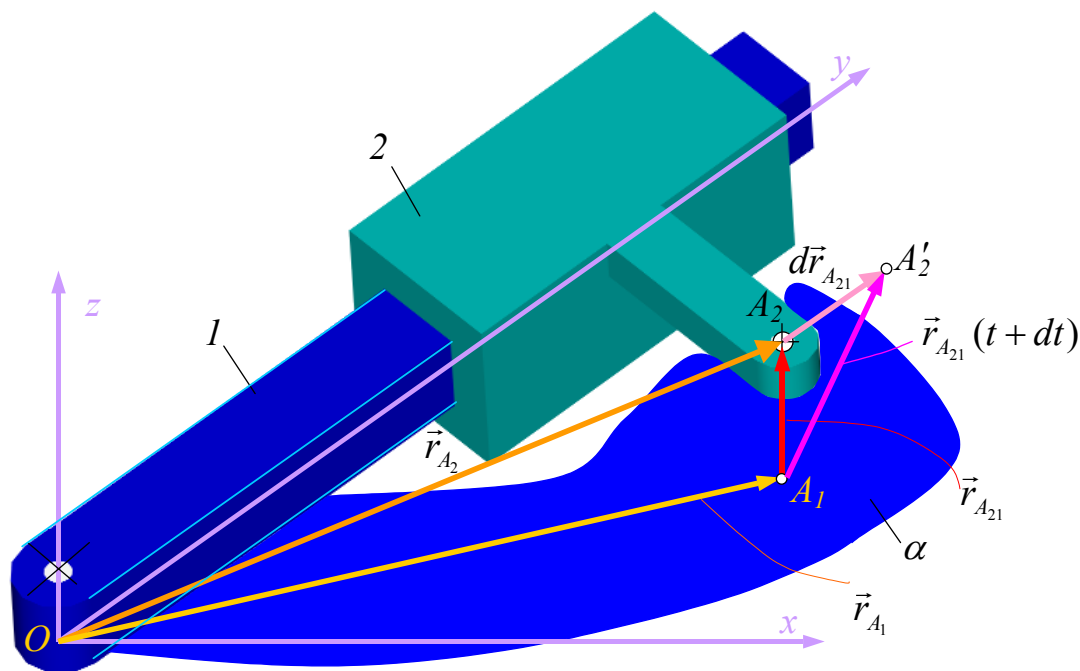


5.0 ОТНОСИТЕЛНО ДВИЖЕНИЕ ПРИ ЛОСТОВИ МЕХАНИЗМИ, ПОЛОЖЕНИЯ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ, КОРИОЛИСОВО УСКОРЕНИЕ, ПРИМЕРИ

5.1 ПОЗИЦИИ И СКОРОСТИ ПРИ РЕЛАТИВНО ДВИЖЕНИЕ.

Разглежда се плъзгаща двойца съставена от звено 1 (кулиса) и звено 2 (плъзгач) (фиг.5.1). Началото на координатната система $Oxyz$ се разполага в центъра на шарнира на кулисата и е неподвижно свързана с нея. Ос y е насочена по посока на относителното движение на двете звена. Към кулисата условно е прикрепена неподвижно равнина α , лежаща в координатната равнина Oxy . Плъзгачът 2 притежава елемент от шарнир оста, на който минава през точка A_2 . В момента от време t точка A_1 е проекцията на точка A_2 върху равнината α .



Фиг. 5.1 Относителни положения на звена свързани с плъзгаща кинематична двойца

Положението на точка A_2 се описва векторно със зависимостта

$$\vec{r}_{A_2} = \vec{r}_{A_1} + \vec{r}_{A_{21}}, \quad (5.1)$$

където $\vec{r}_{A_2} = \overrightarrow{OA_2}$ се нарича абсолютен радиус вектор, $\vec{r}_{A_1} = \overrightarrow{OA_1}$ е преносен радиус вектор, а $\vec{r}_{A_{21}} = \overrightarrow{A_1A_2}$ - относителен радиус вектор. След време $t+dt$ плъзгачът се премества успоредно на ос Oy , като точка A_2 се придвижва до точка A_2' . Нарастването на относителното преместване е

$$d\vec{r}_{A_{21}} = \vec{r}_{A_{21}}(t+dt) - \vec{r}_{A_{21}}(t). \quad (5.2)$$

