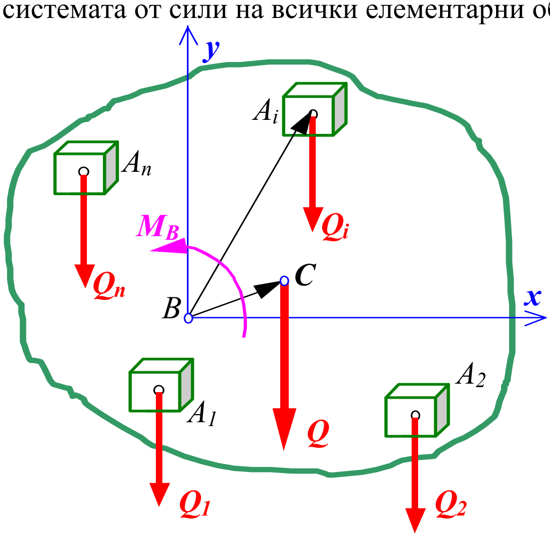
9.0 МАСОВИ СИЛИ И МАСОВИ ХАРАКТЕРИСТИКИ НА ЗВЕНАТА
СИЛИ НА ТЕЖЕСТТА И МАСОВ ЦЕНТЪР, ИНЕРЦИОННИ СИЛИ И МАСОВ ИНЕРЦИОНЕН МОМЕНТ.

Масовите сили са обемно разпределени и се дължат на масите в елементарните обеми и техните ускорения.

Въпреки че масите на звената са разпределени триизмерно, ако съществува равнина на материална симетрия, елементарните обеми може да се концентрират в сечението на тази равнина, като по този начин системата елементарни сили се свежда до равнинна. Примери за звена с материална симетрия при машините са части, изработени от хомогенен материал с постоянна дебелина (плочи, пластини дискове), или постоянно сечение (тел, тръби, цилиндри, симетрични профили). Ако звеното е от хомогенен материал и притежава равнина на геометрична симетрия, то тя е и равнина на материална симетрия. Възможно е да не съществува равнина на геометрична симетрия, но масата да е разпределена така, че да съществува равнина на материална симетрия, за която на всеки елементарен обем маса, да съответства симетрично разположен спрямо въпросната равнина елементарен обем със същата маса.

9.1. СИЛИ НА ТЕЖЕСТТА, СТАТИЧЕН МОМЕНТ И МАСОВ ЦЕНТЪР.

Силите на тежестта се пораждат от еднородното земно гравитационно поле. За звената с пренебрежими размери в сравнение с тези на Земята, намиращи се близо до земната повърхност се приема, че на всеки техен елементарен обем действа вертикална сила на тежестта. Въвежда се хипотеза за успоредност на силите на тежестта макар, че те като сили на привличане са насочени към центъра на Земята. Разглежда се звено с равнина на материална симетрия (фиг. 9.1), поради което системата от сили на всички елементарни обеми е равнинна..



Фиг. 9.1. Сили на тежестта и масов център

Всеки елементарен обем има тегло

$$\vec{Q}_i = m_i\vec{g}\,, \qquad (9.1)$$

което е породено от елементарната маса m_i [kg] и е насочено по посока на земното ускорение $\vec{g}$. За произволна точка B от равнината на симетрия тези сили се привеждат до динама на силите на тежестта

$$\left|\begin{aligned}\vec{Q} &= \sum_{i=1}^{n}\vec{Q}_i = \vec{g}\sum_{i=1}^{n} m_i = m\vec{g}\\ \vec{M}_B &= \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{BA_i}\times\vec{Q}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{BA_i}\times\vec{g}.\end{aligned}\right. \qquad (9.2)$$

Тук $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ [kg] е масата на звеното, а векторът

$$\vec{K}_B = \sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{BA_i} \qquad (9.3)$$

с размерност [kg.m] се нарича ***статичен момент*** на звеното спрямо точката B.

