{in0} \\ c_{in} - C_{in0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{out0} \\ C_{out0} \end{bmatrix}$$



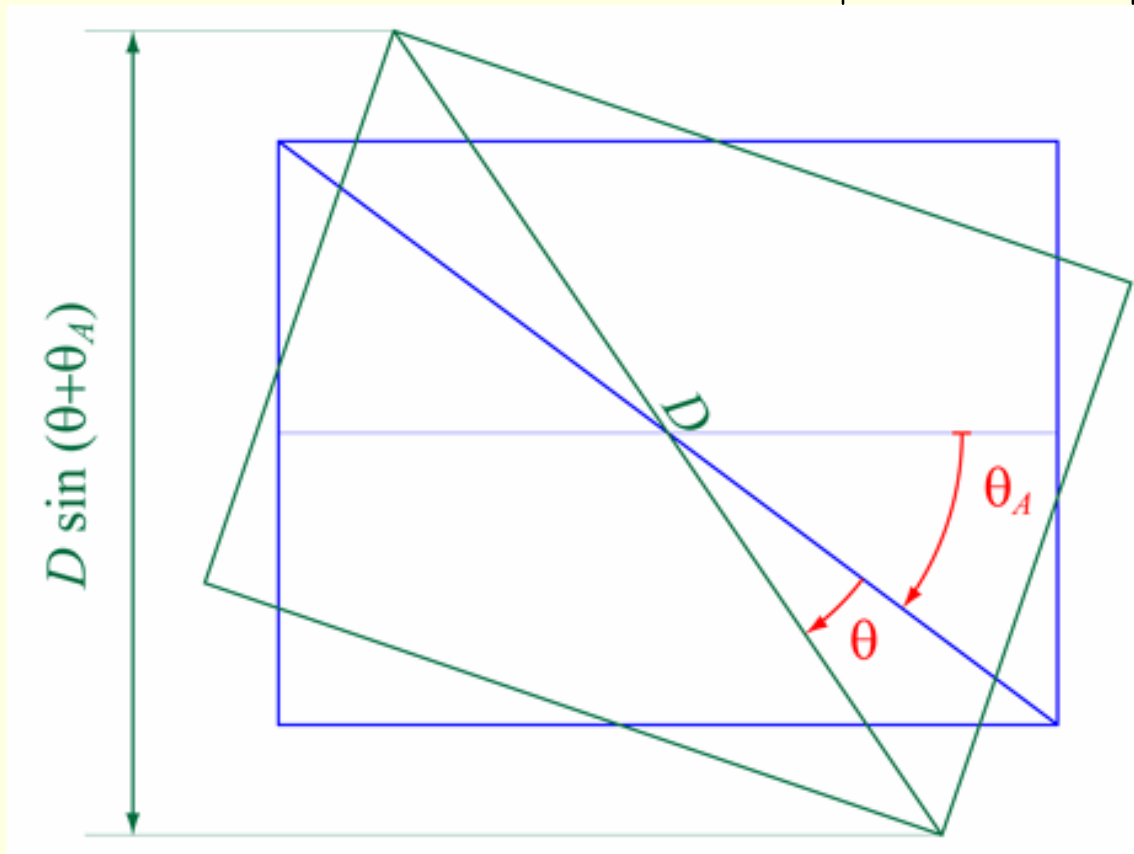
- център на изображението

$$(R_{in0}, C_{in0}) = \left( \left\lfloor \frac{1}{2} R_{in} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{1}{2} C_{in} \right\rfloor + 1 \right)$$

# Геометрично изкривяване

- размери на изходното изображение

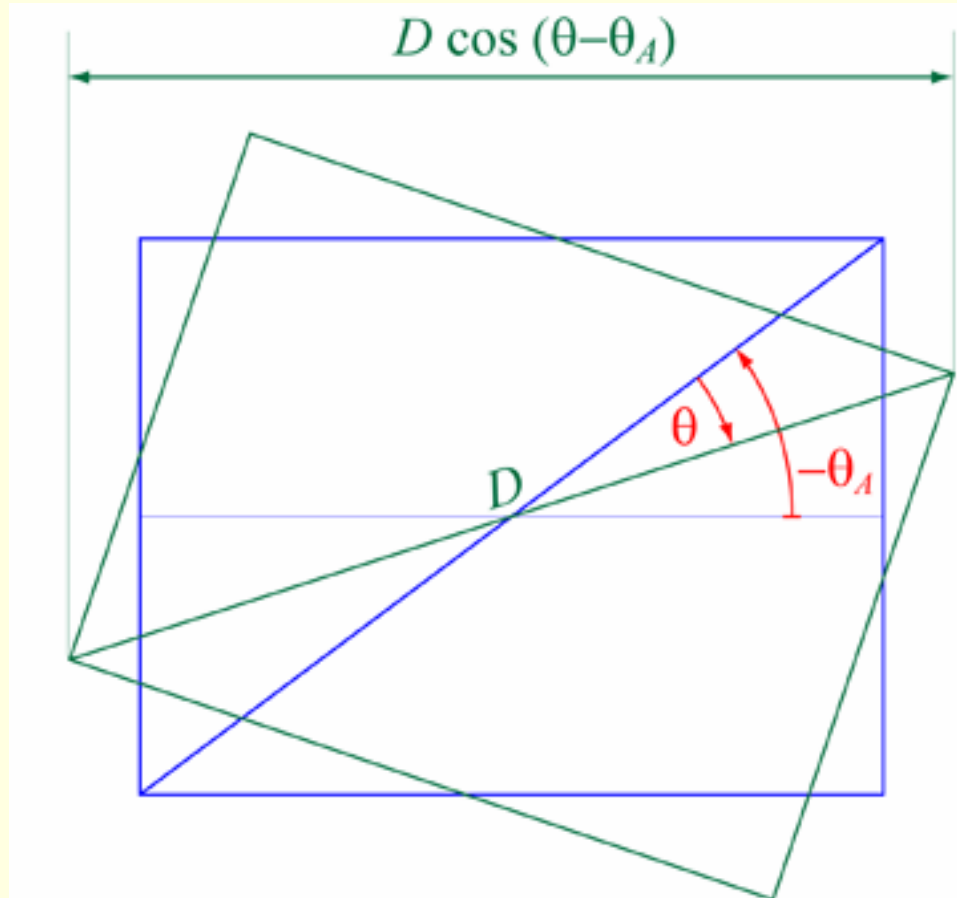
- редове:  $R_{\text{out}} = \text{round}\left(\left|D \sin(\theta + \theta_A)\right|\right)$  ако  $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$