Този вектор е успореден на направлението на относителното движение на двете звена. Диференцирането на уравнение (5.1) води до зависимостта за **скоростите при релативно движение**

$$\vec{v}_{A_2} = \vec{v}_{A_1} + \vec{v}_{A_{21}}, \quad (5.3)$$

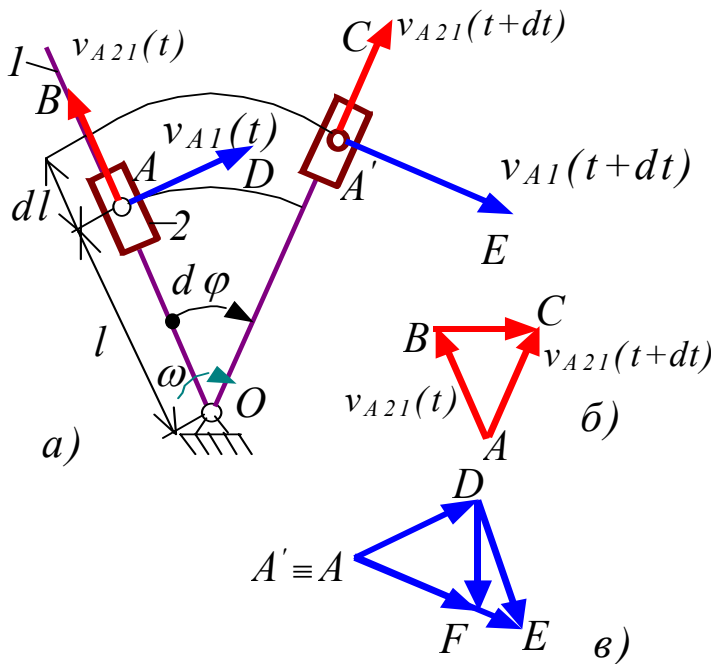
където $\vec{v}_{A_2} = \frac{d\vec{r}_{A_2}}{dt}$ се нарича абсолютна скорост на точка A_2 , $\vec{v}_{A_1} = \frac{d\vec{r}_{A_1}}{dt}$ е преносна скорост, а

$\vec{v}_{A_{21}} = \frac{d\vec{r}_{A_{21}}}{dt}$ е наречена релативна скорост. Преносната скорост в кинематичните задачи обикновено е

известна – задава се от кинематичната верига, към която е свързана кулисата. Релативната скорост показва как плъзгачът се движи спрямо кулисата. Съгласно изводът, направен от уравнение (5.2) следва, че скоростта $\vec{v}_{A_{21}}$ има същата посока на нарастването $d\vec{r}_{A_{21}}$, т.е. тя е успоредна на направлението на относителното преместване.

5.2 КОРИОЛИСОВО УСКОРЕНИЕ

Нека е дадена кулиса 1, (фиг. 5.2), върху която се придвижва плъзгач 2 с постоянна относителна скорост v_{A_21} . Приема се, че кулисата се върти с постоянна ъглова скорост ω . В момента



Фиг. 5.2 Кориолисово ускорение
равнобедрения триъгълник ABC

$$BC = dv_{A_21} = 2v_{A_21} \sin \frac{d\varphi}{2} = v_{A_21} d\varphi = v_{A_21} \omega dt, \quad (5.4)$$

където е взето предвид, че

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dt} dt = \omega dt. \quad (5.5)$$

На фиг. 5.2 в) по същия начин за двата момента от време са пренесени успоредно с общо начало преносните скорости $\vec{v}_{A_1}(t)$ и $\vec{v}_{A_1}(t+dt)$. За безкрайно малкото нарастване на преносната скорост по модул е получено

$$FE = dv_{A_1} = |v_{A_1}(t+dt)| - |v_{A_1}(t)| = OA_1\omega - OA\omega = (l+dl)\omega - l\omega = dl\omega = v_{A_21}\omega dt, \quad (5.6)$$