Нека да потърсим такава точка C, за която динамата (9.2) се свежда само до една сила $\vec{Q}$, т.е. спрямо тази точка да се нулира главния момент

$$M_C = M_B + \overrightarrow{CB}\times\vec{Q} = M_B - \overrightarrow{BC}\times\vec{Q} = 0\,. \qquad (9.4)$$

След заместване на $\vec{M}_B$ и $\vec{Q}$ с изразите (9.2) е получено

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{BA_i}\right)\times\vec{g} - m\overrightarrow{BC}\times\vec{g} = 0\,, \qquad (9.5)$$

или

$$\left[\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{BA_i}\right) - m\overrightarrow{BC}\right] \times \vec{g} = 0, \tag{9.6}$$

което води до векторното уравнение (защото $\vec{g} \neq 0$)

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{BA_i} - m\overrightarrow{BC} = 0, \tag{9.7}$$

от където

$$\overrightarrow{BC} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{BA_i}}{m}. \tag{9.8}$$

Проекциите на вектора $\overrightarrow{BC}$ върху координатните оси с начало точка B дават координатите на търсената точка C

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m} \qquad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m} \tag{9.9}$$

Точката C, за която динамата на силите на тежестта се свежда само до силата на тежестта Q, се нарича ***масов център*** на звеното.

Ако липсва равнина на материална симетрия се добавя и трета координата за масовия център

$$z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{m}. \tag{9.10}$$

Чрез формула (9.8) може да се изведе следствието: *Статичният момент на звено спрямо масовия център е нула*. Това е видно от преобразуванията

$$\vec{S}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{CA_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\overrightarrow{BA_i} - \overrightarrow{BC}\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{BA_i} - \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{BC} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{BA_i} - m\overrightarrow{BC} = 0, \tag{9.11}$$

които водят до уравнение (9.7).

След преминаване към граничен преход при $n \to \infty$ за звената с плътно разпределена маса за статичния момент следва израза

$$\vec{K}_B = \int_{(m)} \vec{r}_i dm, \tag{9.12}$$

а за координатите на масовия център се получава

$$x_C = \frac{1}{m}\int_{(m)} x dm, \quad y_C = \frac{1}{m}\int_{(m)} y dm, \quad z_C = \frac{1}{m}\int_{(m)} z dm. \tag{9.13}$$

За хомогенни материали (характерно за тях е, че плътността ρ [kg/m^3] е постоянна величина за всяка точка от звеното вж. &10) са в сила релациите $dm = \rho dV$, $m = \rho V$ и от формули (9.13) се извежда

$$x_C = \frac{1}{V}\int_{(V)} x dV, \quad y_C = \frac{1}{V}\int_{(V)} y dV, \quad z_C = \frac{1}{V}\int_{(V)} z dV. \tag{9.14}$$

В горните изрази интегрирането е по целия обем V [m^3].

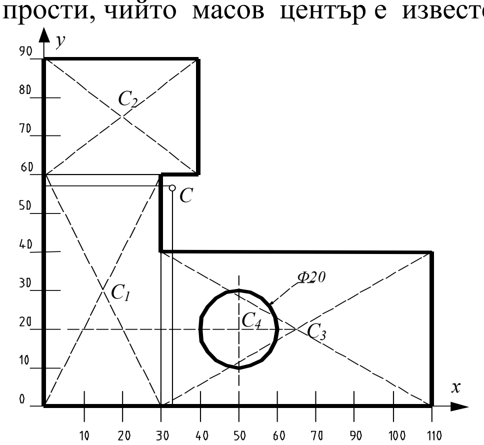
За хомогенни плоски звена с постоянна дебелина δ, като се вземе предвид, че $dm = \rho\delta dS$ и $m = \rho\delta S$, където S [m^2] е площта, от формули (9.13) следва

$$x_C = \frac{1}{S}\int_{(S)} x dS \qquad y_C = \frac{1}{S}\int_{(S)} y dS \tag{9.15}$$

Ако звеното има форма на тънка еднородна пространствена крива с постоянно сечение S и дължина l, следва, че $dm = \rho S dl$, $m = \rho S l$ и за масовия център се получава

$$x_C = \frac{1}{l}\int_{(l)} xdl \qquad y_C = \frac{1}{l}\int_{(l)} ydl \qquad z_C = \frac{1}{l}\int_{(l)} zdl \tag{9.16}$$