# Геометрично изкривяване

- размери на изходното изображение

- колони:  $C_{out} = \text{round}\left(\left|D \cos(\theta - \theta_A)\right|\right)$  ако  $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$



# Геометрично изкривяване

- размери на изходното изображение
  - зависят от стойността на ъгъла на завъртане

$0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ :

$$R_{\text{out}} = \text{round}(|D \sin(\theta + \theta_A)|)$$

$$C_{\text{out}} = \text{round}(|D \cos(\theta - \theta_A)|)$$

$-90^\circ \leq \theta < 0^\circ$ :

$$R_{\text{out}} = \text{round}(|D \sin(\theta - \theta_A)|)$$

$$C_{\text{out}} = \text{round}(|D \cos(\theta + \theta_A)|)$$

$90^\circ \leq \theta < 180^\circ$ :

$$R_{\text{out}} = \text{round}(|D \cos(\theta - 90 - \theta_A)|)$$

$$C_{\text{out}} = \text{round}(|D \sin(\theta - 90 + \theta_A)|)$$

$-180^\circ \leq \theta < -90^\circ$ :

$$R_{\text{out}} = \text{round}(|D \cos(\theta + 90 + \theta_A)|)$$

$$C_{\text{out}} = \text{round}(|D \sin(\theta + 90 - \theta_A)|)$$

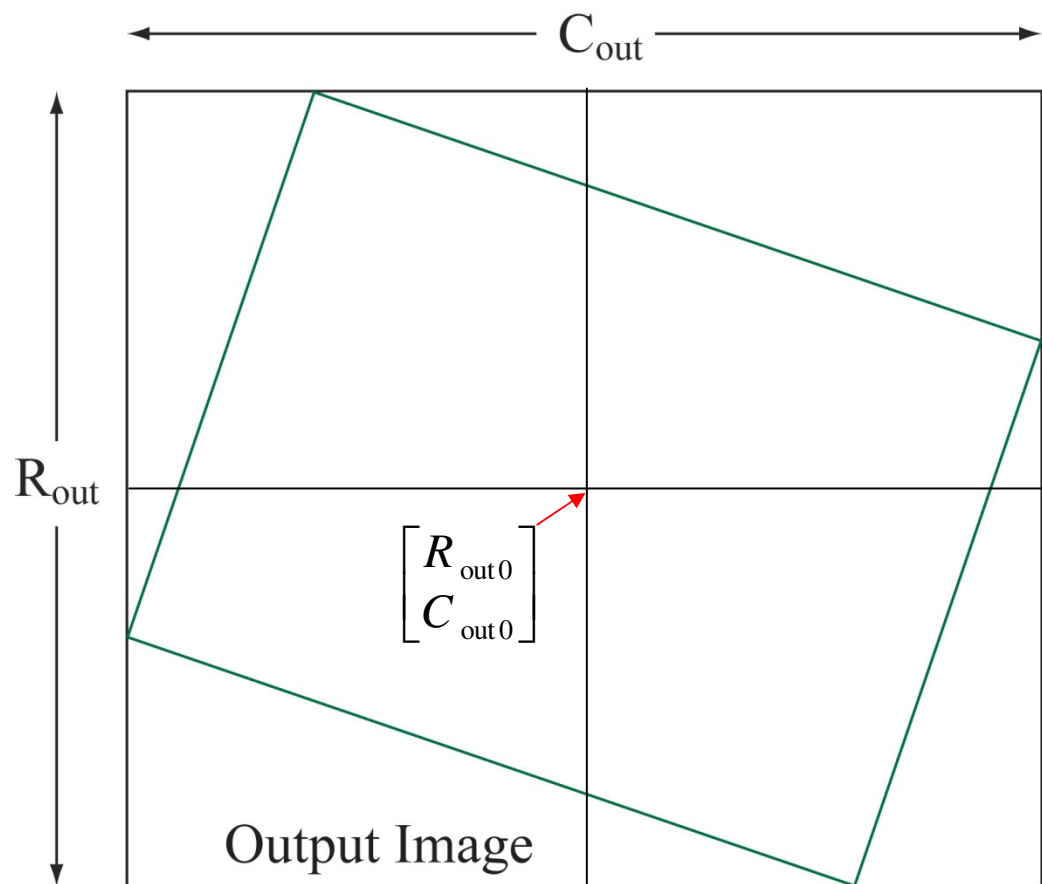
# Геометрично изкривяване

- Определят се размерите на изходното изображение  $J$

- $R_{\text{out}} \times C_{\text{out}}$

- Определя се централната точка

$$(R_{\text{out}0}, C_{\text{out}0}) = \left( \left\lfloor \frac{1}{2} R_{\text{out}} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{1}{2} C_{\text{out}} \right\rfloor + 1 \right)$$