където безкрайно малкото релативно преместване dl на плъзгача спрямо кулисата е

$$dl = v_{A_21} dt. \quad (5.7)$$

Двата вида нараствания на скоростта, получени от формули (5.4) и (5.6) са колинеарни, перпендикулярни са на релативната скорост и са насочени в еднакво направление. Това позволява да се сумират и след разделяне на dt да се пресметне ускорението, което те пораждат

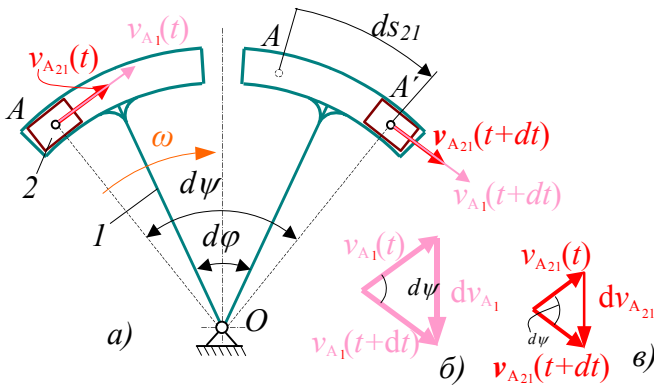
$$a_{A_21}^c = \frac{dv_{A_21} + dv_{A_1}}{dt} = 2\omega v_{A_21}. \quad (5.8)$$

Това ускорение е наречено кориолисово² в чест на френския учен Кориолис (*Gaspard Coriolis*, 1795-1843). От начина му на извеждане тук се вижда, че то е следствие от промяната на преносната скорост по големина и от промяната на релативната скорост по посока.

t кулисата и плъзгачът са заели положение съответстващо на OA , а след време dt кулисата се завърта на ъгъл $d\varphi$, като плъзгачът попада в положение A' . Позицията на плъзгача се дефинира чрез зависимостта (5.1). Скоростта на точка A от плъзгача 2, \vec{v}_{A_2} се получава след сумиране на преносната \vec{v}_{A_1} и релативната скорост \vec{v}_{A_21} съгласно уравнение (5.3).

На фиг. 5.2 б) са пренесени успоредно с общо начало релативните скорости $v_{A_21}(t)$ и $v_{A_21}(t+dt)$ за положенията съответстващи на моментите от време t и $t+dt$. Тъй като по условие релативната скорост v_{A_21} по големината е постоянна, то тя ще се изменя само по посока и безкрайно малкото ѝ нарастване dv_{A_21} може да бъде изразено от

² Теоремата за кориолисовото ускорение първо е била формулирана от *Euler* през 1765 г., а след това без да се позовават на *Euler* от *Gauss* (*Gauss Carl Friedrich*, 1777-1855) през 1803 г. и *Coriolis* през 1833 г.



Фиг. 5.3. Кориолисово ускорение при криволинейна кулиса

кулисата 1 с постоянна по големина релативна скорост $v_{A_{21}}$. Вследствие на тези движения след време $t+dt$ кулисата се завърта на ъгъл $d\varphi$, а точка A се премества в точка A' . На тези две точки съответства ъгъл $d\psi$. В равнината на кулисата плъзгачът изминава дъгата

$$\widehat{AA'} = ds_{21} = v_{A_{21}} dt \quad (5.9)$$

Ъгълът, съответстващ на преместването на плъзгача в неподвижната равнина по дъгата $\widehat{AA'}$ е

$$d\psi = d\varphi + \frac{ds_{21}}{OA} = \omega dt + \frac{v_{A_{21}}}{OA} dt \quad (5.10)$$

Нарастването на преносната скорост се определя с помощта на фиг. 5.3 б), където са пренесени успоредно преносните скорости за двете положения с общо начало. От равнобедрения триъгълник е получено

$$dv_{A_1} = v_{A_1} d\psi = v_{A_1} \omega dt + \frac{v_{A_1} v_{A_{21}}}{OA} dt = v_{A_1} \omega dt + v_{A_{21}} \omega dt, \quad (5.11)$$

където $\omega = \frac{v_{A_1}}{OA}$, а ъгълът $d\psi$ е положен от уравнение (5.10).