Чрез формули (9.9) се определя масовия център на сложни фигури, като се разделят на по-прости, чийто масов център е известен. Това е илюстрирано чрез примера от фиг. 9.2, където се търси масовият център на плоча с постоянна дебелина, изработена от материал с постоянна плътност. В плочата е пробит отвор с диаметър Ф20 mm. Размерите на детайла са зададени чрез координатната система Oxy. Първата стъпка от решението се състои в разделянето на детайла на прости фигури – три правоъгълника и отвор. Данните за тези фигури са нанесени в таблицата.



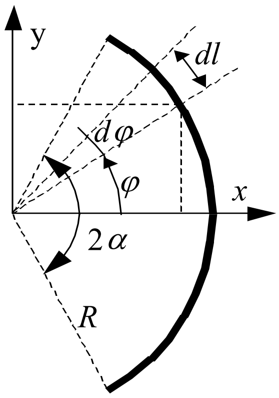
Фиг. 9.2. Пример за масов център на хомогенна плоча

No	x_i	y_i	S_i	x_iS_i	y_iS_i
1	15	30	180	2700	5400
2	20	75	120	2400	9000
3	65	20	320	20800	6400
4	50	20	-314	-15700	-6280
Σ	-	-	306	10200	14520

Координатите на масовия център C са:

$$x_c = \frac{x_1S_1 + x_2S_2 + x_3S_3 + x_4S_4}{S} = \frac{10200}{306} = 33{,}33 \text{ mm},$$

$$y_c = \frac{y_1S_1 + y_2S_2 + y_3S_3 + y_4S_4}{S} = \frac{14520}{306} = 47{,}45 \text{ mm}.$$



Фиг. 9.3. Пример за масов център на дъга от окръжност

Едно приложение на формули (9.16) е дадено с примера от фиг. 9.3, на която е изобразен детайл във вид на тънка дъга от окръжност с радиус R, изработен от хомогенен материал с постоянно сечение.

Поради симетрията тук $y_C = 0$. Разглежда се елементарна дъга с дължина dl, на която съответства елементарен ъгъл $d\varphi$. Положението на дъгата се определя от ъгълът $\varphi \in [-\alpha, \alpha]$. За абсцисата на масовия център C следва

$$x_C = \frac{1}{l}\int_{(l)} xdm = \frac{1}{2R\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \cos\varphi d\varphi = R\frac{\sin\alpha}{\alpha},$$

където е взето предвид, че: $dl = Rd\varphi$; $x = R\cos\varphi$; $l = 2R\alpha$.

9.2. ИНЕРЦИОННИ СИЛИ И МАСОВ ИНЕРЦИОНЕН МОМЕНТ

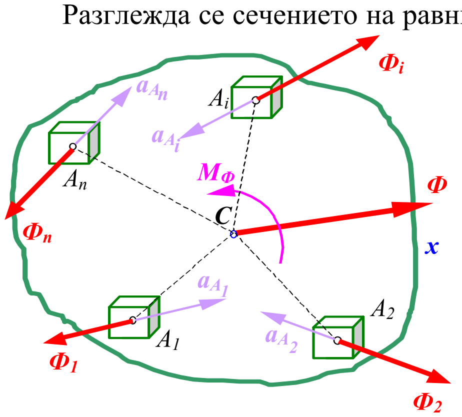
Разглежда се сечението на равнината на материална симетрия, в която е съсредоточена масата на звеното (фиг.9.4). Всяка елементарна маса m_i с ускорение $\vec{a}_{Ai}$ създава елементарна инерционна сила

$$\vec{\Phi}_i = -m_i\, \vec{a}_{Ai}, \tag{9.17}$$

която е насочена обратно на ускорението. Елементарните инерционни сили се редуцират в масовия център до ***динама на инерционните сили***

$$\vec{\Phi} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\Phi}_i = -\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_{A_i} \tag{9.18}$$

$$\vec{M}_\Phi = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{CA_i} \times \vec{\Phi}_i = -\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_{A_i}, \tag{9.19}$$