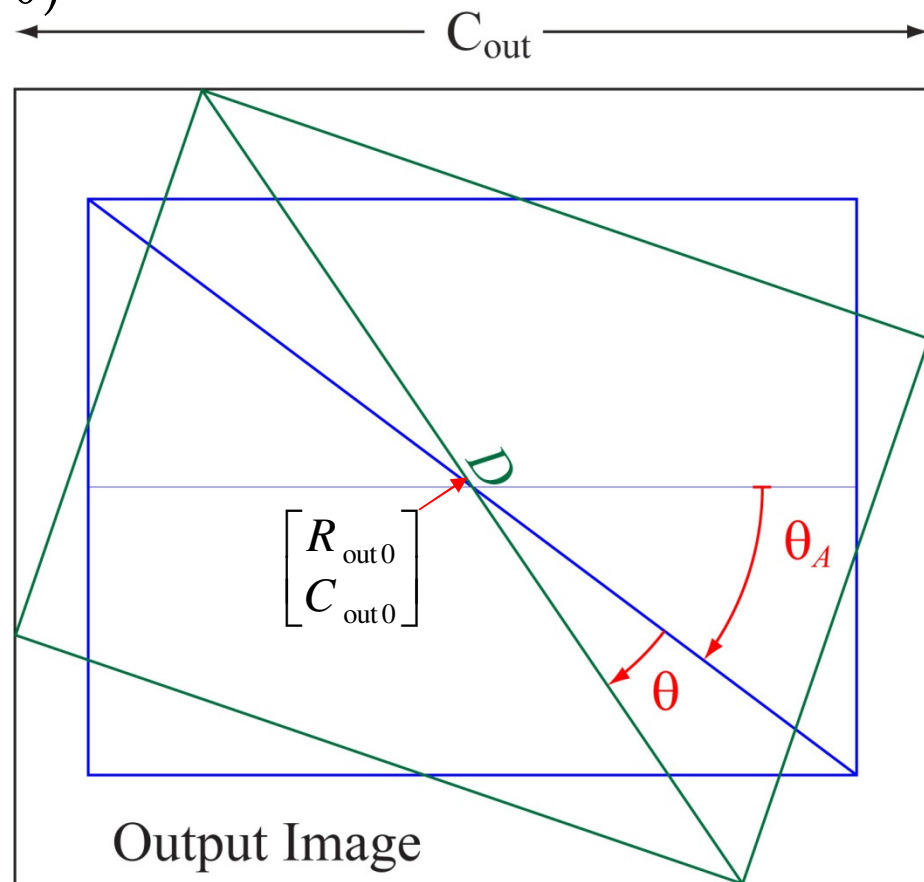
# Геометрично изкривяване

$$P^{-1}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = P(-\theta)$$

- За всеки пиксел  $(r, c)$  се определя пиксел от входното изображение  $(r_f, c_f)$  чрез ротация на  $(r, c)$  на ъгъл  $-\theta$  около центъра  $(R_{out0}, C_{out0})$

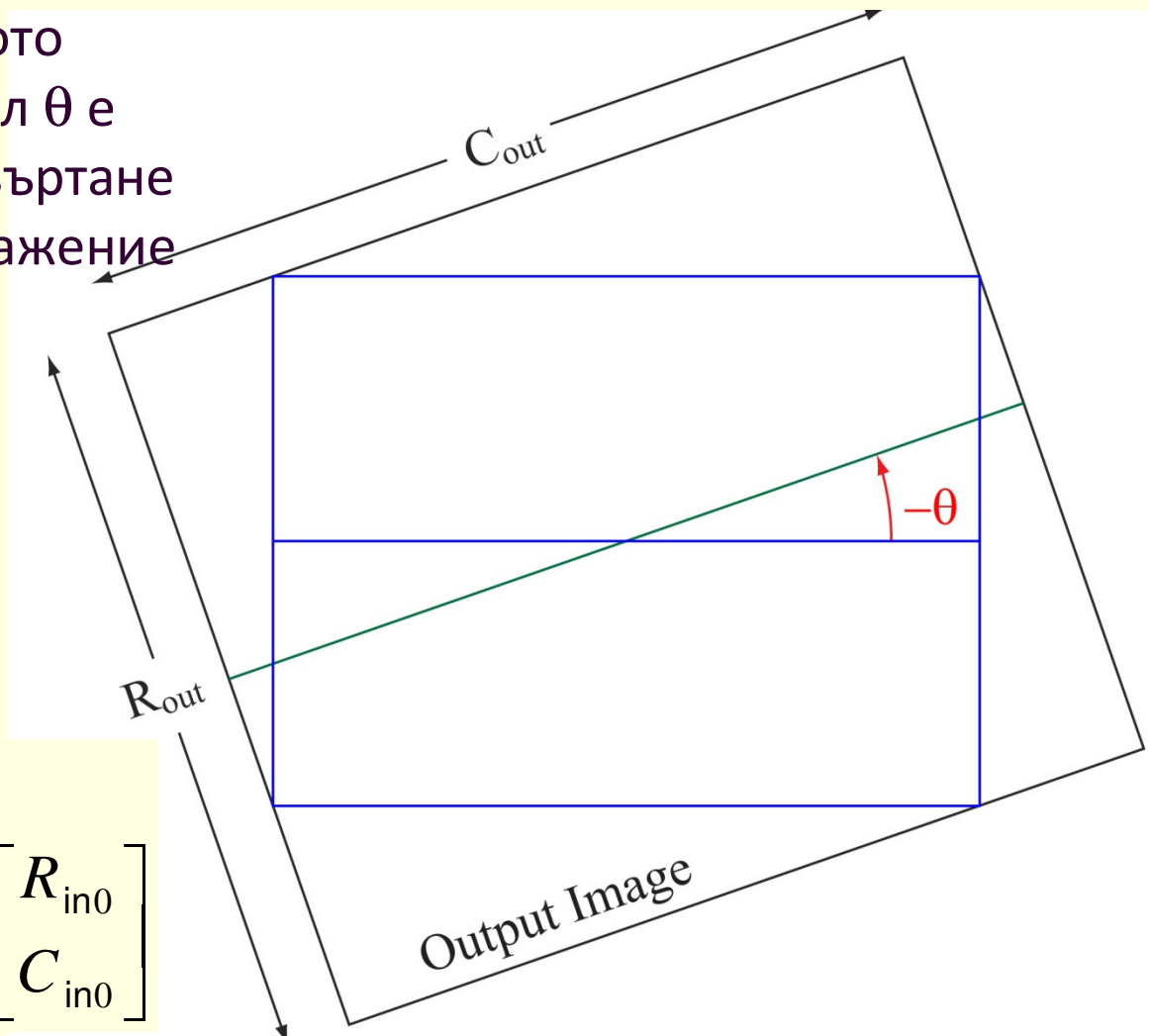
$$\Phi(r, c, :) = \begin{bmatrix} r_f \\ c_f \end{bmatrix} =$$

$$= P^{-1}(\theta) \begin{bmatrix} r - R_{out0} \\ c - C_{out0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{in0} \\ C_{in0} \end{bmatrix}$$



# Геометрично изкривяване

- Ротацията на входното изображение на ъгъл  $\theta$  е еквивалентна на завъртане на изходното изображение на ъгъл  $-\theta$