Аналогично от равнобедрения триъгълник на фиг. 5.3 в) е намерено нарастването на релативната скорост

$$dv_{A_{21}} = v_{A_{21}} d\psi = v_{A_{21}} \omega dt + \frac{v_{A_{21}}^2}{OA} dt. \quad (5.12)$$

От фиг. 5.3 е видно, че преносното и релативното нарастване са с еднакви посоки, поради което нарастването на абсолютната скорост (тази на точка A от плъзгача 2) може да се намери чрез сумиране на двата резултата от формули (5.11) и (5.12), т.е.

$$dv_{A_2} = v_{A_1} \omega dt + v_{A_{21}} \omega dt + v_{A_{21}} \omega dt + \frac{v_{A_{21}}^2}{OA} dt = \frac{v_{A_1}^2}{OA} dt + \frac{v_{A_{21}}^2}{OA} dt + 2v_{A_{21}} \omega dt. \quad (5.13)$$

След деление на израза (5.13) на dt е получено абсолютното ускорение на точка A

$$a_{A_2} = a_{A_1}^n + a_{A_{21}}^n + a_{A_{21}}^c, \quad (5.14)$$

където $a_{A_1}^n = \frac{v_{A_1}^2}{OA}$, $a_{A_{21}}^n = \frac{v_{A_{21}}^2}{OA}$ са нормално преносно и нормално релативно ускорение, а кориолисовото ускорение отново има вида както от формула (5.8) $a_{A_{21}}^c = 2\omega v_{A_{21}}$. Тук това ускорение се дължи на промяната на преносната и релативната скорост по посока, което е следствие от относителното преместване на плъзгача спрямо въртящата се кулиса.

Доказано е, че кориолисовото ускорение съществува във всички случаи на релативно преместване с въртеливо преносно движение. В общия случай кориолисовото ускорение се дефинира чрез векторното произведение

$$\vec{a}_{A21}^c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{A21}. \quad (5.15)$$

От тук следва правилото: *Посоката на кориолисовото ускорение се определя, като релативната скорост \vec{v}_{A21} се завърти по посока на ъгловата скорост $\vec{\omega}$ на 90° .*

Релативната скорост v_{A21} в общия случай не е постоянна по големина. Изменението ѝ по модул се отразява на вида на ΔABC (фиг. 5.2 б), който в този случай няма да бъде равнобедрен. Безкрайно малкото изменение на релативната скорост по модул дава ускорението

$$a_{A21}^r = \frac{dv^r}{dt} = \frac{|v_{A21}(t+dt)| - |v_{A21}(t)|}{dt} = \frac{dv_{A21}}{dt} \quad (5.16)$$

От фиг. 5.2 в) се вижда (от съществуването на векторът \overrightarrow{DF}), че освен безкрайно малката компонента dv_{A1} , нарастването на преносната скорост v_{A1} има и компонента насочена по направление на радиус вектора \overrightarrow{OA} . Тази компонента е

$$dv^n = 2v_{A1} \sin \frac{d\varphi}{2} = v_{A1} d\varphi = OA \omega^2 dt \quad (5.17)$$

Очевидно е, че dv^n създава известното вече нормално релативно ускорение

$$a_{AO}^n = \frac{dv^n}{dt} = \omega^2 AO. \quad (5.18)$$

Ако кулисата се върти с променлива ъглова скорост ще се появи и тангенциално ускорение

$$a_{AO}^t = \varepsilon OA. \quad (5.19)$$

В общия случай за ускорението на точка A от плъзгача 2 се получава

$$\vec{a}_{A2} = \vec{a}_{A1} + \vec{a}_{A21}^c + \vec{a}_{A21}^r, \quad (5.20)$$

където

$$\vec{a}_{A1} = \vec{a}_{O1} + \vec{a}_{A0}^n + \vec{a}_{A0}^t \quad (5.21)$$

се нарича преносно ускорение. Тук \vec{a}_{O1} е ускорението на полюса O , за което се установи, че $\vec{a}_{O1} = 0$, но в общия случай (при механизми с други структури) може да бъде различно от нула.

5.3 ПРИМЕРИ

Пример 5.1: Дадена е кинематичната схема на кулисен механизъм с размери: $OA=30$ mm; $OB=90$ mm; $BS_3=55$; $BM=40$ mm; $\angle ABM = \beta = 20^\circ$. Ъгловата скорост на коляното 1 е $\omega = 45$ s⁻¹ и е постоянна. За стойността $\varphi = 30^\circ$ на обобщената координата на началното звено 1 да се намерят: скоростите и ускоренията на точки M и S_3 ; ъгловите скорости и ускорения на звената 2 и 3.