Фиг. 9.4. Инерционни сили

където $\vec{r} = \overrightarrow{CA}$. Ускорението на елементарната маса $\vec{a}_{Ai}$ може да се изрази чрез това на масовия център C

$$\vec{a}_{A_i} = \vec{a}_C + \vec{a}^{\,n}_{A_iC} + \vec{a}^{\,t}_{A_iC}. \tag{9.20}$$

Компонентите на релативното ускорение са

$$\vec{a}^{\,n}_{A_iC} = -\omega^2 \vec{r}_i\,, \tag{9.21}$$

$$\vec{a}^{\,t}_{A_iC} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_i\,, \tag{9.22}$$

а $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ са ъгловата скорост и ъгловото ускорение на звеното. Изразът (9.20) е заместен в уравнението за главната сила (9.18) и е получено

$$\vec{\Phi} = -\vec{a}_C \sum_{i=1}^{n} m_i + \omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i - \vec{\varepsilon} \times \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r} \tag{9.23}$$

Съгласно следствие (9.12), статичният момент спрямо масовия център C е нула, т. е. $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r} = 0$, следва, че

$$\vec{\Phi} = -\vec{a}_C \sum_{i=1}^{n} m_i = -\vec{a}_C m \tag{9.24}$$

Главната сила на инерционната динама е насочена обратно на ускорението на масовия център и е пропорционална на масата на звеното.

След заместване на формула (9.20) в (9.19) за главния момент е намерен изразът

$$\vec{M}_\Phi = -\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_{A_i} = -\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_C - \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \left(-\vec{r}_i \omega^2\right) - \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \left(\vec{\varepsilon} \times \vec{r}_i\right), \tag{9.25}$$

който е преобразуван в

$$\vec{M}_\Phi = -\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i m_i\right) \times \vec{a}_C + \omega^2 \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \left(m_i \vec{r}_i\right) - \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_i\,. \tag{9.26}$$

Тук е очевидно, че първият член е равен на нула, защото отново векторът $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r} = 0$ е статичният момент спрямо масовия център *C*. Вторият член също е нула, защото векторите $\vec{r}_i$ и $\left(m_i \vec{r}_i\right)$ са колинеарни. Третият член $-\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_i$ е двойно векторно произведение[1], преобразувано в

$$\vec{M}_\Phi = -\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_i = -\sum_{i=1}^{n} \left[\left(\vec{r}_i . \vec{r}_i\right) . \vec{\varepsilon} m_i + \left(m_i \vec{\varepsilon} . \vec{r}_i\right) \vec{r}_i\right]. \tag{9.27}$$

Тук скаларното произведение на векторите $m_i \vec{\varepsilon} . \vec{r}$ =0, защото ъгълът между тях е 90º. Така за главния момент на инерционните сили следва

$$\vec{M}_\Phi = -\vec{\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} r_i^2 m_i\,. \tag{9.28}$$

Величината

$$J_C = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 m_i \tag{9.29}$$

се нарича ***масов инерционен момент*** на звеното спрямо ос, минаваща през масовия център *C,* перпендикулярно на сечението. Масовият инерционен момент зависи само от формата на звеното и разположението на масата в него, но не зависи от състоянието на движение. Размерността на масовия инерционен момент е [kg.m^2]. Той е положително, различно от нула число. Както масата е показател за инертността на звеното при транслация, така масовият инерционен момент е показател за инертността на звеното при ротация. При непрекъснато разпределение на масата в звеното ($n \to \infty$), следва m_i да се замени с dm, а r_i с разстоянието r от оста на масовия център до разглежданата елементарна маса dm. Сумата се заменя с интеграл, разпространен по цялата маса

---

[1] От курса по аналитична геометрия е известно правилото $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \left(\vec{c}\vec{a}\right)\vec{b} - \left(\vec{b}\vec{a}\right)\vec{c}$.