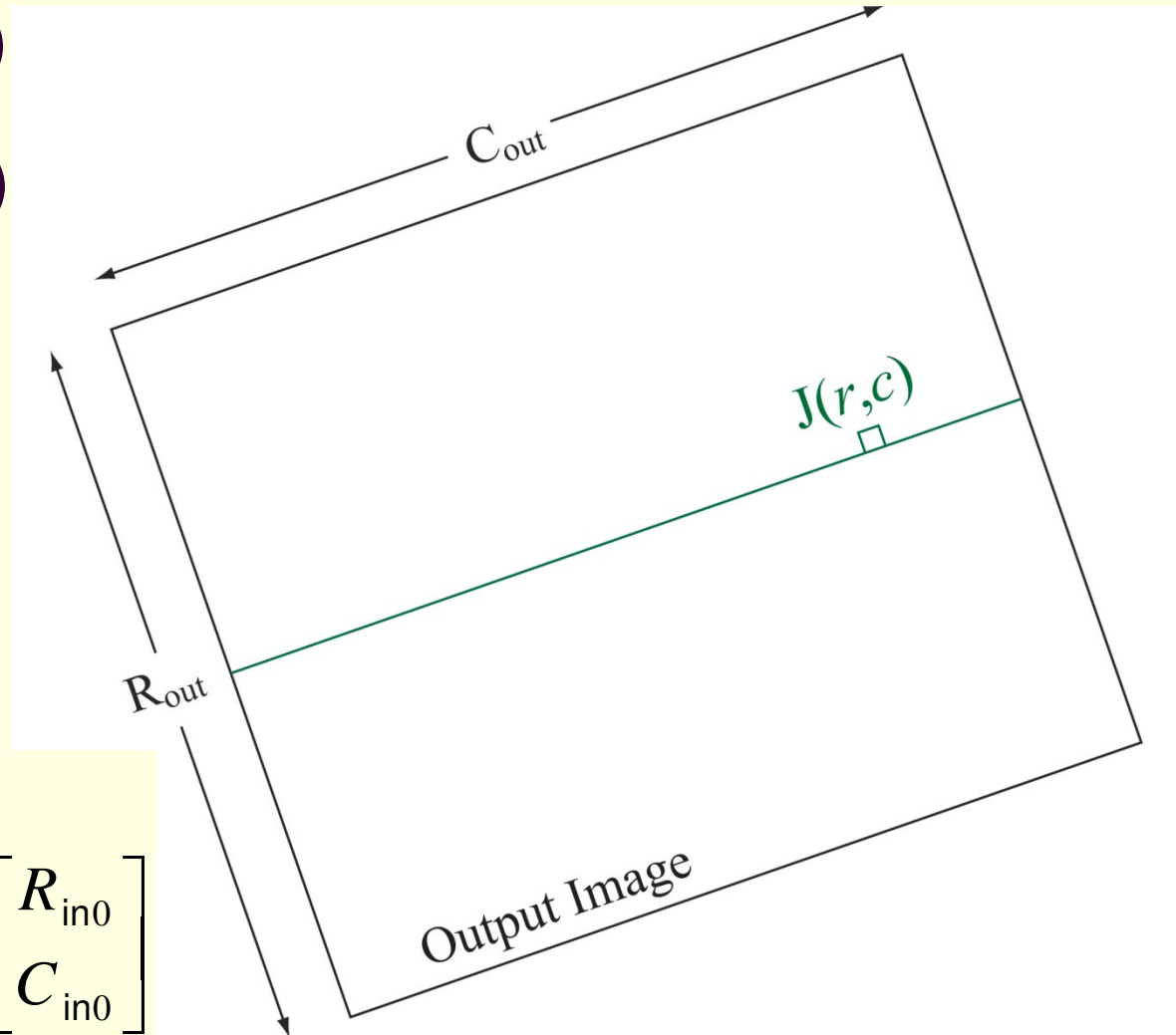
$$\Phi(r, c, :) =$$

$$= \mathbf{P}^{-1}(\theta) \begin{bmatrix} r - R_{out0} \\ c - C_{out0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{in0} \\ C_{in0} \end{bmatrix}$$