Решение: Машабната кинематична схема (планът на положението) е показана на фиг. 5.3 а).

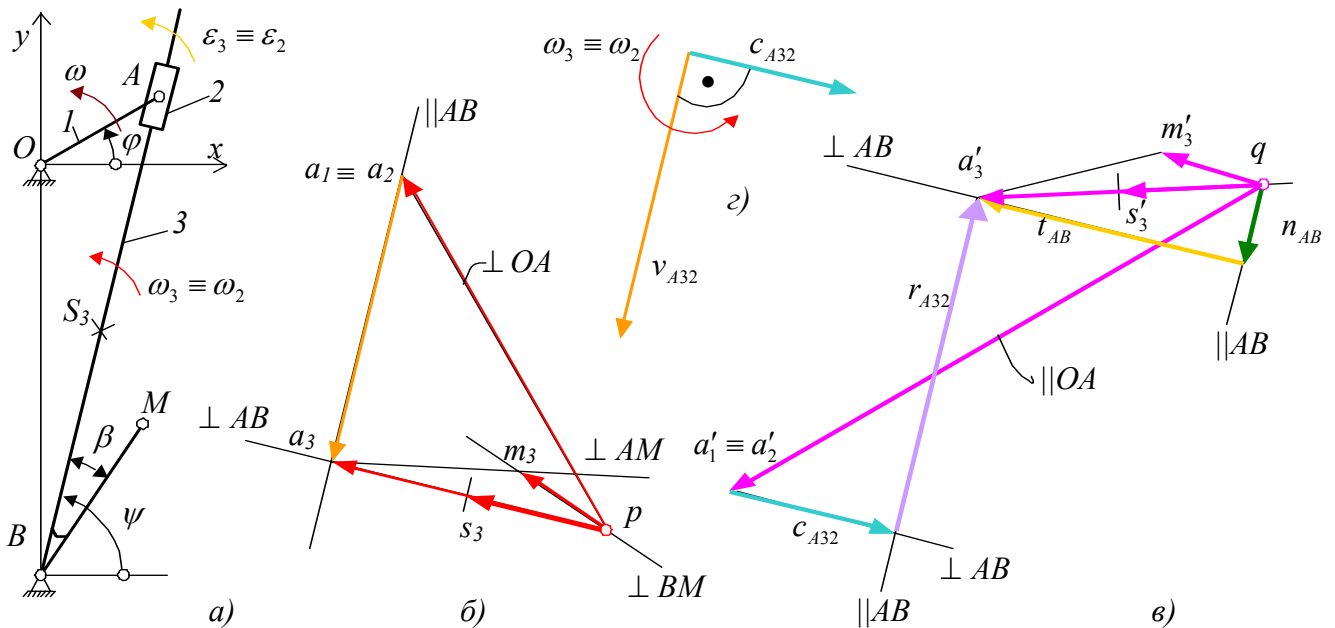
Планът на положението е начертан с дължина на коляното³ $OA=30$ mm.

Скоростта на точка A от звено 1 е

$$v_{A1} = \omega \cdot OA. \quad (\perp OA)$$

Построяването на плана на скоростите (фиг. 4.3 б) започва с избор на нулев вектор или полюс точка p . С начало от полюса p е построена машабната дължина на скоростта v_{A1} - векторът $\overrightarrow{pa_1}$, перпендикулярно на OA насочен нагоре и наляво, което следва от посоката на ъгловата скорост на коляното 1. Избрана е дължината на $pa_1=3 \overline{OA} = 90$ mm, а това предопределя стойността на

³ Ако при копирането (отпечатването) на фигурата дължината на коляното не е 30 mm, всички линейни размери, които са използвани по-долу са променени пропорционално с машабен коефициент $30/l_k$, където l_k е машабната дължина на коляното получена след копирането, измерена от фигурата.