$$J_C = \int_{(m)} r^2 dm . \quad (9.30)$$

При звена, изградени от хомогенни материали $dm = \rho dV$ и

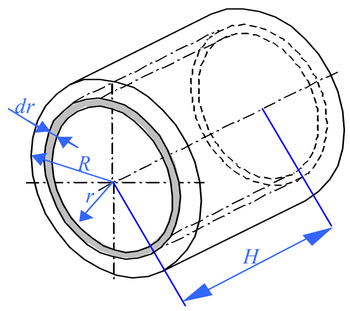
$$J_C = \rho \int_{(V)} r^2 dV . \quad (9.31)$$

От крайния вид на израза

$$\vec{M}_\Phi = -J_C \vec{\varepsilon} , \quad (9.32)$$

е видно, че главния момент на инерционната динама е пропорционален на масовия инерционен момент и е насочен обратно на ъгловото ускорение на звеното.

Масовите инерционни моменти на звена с проста геометрична форма се изчислява чрез интегриране Ако звената са със сложна форма масовите инерционни моменти се намират експериментално или приблизително, като звеното се разделя условно на тела с правилна геометрична форма. Съвременните машиностроителни CAD системи[2] разполагат с мощни изчислителни приложения за пресмятане на масови инерционни моменти (както и на всички други масови параметри) на звена с произволна пространствена форма, което съкращава значително времето за проектиране.



Фиг. 9.5 Масов инерционен момент на цилиндър

На фиг. 9.5 е показан хомогенен плътен цилиндър с дължина H и радиус R. Масовият инерционен момент спрямо оста на цилиндъра се намира, като се разглежда елементарно тяло във вид на тънкостенен кух цилиндър (тръба), разположен коаксиално с текущ радиус r, $0 \le r \le R$, дебелина на стената dr и дължина H. Обемът на елементарната тръба е $dV = 2\pi H r dr$.От зависимостта (9.32) следва $J_C = \rho \int_0^R 2\pi H r^3 dr = \rho \pi R^2 H \dfrac{R^2}{2}$. Тук $\rho \pi R^2 H = m$ е масата на цилиндъра, поради което следва, че

$$J_C = m \frac{R^2}{2} . \quad (9.33)$$

Масовият инерционен момент на кух цилиндър с радиус на отвора R_0 и означенията от фиг. 9.5 може да се пресметне с помощта на формула (9.33), като се извади масовият инерционен момент на цилиндричния отвор, приемайки, че е изработен от същия материал. Така следва

$$J_C = \rho \pi H \frac{R^4}{2} - \rho \pi H \frac{R_0^4}{2} = \rho \pi H \frac{R^4 - R_0^4}{2} = \rho \pi H \left(R^2 - R_0^2\right) \frac{R^2 + R_0^2}{2} = m \frac{R^2 + R_0^2}{2} . \quad (9.34)$$

За изчисляване на масови инерционни моменти спрямо успоредни оси се използва теоремата на *Huygens-Steiner*[3], която гласи: *Инерционният момент на звено спрямо произволна ос z_1 е равен на инерционния момент на звеното Jcz спрямо успоредна ос z минаваща през масовия му център плюс произведението от квадрата на разстоянието a между осите и масата m на звеното* т.е.

$$J_{z_1} = J_{cz} + a^2 m . \quad (9.34)$$

Геометрията на масите е раздел от механиката, в който се изучава само характера на разпределение на масите, независимо от движението. Освен осовите масови инерционни моменти се използват и центробежни инерционни моменти, дефинирани чрез изразите

$$J_{xy} = \int_{(m)} xydm , \quad J_{xz} = \int_{(m)} xzdm , \quad J_{yz} = \int_{(m)} yzdm . \quad (9.35)$$

Те може да са положителни, отрицателни или равни на нула. ***Главни инерционни оси*** се наричат тези оси, за които центробежните инерционни моменти са равни на нула. ***Главни централни инерционни оси*** се наричат главните оси, минаващи през масовия център на звеното. Понятието главни инерционни оси играе важна роля в динамиката на твърдото тяло.

---

[2] CAD система – (*от англ.* Computer Aided Design), система за автоматизирано проектиране.

[3] *Christian Huygens* (1629-1695) – холандски механик, физик и математик, *Jacob Steiner* (1796-1863) швейцарски математик.