# Геометрично изкривяване

- След ротацията  $J(r,c)$  е в почти същата позиция както  $I(r_f, c_f)$

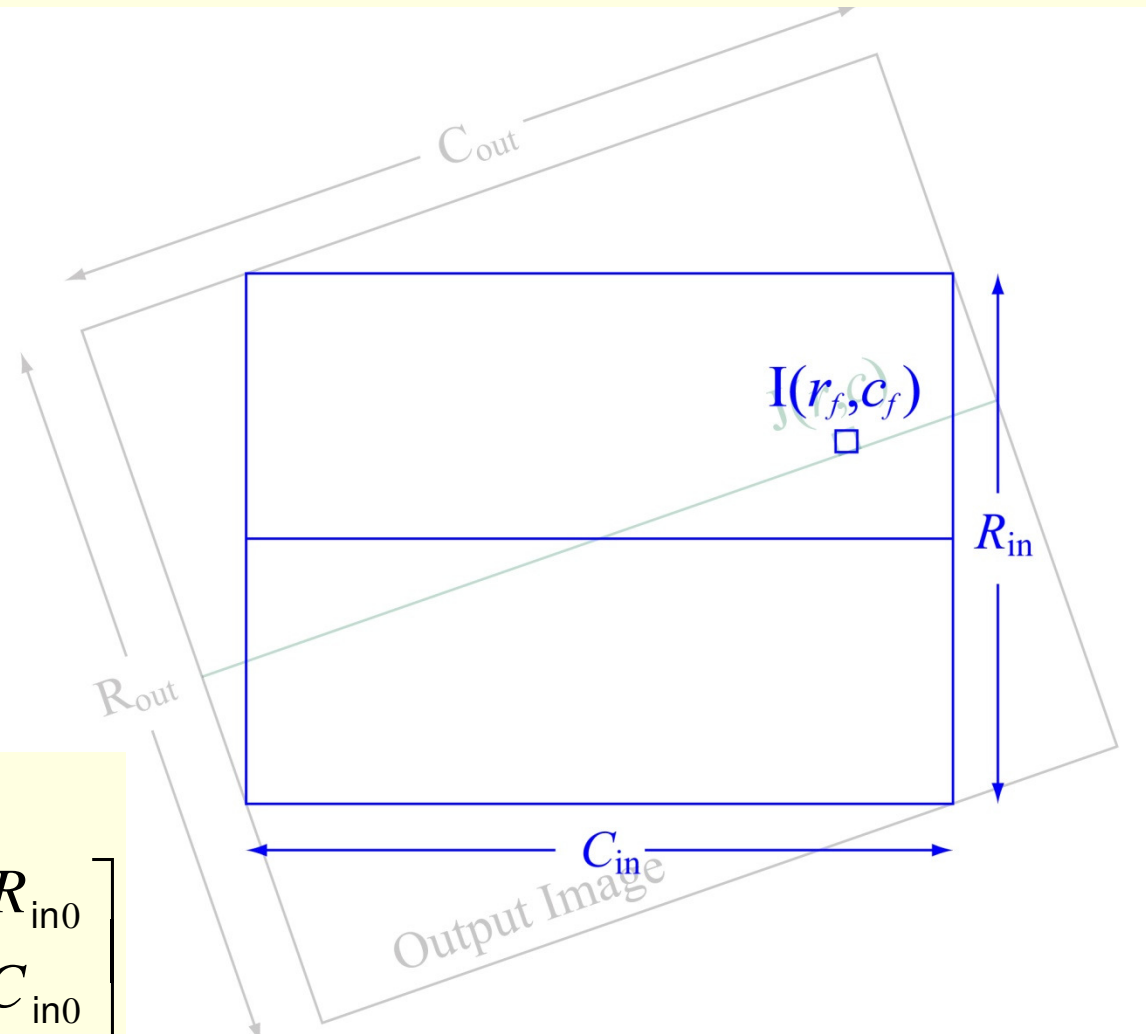


$$\Phi(r, c, :) =$$

$$= \mathbf{P}^{-1}(\theta) \begin{bmatrix} r - R_{out0} \\ c - C_{out0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{in0} \\ C_{in0} \end{bmatrix}$$

# Геометрично изкривяване

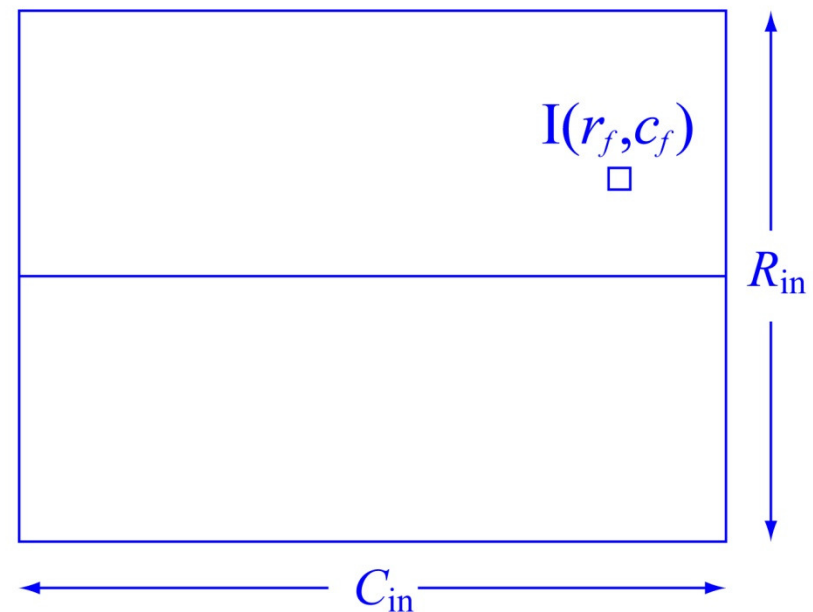
- След ротацията  $J(r,c)$  е в почти същата позиция както  $I(r_f, c_f)$



$$\begin{aligned}\Phi(r, c, :) &= \\ &= \mathbf{P}^{-1}(\theta) \begin{bmatrix} r - R_{out0} \\ c - C_{out0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{in0} \\ C_{in0} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

# Геометрично изкривяване

- След ротацията  $J(r, c)$  е в почти същата позиция както  $I(r_f, c_f)$



$$\begin{aligned}\Phi(r, c, :) &= \\ &= \mathbf{P}^{-1}(\theta) \begin{bmatrix} r - R_{out0} \\ c - C_{out0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{in0} \\ C_{in0} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