Фиг. 5.3. Планове на скоростите и ускоренията на кулисен механизъм

машабния модул на скоростите $k_v = \frac{v_{A1}}{pa_1} = \frac{\omega OA}{3.OA} = \frac{\omega \cdot 10^{-3}}{3} = \frac{45.30 \cdot 10^{-3}}{3.30} = 0.015 \frac{m}{s.mm}$, където \overline{OA} е дължината на коляното в mm.

Понеже в точка A между звената 1 и 2 има шарнир следва

$$\vec{v}_{A2} = \vec{v}_{A1}.$$

В плана на скоростите това се отразява в съвпадане на точките a_1 и a_2 .

Скоростта на точка A от звено 3 се определя в съответствие с уравнение (5.3), т.е.

$$\vec{v}_{A3} = \vec{v}_{A2} + \vec{v}_{A32}.$$

Графично това уравнение е решено, като през точка a_2 е построена права успоредна на BA и през полюса p е построена права перпендикулярна на AB . Двете прави се пресичат в точка a_3 , чрез която е намерена скоростта $\vec{v}_{A3} = k_v \overline{pa_3}$ с модул $v_{A3} = k_v pa_3 = 0,015 \cdot 62,4 = 0,936$ m/s.

За скоростта на точка M от звено 3 се използва подобие на триъгълниците $\Delta ABM \sim \Delta a_3 b_3 m_3$. Първият триъгълник е от плана на положението, а вторият се построява в плана на скоростите, като се използва свойството, че триъгълниците са завъртени на 90° .

Триъгълникът $\Delta a_3 b_3 m_3$ е построен като през точка p е прекарана права перпендикулярна на BM и през a_3 права перпендикулярна на AM . Пресечната точка на двете прави m_3 дава скоростта на точка M от звено 3 $v_M = k_v pm_3 = 0,015 \cdot 23,1 = 0,35$ m/s.

Скоростта на точка S_3 е намерена чрез пропорцията $\frac{b_3 s_3}{BS_3} = \frac{a_3 b_3}{AB}$.

На плана на скоростите е нанесена точка s_3 , след като е изчислено $b_3 s_3 = \frac{a_3 b_3}{AB} BS_3 = \frac{62,4}{108,2} 55 = 31,7$ mm и е получено $v_{S3} = k_v \cdot b_3 s_3 = 0,015 \cdot 31,7 = 0,4755$ m/s.

Звената 2 и 3 са свързани с плъзгаща кинематична двойца, поради което ъгловите им скорости са равни $\omega_2 = \omega_3 = \frac{v_{A3}}{AB} = \frac{k_v \cdot pa_3}{AB} = \frac{0,936}{108,2 \cdot 10^{-3}} = 8,65$ s⁻¹.

Ъгловата скорост на коляното е зададена постоянна. Следователно поради липсата на ъглово ускорение точката A от звеното 1 има само нормално ускорение, което е успоредно на AO и насочено от A към O . Модулът на това ускорение е

$$a_1 = \omega^2 OA \quad (\parallel AO, \text{от } A \text{ към } O)$$

Построяването на плана на ускоренията (фиг. 5.3 в) започва с избора на мястото на нулев вектор q , наречен полюс на ускоренията. От полюса е построена успоредно на AO правата $qa'_1=4,5 \cdot \overline{OA}=13,5$ mm, която дефинира мащабния модул на ускоренията $k_a = \frac{a_{A1}}{qa'_1} = \frac{\omega^2 OA}{4,5 \cdot \overline{OA}} = \frac{\omega^2 10^{-3}}{4,5} = \frac{45^2 10^{-3}}{4,5} = 0,45 \frac{m}{s^2 mm}$.

Въртящата кинематична двойка между звена 1 и 2 в точка A е причина за равенството на ускоренията

$$\vec{a}_{A2} = \vec{a}_{A1}.$$

В плана на ускоренията това е отразено в съвпадане на точките $a'_2 \equiv a'_1$.

Ускорението на точка A от звено 3 следва от системата векторни уравнения

$$\left| \begin{array}{l} \vec{a}_{A3} = \vec{a}_{A2} + \frac{\vec{a}_{32}^c}{\frac{\perp v_{A32}}{2\omega_2 v_{A32}}} + \frac{\vec{a}_{A32}^r}{\|AB\|} \\ \vec{a}_{A3} = \vec{a}_{B3} + \frac{\vec{a}_{AB}^n}{\|AB\|} + \frac{\vec{a}_{AB}^t}{\perp AB} \end{array} \right.$$

Изчислена е мащабната дължина на кориолисовото ускорение

$$c_{A32} = \frac{a_{A32}^c}{k_a} = \frac{2\omega_3 v_{A32}}{k_a} = \frac{2 \cdot pa_3 \cdot a_2 a_3 \cdot k_v^2}{AB \cdot k_a} = \frac{2 \cdot pa_3 \cdot a_2 a_3 \cdot \frac{\omega^2 10^{-6}}{9}}{AB \cdot \frac{\omega^2 10^{-3}}{4,5}} = \frac{pa_3 \cdot a_2 a_3 \cdot 10^{-3}}{AB} = \frac{62,4 \cdot 64,9 \cdot 10^{-3}}{108,2 \cdot 10^{-3}} = 37,4 \text{ mm}$$

Посоката на кориолисово ускорение е определена, като релативната скорост v_{A32} е завъртяна около началната си точка по посока на ω_2 на 90° (фиг. 5.3.г). Векторът \vec{c}_{A32} е построен от точка $a'_2 \equiv a'_1$. През върха на \vec{c}_{A32} е построена права успоредна на AB , която обозначава направлението на релативното ускорение a_{A32}^r . Мащабната дължина на нормалното ускорение е изчислено чрез формулата

$$n_{AB} = \frac{a_{AB}^n}{k_a} = \frac{v_{A3B3}^2}{AB \cdot k_a} = \frac{(a_3 b_3 \cdot k_v)^2}{AB k_a} = \frac{a_3 b_3^2 \frac{\omega^2 10^{-6}}{9}}{AB \frac{\omega^2 10^{-3}}{4,5}} = \frac{a_3 b_3^2 \cdot 10^{-3}}{2 AB} = \frac{64,2^2 10^{-3}}{2 \cdot 108,2 \cdot 10^{-3}} = 19,0 \text{ mm}$$

и е нанесено в плана на ускоренията от полюса q успоредно на AB с посока от A към B . През върха на вектора \vec{n}_{AB} е построена права перпендикулярна на AB , която обозначава направлението на тангенциалното ускорение a_{AB}^t . Пресечната точка на тази права с директрисата на релативното ускорение a_{A32}^r , означена с a'_3 и свързана с полюса q дава ускорението на точка A от звено 3 $a_{A3} = k_a \cdot qa_3 = 0,45 \cdot 62,6 = 28 \text{ m/s}^2$.

Подобието на триъгълниците $\triangle ABM \sim \triangle a'_3 b'_3 m'_3$, които са съответно от плана на положението и плана на ускоренията се използва за намиране на ускорението на точка M от звено 3. В общия случай двата триъгълника не са завъртени на 90° един спрямо друг.

Построяването на триъгълниците е по три страни, едната от които $b'_3 a'_3$ вече е начертана в плана на ускоренията. Дължините на другите две страни следват от пропорциите $\frac{b'_3 m'_3}{BM} = \frac{a'_3 m'_3}{AM} = \frac{a'_3 b'_3}{AB}$, от

където $b'_3 m'_3 = \frac{a'_3 b'_3}{AB} BM = \frac{64,2}{108,2} 40 = 23,1 \text{ mm}$, $a_3 m'_3 = \frac{a'_3 b'_3}{AB} AM = \frac{64,2}{108,2} 71,93 = 42,7 \text{ mm}$. Модулът на ускорението на точка M от звено 3 е $a_{M3} = k_a qm_3 = 0,45 \cdot 23,1 = 10,4 \text{ m/s}^2$. Чрез пропорционални