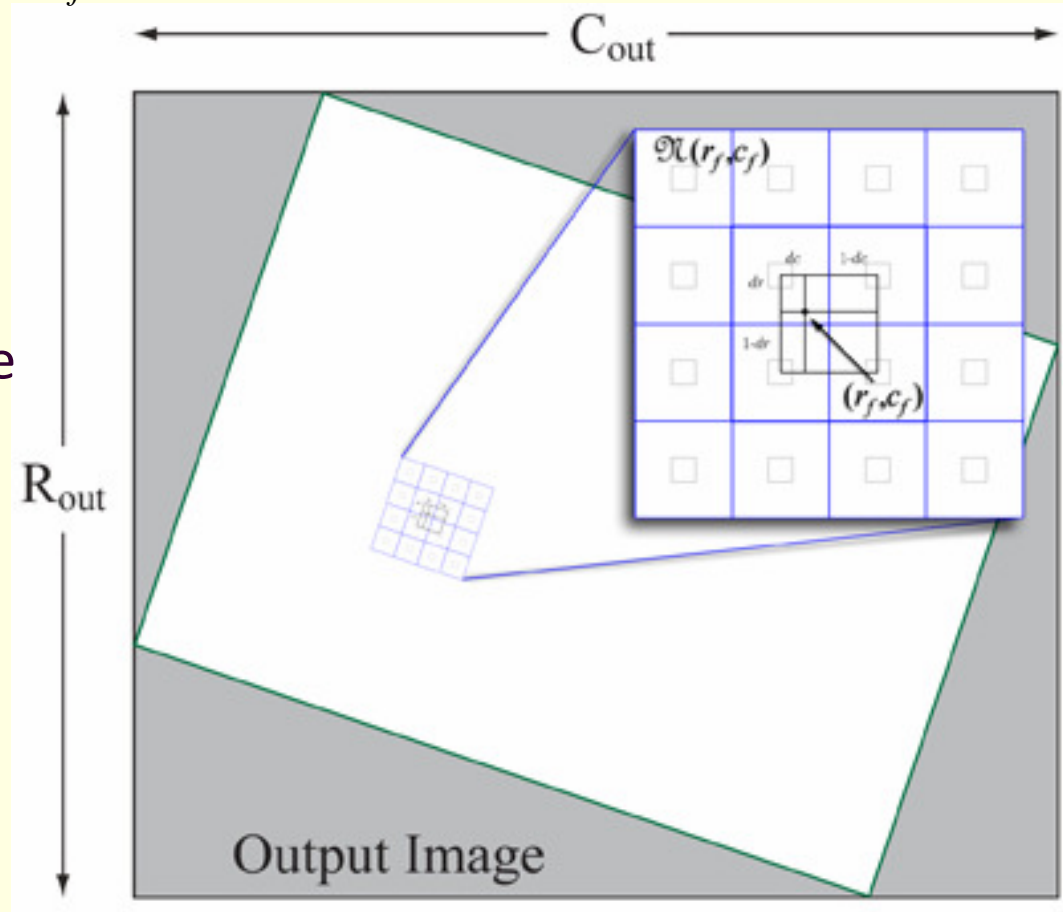
# Геометрично изкривяване

$$J(r, c) = \Theta \{I; \mathbf{N}(r_f, c_f)\}.$$

## Интерполация

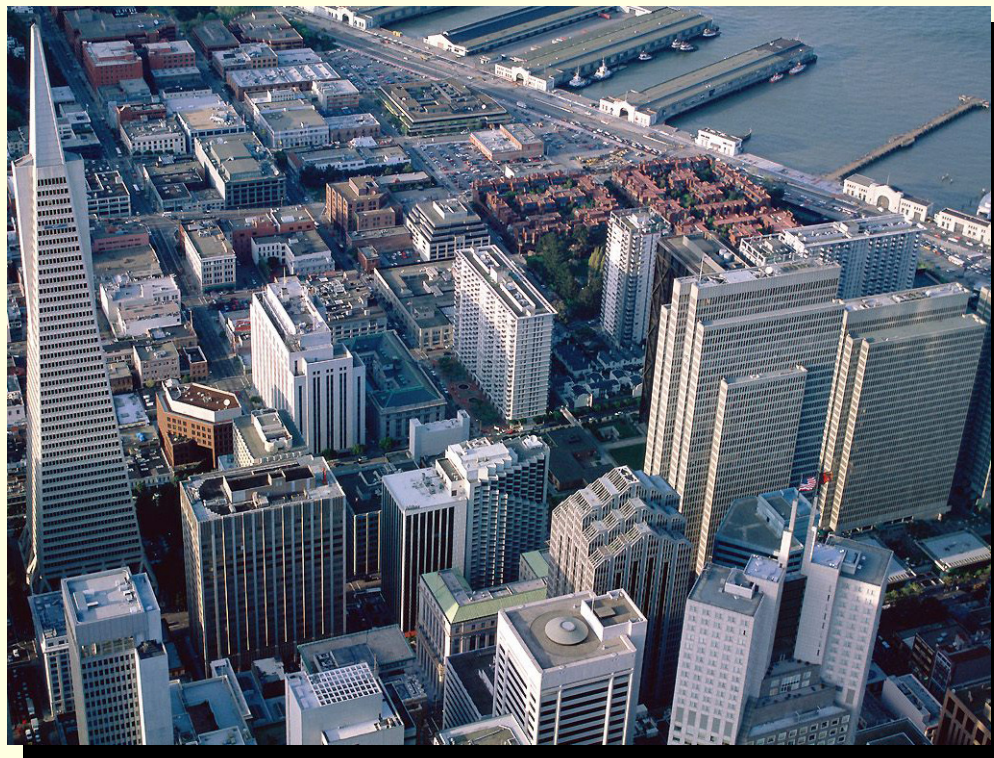
- стойността в изходното изображение  $J(r, c)$  е функция на стойностите в локална област за пиксел  $(r_f, c_f)$