отсечки е пресметната и мащабната дължина на ускорението на точка M от звено 3

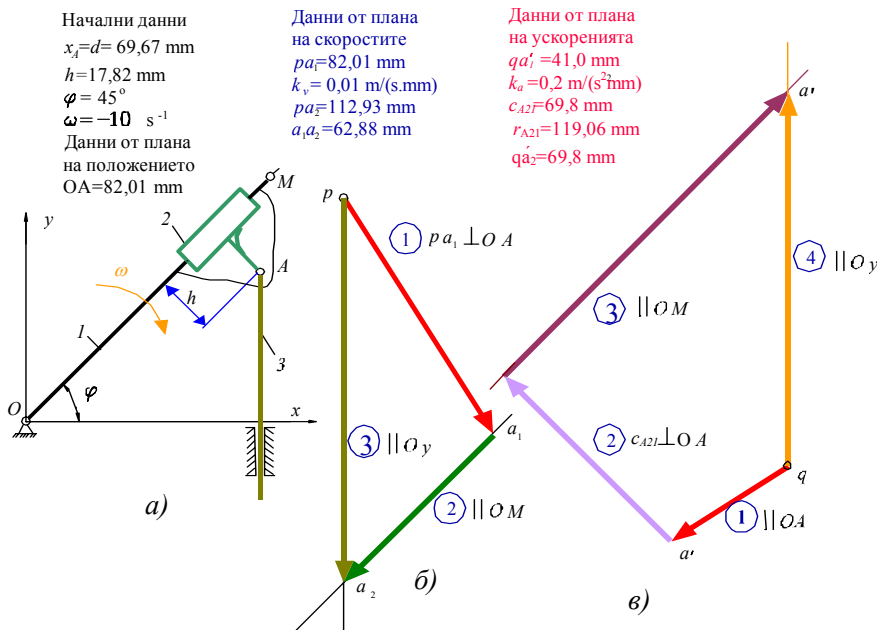
$$qs_3 = \frac{BS_3}{AB} qa'_3 = \frac{55}{108,2} 62,6 = 31,8 \text{ mm}, \text{ от където е намерено } a_{s_3} = k_a \cdot qs_3 = 0,45 \cdot 31,8 = 14,3 \text{ m/s}^2.$$

Ъгловото ускорение на звено 2, което поради въртящата двойка е равно на ъгловото ускорение на звено 3 е

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{a'_{AB}}{AB} = \frac{k_a t_{AB}}{AB} = \frac{0,45 \cdot 59,9}{108,2 \cdot 10^{-3}} = 249 \text{ s}^{-2}.$$

Посоката на ъгловото ускорение, показана на фигурата зависи от посоката на вектора a'_{AB} (съответно от вектора \vec{t}_{AB}).

Пример 4.2 Тангенсен механизъм с водеща кулиса (фиг. 5.4). Дадени са размерите d и h , ъгълът на



началното звено φ , ъгловата му скорост $\omega = const$. Търси се скоростта v_{A_2} и ускорението a_{A_2} на точка A от плъзгача 2.

Решение: От кинематичната схема (фиг. 5.4а) е видно че:
 $\vec{v}_{0_1} = 0; \vec{a}_{0_1} = 0; \omega_1 = \omega_2;$
 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0; \vec{v}_{A_2} = \vec{v}_{A_3}; \vec{a}_{A_2} = \vec{a}_{A_3};$
 $\omega_3 = 0; \varepsilon_3 = 0.$

Планът на скоростите (фиг. 5.4 б) е построен по зависимостите

$$v_{A_1} = \omega OA \ (\perp OA),$$

$$\vec{v}_{A_2} = \vec{v}_{A_1} + \vec{v}_{A_{21}},$$

Фиг. 5.4. Планове на скоростите и ускоренията на тангенсен механизъм

$$\vec{v}_{A_3} = \vec{v}_{A_2}.$$

Планът на ускоренията (фиг. 5.4 в) следва от изразите

$$a_{A_1} = \omega^2 OA \ (\parallel OA),$$

$$\frac{\vec{a}_{A_2}}{\parallel Oy} = \frac{\vec{a}_{A_1}}{\parallel OA} + \frac{\vec{a}_{A_{21}}^c}{\perp OM} + \frac{\vec{a}_{A_{21}}^r}{\parallel OM},$$

$$\vec{a}_{A_{21}}^c = 2\omega v_{A_{21}}$$

$$c_{A_{21}} = \frac{2\omega v_{A_{21}}}{k_a} \text{ [mm]}$$

$$\vec{a}_{A_3} = \vec{a}_{A_2}.$$

Последователността на построенията са номерирани на плановете на скоростите и ускоренията.

Като използвате получените данни и съответните коефициенти пресметнете модулите на търсените скорости и ускорения.