- Най-близки съседни
- Билинейна
- Бикубична



# Геометрично изкривяване – пример

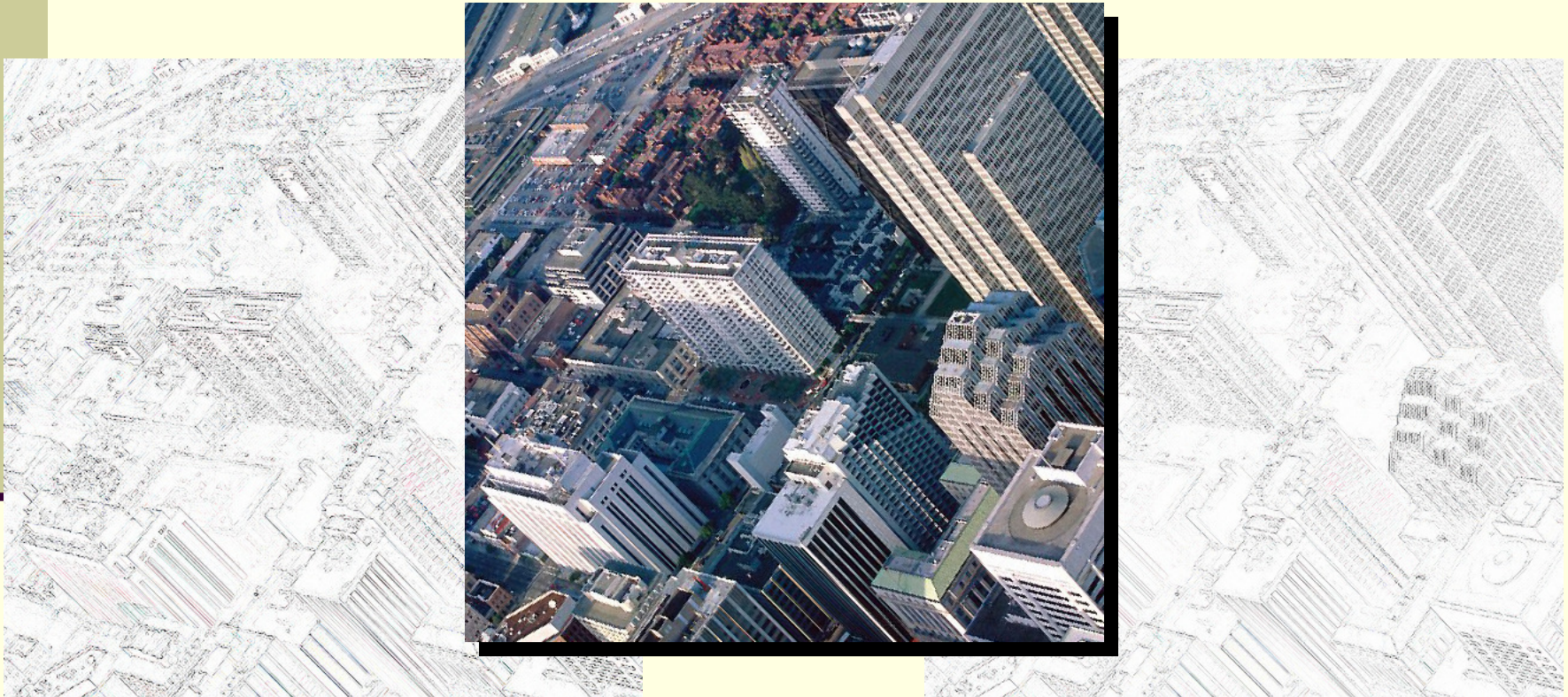
---



оригинално изображение

# Геометрично изкривяване – пример

Ротация с най-близки съседни

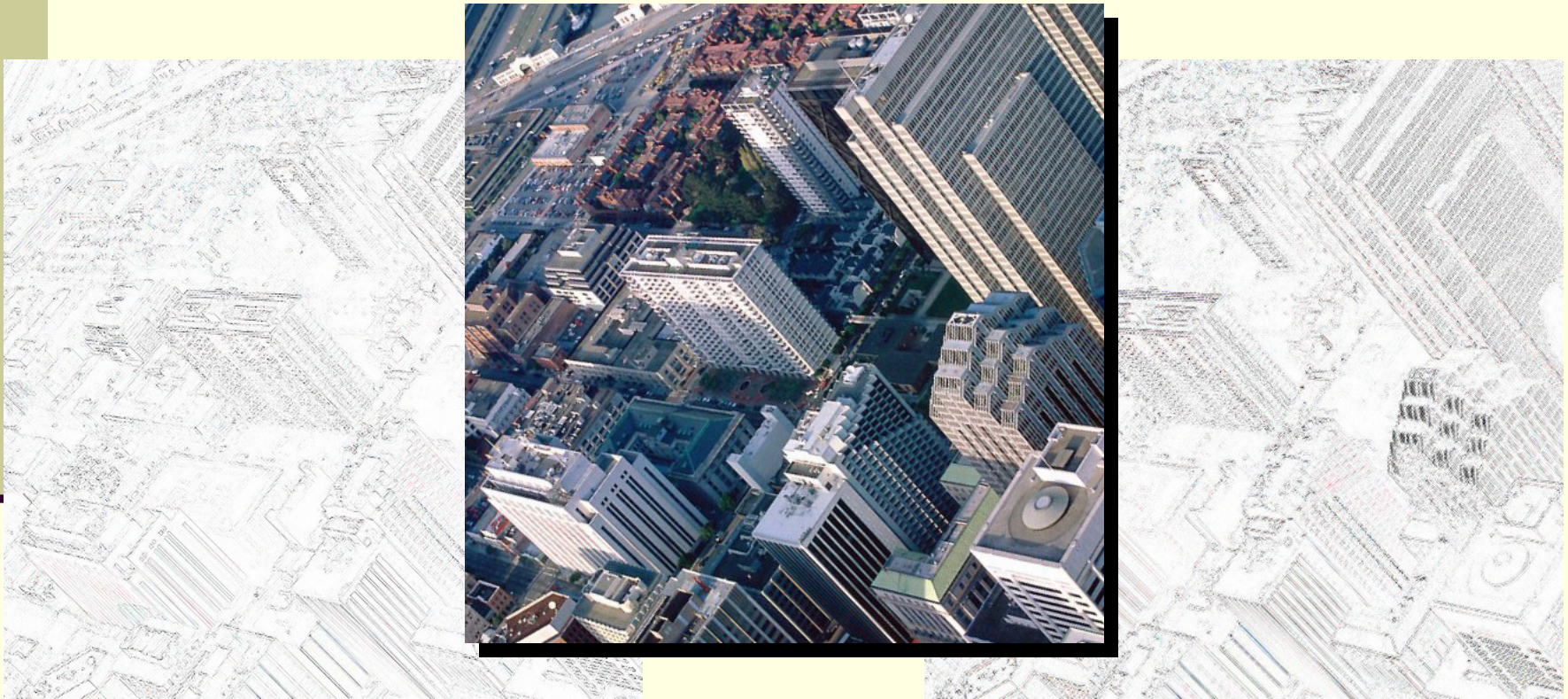


Bicubic – Nearest Neighbor

Nearest Neighbor – Bilinear

# Геометрично изкривяване – пример

Ротация с билинейна интерполация

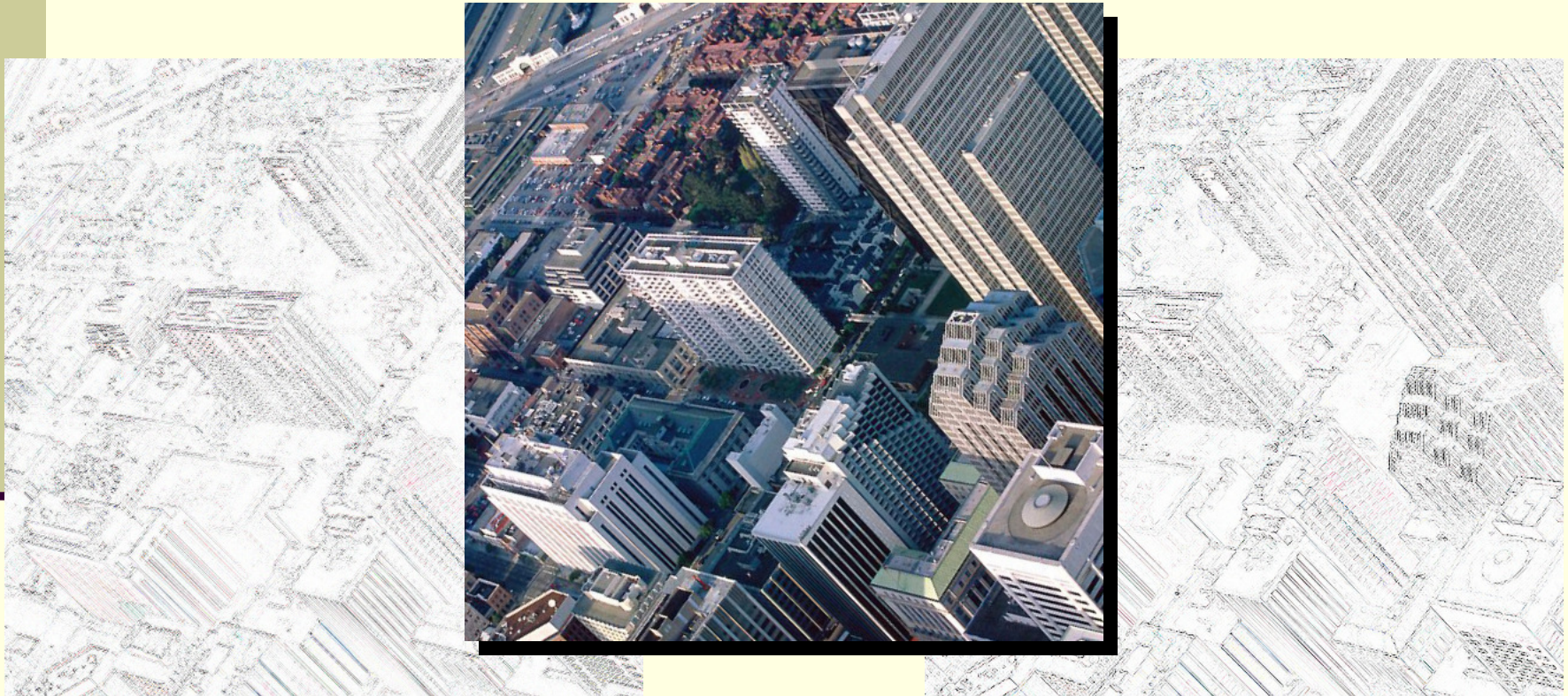


Nearest Neighbor – Bilinear

Bilinear – Bicubic

# Геометрично изкривяване – пример

Ротация с бикубична интерполация



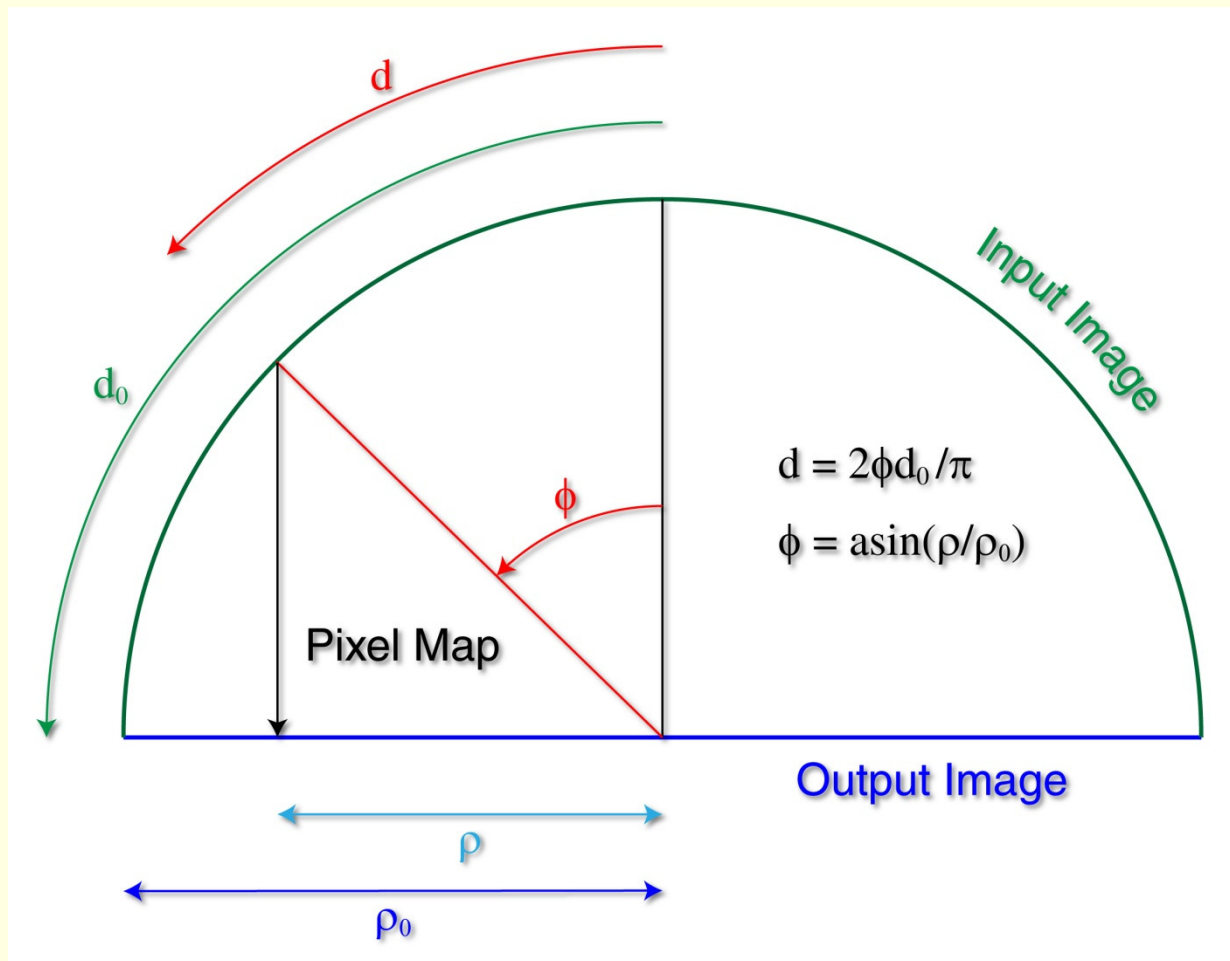
Bilinear – Bicubic

Bicubic – Nearest Neighbor



# Изкривяване – пример

Изобразяване на изображение върху сфера



$d$ : радиално разстояние от центъра на входното изображение

$r$ : радиално разстояние от центъра на изходното изображение

# Изкривяване – пример

Изобразяване на изображение върху сфера

**За изходното изображение:**

$$\rho_0 = \frac{1}{2} \min(R_{\text{out}}, C_{\text{out}}).$$

**За всеки изходен пиксел:**

$$\rho = \sqrt{r_{\text{out}}^2 + c_{\text{out}}^2},$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{r_{\text{out}}}{c_{\text{out}}}\right),$$

$$\phi = \sin^{-1}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right).$$



**За входното изображение:**

$$d_0 = \frac{1}{2} \max(R_{\text{in}}, C_{\text{in}}).$$

**За всеки изходен пиксел, входния пиксел е:**

$$d = \frac{2}{\pi} d_0 \phi$$

$$r_{\text{in}} = d \sin(\theta)$$

$$c_{\text{in}} = d \cos(\theta)$$

Най-близки съседни

Билинейна интерполация

КРАЙ

Следваща тема:

*Компресия на изображения*  
*Уейвлетни преобразувания*